

К 80-летию со дня рождения



НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ГЛЕБОВ

его работы
по теории
и методам
дискретной
оптимизации
и о нем
как об ученом
и человеке

НОВОСИБИРСК
2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет
Кафедра теоретической кибернетики

НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ГЛЕБОВ:

**его работы по теории и методам
дискретной оптимизации,
и о нем, как об ученом и человеке**

к 80-летию со дня рождения

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
Э. Х. ГИМАДИ и А. Н. ГЛЕБОВА

Новосибирск
2015

УДК 519.7 + 519.8: 93/94
ББК В 183

Г 531 НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ГЛЕБОВ: его работы по теории и методам дискретной оптимизации, и о нем, как об ученом и человеке — к 80-летию со дня рождения / под общ. ред. Э. Х. Гимади и А. Н. Глебова. Новоси́б. гос. ун-т. — Новоси́бирск: РИЦ НГУ, 2015. — 263 с.

ISBN 978-5-4437-0471-5

Книга, посвященная 80-летию со дня рождения известного российского математика, специалиста в области дискретной оптимизации Н. И. Глебова, включает в себя избранные научные труды Николая Ивановича и воспоминания о нем, оставленные его коллегами, друзьями, родственниками и учениками. Материал книги может быть использован в качестве учебного пособия аспирантами и студентами старших курсов ММФ НГУ, специализирующимися по направлению “математическая кибернетика”. Книга создана при поддержке гранта РФФИ 150100976.

УДК 519.7 + 519.8: 93/94
ББК В 183

ISBN 978-5-4437-0471-5

© Новосибирский государственный
университет, 2015

Содержание

Николай Иванович Глебов (28.04.1935 — 04.11.2008)	5
От составителей	6
Вехи жизни	14
Эффективные методы оптимизации в задачах стандартизации, теории расписаний и сетевых моделях	16
Введение	16
1. Задачи стандартизации [1–7]	20
2. Метод покоординатного спуска и обобщения задачи о потоке в сети [13–21]	31
3. Задачи теории расписаний [8–12]	48
Заключение	58
Список публикаций	60
Избранные статьи Н. И. Глебова 1990-х — 2000-х годов	63
<i>Глебов Н. И., Косточка А. В.</i> Сложность вычисления некоторых функций от графов	63
<i>Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Сердюков А. И.</i> Алгоритм для приближенного решения задачи коммивояжера и его вероятностный анализ	73
<i>Глебов Н. И., Косточка А. В.</i> О наименьших независимых доминирующих множествах в графах	83
<i>Шукин А. Г., Глебов Н. И.</i> О сложности некоторых обобщений двухстаночной задачи Джонсона	98
<i>Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Залюбовский В. В.</i> О некоторых задачах погашения взаимных долгов предприятий	109
<i>Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Залюбовский В. В.</i> О задачах целесообразного товарообмена	119
<i>Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Сердюков А. И.</i> Об одной задаче выбора циклического маршрута и загрузки транспортного средства	128
<i>Глебов Н. И., Шенмайер В. В.</i> О применимости алгоритма покоординатного подъема к задачам целочисленного программирования	135

<i>Глебов Н. И.</i> К описанию одного класса задач, разрешимых алгоритмом покоординатного подъема	145
<i>Глебов Н. И.</i> Об условиях разрешимости оптимизационных задач жадным алгоритмом	156
<i>Глебов Н. И.</i> Об одном обобщении минимаксной задачи о назначениях	166
<i>Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Пяткин А. В.</i> Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом	174
Воспоминания о Н. И. Глебове	185
<i>Гимади Э. Х.</i> О моем старшем наставнике и товарище Николае Ивановиче Глебове	186
<i>Ильинский Н. Б.</i> Воспоминания о самом близком друге	196
<i>Жегалов В. И.</i> Слово о друге	201
<i>Фелькер Е. Б.</i> Мой одноклассник Коля Глебов	206
<i>Ильев В. П.</i> Мой Учитель Николай Иванович Глебов	207
<i>Шенмайер В. В.</i> О моем научном руководителе Николае Ивановиче, строгом, но справедливом	213
<i>Бородин О. В.</i> Суровое, но поучительное решение Николая Ивановича	217
<i>Косточка А. В.</i> Его работы отличались нетривиальностью и изяществом	220
<i>Севастьянов С. В.</i> Он руководил мягко, ненавязчиво и интеллигентно	222
<i>Ерзин А. И.</i> Стараюсь продолжать традиции Николая Ивановича	227
<i>Брыскин В. В.</i> По следам Кармаркара (из книги “И ещё треть века”)	228
<i>Августинovich С. В.</i> Без названия	230
<i>Заблоцкая О. А.</i> Мы удивлялись широкой эрудиции Николая Ивановича	231
<i>Глебов А. Н.</i> О папе	232
<i>Глебова Е. Н.</i> Папа, спасибо тебе за всё	248
<i>Пеньков О. И.</i> Мой Дедушка	253
Список трудов Н. И. Глебова	255



Николай Иванович Глебов
(28.04.1935 — 04.11.2008)

От составителей

У этой книги две цели. Первая из них состоит в том, чтобы как можно полнее рассказать о научной деятельности и творческих достижениях Николая Ивановича Глебова — одного из наиболее известных и уважаемых специалистов в области комбинаторной оптимизации и дискретных экстремальных задач. Главной чертой, которая всегда отличала Н. И. Глебова в его научной работе, была нацеленность на получение максимально общих математических результатов, носящих фундаментальный характер. Во всей полноте это проявилось в работах Николая Ивановича по полиматроидам и условиям применимости жадных алгоритмов, где ему удалось выйти на высочайший уровень исследований, сравнимый с уровнем аналогичных работ Дж. Эдмондса и других крупных западных математиков. При этом в ряде аспектов результаты Н. И. Глебова носят более общий характер, чем у зарубежных специалистов. Так, определенное им понятие *базисной системы* включает в себя в виде частных случаев сразу несколько важнейших определений других авторов. Некоторые предложенные Н. И. Глебовым научные идеи и методы оказались настолько плодотворными, что приобрели широкую известность и стали называться его именем. К их числу можно отнести ставшее уже классическим *свойство Глебова*, схематически изображенное на обложке его учебного пособия (с. 189), а также серию достаточных условий сводимости Глебова в задаче Джонсона из теории расписаний. В нашей книге представлено 13 научных работ Н. И. Глебова, включая подготовленный им в 1991 г. обширный доклад, который публикуется впервые.

Однако у этой книги есть и другая цель. Нам очень хочется рассказать о Николае Ивановиче как о замечательном человеке, прекрасном ученом, добросовестном руководителе, преданном друге. Все эти человеческие качества Николая Ивановича всегда вызывали глубокое уважение и искреннюю любовь его коллег и учеников. Воспоминания некоторых из них, работавших в разные годы бок о бок с Николаем Ивановичем, под его руководством, в Институте математики СО АН СССР (позднее ИМ СО РАН), в Новосибирском государственном университете, а также ставших его друзьями в годы учебы в Казанском университете, приведены в этой книге.

В начале книги представлен доклад Н. И. Глебова “Эффективные методы оптимизации в задачах стандартизации, теории расписаний и сетевых моделях”, подготовленный им в начале 1990-х годов на основе его важнейших работ 1960-х – 1980-х годов. Этот доклад подводит итог огромной научно-исследовательской работе, проделанной Николаем Ивановичем в тот период, и сводит воедино результаты, полученные им в области дискретных экстремальных задач, условий применимости жадных алгоритмов и алгоритмов покоординатного спуска, задач о потоках в сетях и их обобще-

ний, задач стандартизации, теории расписаний и других важнейших разделов дискретной математики. Доклад был задуман Николаем Ивановичем как форма защиты докторской диссертации, однако его замыслу не суждено было воплотиться в жизнь. Поэтому данная ключевая научная работа Н. И. Глебова публикуется здесь впервые. Тем самым мы отдаем дань памяти и уважения этому замечательному человеку и талантливому ученому.

Вторая часть книги представляет собой подборку наиболее значимых статей Н. И. Глебова, опубликованных им с 1990-х годов и до конца жизни. Эти публикации Николая Ивановича удачно дополняют материал, представленный им в докладе, и в то же время дают представление о таких областях его научных интересов, которые оказались там не освещены. Например, большой интерес представляют полученные совместно с А. В. Косточкой результаты по теории графов, а также опубликованная в конце 1990-х годов серия статей о методах погашения взаимных долгов предприятий.

В третьей части книги собраны воспоминания о Н. И. Глебове, оставленные его родственниками, друзьями, коллегами, учениками: всеми, кто работал с Николаем Ивановичем и под его руководством в течение долгих лет его научной и преподавательской жизни. Мы сердечно благодарим всех авторов заметок о Николае Ивановиче: его друзей по Казанскому университету Н. Б. Ильинского, В. И. Жегалова, Е. Б. Фелькер, учеников В. П. Ильева, С. В. Севастьянова, В. В. Шенмайера, О. А. Заблоцкую, коллег по Институту математики СО РАН и Новосибирскому университету О. В. Бородина, А. В. Косточку, А. И. Ерзина, В. В. Брыскина, С. В. Августиновича, дочь Николая Ивановича Е. Н. Глебову и его внука О. И. Пенькова.

С прискорбием говорим о том, что один из авторов этих заметок, лучший друг Николая Ивановича по Казанскому университету, заслуженный профессор КГУ, заслуженный деятель науки ТАССР и РФ Николай Борисович Ильинский скончался на 84-м году жизни в начале августа 2015 года. Мы выражаем свои глубокие соболезнования родным и близким покойного, его друзьям и коллегам. Мы искренне верим в то, что эта книга поможет сохранить добрую память не только о Николае Ивановиче Глебове, но и о его старинном друге и замечательном ученом Николае Борисовиче Ильинском.

Мы благодарим В. В. Брыскина, А. М. Шишова, Р. М. Ларина, Ю. А. Кочетова, Ю. В. Мерекина, Е. Н. Гончарова, Г. В. Шевченко, В. В. Серваха, А. А. Колоколова, А. В. Кельманова и всех, кто предоставил свои фотографии и другие материалы о Николае Ивановиче для создания этой книги.

Начать мы хотим с краткого описания жизненного пути Н. И. Глебова. Уверены, что никто не сможет написать об этом лучше, чем сам Николай Иванович. Поэтому ниже мы приводим автобиографию Н. И. Глебова, собственноручно написанную им для анкеты в 1976 году.

АВТОБИОГРАФИЯ

Требов Николай Иванович

фамилия, имя и отчество

Составляется в произвольной форме собственноручно, без помарок и исправлений, с обязательным освещением следующих вопросов:

1. Год и место рождения, в какой семье родился, чем занимались родители до революции и чем занимаются в настоящее время.

2. Когда, в каких учебных заведениях учился, какое образование получил и специальность.

3. С какого времени начал работать самостоятельно, причины перехода с одной работы на другую.

4. Служил ли в Советской Армии, участвовал ли в боях гражданской или Отечественной войны (где, когда и в качестве кого).

5. Партийность и партстаж.

6. Какую выполнял партийную или общественную работу (где, когда и в качестве кого).

7. Состав семьи и краткие сведения о ближайших родственниках (братья, сестры, муж-жена, отец и мать мужа-жены).

