

СИММЕТРИЧНЫЕ ГГС:	2
Автономная система.	2
Система уравнений с запаздываниями.	5
ГГС ОБЩЕГО ВИДА:	5
Автономная система. Задача Коши.	5
Стационарные решения автономной системы.	7
Система уравнений с запаздываниями.	7
УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИРКУЛЯНТА	8
АССОРТИ	8
СИНТЕЗ	8
Кодирование одним ГЭ: автономная система, уравнение с запаздыванием.	8
Кодирование двумя ГЭ: автономная система, уравнение с запаздыванием.	9
СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ	10
АРГУМЕНТАМИ. МОДЕЛИ ГГС КЛАССОВ 1-4	10
СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ	12
ГИПОТЕТИЧЕСКИЕ СЕТИ ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ	12

Симметричные ГГС:

Автономная система.

В этом разделе представлены симметричные ГГС, моделей $M_j(n,k)$, $1 < k \leq n$, $j = 1, 2, 3, 4$, с параметрами $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 1$, классов 1-4 в соответствии с характером регуляторных связей.

Система уравнений модели $M_1(n,k)$:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta z_i} - x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$z_1 = x_n^\gamma + x_{n-1}^\gamma + \dots + x_{n-k+3}^\gamma + x_{n-k+2}^\gamma$$

$$z_2 = x_1^\gamma + x_n^\gamma + \dots + x_{n-k+4}^\gamma + x_{n-k+3}^\gamma$$

.....

$$z_n = x_{n-1}^\gamma + x_{n-2}^\gamma + \dots + x_{n-k+2}^\gamma + x_{n-k+1}^\gamma \cdot$$

Система уравнений модели $M_2(n,k)$:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\alpha}{Z_i} - x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где:

$$Z_1 = (1 + \beta x_n^\gamma)(1 + \beta x_{n-1}^\gamma) \dots (1 + \beta x_{n-k+3}^\gamma)(1 + \beta x_{n-k+2}^\gamma)$$

$$Z_2 = (1 + \beta x_1^\gamma)(1 + \beta x_n^\gamma) \dots (1 + \beta x_{n-k+4}^\gamma)(1 + \beta x_{n-k+3}^\gamma)$$

.....

$$Z_n = (1 + \beta x_{n-1}^\gamma)(1 + \beta x_{n-2}^\gamma) \dots (1 + \beta x_{n-k+2}^\gamma)(1 + \beta x_{n-k+1}^\gamma) \cdot$$

Система уравнений модели $M_3(n,k)$:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta z_i} - x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где:

$$z_1 = x_n^\gamma x_{n-1}^\gamma \dots x_{n-k+3}^\gamma x_{n-k+2}^\gamma$$

$$z_2 = x_1^\gamma x_n^\gamma \dots x_{n-k+4}^\gamma x_{n-k+3}^\gamma$$

.....

$$z_n = x_{n-1}^\gamma x_{n-2}^\gamma \dots x_{n-k+2}^\gamma x_{n-k+1}^\gamma \cdot$$

Система уравнений модели **M₄(n,k)**.

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha R_i - x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$R_1 = \frac{1}{1 + \beta x_n^\gamma} + \frac{1}{1 + \beta x_{n-1}^\gamma} + \dots + \frac{1}{1 + \beta x_{n-k+3}^\gamma} + \frac{1}{1 + \beta x_{n-k+2}^\gamma}$$

$$R_2 = \frac{1}{1 + \beta x_1^\gamma} + \frac{1}{1 + \beta x_n^\gamma} + \dots + \frac{1}{1 + \beta x_{n-k+4}^\gamma} + \frac{1}{1 + \beta x_{n-k+3}^\gamma}$$

.....

$$R_n = \frac{1}{1 + \beta x_{n-1}^\gamma} + \frac{1}{1 + \beta x_{n-2}^\gamma} + \dots + \frac{1}{1 + \beta x_{n-k+2}^\gamma} + \frac{1}{1 + \beta x_{n-k+1}^\gamma}.$$

В качестве примера приведем формулировку одной из моделей симметричных ГГС.

ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ СИММЕТРИЧНОЙ ГТС
МОДЕЛЬ M(6,4)

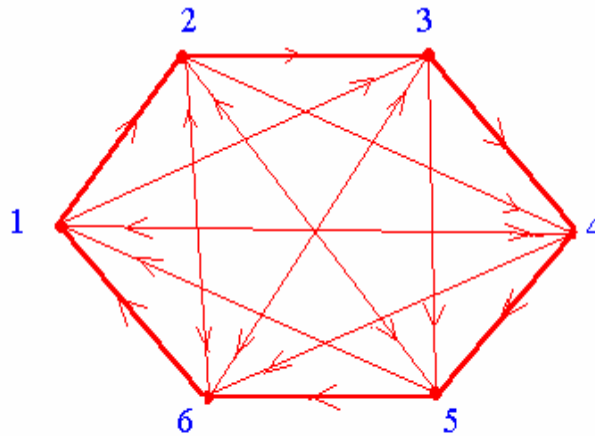


Рис.1.

Соответствующая рис.1 матрица связей имеет вид:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

В итоге система уравнений модели $M_1(6,4)$ с регуляторными связями класса 1, определяемыми матрицей связей S записывается следующим образом:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta(x_6' + x_5' + x_4')} - x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta(x_1' + x_6' + x_5')} - x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta(x_2' + x_1' + x_6')} - x_3$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta(x_3' + x_2' + x_1')} - x_4$$

$$\frac{dx_5}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta(x_4' + x_3' + x_2')} - x_5$$

$$\frac{dx_6}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta(x_5' + x_4' + x_3')} - x_6$$

Система уравнений с запаздываниями.

Система уравнений с запаздывающими аргументами ставится в соответствие рассматриваемой модели симметричной ГГС, описывающей автоколебания. При этом формулировка системы предполагает известным период автоколебаний.

Приведем для примера формулировку уравнения с запаздывающим аргументом в связи с моделью $M_1(n, 2)$, n – нечетное:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta x'(t - \tau)} - x, \quad \tau = \frac{n-1}{2n} T,$$

где T - период автоколебаний, найденных из решения следующей автономной системы:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta x_n'} - x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta x_2'} - x_2$$

.....

.....

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta x_{n-1}'} - x_n.$$

ГГС общего вида:

Автономная система. Задача Коши.

В этом разделе представлены несимметричные ГГС с регуляторными связями классов 1-4 с параметрами $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 1$. Формулировка проблемы иллюстрируется приведенным ниже примером.

ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ ГТС

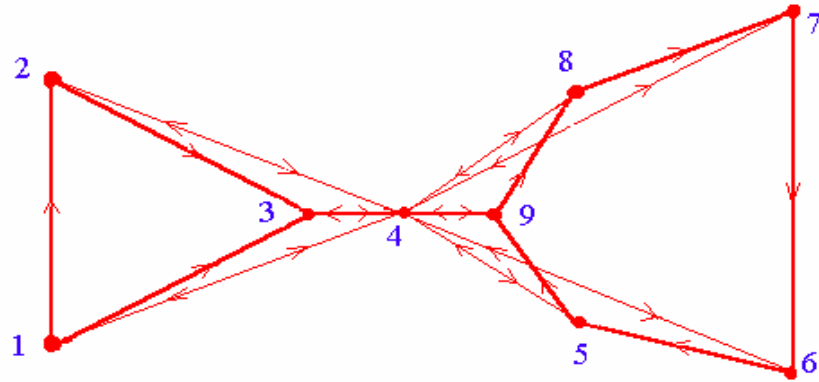


Рис.2.

