ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ КОНКУРЕНТНОЙ ЗАДАЧИ О P-МЕДИАНЕ[1]

Е.В. Алексеева, Н.А. Кочетова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
e-mail: ekaterina2@math.nsc.ru, nkochet@math.nsc.ru

Аннотация. Рассматривается двухуровневая задача о p-медиане, в которой две конкурирующие фирмы, Лидер и Конкурент, последовательно размещают предприятия для обслуживания клиентов. Предлагается способ построения семейства верхних и нижних оценок на доход Лидера. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: двухуровневое программирование, дискретные задачи размещения, эвристические алгоритмы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим ситуацию, когда две фирмы последовательно принимают решения о размещении предприятий. Сначала на рынок выходит первая фирма (Лидер) и открывает свое множество предприятий S_0. Затем, зная это решение, конкурирующая фирма (Конкурент) открывает собственные предприятия, множество S_1. Каждый клиент из множества открытых предприятий $S_0 \cup S_1$ выбирает одно предприятие, согласно собственным предпочтениям. Обслуживание каждого клиента приносит доход. В зависимости от размещения предприятий рынок (множество клиентов) как-то делится между двумя фирмами. Каждая фирма стремится максимизировать свою долю рынка. Задача состоит в том,чтобы найти множество S_0, позволяющее максимизировать долю рынка (суммарный доход) Лидера.

Введем следующие обозначения:

$J = \{1, \ldots, n\}$ — множество клиентов;

$I = \{1, \ldots, m\}$ — множество потенциальных предприятий;

$p^0 \geq 1,$ — число предприятий, открываемых Лидером;

$p^1 \geq 1,$ — число предприятий, открываемых Конкурентом;

$r_j \geq 0,\ j \in J$ — доход от обслуживания j-го клиента;

$g_{ij} \geq 0,\ i \in I, j \in J$ — матрица предпочтений клиентов, если $g_{i_1 j} < g_{i_2 j}$, то j-й клиент из открытых предприятий i_1, i_2 выберет предприятие i_1.

Переменные задачи:

Лидер:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если Лидер в пункте } i \text{ открывает предприятие,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Конкурент:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если Конкурент в пункте } i \text{ открывает предприятие,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Клиенты:

$$u_j = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается из предприятия Лидера,} \\ 0, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается из предприятия Конкурента.} \end{cases}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ гранта 08-07-00037)

При заданном векторе $x_i \in \{0,1\}, i \in I$ определим множество

$$I_j(x) = \{i \in I |\, g_{ij} < \min_{l \in I}(g_{lj}|\, x_l = 1)\}, \quad j \in J.$$

Это множество задает пункты размещения предприятий, позволяющие Конкуренту *захватить* j-го клиента. С использованием введенных переменных соответствующая задача двухуровневого программирования записывается следующим образом: найти

$$\max_{x_i} \sum_{j \in J} r_j u_j^*(x_i)$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} x_i = p^0,$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i \in I,$$

где $u_j^*(x_i)$ — оптимальное решение задачи Конкурента:

$$\max_{y_i, u_j} \sum_{j \in J} r_j(1 - u_j)$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} y_i = p^1,$$

$$1 - u_j \leq \sum_{i \in I_j(x)} y_i, \quad j \in J,$$

$$y_i + x_i \leq 1, \quad i \in I,$$

$$y_i, u_j \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

Целевая функция задачи задает суммарный доход Лидера. Множество допустимых решений описывается с помощью задачи Конкурента. Вектор $x_i,\ i \in I$ и множества $I_j(x),\ j \in J$ в задаче Конкурента считаются известными. На сегодняшний день эффективные методы решения данной задачи неизвестны. Первые шаги в этом направлении сделаны в [5], где предлагается точная схема частичного перебора. В [4] исследуется частный случай задачи, когда Конкурент размещает только одно предприятие.