8. Кто из родственников лишился избирательных прав, подвергался репрессиям, был под судом и следствием (за что, когда и где).

9. Другие сведения, которые Вы считаете необходимым осветить в автобиографии.

Родился я в 1935 году в
д. И. Закаевна Саранском р-на
Мордовской АССР. Родители
мои - Третьков Иван Семенович
и Третькова Федора Осиповна -
колхозники. Отец погиб во
время Великой Отечественной вой-
ны 1941-45 гг., а мать в на-
стоящее время находится на
пенсии и проживает в д. И.-
Закаевна.

С ней же проживает мой старший брат,
Третьков Михаил Иванович, 1931 года рождения. Других
братьев и сестер у меня не было.

В 1942 году я поступил в Закаевскую на-
вальную школу, по окончании которой учился в
Березинской семилетней школе, а затем в Саран-
ской средней школе №4. После окончания средней
школы в 1952 году я поступил на физико-мате-
матический факультет Чувашского государственного университета, по
окончании которого в 1957 году был оставлен в
аспирантуре КГУ по специальности гидроагрономия.
На второй год обучения в аспирантуре я решил
заниматься математическими вопросами гидротехники,
для чего был на один год прикомандирован к

аспирантуре Московского университета.

После окончания аспирантуры я был оставлен при Казахском университете и работал с октября 1960 года по январь 1964 года в ИИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботерева в должности старшего научного сотрудника. В 1963 году защитил кандидатскую диссертацию по специальности теоретическая кибернетика. В январе 1964 года был переведен на работу в Институт математики СО АН СССР, где и работаю по настоящее время в должности старшего научного сотрудника, начиная с февраля 1974 года обладая должностью заведующего лабораторией.

В рядах Советской Армии я не служил, в боях не участвовал. Членом КПСС не состою. По общественной линии участвовал в проведении Сибирских физико-математических олимпиад в качестве члена Оргкомитета (1965г), был заместителем председателя местного комитета Института математики (1970г), в данный момент второй год подряд - член местного комитета Института.

В настоящее время женат на Вилковской Людмиле Аркадьевне, работающей преподавателем английского языка в средней школе №130 г. Новосибирска. Имею двухдетского возраста дочь и трехлетнего сына. Отец жены - Вилковский

Аркадий Дмитриевич — был геологом, умер в 1985
году. Его мать — Постникова Наталья Павловна —
пекашница, в настоящее время живет с млад-
шей дочерью в г. Ставрополе.

Никто из моих ближайших родственников не
имелся избранных прав, не подвергался ре-
прессиям и не был под судом и следствием.

14 сентября 1976 г.

Глебов

К этому необходимо добавить, что, возглавив в 1974 г. лабораторию Дискретных экстремальных задач Института математики СО АН СССР, Николай Иванович беспрерывно руководил ею до конца своей жизни. Помимо этого, начиная с 1964 г., он постоянно преподавал в Новосибирском государственном университете и в ФМШ при НГУ, являясь с 1965 г. доцентом, а с 1998 г. — профессором НГУ.

Н. И. Глебов разработал и в течение многих лет читал для студентов факультета естественных наук пятисеместровый курс лекций “Дискретная математика”, для студентов физического факультета и слушателей ФПК — обязательный курс “Методы оптимизации и оптимального управления”, для студентов механико-математического факультета — лекции по курсам “Теория игр”, “Дискретные экстремальные задачи”, “Методы оптимизации”. Николай Иванович (вместе с Э. Х. Гимади) являлся бессменным руководителем специального семинара “Дискретные экстремальные задачи”. Под его руководством успешно подготовили и защитили свои кандидатские диссертации такие ныне хорошо известные специалисты в области комбинаторной оптимизации, как А. И. Сердюков, С. В. Севастьянов, В. П. Ильев, В. В. Шенмайер, О. А. ЗаблOCKая. Их воспоминания о Николае Ивановиче приведены в завершающей части этой книги. Два ученика Н. И. Глебова (Севастьянов и Ильев) впоследствии стали докторами наук.



Обложка учебного пособия “Методы оптимизации”, НГУ, 2000 г.

Н. И. Глебов стал автором учебных пособий НГУ “Экстремальные задачи принятия решений”¹, “Дискретные экстремальные задачи принятия решений”², “Математические модели и методы принятия решений”³ (все совместно с Э. Х. Гимади), “Методы оптимизации”⁴ (совместно с Ю. А. Кочетовым и А. В. Плясуновым), которые и сейчас служат основой при разработке новых курсов лекций преподавателями кафедры теоретической кибернетики ММФ НГУ.

В разные периоды своей жизни Николай Иванович активно участвовал в общественной жизни Казанского государственного университета, Института математики и механики им. Н. Г. Чеботарева, Института математики СО АН СССР (СО РАН), Новосибирского государственного университета. Он являлся ученым секретарем оргкомитета по проведению Сибирских физико-математических олимпиад школьников, членом и заместите-

¹Гимади Э. Х., Глебов Н. И. Экстремальные задачи принятия решений: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 1982. 80 с.

²Гимади Э. Х., Глебов Н. И. Дискретные экстремальные задачи принятия решений: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 1991. 76 с.

³Гимади Э. Х., Глебов Н. И. Математические модели и методы принятия решений: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2008. 163 с.

⁴Глебов Н. И., Кочетов Ю. А., Плясунов А. В. Методы оптимизации: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2000. 105 с.



Грамота за организацию и проведение
Областной математической олимпиады 1972 г.

лем председателя профкома Института математики СО АН СССР, членом Ученого совета Института математики, членом диссертационного совета по защитах кандидатских диссертаций, заместителем главного редактора журнала “Дискретный анализ и исследование операций”.

Н. И. Глебов — автор более 80 научных и учебно-методических работ, список которых (за исключением технических отчетов) приведен в конце книги⁵.

За многолетний добросовестный труд Николай Иванович был награждён медалями “За доблестный труд в ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина” (1970) и “Ветеран труда” (1986), почетными грамотами в связи с 25-летием СО АН СССР (1982) и в связи с 275-летием РАН (1999).

⁵Необходимо учитывать, что в докладе Николая Ивановича (с. 16–62) и его статьях (с. 63–184) имеются свои списки публикаций, которые приведены в книге в том же виде, что и в работах-первоисточниках. Все ссылки на литературные источники в докладе и статьях также сохранены в неизменном виде и соответствуют их внутренним библиографическим спискам (прим. составителей).



Вехи жизни

28.04.1935	Родился в семье крестьян. Отец: Иван Семёнович Мать: Феодосья Осиповна	д. Новая Чекаевка Саранского района Мордовской АССР
1952 г.	Окончил с золотой медалью саранскую среднюю школу № 4	г. Саранск
1952 г.	Поступил в Казанский государственный университет (КГУ), на физико-математический факультет, отделение механики	г. Казань
июль 1957 г.	Окончил КГУ, диплом с отличием по специальности “Механика”	г. Казань
01.10.1957	Поступил в аспирантуру КГУ по специальности “гидроаэромеханика” к М. Т. Нужину	г. Казань
1958 г.	Сменил тему исследований на “математические вопросы кибернетики”; прикомандирован к аспирантуре МГУ под рук. А. А. Ляпунова	г. Москва
01.10.1960	Окончил аспирантуру КГУ/МГУ	Казань – Москва
01.10.1960 – 06.01.1964	Старший научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарёва при КГУ	г. Казань
15.09.1962 – 01.08.1963	Находился в научной командировке в Институте математики СО АН СССР	г. Новосибирск
май 1963 г.	Защитил кандидатскую диссертацию “О некоторых алгебраических вопросах, связанных с программированием”	г. Новосибирск
15.06.1963	Женился на Внуковской Людмиле Аркадьевне	г. Новосибирск

25.01.1964	Принят младшим научным сотрудником в Институт математики СО АН СССР	г. Новосибирск
1964 г.	Принят преподавателем с почасовой оплатой в Новосибирский государственный университет	г. Новосибирск
27.04.1964	Родилась дочь Елена (Алёна)	г. Новосибирск
01.09.1965	Избран на должность доцента НГУ по кафедре математического анализа	г. Новосибирск
23.12.1967	Присвоено учёное звание доцента по кафедре математического анализа	г. Новосибирск
01.04.1968	Утверждён в должности старшего научного сотрудника Института математики СО АН СССР	г. Новосибирск
04.10.1973	Присвоено учёное звание старшего научного сотрудника по специальности “математическая логика”	г. Новосибирск
13.10.1973	Родился сын Алексей	г. Новосибирск
февраль 1974 г.	Назначен исполняющим обязанности заведующего лабораторией Дискретных экстремальных задач Института математики СО АН СССР	г. Новосибирск
01.06.1977	Утверждён в должности заведующего лабораторией Дискретных экстремальных задач	г. Новосибирск
01.07.1998	Избран на должность профессора кафедры теоретической кибернетики ММФ НГУ	г. Новосибирск

Эффективные методы оптимизации в задачах стандартизации, теории расписаний и сетевых моделях⁶

Введение

Задачи дискретной оптимизации, возникающие при математическом моделировании в области исследования операций, весьма актуальны в связи с широким внедрением в практику и дальнейшим совершенствованием различного рода систем автоматизированного проектирования и управления. Этим же обусловлено их интенсивное исследование (как у нас в стране, так и за рубежом) с целью построения эффективных методов решения. Данная работа относится к этому направлению и содержит результаты автора, полученные им (лично или в соавторстве) в ходе многолетних исследований по указанной проблематике.

Несмотря на широкомасштабные и продолжительные исследования, для подавляющего большинства практически важных дискретных экстремальных задач не удается построить эффективные (полиномиальной трудоемкости) точные алгоритмы. Безуспешность многочисленных попыток построения полиномиальных алгоритмов для таких “неподдающихся” задач получила после возникновения в начале 70-х годов и дальнейшего развития теории сложности, основанной на понятии полиномиальной сводимости, некоторое теоретическое обоснование благодаря выявлению так называемых NP -полных (NP -трудных), или универсальных, задач. Примечательной особенностью NP -полных задач является их полиномиальная трансформируемость друг в друга, что делает эти задачи эквивалентными в смысле полиномиальной разрешимости. Список ставших уже известными таких универсальных задач весьма обширен (насчитывает несколько сотен) и продолжает пополняться.

В настоящее время широко распространенной является гипотеза о том, что для NP -полных — а, следовательно, и для NP -трудных задач дискретной оптимизации, — полиномиальных алгоритмов решения не существует. В связи с этим особую актуальность приобретает, с одной стороны, изучение более узких классов задач, учет специфики которых позволяет разрабаты-

⁶ Доклад, подготовленный Н. И. Глебовым в 1991 г. на основе его важнейших работ 1960-х – 1980-х годов. Текст доклада приводится в редакции, максимально близкой к оригинальной, с сохранением авторских подстрочных комментариев, способа оформления библиографических ссылок и т. п. Нами лишь исправлены некоторые опечатки и для удобства читателя внесены незначительные изменения в обозначения для математических объектов (*прим. составителей*).

вать для них эффективные точные алгоритмы и, с другой стороны, — более детальное исследование малотрудоемких приближенных алгоритмов.