Соответствующая рис.2 матрица связей имеет вид:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

В итоге приходим к следующей формулировке модели несимметричных ГТС с регуляторными связями класса 1:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta(x_3' + x_4')} - x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta(x_1' + x_4')} - x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta(x_2' + x_4')} - x_3$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta(x_1' + x_2' + x_3' + x_5' + x_6' + x_7' + x_8' + x_9')} - x_4$$

$$\frac{dx_5}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta(x_6' + x_4')} - x_5,$$

$$\frac{dx_6}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta(x_7' + x_4')} - x_6$$

$$\frac{dx_7}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta(x_8' + x_4')} - x_7,$$

$$\frac{dx_8}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta(x_9' + x_4')} - x_8$$

$$\frac{dx_9}{dt} = \frac{\alpha}{1 + \beta(x_5' + x_4')} - x_9$$

Стационарные решения автономной системы.

В этом разделе рассматривается проблема построения диаграммы стационарных решений, т.е. график зависимости стационарного решения от параметра модели, методом продолжения по параметру. Как известно, в общем случае одной из проблем применения этого метода является задание начального решения. В связи с этим для задания начального решения в моделях несимметричных ГГС предлагаются два варианта метода гомотопии.

О Стартовое решение.

- *MNN* - стартовым решением в методе гомотопии является стационарное решение модели $M(n,n)$
- *RND* - стартовым решением в методе гомотопии является произвольное задание компонент с использованием датчика случайных чисел.

О **Диаграммы и устойчивость** – построение диаграммы стационарных решений с определением их устойчивости по числовому критерию устойчивости Годунова-Булгакова.

Система уравнений с запаздываниями.

Система уравнений с запаздывающими аргументами соответствует рассматриваемой модели ГГС при описании автоколебаний.

Устойчивость циркулянта

Устойчивость полностью симметричного решения симметричных ГГС может быть определена по формулам для собственных чисел матрицы Якоби, которая в этом случае является циркулянтном.

Ассорти

Программа, проверяющая возможность существования решений с заданной частичной симметрией. т.е. разбиения компонент решения на группы в каждой из которых компоненты совпадают.

Синтез

Исследование математической модели процесса синтеза вещества без ветвления в зависимости от числа уравнений промежуточных стадий.

Кодирование одним ГЭ: автономная система, уравнение с запаздыванием.

В этом разделе рассматривается математическая модель обратимого многостадийного синтеза со стоками. Система уравнений модели имеет вид:

$$\begin{aligned}a &= \frac{n-1}{\tau_1}, \quad b = \frac{n-1}{\tau_2}, \quad S = a+b+\omega \\ \frac{dy_1}{dt} &= -(a+\omega)y_1 + b y_2 + \alpha f(y_n), \\ \frac{dy_i}{dt} &= a y_{i-1} - S y_i + b y_{i+1}, \quad i=1,2,\dots,n-2, \\ \frac{dy_{n-1}}{dt} &= a y_{n-2} - S y_{n-1} \\ \frac{dy_n}{dt} &= a y_{n-1} - \theta y_n\end{aligned}$$

Здесь y_n - концентрация продукта синтеза, τ_1, τ_2 - суммарные времена протекания стадий из 1-го в n-е состояние, $\omega > 0$ – параметр, характеризующий сток,

$$f(y_n) = \frac{1}{1 + \beta y_n^\gamma}$$

α, β, γ - другие положительные параметры.

Если $\tau_2 > \tau_1$, то с увеличением числа промежуточных стадий концентрация продукта синтеза $y_n(t)$ стремится к распределению $x(t)$, описываемому решением дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом:

$$y_n(t) \rightarrow x(t) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha f(x(t-\tau))e^{-\omega\theta} - \theta x, \quad \tau = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}.$$

Кодирование двумя ГЭ: автономная система, уравнение с запаздыванием.