В задаче Конкурента предполагалось, что нельзя открывать предприятия в тех местах, где уже есть предприятия Лидера, т.е. $S_0 \cap S_1 = \emptyset$. От этого условия можно отказаться. Удаление ограничения $y_i + x_i \leq 1, i \in I$ из задачи Конкурента не меняет его оптимального решения. Конкуренту невыгодно открывать предприятия в том месте, где уже есть предприятие Лидера. Это не дает ему дополнительных клиентов. Однако ситуация может измениться, если положить $I_j(x) = \{i \in I | g_{ij} \leq \min_{l \in I}(g_{lj}|x_l = 1)\}, \quad j \in J$. В этом случае Лидер будет терять клиента даже в том случае, когда Конкурент открывает столь же предпочтительное предприятие, что и Лидер. Таким образом получаем модель с *любознательными* клиентами, которые при прочих равных условиях тянутся к новому предприятию. Обзор различных стратегий поведения клиентов в конкурентных моделях размещения можно найти в [3].

2. Верхние и нижние оценки оптимума

Покажем, как с помощью целочисленного линейного программирования (ЦЛП) можно получить семейство верхних и нижних оценок на оптимальное значение целевой функции Лидера. Общая идея построения таких оценок выглядит следующим образом. Добавим в систему ограничений задачи Конкурента дополнительное ограничение. Оптимум в задаче Конкурента от этого может только уменьшиться, а оптимум в задаче Лидера может только возрасти. Если введение дополнительного ограничения позволяет свести исходную задачу двухуровневого программирования к ЦЛП, то получаем нужную оценку. Проблема состоит в том, чтобы найти подходящее ограничение, обладающее требуемым свойством.

Предположим, что Конкурент при размещении предприятий действует по следующему правилу. Он упорядочивает возможные места размещения предприятий согласно некоторому критерию. Это упорядочение производится до решения задачи и доводится до сведения Лидера. Как только Лидер объявляет свое решение, Конкурент размещает свои предприятия согласно выбранному порядку в тех местах, которые не занял Лидер. Такая стратегия не гарантирует нахождения оптимального решения Конкурента и, следовательно, приводит к нижней оценке оптимума для Конкурента. Эта нижняя оценка зависит от выбранного упорядочения. Меняя упорядочение, получаем разные нижние оценки. Таким образом, получаем семейство из $m!$ нижних оценок для Конкурента или верхних оценок на оптимум Лидера.

Представим сведение к ЦЛП задачи с указанным ограничением на поведение Конкурента. Без ограничения общности будем считать, что возможные места размещения предприятий уже упорядочены в соответствии с предпочтениями Конкурента. Первое предприятие $i = 1$ является наиболее желательным для него, последнее предприятие $i = m$ — наименее желательным. Тогда при выбранных значениях x_i, $i \in I$ поведение Конкурента однозначно определяется следующей системой ограничений

$$x_i + y_i \le 1, \quad i \in I,$$
$$\sum_{i \in I} y_i = p^1,$$
$$x_i + y_i \ge y_k, \quad i, k \in I, k > i.$$

Последнее неравенство запрещает Конкуренту открывать предприятие в пункте k, если хотя бы одно из предприятий с меньшим номером не было открыто Лидером или Конкурентом. Введем дополнительные переменные:

$$z_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается из предприятия } k \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Переменные z_{jk} однозначно определяются по значениям x_i и y_i из следующей системы ограничений:

$$\sum_{k \in I} z_{jk} = 1, \quad j \in J,$$
$$z_{jk} \le x_k + y_k, \quad j \in J, k \in I,$$
$$z_{jk} + \sum_{l \in S_{kj}} z_{jl} \ge x_k + y_k, \quad k \in I, j \in J.$$

Первое равенство требует обслужить каждого клиента из предприятий Лидера или Конкурента. Второе ограничение разрешает обслуживание только из открытых предприятий. Последнее неравенство устанавливает приоритет в выборе предприятий при обслуживании клиентов. Согласно этому ограничению наиболее предпочтительное из открытых предприятий Лидера или Конкурента будет выбрано для обслуживания данного клиента. Кроме того, это ограничение доминирует первое ограничение в предыдущей системе, так как $z_{jk} + \sum_{l \in S_{kj}} z_{jl}$ всегда не больше единицы.