В плане использования приближенных алгоритмов для решения задач дискретной оптимизации автором совместно с Э. Х. Гимади и В. А. Перепелицей [22, 23] был предложен статистический подход, который позволяет производить сравнение различных приближенных алгоритмов на основе априорных оценок погрешностей получаемых этими алгоритмами решений относительно тех или иных вероятностных распределений на множестве входных данных задачи.

Остальные представленные здесь работы относятся к первому направлению и посвящены выявлению специфических свойств, наличие которых позволяет строить более эффективные алгоритмы для решения рассматриваемых задач. (В определенном смысле исключением является работа [26], выполненная совместно с А. В. Косточкой, в которой речь идет о свойствах, влекущих вхождение задачи в класс NP -трудных и делающих маловероятным построение полиномиальных алгоритмов⁷.) Составляя единое целое по методам исследования, по характеру рассматриваемых задач они могут быть разделены на три группы. В первую группу входят работы, посвященные различным постановкам задач стандартизации (выбора типажа оборудования), во вторую — работы по исследованию применимости метода покоординатного спуска (пошаговой локальной оптимизации) и обобщению задачи о потоке в сети, в третью — работы, относящиеся к задачам теории расписаний.

Имея дело с труднорешаемыми задачами, в силу отмеченных выше обстоятельств по необходимости приходится заниматься их “дроблением” и исследованием по отдельности различных частных случаев общей задачи с тем, чтобы рассчитывать на успешное завершение исследования построением эффективного алгоритма. Этим можно объяснить некоторое разнообразие рассматриваемых в работе задач. С другой стороны, где это возможно происходит и обратное движение от частного к общему, когда удается обнаружить некоторое структурное свойство задачи с заложенной в нем потенциальной возможностью его использования для построения малотрудоемкого (полиномиального или псевдополиномиального) алгоритма.

В работах первого раздела отправной точкой для исследований послужили обнаруженные В. Т. Дементьевым свойства верхних интегральных сумм Римана–Стилтьеса, а именно, выпуклость последовательности их минимальных значений и “эффект чередования” точек соответствующих оптимальных разбиений отрезка. Это было использовано им для построения эффективных алгоритмов решения однопараметрической задачи стандартиза-

⁷Эта статья приведена в книге на с. 63–72.

ции (определения оптимального одномерного параметрического ряда). Автору удалось установить свойство функций (близкое к субмодулярности), гарантирующее также “эффект чередования” и выпуклость последовательности минимальных значений сумм более общего вида, которые возникают, в частности, в задаче “о ближайшем соседе”. Это позволило в дальнейшем распространить сферу применения разработанных ранее алгоритмов и на более общие задачи стандартизации (выбора типажа оборудования).

Возникавшая в первом разделе задача пополнения одномерного параметрического ряда представляла собой задачу минимизации выпуклой сепарабельной функции на простейшего вида множестве, для решения которой был пригоден достаточно эффективный метод пошаговой локальной оптимизации (метод покоординатного спуска). В результате предпринятого исследования были полностью охарактеризованы те множества, на которых задача минимизации выпуклой сепарабельной функции разрешима указанным методом. (В работах канадского математика Дж. Эдмондса такие множества получили название полиматроидов). Выделен также класс множеств, для которых решение соответствующей задачи может быть получено тем же методом в случае выпуклых функций более общего вида.

Следующим шагом в развиваемом направлении было изучение задачи минимизации выпуклой сепарабельной функции на множествах с более сложным строением, чем полиматроиды, а именно, на пересечениях двух полиматроидов. В этом случае получен ряд результатов, характеризующих локальную структуру таких множеств и позволивших также обосновать некоторый метод пошаговой локальной оптимизации, в котором оптимизация на каждом шаге сводится к нахождению кратчайшего пути (или цикла) в некотором графе.

Дальнейшим обобщением предыдущей задачи явилась рассмотренная нами задача о целочисленном потоке минимальной стоимости в сети с выпуклыми функциями стоимости перевозок по дугам и ограничениями на дуговые потоки, задаваемыми с помощью введенных в рассмотрение голландским математиком Шрайвером “сцепленных векторных систем”. Последние тесно связаны с понятием полиматроида и позволяют произвести существенное обобщение задачи о потоке в сети, частным случаем которой оказывается задача о полиматроидном потоке, рассмотренная Лоулером и Мартелом.

Завершающим обобщением всех упомянутых выше задач второго раздела (и относящихся к ним результатов) явилась задача минимизации выпуклой сепарабельной функции на пересечении базисных систем (или эквивалентная ей задача о базисном потоке в сети). Для этой задачи наряду с обоснованием метода пошаговой локальной оптимизации получен также

некоторый аналог известной теоремы Форда и Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе.

В третьем разделе свойства кратчайших путей в графах используются для получения нетривиальных верхних и нижних оценок длин оптимальных расписаний в случае задачи Акерса–Фридмена. С другой стороны, использование минимаксных путей позволило автору выделить ряд случаев полиномиальной разрешимости многостаночной задачи Джонсона путем обоснования некоторых достаточных условий ее сводимости к задаче с двумя станками.

Подытоживая сказанное, следует отметить, что в представленной работе развитые автором методы исследования и полученные результаты базируются на свойствах кратчайших (минимаксных) путей в графах, на выпуклости фигурирующих в задачах функций и на принципе пошаговой локальной оптимизации. В целом данную работу можно рассматривать как вклад в теорию и методы дискретной оптимизации.

Перейдем теперь к более подробному изложению содержания работы по разделам.

1. Задачи стандартизации [1–7]

В процессе решения некоторых задач приходится отыскивать оптимальное значение функции $F(x_1, \dots, x_n)$, зависящей от переменного числа аргументов $x_1, \dots, x_n$. Оптимизация ведется при фиксированном n и всевозможных допустимых значениях $x_1, \dots, x_n$. Получаемое в результате оптимальное значение рассматриваемой величины является функцией от числа n . В общем случае решение таких задач требует больших переборов. В ряде задач оказалось, что последовательность $\{F_n\}$ оптимальных значений величины F является выпуклой, то есть, при любом $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$$2F_n \leq F_{n-1} + F_{n+1}.$$

Это обстоятельство удастся использовать для уменьшения переборов в процессе отыскания решения.

Так, например, В. Т. Дементьевым [1965]⁸ исследовалась задача минимизации суммы

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^n (h(x_{k+1}) - h(x_k))g(x_{k+1}) \quad (1)$$

при фиксированном n и всевозможном выборе точек $x_1, \dots, x_n$ на отрезке $[a, b]$, $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} = b$. Было установлено, что последовательность $\{F_n\}$ минимальных значений таких сумм является выпуклой, если функции $h(x)$ и $g(x)$ монотонно неубывающие. Выпуклость этой последовательности существенным образом используется при построении экономных алгоритмов для решения некоторых задач выбора оптимальных параметрических рядов.

Рассматривавшаяся Г. А. Янгом [1963]⁹ задача об оптимальном числе и размещении контрольных станций сводилась к минимизации величины

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(t)g(x_k - t) dt, \quad (2)$$

где $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} = b$, $h(t) \geq 0$, $g(t)$ — монотонно возрастающая функция, и в случае $h(t) = \text{const}$ им доказана выпуклость последовательности $\{F_n\}$ минимальных значений рассматриваемой величины. Это позволило Г. А. Янгу построить сравнительно простой алгоритм решения

⁸Дементьев В. Т. Об одной задаче оптимального размещения точек на отрезке. — В сб.: “Дискретный анализ”, вып. 4, Новосибирск, 1965, 23–27.

⁹Young H. A. On the optimum location of checking station. — Oper. Res., 11, N 5, 721–731.

задачи и провести некоторое качественное исследование решения в указанном случае.

К. Г. Доукером [1944]¹⁰ рассматривалась последовательность минимальных значений площадей n -угольников, описанных около данной выпуклой фигуры, и была доказана ее выпуклость. Аналогичный результат, касающийся минимальных значений периметров описанных n -угольников, был получен Й. Молнаром [1955]¹¹.

В связи со сказанным представляла интерес задача выявления ситуаций, в которых последовательность $\{F_n\}$ оптимальных значений величины F оказывается выпуклой. С этой целью и была выполнена рассматриваемая работа [1], основная теорема которой имеет весьма абстрактную формулировку. Однако следствия этой теоремы носят более конкретный характер и находят в дальнейшем применение при построении эффективных алгоритмов решения некоторых задач стандартизации.

Далее будем считать заданным множество L , в котором определено бинарное отношение $\succ$ и выделено два непустых подмножества E_0 и E_1 . Через L_n будет обозначаться совокупность всевозможных упорядоченных наборов $\bar{X} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ длины $n + 1$, таких, что $x_i \in L$, $i = 0, \dots, n$, $x_0 \succ x_1 \succ \dots \succ x_{n-1} \succ x_n$ и $x_0 \in E_0$, $x_n \in E_1$. При этом предполагается, что все L_n при $n \geq n_0$ непусты.

Пусть на L задана вещественная ограниченная снизу функция $f(x)$. Для произвольного набора $\bar{X} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ обозначим через $F_k(\bar{X})$, $k \leq n$, величину $\sum_{k=0}^n f(x_k)$. С помощью функции $f(x)$ построим числовую последовательность, n -ый член которой определяется формулой

$$F_n = \inf\{F_n(\bar{X}) \mid \bar{X} \in L_n\}, \quad n \geq n_0. \quad (3)$$

Для формулировки достаточных условий выпуклости последовательности (3) введем в рассмотрение две бинарные (коммутативные) операции Δ , ∇ и бинарное отношение $\rightarrow$, определенные на множестве L и удовлетворяющие следующим аксиомам:

- 1°. $E_0 \Delta L \subset E_0$, $E_0 \nabla E_0 \subset E_0$.
- 2°. $E_1 \nabla L \subset E_1$, $E_1 \Delta E_1 \subset E_1$.
- 3°. $(x \in E_0) \& (y \in E_0) \implies (x \Delta y \rightarrow x \nabla y)$.
- 4°. $(x \in E_1) \& [(x \rightarrow y) \vee (x \succ y)] \implies (y \in E_1) \& [(y \succ z) \implies (x \succ z)]$.

¹⁰Dowker C. H. On minimum circumscribed polygons. — Bull. Amer. Math. Soc. 50, 1944, 120–122.

¹¹Molnar J. On inscribed and circumscribed polygons of convex regions. — Math. Lapok, 6, 1955, 210–218.

$$5^\circ. (x \rightarrow y) \& (x \succ z) \& (y \not\rightarrow z) \implies (x \succ y \nabla z) \& (y \Delta z \rightarrow y \nabla z) \& \\ \& [(x' \succ y) \Rightarrow (x' \succ y \Delta z)].$$

$$6^\circ. (x \succ y) \implies \{(x \Delta x' \succ y) \& [(x' \succ y') \Rightarrow (x \nabla x' \succ y')]\} \vee \\ \vee \{(x \nabla x' \succ y) \& [(x' \succ y') \Rightarrow (x \Delta x' \succ y')]\}.$$

Здесь $\implies$ есть знак импликации, а $\not\rightarrow$ — отрицание отношения $\rightarrow$.