Автономная система уравнений, представляющая математическую модель необратимого многостадийного синтеза в случае кодирования двумя генетическими элементами, имеет вид:

$$p_1 = \frac{n-1}{\tau_1}, \quad p_2 = \frac{m-1}{\tau_2},$$

$$\frac{dx_1}{dt} + p_1 x_1 = f_1(z),$$

$$\frac{dx_i}{dt} + p_1 x_i = p_1 x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\frac{dy_1}{dt} + p_2 y_1 = f_2(z),$$

$$\frac{dy_i}{dt} + p_2 y_i = p_2 y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

$$\frac{dz}{dt} + \theta z = p_1 x_{n-1} + p_2 y_{m-1}$$

Здесь z - концентрация продукта синтеза,

$$f_1(z) = \frac{\alpha_1}{1 + \beta_1 z^{\gamma_1}}, \quad f_2(z) = \frac{\alpha_2}{1 + \beta_2 z^{\gamma_2}}$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \tau_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \tau_2$ - параметры.

С увеличением числа промежуточных стадий концентрация продукта синтеза $z(t)$ стремится к распределению $u(t)$, описываемому решением дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом:

$$z(t) \rightarrow u(t) \text{ при } n, m \rightarrow \infty,$$

$$\frac{du}{dt} = f_1(u(t-\tau_1)) + f_2(u(t-\tau_2)) - \theta u.$$

Системы уравнений с запаздывающими

аргументами. Модели ГГС классов 1-4

Рассматриваемые системы из n уравнений с m запаздывающими аргументами содержат параметры α_i , γ_i , θ_i $i = 1, 2, \dots, n$, τ_j $j = 1, 2, \dots, m$,

и элементы $\beta_{i,j,k}$ ($m \times n \times n$) - матрицы БЭТА, участвующие в определении выражений регуляторных связей классов 1- 4. При этом в выражения входят только ненулевые элементы матрицы БЭТА.

Модель КЛАССА 1:

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad \frac{dx_k}{dt} = \frac{\alpha_k}{1 + R_k} - \theta_k x_k,$$

где

$$R_k = S_1 + S_2 + \dots + S_m,$$

$$S_1 = \left[\frac{x_1(t - \tau_1)}{\beta_{1,1,k}} \right]^{\gamma_1} + \left[\frac{x_2(t - \tau_1)}{\beta_{1,2,k}} \right]^{\gamma_2} + \dots + \left[\frac{x_n(t - \tau_1)}{\beta_{1,n,k}} \right]^{\gamma_n}$$

$$S_2 = \left[\frac{x_1(t - \tau_2)}{\beta_{2,1,k}} \right]^{\gamma_1} + \left[\frac{x_2(t - \tau_2)}{\beta_{2,2,k}} \right]^{\gamma_2} + \dots + \left[\frac{x_n(t - \tau_2)}{\beta_{2,n,k}} \right]^{\gamma_n}$$

$$S_m = \left[\frac{x_1(t - \tau_m)}{\beta_{m,1,k}} \right]^{\gamma_1} + \left[\frac{x_2(t - \tau_m)}{\beta_{m,2,k}} \right]^{\gamma_2} + \dots + \left[\frac{x_n(t - \tau_m)}{\beta_{m,n,k}} \right]^{\gamma_n}$$

Модель КЛАССА 2:

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad \frac{dx_k}{dt} = \frac{\alpha_k}{R_k} - \theta_k x_k,$$