При заданных значениях z_{jk}, x_i, y_i переменные u_j однозначно определяются следующей системой ограничений:

$$u_j \ge z_{jk} - y_k, \quad j \in J, k \in I,$$
$$1 - u_j \ge z_{jk} - x_k, \quad j \in J, k \in I.$$

Первое неравенство требует включить клиента j в область обслуживания Лидера, если $z_{jk} = 1$ и $y_k = 0$. Если же $z_{jk} = 1$ и $y_k = 1$, то второе неравенство требует включить этого клиента в область обслуживания Конкурента.

Таким образом, выбрав значения x_i, $i \in I$, можно однозначно определить значения y_i, $i \in I$, z_{jk}, $j \in J, k \in I$ и u_j, $j \in J$. Оптимальные значения всех переменных определяются следующей задачей: найти

$$\max \sum_{j \in J} r_j u_j$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} x_i = p^0,$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p^1,$$

$$x_i + y_i \geq y_k, \quad i, k \in I, k > i,$$

$$\sum_{k \in I} z_{jk} = 1, \quad j \in J,$$

$$z_{jk} \leq x_k + y_k, \quad j \in J, k \in I,$$

$$z_{jk} + \sum_{l \in S_{kj}} z_{jl} \geq x_k + y_k, \quad k \in I, j \in J,$$

$$u_j \geq z_{jk} - y_k, \quad j \in J, k \in I,$$

$$1 - u_j \geq z_{jk} - x_k, \quad j \in J, k \in I,$$

$$x_i, y_i, z_{jk}, u_j \in \{0, 1\}, \quad k, i \in I, j \in J.$$

Пусть $(x_i^*, y_i^*, z_{jk}^*, u_j^*)$ — оптимальное решение сформулированной задачи. Оно дает верхнюю оценку на оптимум Лидера. Линейная релаксация данной задачи, полная или частичная, также дает верхнюю оценку. Для получения нижней оценки достаточно решить задачу Конкурента при заданных значениях x_i^*. Таким образом, получаем приближенное решение исходной задачи двухуровневого программирования с апостериорной оценкой точности.

3 . Численные эксперименты

Предложенный подход тестировался на примерах размерности $n = m = 100$. Матрица g_{ij} задавалась следующим образом. На квадрате со стороной 7000 случайным образом с равномерным распределением выбирались n точек. Величина g_{ij} полагалась равной евклидовому расстоянию между точками i, j. Другими словами, каждый клиент среди открытых предприятий выбирает ближайшее в евклидовой метрике. Величины r_j полагались равными 1.

В таблице 1 вторая и третья колонки показывают результаты расчетов для $p^0 = p^1 = p$, когда Лидер использует упорядочение множества $I = J$ по следующему правилу. Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\min \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} g_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J,$$

$$y_i \geq x_{ij}, \quad i \in I, j \in J,$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p,$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

Содержательный смысл этой задачи состоит в выборе p предприятий так, чтобы минимизировать суммарное расстояние от клиентов до предприятий. Поставим в соответствие первой группе ограничений вектор двойственных переменных $\lambda_j, j \in J$ и рассмотрим Лагранжеву релаксацию задачи по этим ограничениям:

$$LR(\lambda) = \min_x \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}(g_{ij} - \lambda_j)x_{ij} + \sum_{j\in J}\lambda_j$$

при ограничениях:

$$y_i \geq x_{ij}, \quad i \in I, j \in J,$$

$$\sum_{i\in I} y_i = p,$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

Решение двойственной задачи

$$\max_\lambda LR(\lambda)$$

позволяет найти выигрыш от открытия каждого предприятия

$$\Delta_i = \sum_{j\in J}\min\{0,\, g_{ij} - \lambda_j^*\}, \quad i \in I,$$

и упорядочить их по невозрастанию этой величины. Таким образом, получаем естественное упорядочение предприятий с точки зрения целесообразности их открытия для обслуживания клиентов. Это упорядочение использовалось для получения верхних и нижних оценок на доход Лидера.