Теорема 1 [1]. Если существуют операции Δ , ∇ и отношение $\rightarrow$, для которых выполнены аксиомы $1^\circ - 6^\circ$, то для всякой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию

$$f(x) + f(y) \geq f(x \Delta y) + f(x \nabla y) \quad (4)$$

при всех $x, y \in L$, последовательность (3) будет выпуклой.

Рассмотрим теперь некоторые приложения теоремы 1.

1. Пусть на плоскости дана замкнутая область L , ограниченная отрезками прямых AC , BC и выпуклой кривой AdB , обращенной выпуклостью внутрь области L .

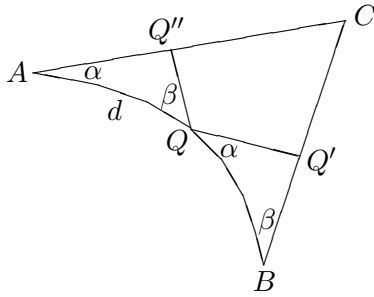


Рис. 1.

Предположим, что кривая AdB образует с прямыми AC и BC в точках A и B углы α и β , соответственно, $\alpha + \beta < \pi$. Область L может быть и неограниченной, если прямые AC и BC не пересекаются.

Условимся считать направление от A к B на кривой AdB положительным. Благодаря этому естественным образом определяется положительное направление на опорных прямых (касательных) этой кривой.

Покроем область L двумя семействами прямых (точнее, речь идет об отрезках прямых). Пусть Q — произвольная точка кривой AdB и l — опорная прямая этой кривой, проходящая через точку Q . Тогда прямую QQ' , образующую с положительным направлением прямой l угол α , отнесем к первому семейству, а прямую QQ'' , образующую с положительным направлением прямой l угол $\pi - \beta$, — ко второму семейству. При этом точку A будем рассматривать как “прямую” второго семейства, а точку B — как “прямую” первого семейства. Будем считать, что прямой QQ' первого семейства соответствует прямая QQ'' второго семейства, и наоборот.

Через каждую точку x области L , не лежащую на кривой AdB , проходит ровно по одной прямой каждого семейства. (Это утверждение перестает

быть верным лишь в том случае, когда $\alpha + \beta = 0$ и кривая AdB содержит прямолинейные участки. Путем незначительного усложнения рассуждений соответствующие результаты могут быть получены и для этого случая, но из нашего рассмотрения он исключается.) Обозначим через l'_x (l''_x) прямую первого (второго) семейства, проходящую через точку x , а через T'_x (T''_x) — единственную точку кривой AdB , принадлежащую прямой l'_x (l''_x).

Определим теперь на L отношение $\succ$ следующим образом. Будем считать, что точки x и y находятся в отношении $x \succ y$ тогда и только тогда, когда прямые l''_x и l'_y соответствуют друг другу, то есть $T''_x = T'_y$. В качестве множеств E_0 и E_1 возьмем прямые AC и BC соответственно.

В рассматриваемом случае существуют бинарные операции Δ , ∇ и отношение $\rightarrow$, удовлетворяющие аксиомам $1^\circ - 6^\circ$.

Точки x и y будем считать находящимися в отношении $x \rightarrow y$ тогда и только тогда, когда y принадлежит замкнутой области (возможно, вырожденной), ограниченной прямыми l'_x и l''_x , BC и прямой QQ' первого семейства, соответствующей l''_x .

Обозначим через S^1_x , S^2_x , S^3_x , S^4_x замкнутые области, ограниченные соответственно прямыми l'_x , l''_x и кривой AdB ; прямыми l'_x , l''_x , BC и кривой AdB ; прямыми l'_x , l''_x , AC , BC ; прямыми l'_x , l''_x , AC и кривой AdB . Операции Δ и ∇ определим следующим образом:

$$x \Delta y = \begin{cases} l'_x \cap l''_y, & \text{если } y \in S^1_x; \\ l'_x \cap l''_x = x, & \text{если } y \in S^2_x; \\ l'_y \cap l''_x, & \text{если } y \in S^3_x; \\ l'_y \cap l''_y = y, & \text{если } y \in S^4_x; \end{cases} \quad x \nabla y = \begin{cases} l'_y \cap l''_x, & \text{если } y \in S^1_x; \\ l'_y \cap l''_y = y, & \text{если } y \in S^2_x; \\ l'_x \cap l''_y, & \text{если } y \in S^3_x; \\ l'_x \cap l''_x = x, & \text{если } y \in S^4_x. \end{cases}$$

Определенные таким образом множества E_0 , E_1 , операции Δ , ∇ и отношения $\succ$, $\rightarrow$ удовлетворяют аксиомам $1^\circ - 6^\circ$, что позволяет воспользоваться в этом случае теоремой 1.

2. Определим на L функцию $f(x)$, положив ее в точке x равной площади фигуры, ограниченной прямыми l'_x , l''_x и кривой AdB . В этом случае величина $\sum_{k=0}^n f(x_k)$, где $E_0 \ni x_0 \succ x_1 \succ \dots \succ x_{n-1} \succ x_n \in E_1$, отличается от площади многоугольника $Ax_0T'_{x_1}x_1 \dots T'_{x_n}x_nB$ лишь постоянным слагаемым, а функция $f(x)$ удовлетворяет условию (4). По теореме 1 последовательность $\{F_n\}$ минимальных значений площадей рассматриваемых многоугольников будет выпуклой. При $\alpha = \beta = 0$ мы приходим к случаю описанных многоугольников, и полученный результат является аналогом упоминавшейся ранее теоремы К. Г. Доукера для выпуклой незамкнутой кривой.

3. Положим функцию $f(x)$ в точке x равной сумме длин отрезков xT'_x и xT''_x . Тогда величина F (см. выше п. 2) будет равна длине ломаной $Ax_0T'_{x_1}x_1$

$\dots x_{n-1}T'_{x_n}x_nB$, а функция $f(x)$ удовлетворяет условию (4). Значит, последовательность $\{F_n\}$ минимальных значений длин указанных ломаных является выпуклой. Как и выше, при $\alpha = \beta = 0$ приходим к случаю описанных ломаных, а полученный результат является аналогом теоремы Й. Молнара для выпуклой незамкнутой кривой.

4. Пусть теперь область L есть равнобедренный прямоугольный треугольник ABC , в котором AC и BC являются катетами и, следовательно, $\alpha = \beta = \pi/4$. Будем также считать, что на плоскости задана прямоугольная система координат uOv , в которой вершины треугольника записываются так: $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (0, 1)$.

В этом случае отношение $(u_1, v_1) \succ (u_2, v_2)$ равносильно равенству $v_1 = u_2$ и формула (3) принимает вид:

$$F_n = \inf \sum_{k=0}^n f(u_k, u_{k+1}), \quad (5)$$

где $0 = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} = 1$.

По теореме 1 последовательность $\{F_n\}$ будет выпуклой, если при любых u_1, v_1, u_2, v_2 , удовлетворяющих условию $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$, справедливо неравенство

$$f(u_1, v_1) + f(u_2, v_2) - f(u_1, v_2) - f(u_2, v_1) \leq 0. \quad (6)$$

Если функция $f(u, v)$ имеет вторую смешанную производную, то условие (6) равносильно неположительности этой производной, т. е. $f''_{uv} \leq 0$.

Случай, рассмотренный В. Т. Дементьевым, получается при

$$f(u, v) = [h(v) - h(u)]g(v).$$

Для этой функции условие (6) эквивалентно либо монотонному неубыванию, либо монотонному невозрастанию функций h и g . Если положить

$$f(u, v) = [h_1(v) - h(u)]g(v),$$

то условие (6) будет выполнено при тех же ограничениях на h и g и при произвольной h_1 .

Наконец, рассмотрим случай, когда

$$f(u, v) = \int_u^v G(u, v, t) dt.$$

Эта функция удовлетворяет условию (6), если $G(u, v, t)$ при любом фиксированном t : 1) монотонно не возрастает по u и монотонно не убывает

по v ; 2) по переменным u и v удовлетворяет условию (6). В частности, для $G(u, v, t) = g_1(u, t) + g_2(v, t)$ функция $f(u, v)$ удовлетворяет условию (6), если $g_1(u, t)$ монотонно не возрастает по u , а $g_2(v, t)$ монотонно не убывает по v .

В случае задачи об оптимальном размещении контрольных станций, рассматривавшейся Г. А. Янгом, $g_2(v, t) = h(t)g(v - t)$, $g_1(u, t) = 0$ и вышеупомянутые условия выполняются, если $g(v)$ монотонно не убывает и $h(t) \geq 0$. Таким образом, качественные выводы, полученные при $h = \text{const}$, сохраняют свою силу и в общем случае.

Ранее нами уже отмечалось, что задача вида (5) возникает при построении оптимальных параметрических рядов (задача стандартизации) в случае однородных технических систем. Достаточно общая постановка задачи стандартизации, или выбора типажа оборудования, имеет следующий вид:

$$\min_n \min_{U_n} \left[\sum_{u \in U_n} c^0(u) + \sum_{x \in X} \min_{u \in U_n} g(u, x) \right], \quad (7)$$

где

X — множество видов спроса;

U — множество возможных типоразмеров;

U_n — параметрический ряд типоразмеров, представляющий собой n -элементное подмножество множества U ;

$c^0(u)$ — “начальная” плата за ввод типоразмера u ;

$g(u, x)$ — затраты на удовлетворение спроса вида x посредством изделий с типоразмером u .

Впервые подобная задача была рассмотрена в работах В. Т. Дементьева¹² при следующих предположениях:

$$1) \quad X = U = [a, b],$$

$$2) \quad g(u, x) = \begin{cases} g(u)h(x), & \text{при } x \leq u, \\ K, & \text{при } x > u, \end{cases}$$

где $g(u)$ — неубывающая функция, $h(x) \geq 0$, K — достаточно большое число.

В этом случае задача принимает вид:

$$\sum_{k=1}^n \left\{ c^0(u_k) + g(u_k) \cdot \int_{u_{k-1}}^{u_k} h(x) dx \right\} \rightarrow \min, \quad (8)$$

где минимум берется по области, определяемой условиями

$$a = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n = b, \quad n > 0. \quad (9)$$

¹²Дементьев В. Т. Задача выбора типажа оборудования. — В сб.: “Методы управления большими системами”, том II, Иркутск, 1970.

Задача (8)–(9) была решена методом динамического программирования. При этом была доказана, как уже сказано выше, выпуклость по n последовательности $\{S_n\}$ минимумов функции (8), что существенным образом могло быть использовано для решения указанной задачи при наличии фиксированных типоразмеров, т. е. когда ставится вопрос о пополнении имеющегося параметрического ряда.

Для задачи (7) выбора оптимального ряда при произвольных функциях $c^0(u)$ и $g(u, x)$ не известно эффективных (полиномиальных) алгоритмов. Это и не удивительно, поскольку задача является NP -трудной. В связи с этим представляют значительный интерес исследования свойств и поиск эффективно разрешимых случаев указанной задачи.

Задача (5), частным случаем которой является задача (8), представляет собой, по существу, задачу о кратчайшем пути в графе $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = [a, b]$, множеством дуг $E = \{(u, v) \mid a \leq u < v \leq b\}$ и функцией длин дуг $f(u, v)$. Это обстоятельство и сыграло решающую роль в том, что задача стандартизации (7) в рассмотренном В. Т. Дементьевым случае (см. выше условия 1 – 2) оказалась эффективно разрешимой.