где

$$R_k = (1 + S_1)(1 + S_2) \dots (1 + S_m),$$

$$S_1 = \left[\frac{x_1(t - \tau_1)}{\beta_{1,1,k}} \right]^{\gamma_1} + \left[\frac{x_2(t - \tau_1)}{\beta_{1,2,k}} \right]^{\gamma_2} + \dots + \left[\frac{x_n(t - \tau_1)}{\beta_{1,n,k}} \right]^{\gamma_n}$$

$$S_2 = \left[\frac{x_1(t-\tau_2)}{\beta_{2,1,k}} \right]^{\gamma_1} + \left[\frac{x_2(t-\tau_2)}{\beta_{2,2,k}} \right]^{\gamma_2} + \dots + \left[\frac{x_n(t-\tau_2)}{\beta_{2,n,k}} \right]^{\gamma_n}$$

$$S_m = \left[\frac{x_1(t-\tau_m)}{\beta_{m,1,k}} \right]^{\gamma_1} + \left[\frac{x_2(t-\tau_m)}{\beta_{m,2,k}} \right]^{\gamma_2} + \dots + \left[\frac{x_n(t-\tau_m)}{\beta_{m,n,k}} \right]^{\gamma_n}$$

Модель КЛАССА 3:

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad \frac{dx_k}{dt} = \frac{\alpha_k}{1 + R_k} - \theta_k x_k,$$

где

$$R_k = S_1 S_2 \dots S_m,$$

$$S_1 = \left[\frac{x_1(t-\tau_1)}{\beta_{1,1,k}} \right]^{\gamma_1} \left[\frac{x_2(t-\tau_1)}{\beta_{1,2,k}} \right]^{\gamma_2} \dots \left[\frac{x_n(t-\tau_1)}{\beta_{1,n,k}} \right]^{\gamma_n}$$

$$S_2 = \left[\frac{x_1(t-\tau_2)}{\beta_{2,1,k}} \right]^{\gamma_1} \left[\frac{x_2(t-\tau_2)}{\beta_{2,2,k}} \right]^{\gamma_2} \dots \left[\frac{x_n(t-\tau_2)}{\beta_{2,n,k}} \right]^{\gamma_n}$$

$$S_m = \left[\frac{x_1(t-\tau_m)}{\beta_{m,1,k}} \right]^{\gamma_1} \left[\frac{x_2(t-\tau_m)}{\beta_{m,2,k}} \right]^{\gamma_2} \dots \left[\frac{x_n(t-\tau_m)}{\beta_{m,n,k}} \right]^{\gamma_n}$$

Модель КЛАССА 4:

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad \frac{dx_k}{dt} = \alpha_k R_k - \theta_k x_k,$$

где

$$R_k = S_1 + S_2 + \dots + S_m,$$

$$S_1 = \frac{1}{1 + \left[\frac{x_1(t-\tau_1)}{\beta_{1,1,k}} \right]^{\gamma_1}} + \frac{1}{1 + \left[\frac{x_2(t-\tau_1)}{\beta_{1,2,k}} \right]^{\gamma_2}} + \dots + \frac{1}{1 + \left[\frac{x_n(t-\tau_1)}{\beta_{1,n,k}} \right]^{\gamma_n}}$$

$$S_2 = \frac{1}{1 + \left[\frac{x_1(t-\tau_2)}{\beta_{2,1,k}} \right]^{\gamma_1}} + \frac{1}{1 + \left[\frac{x_2(t-\tau_2)}{\beta_{2,2,k}} \right]^{\gamma_2}} + \dots + \frac{1}{1 + \left[\frac{x_n(t-\tau_2)}{\beta_{2,n,k}} \right]^{\gamma_n}}$$

$$S_m = \frac{1}{1 + [\frac{x_1(t - \tau_m)}{\beta_{m,1,k}}]^{\gamma_1}} + \frac{1}{1 + [\frac{x_2(t - \tau_m)}{\beta_{m,2,k}}]^{\tau_2}} + \dots + \frac{1}{1 + [\frac{x_n(t - \tau_m)}{\beta_{m,n,k}}]^{\gamma_n}}$$

Пример задания матрицы ВЕТА .