Код примера	Верхняя оценка	Нижняя оценка	Стратегия $p = p^0$	Стратегия $p = p^0 + p^1$
111	74	38	41	31
211	70	36	41	36
311	73	39	46	41
411	72	42	41	39
511	70	40	48	40
611	67	32	42	39
711	73	44	49	37
811	74	36	42	37
911	68	40	49	35
1011	70	42	46	33

Таблица 1. Верхние и нижние оценки на доход Лидера

В таблице 1 каждая строка соответствует одному примеру. Первая колонка таблицы показывает код случайно сгенерированного примера. При $p = 10$ приводится значение верхней оценки оптимума (вторая колонка) и значение целевой функции исходной задачи на полученном приближенном решении (третья колонка). Для сравнения, в этой же таблице приводятся решения, получаемые Лидером по следующим двум стратегиям. Предположим, что Лидер не подозревает о существовании Конкурента. Он открывает свои предприятия, согласно оптимальному решению последней оптимизационной задаче. Он стремится минимизировать суммарные расстояния от клиентов до открываемых предприятий. После открытия предприятий Лидером на рынок выходит Конкурент. Он открывает свои предприятия, стремясь отобрать у Лидера максимальное число клиентов. Оставшееся число клиентов (доход Лидера) при такой стратегии приводятся в четвертой колонке таблицы. Легко заметить, что стратегия игнорирования Конкурента выигрывает в большинстве случаев у первой стратегии.

В заключение приведем результаты еще одной стратегии Лидера, которая представляется вполне естественной в свете последней вспомогательной задачи. Пусть (y_i^*, x_{ij}^*) — ее оптимальное решение при $p = p^0 + p^1$. Найдем для каждого открытого предприятия ($y_i^* = 1$) его доход $\sum\limits_{j \in J} r_j x_{ij}^*$. Так как Лидер делает ход первым, то отдадим ему p^0 наиболее доходных предприятий и сообщим это решение Конкуренту. Для этого решения Конкурент найдет оптимальное расположение своих предприятий. Получаем допустимое решение исходной задачи. В последней колонке таблицы представлены значения выигрыша Лидера при такой стратегии. Результаты расчетов свидетельствуют, что такая стратегия является неудачной. Лидер сознательно оставляет Конкуренту часть рынка для размещения его предприятий, однако Конкурент преследует другую цель. Он стремится оттеснить Лидера как можно сильнее и его оптимальное решение сильно отличается от (y_i^*).

Представленные результаты свидетельствуют о большом расхождении между верхними и нижними оценками. По-видимому и те и другие могут быть улучшены и повышение качества оценок представляет несомненный интерес.

Авторы выражают искреннюю благодарность А.В. Еремееву за предоставленную возможность проведения расчетов в алгебраической моделирующей системе GAMS.

Список литературы

[1] Кочетов Ю.А. Верхние оценки для одной двухуровневой задачи о p-медиане // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций». Материалы конф. 2007. С. 129.

[2] Кононов А.В., Кочетов Ю.А., Плясунов А.В. Конкурентные модели размещения производства (в печати).

[3] Drezner T., Eiselt H.A. Consumers in competitive location models // Z.Drezner, H.W.Hamaher (Eds.) Facility Location. Application and Theory. Springer, 2004. P. 151–178.

[4] Plastria F., Vanhaverbeke L. Discrete models for competitive location with foresight // Computers and Operations Research. – 2008. (to appear).

[5] Rodriguez C. M. C., Perez J. A. M. Multiple voting location problems // European J. Oper. Res. – 2008. (to appear).

UPPER AND LOWER BOUNDS FOR THE COMPETITIVE P-MEDIAN PROBLEM

E. Alekseeva, N. Kochetova

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk
e-mail: ekaterina2@math.nsc.ru, nkochet@math.nsc.ru

Abstract. We consider the bilevel p-median problem where two competitive firms, Leader and Follower, open facilities consecutively for delivering the clients. A family of upper and lower bounds for the Leader profit is suggested. Computational results are discussed.

Key words: bilevel programming, discrete location problem, heuristic algorithms.