В дальнейшем Э. Х. Гимади [1970]¹³ и автором совместно с Э. Х. Гимади [2] были указаны два других случая сводимости задачи (7) к задаче (5).

Выполнение условия (6) в задаче (5) позволяет, как было показано Э. Х. Гимади [1969]¹⁴, произвести модификацию стандартной схемы динамического программирования и получить тем самым более эффективный алгоритм решения задачи. Это обстоятельство придает условию (6) дополнительную значимость и оправдывает усилия, затрачиваемые на доказательство соответствующего свойства в том или ином случае.

Теорема 2 [2]. *Если функция $g(u, x)$ квазивыпукла по u , то задача (7) сводится к задаче (5). При этом*

$$f(u, v) = c^0(v) + \sum_{x \in X} \min\{0, g(v, x) - g(u, x)\} \text{ и выполняется условие (6).}$$

(Функция $g(u, x)$ называется квазивыпуклой по u , если для любой тройки $u_1 < u < u_2$ из упорядоченного множества U выполнено неравенство

$$g(u, x) \leq \max\{g(u_1, x), g(u_2, x)\}$$

при любом значении x .)

¹³Гимадутдинов Э. Х. Об одном классе задач нелинейного программирования. — В сб.: “Управляемые системы”, вып. 3, Новосибирск, 1969, 101–113.

¹⁴Гимади Э. Х. (Гимадутдинов). Выбор оптимальных шкал в одном классе задач типа размещения, унификации и стандартизации. — В сб.: “Управляемые системы”, вып. 6, Новосибирск, 1970, 57–70.

Второй случай сводимости, указанный Э.Х.Гимади, имеет место, если функция $g(u, x)$ обладает так называемым свойством связности. В этом случае

$$f(u, v) = \min_{w \in U} \{c^0(w) + \sum_{u < z \leq v} g(w, z)\}$$

и по доказанной в [2] теореме выполняется условие (6), если $c^0(u) = \text{const}$.

Предполагая $X = \{1, 2, \dots, n\}$ и $U = \{1, 2, \dots, m\}$, задачу (7) можно сформулировать как задачу целочисленного линейного программирования с булевыми переменными:

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^m \{c_i^0 y_i + \sum_{j=1}^n g_{ij} x_{ij}\} \rightarrow \min \quad (10)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (11)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq y_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (12)$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\}. \quad (13)$$

Для решения данной задачи, если матрица (g_{ij}) не удовлетворяет условиям типа связности или квазивыпуклости, применяются различные схемы неявного перебора (методы ветвей и границ и их модификации, последовательные схемы оптимизации и т.п.). Эффективность подобных схем (степень отсева бесперспективных вариантов) в сильной степени зависит от техники построения нижних оценок.

В качестве нижней оценки целевой функции задачи (10)–(13) можно взять значение целевой функции задачи, двойственной к задаче (10)–(12):

$$\phi(w) = \sum_{j=1}^n \min_{1 \leq i \leq m} \{g_{ij} + w_{ij}\} \rightarrow \max_w \quad (14)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} \leq c_i^0, \quad i = 1, \dots, m; \quad (15)$$

$$w_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Нижней оценкой для F является, например, величина

$$Q(z) = \sum_{j=1}^n \min_{i \in U} \{g_{ij} + z_i c_i^0\},$$

где $z \in A$, A — симплекс в R^n , определяемый условиями

$$\sum_{j=1}^n z_j \leq 1, \quad z_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

(Один из способов выбора z предлагался в работе В. А. Емеличева и М. М. Ковалева [1970, 1972]¹⁵.)

В работе [5], выполненной совместно с Э. Х. Гимади и В. Т. Дементьевым, указывается метод получения оценки, которая оказывается не хуже $Q(z)$ при любом векторе z из A . Для этой цели за $O(nm^2)$ действий типа сравнения и сложения чисел строится так называемое тупиковое решение двойственной задачи (14)–(16), а заодно получается и некоторое приближенное решение исходной задачи (10)–(13) с апостериорной оценкой точности.

Для любого допустимого решения w задачи (14)–(16) определим множества U^0 и U_j , $j = 1, \dots, n$:

$$U^0 = \{i \in U \mid \sum_{j=1}^n w_{ij} - c_i^0 = 0\};$$

$$U_j = \{i \in U \mid g_{ij} + w_{ij} = \min_{k \in U} \{g_{kj} + w_{kj}\}\}.$$

Допустимое решение w называется *тупиковым*, если

$$\text{а) } U_j \cap U^0 = \emptyset, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\text{б) } w_{ij} = 0, \quad \forall i \in U \setminus U_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Теорема 3 [5]. Для любого тупикового решения w и любого вектора $z \in A$ справедливо неравенство $Q(z) \leq \phi(w)$.

Из определения тупикового решения двойственной задачи (14)–(16) вытекает метод отыскания этого решения и нижней оценки $\phi(w)$ (1-й этап алгоритма), а также алгоритм получения допустимого (приближенного) решения исходной задачи (10)–(13) (2-й этап алгоритма).

1-й этап. Вначале этапа полагаем $w_{ij} = 0$, $c'_i = c_i^0$, $v_j = \min\{g_{ij} \mid i = 1, \dots, m\}$, $U_j = \{i \mid g_{ij} = v_j\}$, ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$). Затем циклически повторяются действия, описанные в пунктах 1а) и 1б).

1а). Находим множество $U^0 = \{i \mid c'_i = 0\}$ и столбец j_0 , такой, что

$$|U_{j_0}| = \min\{|U_j| \mid U_j \cap U^0 = \emptyset\}.$$

¹⁵Емеличев В. А., Ковалев М. М. Решение некоторых задач вогнутого программирования методом построения последовательности планов, I и II. — “Известия АН БССР, серия физ.-мат. наук”, Минск, N 6, 1970, 24–27 и N 1, 1972, 65–74.

Если такой столбец найден, то переходим к пункту 1б), в противном случае полагаем

$$w_{ij} = \begin{cases} v_j - g_{ij}, & i \in U_j \\ 0, & i \notin U_j, \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$\phi(w) = \sum_{j=1}^n v_j,$$

и работа 1-го этапа алгоритма на этом заканчивается.

1б). Вычисляем

$$g = \min\{g_{ij_0} \mid i \notin U_{j_0}\}; \quad c' = \min\{c'_i \mid i \in U_{j_0}\};$$

$$h = \min\{g - v_{j_0}, c'\};$$

полагаем

$$v_{j_0} := v_{j_0} + h; \quad c'_i := c'_i - h \quad (i \in U_{j_0})$$

и переходим к пункту 1а).

2-й этап. Пусть U^0 соответствует решению w , полученному на 1-ом этапе. Положим вектор y равным $(y_1, \dots, y_n)$, где $y_i = 1$ в случае $i \in U^0$ и $y_i = 0$ — в противном случае. Далее циклически повторяются действия согласно правилам пунктов 2а) и 2б).

2а). Вычисляем

$$g_j = \min\{g_{ij} \mid i \in U'\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$F(y) = \sum_{i=1}^m c_i^0 y_i + \sum_{j=1}^n g_j,$$

$$D = \max\{F(y) - F(y - e_i) \mid i \in U'\},$$

где $U' = \{i \in U \mid y_i = 1\}$, e_i — $(0, 1)$ -вектор, все компоненты которого, кроме i -ой, равны нулю.

2б). Если $D \geq 0$, то определяем $i_0 \in U$, при котором величина $F(y - e_{i_0})$ минимальна, полагаем $y := y - e_{i_0}$ и переходим на 2а). При $D < 0$ работа алгоритма заканчивается. (По полученному вектору y легко определяются компоненты вектора x , так что (x, y) — допустимое решение исходной задачи (10)–(13), и $F(y) = F(x, y)$. При этом относительное уклонение этого решения от точного решения оценивается сверху величиной $1 - \phi(w)/F(y)$.)

Экспериментальные расчеты для задач размером 70×90 показали, что относительное уклонение приближенного решения от точного в 90% случаев не превышает 0.06.

Следует также отметить, что теорема 3 сыграла определенную роль в том, что тупиковые решения получили в дальнейшем распространение при построении оценок в алгоритмах ветвей и границ для различных обобщений задачи (10)–(13).

Рассматривавшаяся до сих пор задача (7) носит статический характер и не затрагивает важных вопросов, касающихся динамики производства компонент анализируемой системы изделий (оборудования) и замены старой системы новой.

В связи с этим в работе [3], выполненной совместно с В. Т. Дементьевым и А. Н. Сычевым, были предложены некоторые математические модели, описывающие развитие однородной технической системы во времени. Основное внимание было уделено рассмотрению частного случая — производства и замены изделий одного типа.

Разработаны алгоритмы решения задачи об оптимальном плане производства изделий одного типа как в случае отсутствия ограничений на производственные мощности, так и при их наличии. Эти алгоритмы входят в качестве одного из основных блоков в алгоритм решения общей задачи.

2. Метод покоординатного спуска и обобщения задачи о потоке в сети [13–21]

Ранее отмечалось, что выпуклость последовательности минимальных значений величин (1) используется при построении эффективных алгоритмов решения некоторых задач. Здесь в первую очередь имелась в виду задача об оптимальном пополнении параметрического ряда.

Пусть $a_1, \dots, a_n$ — заданные типоразмеры (параметрический ряд), $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ и $f_j(x_j)$ — оптимальное значение целевой функции задачи вида (8), рассматриваемой на отрезке $[a_{j-1}, a_j]$ при числе выбираемых в нем (для пополнения) типоразмеров равном x_j . Тогда для определения значений целочисленных переменных x_j мы имеем следующую задачу:

$$\sum_{j=1}^n f_j(x_j) \rightarrow \min \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq N \quad (18)$$

$$x_j \geq 0 — \text{целые, } j = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Эффективная разрешимость задачи пополнения параметрического ряда обусловлена тем обстоятельством, что для задачи (17)–(19) в случае выпуклых функций f_j пригоден алгоритм покоординатного спуска. В связи с этим нами была исследована применимость этого алгоритма для решения более общих задач выпуклого целочисленного программирования ([14]–[16]).

В работе [14] была рассмотрена задача следующего вида:

$$\min_{x \in P} \sum_{j=1}^n f_j(x_j), \quad (20)$$

где $f_j(\cdot)$ — выпуклые функции целочисленного аргумента; P — конечное множество целочисленных точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, лежащее в положительном ортанте и содержащее начало координат.

Целью исследования являлась разрешимость задачи (20) посредством алгоритма покоординатного спуска (ПС). Согласно этому алгоритму процесс вычислений начинается с точки $0 \in P$, и на каждом шаге происходит переход (если это возможно) из полученной на предыдущем шаге точки $x \in P$ в точку $x' \in P$, которая получается добавлением единицы к одной из компонент вектора x и переход к которой приводит к наибольшему уменьшению целевой функции. За конечное число шагов процесс заканчивается в некоторой точке $\bar{x} \in P$ (алгоритм приводит к точке $\bar{x}$). Ставился вопрос:

для каких множеств P алгоритм ПС приводит к точке $\bar{x}$, являющейся решением задачи (20) при любых выпуклых функциях f_j ?