Для модели класса 1, n = 2, m = 6, представленной системой

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\alpha}{1 + R_1} - x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha}{1 + R_2} - x_2,$$

$$R_1 = x_1'(t - \tau_2) + x_2'(t - \tau_6),$$

$$R_2 = x_1'(t - \tau_1) + x_1'(t - \tau_2) + x_1'(t - \tau_3) + x_1'(t - \tau_4) + x_1'(t - \tau_5) + x_1'(t - \tau_6).$$

где $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, элементами матрицы являются

$$\text{ВЕТА} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ при } k = 1, \text{ и } \text{ВЕТА} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ при } k = 2.$$

Стационарные решения

В этом разделе рассматриваются стационарные решения модели M(n,n) по формулам, дающим точное решение в параметрическом виде.

Гипотетические сети экологической природы

В этом разделе представлены симметричные гипотетические генные сети (ГС) экологической природы, моделей $E_j(n,k)$, $1 < k \leq n$, $j = 1, 2, 3, 4$, с параметрами $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 1$, классов 1-4 в соответствии с характером регуляторных связей.

Система уравнений модели **$E_1(n,k)$** :

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(\frac{\alpha}{1 + \beta z_i} - x_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$z_1 = x_n^\gamma + x_{n-1}^\gamma + \dots + x_{n-k+3}^\gamma + x_{n-k+2}^\gamma$$

$$z_2 = x_1^\gamma + x_n^\gamma + \dots + x_{n-k+4}^\gamma + x_{n-k+3}^\gamma$$

.....

$$z_n = x_{n-1}^\gamma + x_{n-2}^\gamma + \dots + x_{n-k+2}^\gamma + x_{n-k+1}^\gamma \cdot$$

Система уравнений модели **$E_2(n,k)$** :

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(\frac{\alpha}{Z_i} - x_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$Z_1 = (1 + \beta x_n^\gamma)(1 + \beta x_{n-1}^\gamma) \dots (1 + \beta x_{n-k+3}^\gamma)(1 + \beta x_{n-k+2}^\gamma)$$

$$Z_2 = (1 + \beta x_1^\gamma)(1 + \beta x_n^\gamma) \dots (1 + \beta x_{n-k+4}^\gamma)(1 + \beta x_{n-k+3}^\gamma)$$

.....

$$Z_n = (1 + \beta x_{n-1}^\gamma)(1 + \beta x_{n-2}^\gamma) \dots (1 + \beta x_{n-k+2}^\gamma)(1 + \beta x_{n-k+1}^\gamma) \cdot$$

Система уравнений модели **$E_3(n,k)$** :

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(\frac{\alpha}{1 + \beta z_i} - x_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$z_1 = x_n^\gamma x_{n-1}^\gamma \dots x_{n-k+3}^\gamma x_{n-k+2}^\gamma$$

$$z_2 = x_1^\gamma x_n^\gamma \dots x_{n-k+4}^\gamma x_{n-k+3}^\gamma$$

.....

$$z_n = x_{n-1}^\gamma x_{n-2}^\gamma \dots x_{n-k+2}^\gamma x_{n-k+1}^\gamma \cdot$$

Система уравнений модели **E₄(n,k):**

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i (\alpha R_i - x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$R_1 = \frac{1}{1 + \beta x_n^\gamma} + \frac{1}{1 + \beta x_{n-1}^\gamma} + \dots + \frac{1}{1 + \beta x_{n-k+3}^\gamma} + \frac{1}{1 + \beta x_{n-k+2}^\gamma}$$

$$R_2 = \frac{1}{1 + \beta x_1^\gamma} + \frac{1}{1 + \beta x_n^\gamma} + \dots + \frac{1}{1 + \beta x_{n-k+4}^\gamma} + \frac{1}{1 + \beta x_{n-k+3}^\gamma}$$

.....

$$R_n = \frac{1}{1 + \beta x_{n-1}^\gamma} + \frac{1}{1 + \beta x_{n-2}^\gamma} + \dots + \frac{1}{1 + \beta x_{n-k+2}^\gamma} + \frac{1}{1 + \beta x_{n-k+1}^\gamma}.$$