Для формулировки теоремы, отвечающей на поставленный вопрос, введем следующие обозначения:

$x \leq y$ — если $y - x \in Z_+^n$, где Z_+^n — множество всех n -мерных векторов с неотрицательными целочисленными компонентами;

$[0, x] = \{y \mid 0 \leq y \leq x\}$;

$\max Q$ — множество всех максимальных относительно частичного порядка $\leq$ точек множества Q .

Теорема 4 [14]. *Для того чтобы алгоритм ПС приводил к решению задачи (20) при любых выпуклых функциях f_j , необходимо и достаточно, чтобы множество P обладало свойствами:*

(а) *если $x \in P$, то $[0, x] \subset P$;*

(б) *для всякого вектора $z \geq 0$ существует число b такое, что из $x \in \max(P \cap [0, z])$ следует $\sum_{j=1}^n x_j = b$.*

Далее в статье рассматривался вопрос о наличии свойств (а) и (б) у множеств P , определяемых системами линейных неравенств

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (21)$$

$$x_j \geq 0, \quad \text{целые}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (22)$$

где $a_{ij} \in \{0, 1\}$, b_i — целые неотрицательные числа.

У таких множеств свойство (а), как легко видеть, имеется в любом случае, а ограниченность, которая предполагалась в постановке задачи (20) для обеспечения конечности алгоритма ПС, будет иметь место, если каждая переменная x входит хотя бы в одно из неравенств системы (21). Сложнее обстоит дело со свойством (б). Вопрос, касающийся этого свойства, рассматривался нами в следующей постановке: для каких матриц (a_{ij}) определяемые системой неравенств (21), (22) множества P обладают свойством (б) при любых (неотрицательных) значениях правых частей неравенств (21)?

В результате его рассмотрения был выделен класс матриц, имеющих структуру “типа дерева”. Эти (0,1)-матрицы характеризуются следующим образом. Пусть $A_i = \{j \mid a_{ij} = 1\}$, $i = 1, \dots, m$. Тогда матрица (a_{ij}) принадлежит упомянутому классу, если любые два множества A_k и A_s либо не имеют общих элементов, либо одно из них содержится в другом. Справедлива

Теорема 5 [14]. *Для того чтобы при фиксированных a_{ij} и произвольных b_i определяемые системой неравенств (21), (22) множества P обладали свойством (б), необходимо и достаточно чтобы матрица (a_{ij}) имела структуру типа дерева.*

Выделяемый теоремой 5 класс задач вида (20), разрешимых посредством алгоритма ПС, содержит, в частности, класс задач, рассмотренный в работе О. С. Горбачевой [1970]¹⁶. Там речь шла о задачах, в которых матрица (a_{ij}) имела треугольный вид, а предложенный алгоритм основывался на идеях динамического программирования и уступал по трудоемкости алгоритму ПС.

Позднее автору стало известно, что множества P со свойствами (а) и (б) изучались Эдмондсом [1970]¹⁷ и были им названы целочисленными *полиматроидами*. В той же работе была установлена разрешимость задачи (20) посредством алгоритма ПС (greedy algorithm) в случае линейных функций f_j . Кроме того, по поводу задания полиматроидов системами линейных неравенств было показано, что при наличии в системе (21) неравенств, соответствующих любому непустому подмножеству A множества номеров $\{1, 2, \dots, n\}$, требование к правым частям b_i состоит в том, чтобы функция g (определяемая соотношениями $g(A) = b_i$ и $g(\emptyset) = 0$, где $A = \{j \mid a_{ij} = 1\}$) была субмодулярной. (Такая функция характеризуется неравенством: $g(A) + g(B) \geq g(A \cap B) + g(A \cup B)$.)

В работе Данстена и Уэлша [1973]¹⁸ применимость greedy-алгоритма к линейным задачам исследовалась более детально (по сравнению с работой Эдмондса), и была подтверждена уникальность полиматроидов как множеств, на которых линейные оптимизационные задачи решаются посредством алгоритма ПС.

В работах [15], [16] нами была рассмотрена более общего вида задача выпуклого целочисленного программирования на предмет ее разрешимости алгоритмом ПС. Обобщение было связано с расширением класса функций, а именно, исследовалась задача

$$\min_{x \in P} \sum_{i=1}^m f_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right), \quad (23)$$

где

¹⁶Горбачева О. С. Об одном классе задач выпуклого программирования. — В кн.: “Труды III зимней школы по мат. программированию и смежным вопросам. Вып. II”. — М.: 1970, 246–257

¹⁷Edmonds J. Submodular functions, matroids and certain polyhedra. — In: Proc. of the Inter. Conf. on Combinatorics, Calgary (Gordon and Breach, New York, 1970), 69–87.

¹⁸Dunstan F. D. J. and Welsh D. J. A. A greedy algorithm for solving a certain class of linear programmes. — Math. Programming 5 (1973), N 3, 338–353.

$f_i(\cdot)$ — выпуклые функции целочисленного аргумента;

$A = (a_{ij})$ — матрица с неотрицательными целочисленными элементами;

P — то же самое, что и в задаче (20).

Кроме того, здесь дополнительно предполагалось, что

- 1) $[0, x] \in P$ при $x \in P$;
- 2) размерность множества P равна n ;
- 3) матрица A не содержит нулевых строк и столбцов.

Очевидно, если матрица A является единичной, то мы имеем предыдущую задачу (20).

Пусть $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ есть i -я строка матрицы A , $P(A, z) = \{x \in P \mid Ax \leq z\}$. Основным результатом упомянутых выше работ является

Теорема 6 [16]. *Алгоритм ПС дает решение задачи (23), если матрица A и множество P обладают свойствами:*

(α) *множество $\max P(A, z)$ лежит в некоторой гиперплоскости вида $\sum_{j=1}^n x_j = \text{const}$ при любом целочисленном векторе $z \geq 0$;*

(β) *n -вектор $(1, \dots, 1)$ является относительно внутренним вектором конуса, порожденного векторами a_i , $i = 1, \dots, m$.*

В отличие от теоремы 4 здесь мы имеем лишь достаточные условия разрешимости задачи алгоритмом ПС. Тем не менее выделяемый теоремой 6 класс разрешимых задач содержит ранее выделенный класс, поскольку для единичной матрицы A условие (β) очевидным образом выполняется, а условие (α) в этом случае совпадает с условием (β) теоремы 4.

Наряду с доказательством указанной теоремы в работе [16] проведено исследование условий (α) и (β) в том случае, когда множество P задается системой линейных ограничений:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = m+1, \dots, M, \quad (24)$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{— целые,} \quad j = 1, \dots, n, \quad (25)$$

где a_{ij} — целые неотрицательные числа, $M \geq m$.

В дальнейшем под A будет удобно понимать расширенную матрицу (размерности $M \times n$), первые m строк которой образуют матрицу, входящую в формулировку задачи (23), а последние $M - m$ строк — матрицу коэффициентов левых частей неравенств (24).

Пусть $J_k = \{1, 2, \dots, k\}$, $t = (t_1, \dots, t_M)$ — M -вектор с неотрицательными целочисленными компонентами, $A_i^t = \{j \in J \mid a_{ij} > t_i\}$. Посредством $A(S)$, где $S \subset J_M$, обозначим матрицу, полученную из A путем удаления всех строк, номера которых не принадлежат S .

Будем говорить, что матрица A обладает свойством (α) , если при любом целочисленном $b \geq 0$ все максимальные точки множества $\{x \mid Ax \leq b, x \geq 0 \text{ — целочисленный}\}$ принадлежат некоторой гиперплоскости вида $\sum_{j=1}^n x_j = \text{const.}$ Это равносильно тому, что матрица $A(J_m)$ и множество P , заданное ограничениями (24), (25), удовлетворяют условию (α) при произвольных значениях правых частей ограничений (24).

Матрицу $A(S)$ будем называть t -покрытием (множества J_n), если $\bigcup_{i \in S} A_i^t = J_n$. Кроме того, если после удаления из нее любой строки она перестает быть t -покрытием, то будем ее называть *тупиковым* t -покрытием. Ту же самую терминологию будем применять и по отношению к множеству S , фигурирующему в определении матрицы $A(S)$.

Теорема 7 [16]. *Для матрицы A , обладающей свойством (α) , условие (β) эквивалентно следующему условию:*

(ТП) *для любого $i \in J_M$ существует тупиковое t -покрытие S , содержащее i .*

Для $(0, 1)$ -матриц имеет смысл рассматривать только t -покрытия при $t = 0$. Для таких матриц справедлива

Теорема 8 [16]. *$(0, 1)$ -матрица A обладает свойством (α) , а ее подматрица $A(J_m)$ удовлетворяет при этом условию (β) тогда и только тогда, когда всякое тупиковое покрытие (т. е. 0 -покрытие) $\{A_i^0 \mid i \in S\}$, $S \subset J_M$ является разбиением, и каждое множество A_i^0 , $i \in J_m$, входит в некоторое разбиение при $S \subset J_m$.*

Из этой теоремы, в частности, легко получаем теорему 5, если будем считать матрицу $A(J_m)$ единичной.

* * *

Введенное выше понятие полиматроида представляет собой естественное обобщение возникшего в 30-е годы благодаря работам Ван дер Вардена и Уитни понятия матроида. Первоначально матроиды использовались преимущественно для систематизации и обобщения различных результатов в теории графов и комбинаторном анализе. Несколько позже обнаружилась их особая роль и в области оптимизации. Здесь в первую очередь следует отметить известную работу Краскала [1957]¹⁹, посвященную задаче выделения в графе кратчайшего остовного дерева, и последующий результат

¹⁹Kruskal J. B. On the shortest spanning subtree of a graph. — Proc. Amer. Math. Soc., 7 (1956), 48–50.

Радо [1957]²⁰ о применимости greedy-алгоритма для отыскания в матроиде независимого множества максимального веса.

Позднее Эдмондсом [1970] в цитировавшейся выше работе и Лоулером [1975]²¹ рассматривалась задача отыскания множества максимального веса, являющегося независимым в двух заданных матроидах одновременно, и была установлена ее полиномиальная разрешимость в случае существования полиномиальных алгоритмов проверки независимости множества в каждом из матроидов. Это послужило побудительным мотивом для рассмотрения нами [18] задачи

$$\min\{f(x) \mid x \in P_1 \cap P_2\}, \quad (26)$$

где $f(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$,

$f_j(\cdot)$ — выпуклые функции,

P_1, P_2 — полиматроиды.

Частный случай такой задачи был исследован в работе Биля [1959]²². Там $P_1 \cap P_2$ представляло собой множество всех допустимых целочисленных решений транспортной задачи, что соответствует случаю, когда P_1 и P_2 являются полиматроидами разбиения (такие полиматроиды имеют весьма простую структуру, поскольку они определяются системами неравенств (21), (22), у которых в каждом столбце матрицы (a_{ij}) имеется ровно одна единица).

В рассматриваемой работе основное внимание уделено исследованию свойств полиматроидов и пересечения двух полиматроидов, на основе которых легко обосновывается итерационный метод решения задачи (26), а в дальнейшем получается и ряд других результатов.

Для формулировки основных результатов приведем необходимые обозначения:

$x \vee y$ ($x \wedge y$) — точная верхняя (нижняя) грань векторов x и y относительно частичного порядка $\leq$;

$$[x, y] = \{z \in Z_+^n \mid x \wedge y \leq z \leq x \vee y\},$$

$$|x| = \sum_{j=1}^n |x_j|; \quad \delta^i = (0, \dots, 0, 1_i, 0, \dots, 0) \in Z^n.$$

Для произвольного полиматроида и вектора $x \in Z^n$ введем в рассмотрение двудольный орграф $G(x, P) = (V^- \cup V^+, E)$, где

$$V^- = \{i^- \mid i = 1, \dots, n\}, \quad V^+ = \{i^+ \mid i = 1, \dots, n\},$$

²⁰Rado R. A note on independence functions. — Proc. London Math. Soc., 7 (1957), 300–320.

²¹Lawler E. L. Matroid intersection algorithms. — Math. Programming, 9, 1975, 31–56.

²²Beale E. M. L. An algorithm for solving the transportation problem when the shipping cost over each route is convex. — Nav. Res. Log. Quart., 6, 1959, 43–56.

$$E = E(x, P) = \{(i^-, j^+) \mid x + \delta^j - \delta^i \in P\}.$$

Если $g, h \in Z_+^n$, то под (g, h) -поток в $G(x, P)$ будем понимать неотрицательную функцию, определенную на множестве дуг этого графа, такую, что для каждого $i = 1, \dots, n$ сумма значений функции на дугах, исходящих из i^- (заходящих в i^+), равна $g_i(h_i)$.

Теорема 9 [18]. *Если $x, y \in P$, $|x| = |y|$, $g = 0 \vee (x - y)$ и $h = 0 \vee (y - x)$, то существует (g, h) -поток в $G(x, P)$.*

(По поводу данной теоремы можно заметить, что ее аналогом в случае матроидов является теорема, принадлежащая Бруалди [1969]²³.)

Получение результатов, касающихся пересечения полиматроидов, стало возможным благодаря введенному в работе понятию неразложимого орцикла, важность которого связана также с формулировкой и обоснованием предложенного метода решения задачи (26).

Пусть $H = (V, E)$ — произвольный ориентированный граф (без петель и кратных дуг). Если C — простой орцикл графа H , то посредством $\bar{C}$ будем обозначать характеристический вектор множества его вершин, т.е. $\bar{C} = (\bar{C}(v) \mid v \in V)$, где $\bar{C}(v) = 1$, если вершина v принадлежит C , и $\bar{C}(v) = 0$ — в противном случае.

Орцикл C называется *разложимым*, если для некоторых простых орциклов $C_1, \dots, C_m$ графа H и $t_k > 0$, $k = 1, \dots, m$, имеет место

$$1) \bar{C} = \sum_{k=1}^m t_k \bar{C}_k; \quad 2) |\bar{C}_k| < |\bar{C}|, \quad k = 1, \dots, m.$$

В противном случае орцикл C называется *неразложимым*.

Для формулировки критерия неразложимости орцикла C вводится в рассмотрение орграф CH , множество вершин которого находится во взаимно однозначном соответствии с множеством дуг орцикла C : если (u, v) — дуга орцикла C , то соответствующую ей вершину в CH будем обозначать uv . Множество дуг графа CH состоит из всех упорядоченных пар $(uv, u'v')$, таких, что $(u, v') \in E$ и $uv \neq u'v'$.

Теорема 10 [18]. *Орцикл C неразложим тогда и только тогда, когда орграф CH ациклический.*

Следствие. Орцикл C неразложим тогда и только тогда, когда его дуги могут быть упорядочены $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_m, v_m)$ так, что $(u_i, v_j) \notin E$ при $i < j$.

Полезным в дальнейшем оказывается один достаточный признак неразложимости орцикла, основанный на использовании весовых функций. Пусть

²³Brualdi R. A. Comments on bases in dependence structures. — Bull. Austral. Math. Soc., 1 (1969), 161–167.

на множестве вершин графа H определена вещественнозначная функция W . Весом вершины v будем называть величину $W(v)$, а под весом $W(C)$ орцикла C будем понимать сумму весов всех его вершин.

Если K есть некоторое множество простых орциклов графа H , то через K_0 обозначим множество всех орциклов из K , имеющих минимальный вес, т.е. $K_0 = \text{Argmin}\{W(C) \mid C \in K\}$. Орцикл C будем называть *минимальным по включению* (элементом K), если из $C_1 \in K$, $\bar{C}_1 \leq \bar{C}$ следует $|\bar{C}_1| = |\bar{C}|$. В частности, любой орцикл из K с наименьшим числом вершин является минимальным по включению.

Посредством $K(V_0; V_1)$ обозначим множество всех простых орциклов графа H , содержащих все вершины из множества V_0 и не содержащих ни одной вершины из множества V_1 , $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ и $V_0, V_1 \subset V$. Пусть $|V_0| = 1$, $V_0 = \{v_0\}$. Тогда справедливо утверждение: если вес любого орцикла из $K(\emptyset; V_0 \cup V_1)$ неотрицателен, то каждый минимальный по включению орцикл из $K_0(V_0; V_1)$ является неразложимым.

Для произвольных полиматроидов P_1, P_2 и точки $x \in Z_+^n$ введем в рассмотрение ориентированный граф $H(x) = (V^- \cup V^+, E)$, где $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 = E(x, P_1)$ и $E_2 = \{(j^+, i^-) \mid (i^-, j^+) \in E(x, P_2)\}$.

Если C — орцикл графа $H(x)$, то посредством $z(C)$ будем обозначать вектор из Z^n , компоненты которого определяются следующим образом: $z_i(C) = \bar{C}(i^+) - \bar{C}(i^-)$, $i = 1, \dots, n$. Орцикл C будем называть *ординарным*, если из $z_i(C) = 0$ следует $\bar{C}(i^+) = \bar{C}(i^-) = 0$.

Теорема 11 [18]. *Если $x \in P_1 \cap P_2$ и C — неразложимый орцикл графа $H(x)$, то $x + z(C) \in P_1 \cap P_2$.*

Теорема 12 [18]. *Если $x, y \in P_1 \cap P_2$ и $|x| = |y|$, то в графе $H(x)$ существуют ординарные неразложимые орциклы C_k , $k = 1, \dots, t$, такие, что $y - x = \sum_{k=1}^t t_k z(C_k)$ и $x + z(C_k) \in [x, y]$, где $t_k > 0$, $k = 1, \dots, t$.*

Опираясь на тот факт, что декартово произведение полиматроидов является также полиматроидом, исходная задача (26) сводится к задаче минимизации выпуклой сепарабельной функции $f(x)$ на множестве $Q = \{x \in P_1 \cap P_2 \mid |x| = X_1^0\}$, $X_1^0 \delta^1 \in Q$, где X_1^0 может быть взято равным минимальному из рангов исходных полиматроидов (под рангом полиматроида P понимается величина $\max\{|x| \mid x \in P\}$).

Введем также следующие обозначения:

$$Q_t = \{x \in Q \mid x_1 = X_1^0 - t\},$$

$$M_t = \text{Argmin}\{f(x) \mid x \in Q_t\}.$$

Множества $K(V_0; V_1)$ и $K_0(V_0; V_1)$ будут иметь прежний смысл (при $H = H(x)$). Кроме того, для множеств $K(1^-, 1^+)$, $K(1^+, 1^-)$ и $K(\emptyset; \{1^-, 1^+\})$ будем использовать обозначения K^- , K^+ и K^0 , соответственно. На множестве вершин графа $H(x)$ определим весовую функцию W , полагая

$$\begin{aligned} W(i^-) &= f(x - \delta^i) - f(x), \\ W(i^+) &= f(x + \delta^i) - f(x). \end{aligned}$$

Теорема 13 [18]. *Если $x \in Q_t$, то следующие утверждения эквивалентны:*

- а) $x \in M_t$;
- б) *каждый орцикл из K^0 имеет неотрицательный вес.*

Теорема 14 [18]. *Если $x \in M_t$ и C — неразложимый орцикл из K_0^- , то $x + z(C) \in M_{t+1}$ и $f(x + z(C)) = f(x) + W(C)$.*

Если в условиях данной теоремы K_0^- заменить на K_0^+ , то в результате было бы установлено, что $f(x + z(C)) = f(x) + W(C)$ и $x + z(C) \in M_{t-1}$.

Пусть $T = \{t \in Z_+ \mid Q_t \neq \emptyset\}$ и $F(t) = \min\{f(x) \mid x \in Q_t\}$, $t \in T$. Опираясь на теоремы 11 и 12, легко показывается, что множество T представляет собой отрезок $[0, t_0]$ натурального ряда, где $t_0 \leq X_1^0$.

Теорема 15 [18]. *Функция $F(t)$ является выпуклой, т. е.*

$$2F(t) \leq F(t-1) + F(t+1) \quad \text{при } 0 < t < t_0.$$

Доказанные теоремы позволили предложить и обосновать метод решения задачи

$$\min\{f(x) \mid x \in Q\},$$

схематичное описание которого приводится ниже. Процесс вычислений начинается с точки $x = X_1^0 \delta^1$; при этом $Q_0 = M_0 = \{x\}$. Пусть уже проделано t шагов, в результате которых получена точка $x \in M_t$. Тогда очередной $(t+1)$ -й шаг будет состоять из последовательного выполнения следующих процедур:

- 1) построение графа $H(x)$;
- 2) вычисление новых значений весовой функции W ;
- 3) нахождение в K^- неразложимого орцикла C минимального веса и переход от x к $x + z(C)$ в случае $W(C) < 0$; если $W(C) \geq 0$ или $K^- = \emptyset$, то x есть решение рассматриваемой задачи. В качестве C может быть взят орцикл из K_0^- с минимальным числом вершин.

Число итераций данного метода не превосходит минимального из рангов полиматроидов, а трудоемкость каждой итерации полиномиальным образом зависит от размерности пространства и линейным образом — от суммарной трудоемкости процедур вычисления значений функций и проверки принадлежности точки полиматроидам.

С понятием полиматроида тесно связано понятие сцепленной векторной системы, впервые изучавшееся Шрайвером [1978]²⁴ и использованное нами в [17] для некоторого обобщения задачи о потоке в сети. Специальным случаем последней задачи является, в частности, и рассмотренная нами выше задача (26) минимизации выпуклой сепарабельной функции на пересечении двух полиматроидов.

Под сцепленной векторной системой понимается тройка (X, Y, L) , где X и Y — конечные множества, а L — непустое множество пар (g, h) , $g : X \rightarrow Z_+$, $h : Y \rightarrow Z_+$. При этом предполагаются выполненными следующие аксиомы:

- 1) если $(g, h) \in L$, то $g[X] = h[Y]$;
- 2) если $(g, h) \in L$ и $0 \leq g' \leq g$, то $(g', h') \in L$ при некотором $h' \leq h$;
- 3) если $(g, h) \in L$ и $0 \leq h' \leq h$, то $(g', h') \in L$ при некотором $g' \leq g$;
- 4) если $(g', h'), (g'', h'') \in L$, то найдется пара $(g, h) \in L$ такая, что $g' \leq g \leq g' \vee g''$ и $h'' \leq h \leq h' \vee h''$.

(Здесь $g[X] = \{g(i) \mid i \in X\}$ и, как раньше было принято для векторов, отношение вида $g' \leq g$ означает $\forall i \in X [g'(i) \leq g(i)]$, а $g' \vee g''$ есть точная верхняя грань g' и g'' относительно указанного отношения частичного порядка. Отметим также, что мы ограничиваемся рассмотрением целочисленных векторных систем.)

Пусть задан орграф $G = (V, E)$ с выделенной дугой (t, s) (допускается наличие в графе G параллельных дуг). Пусть E_v^- — множество дуг орграфа G , заходящих в вершину v , а E_v^+ — множество дуг, исходящих из вершины v . Если $x : E \rightarrow Z_+$ — неотрицательная целочисленная функция, определенная на множестве дуг графа G , то посредством x_v^- и x_v^+ будем обозначать сужение x на E_v^- и E_v^+ соответственно.

Пусть каждой вершине v сопоставлена сцепленная векторная система (E_v^-, E_v^+, L_v) , а каждой дуге e — выпуклая функция $f_e(z)$, $z \in Z_+$. Тогда функцию $x : E \rightarrow Z_+$ будем называть *циркуляцией*, если для любой вершины v выполнено условие

$$(x_v^-, x_v^+) \in L_v. \quad (27)$$

Под стоимостью циркуляции x будем понимать величину

$$F(x) = \sum_{e \in E} f_e(x(e)).$$

²⁴Schrijver A. Matroids and Linking Systems. — Mathematical Centre Tracts 88, Amsterdam, 1978.

Задача заключается в построении целочисленной циркуляции минимальной стоимости с заданным значением потока по выделенной дуге (t, s) .

В предположении, что нулевая циркуляция ($x = 0$) имеет минимальную стоимость среди всех циркуляций с нулевым значением потока по дуге (t, s) , предложен итерационный алгоритм построения искомой циркуляции. Число итераций равно заданному значению потока по дуге (t, s) , а трудоемкость каждой итерации полиномиальным образом зависит от числа дуг сети G и линейным образом — от суммы трудоемкостей процедур вычисления значений функций $f_e(z)$ и проверки условий (27). (Этим же алгоритмом может быть получено решение задачи о выделении среди всех циркуляций с максимальным значением потока по дуге (t, s) циркуляции минимальной стоимости.)

Рассматривавшаяся Лоулером и Мартелом [1982]²⁵ задача о максимальном полиматроидном потоке является частным случаем нашей задачи, поскольку у них $f_e \equiv 0$ для каждой дуги и ограничения на поток в каждой вершине задаются посредством сцепленных векторных систем специального вида $L = \{(g, h) \mid g[X] = h[Y], g \in P_1, h \in P_2\}$, где P_1 и P_2 — полиматроиды на множествах X и Y соответственно. Попутно заметим, что в классической задаче о максимальном потоке или потоке минимальной стоимости в сети множества P_1 и P_2 представляют собой полиматроиды простейшего вида, а именно, они являются прямоугольными параллелепипедами вида $[0, a]$, $a \in \mathbb{Z}_+^n$.

В работах [19]–[21] было введено понятие базисной системы, которое использовалось, в частности, для дальнейшего обобщения задачи о потоке в сети. Само понятие базисной системы весьма тесно связано с рассматривавшимися выше понятиями полиматроида и сцепленной векторной системы и сохраняет их основные свойства, но по сравнению с ними более удобно для использования, поскольку класс всех базисных систем оказывается замкнутым относительно различных и достаточно естественных операций.

Базисной системой мы называем пару (E, B) , где E — непустое конечное множество, а B — подмножество Z^E , удовлетворяющее условию:

$$(A) \quad \begin{cases} \text{для любых } x, y \in B \text{ имеет место} \\ x(i) > y(i) \implies \exists j \in E : x(j) < y(j) \text{ \& } x + \delta^j - \delta^i \in B. \end{cases}$$

Множество B называется также *базисной системой* на E .

Для базисной системы B , $B \neq \emptyset$, как легко видеть, существует число $r(B)$ такое, что при любом x из B имеет место равенство $x[E] = r(B)$. Такое число единственно и называется оно рангом системы.

²⁵Lawler E. L., Martel C. U. Computing maximal “polymatroidal” network flows. — Math. Oper. Res., 1982, 7, N 3, 334–347.

В качестве примеров базисных систем, поясняющих упоминавшуюся выше связь между ними — с одной стороны — и полиматроидами и сцепленными векторными системами — с другой, можно указать следующие.

1) Пусть P — полиматроид на E . Тогда $B = \{x \in P \mid x[E] = r_0\}$ — базисная система на E (ранга r_0).

2) Если P_1 и P_2 — полиматроиды на E_1 и E_2 соответственно, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то

$$B = \{(x, y) \mid -x \in P_1, y \in P_2, x[E_1] + y[E_2] = r_0\}$$

— базисная система на $E_1 \cup E_2$ (ранга r_0).

3) Пусть (X, Y, L) — сцепленная векторная система. Тогда $B = \{(x, y) \mid (-x, y) \in L\}$ — базисная система на $X \cup Y$ (ранга 0).

В числе простейших свойств, подтверждающих сказанное выше об удобстве в использовании базисных систем, можно отметить следующие (в их формулировках предполагается, что B — базисная система на E и $a, b \in Z^E$).

(I) $a + B$ — базисная система на E (a -сдвиг B).

(II) $B \cap [a, b]$ — базисная система на E ($[a, b]$ -ограничение B).

(III) Аксиома (A), положенная в основу определения базисной системы, эквивалентна (двойственной) аксиоме:

$$(A^*) \quad \begin{cases} \text{для любых } x, y \in B \text{ имеет место} \\ x(j) < y(j) \implies \exists i \in E : x(i) > y(i) \text{ \& } x + \delta^j - \delta^i \in B. \end{cases}$$

(IV) $-B = \{x \mid -x \in B\}$ — базисная система на E (двойственная B).

(V) Если B_1 и B_2 — базисные системы на E_1 и E_2 соответственно, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то $B_1 \times B_2 = \{(x, y) \mid x \in B_1, y \in B_2\}$ — базисная система на $E_1 \cup E_2$ (декартово произведение).

(VI) Пусть $B^< = \{x \in Z^E \mid x \leq z \text{ при некотором } z \in B\}$.

Тогда (A) эквивалентно следующему свойству:

$$(A') \quad \begin{cases} \text{для любых } x, y \in B^< \text{ имеет место} \\ x[E] < y[E] \implies \exists i \in E : x + \delta^i \in [x, y] \cap B^<. \end{cases}$$

Свойство (A') фактически означает, что множество $B^<$ является “неограниченным полиматроидом”. Это обстоятельство позволяет перенести все основные утверждения из работы [18], касающиеся свойств полиматроидов и их пересечений, на случай базисных систем.

Важное применение упомянутые теоремы находят при обосновании предлагаемых в работе [20] методов решения оптимизационных задач (об этом будет сказано ниже). Они используются также для введения и обоснования некоторой достаточно общей операции над базисными системами.

Пусть $B_1 \subset Z^{E_1}$ и $B_2 \subset Z^{E_2}$, где E_1 и E_2 — непустые, конечные и непесекающиеся множества.

Отражением B_1 от B_2 мы называем множество B , $B \subset Z^{E_2}$, представляющее собой образ множества B_1 при (многозначном) отображении, графиком которого является множество B_2 , т. е.

$$B = \{y \in Z^{E_2} \mid (x, y) \in B_2 \text{ при некотором } x \in B_1\}.$$

Теорема 16 [20]. *Если B_1 и B_2 — базисные системы, то отражение B_1 от B_2 является также базисной системой.*

Пример. Пусть B_1 и B_2 — базисные системы на E ; $\bar{E} = \{\bar{e} \mid e \in E\}$, $E' = \{e' \mid e \in E\}$ — “двойники” множества E ;

$\bar{B}_2$ — базисная система на $\bar{E}$, получаемая из B_2 заменой каждого элемента $e \in E$ его двойником $\bar{e}$ из $\bar{E}$;

$$B^* = \{(x, y, z) \in Z^{E \cup \bar{E} \cup E'} \mid x(e) + y(\bar{e}) + z(e') = 0, \forall e \in E\}.$$

Тогда отражением базисной системы $(-B_1) \times (-\bar{B}_2)$ от B^* будет базисная система

$$B = \{z \in Z^{E'} \mid (\forall e) z(e') = x(e) + y(\bar{e}), \text{ где } x \in B_1, y \in B_2\},$$

являющаяся, по существу, алгебраической суммой базисных систем B_1 и B_2 .

В качестве других примеров введенной операции отражения можно сослаться на известные операции *ограничения* и *сжатия* для матроидов, которые естественным образом обобщаются на случай базисных систем.

Основной оптимизационной задачей, рассмотренной в работе [20], является задача минимизации выпуклой сепарабельной функции на пересечении двух базисных систем

$$\min\{f(x) \mid x \in B_1 \cap B_2\}, \quad (28)$$

где B_1 и B_2 — базисные системы на E ,

$$f(x) = \sum_{e \in E} f_e(x(e)),$$

$f_e(\cdot)$ — выпуклые функции.

Предполагается, что $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$.

Как и в случае полиматроидов, вводится орграф $H(x)$ “окрестностей точки x в B_1 и B_2 ”, каждой вершине которого приписывается вес W . Критерием оптимальности в данном случае является теорема 17, аналогичная теореме 13.

Теорема 17 [20]. *Элемент x из $B_1 \cap B_2$ является точкой минимума функции f тогда и только тогда, когда граф $H(x)$ не содержит орициклов отрицательного веса.*

На этом критерии и теоремах 11 и 12 (точнее, на их аналогах для базисных систем) может быть основан один из возможных способов решения задачи (28):

- 1) начать с некоторого элемента $x \in B_1 \cap B_2$;
- 2) если в $H(x)$ отсутствуют орциклы отрицательного веса, то x оптимален. В противном случае выделить в $H(x)$ неразложимый орцикл C отрицательного веса и заменить x на $x + z_C$. (При этом значение функции f изменится на величину, равную весу орцикла C .)

Шаг 2 повторяется до тех пор, пока не будет получен оптимальный элемент.

Некоторым недостатком данного способа отыскания оптимального решения является неопределенность процедуры выбора начального допустимого решения (шаг 1). В связи с этим был указан другой подход, в значительной мере свободный от отмеченного недостатка.

Предположим, что у нас имеется вектор $x \in B_1 \cap B_2$, оптимальный среди всех элементов множества $B_1 \cap B_2$, значения (координаты) которых при каждом i из E_0 , $E_0 \subset E$, принадлежат отрезку $[0, x(i)]$. Назовем x с таким свойством E_0 -оптимальным. Требуется найти E_0 -оптимальный элемент с нулевым значением на множестве E_0 .

Введем в рассмотрение векторы a и b : $a(i) = 0$, $b(i) = x(i)$ при $i \in E_0$ и $a(i) = -\infty$, $b(i) = +\infty$ в противном случае, и заменим каждую из базисных систем B_1 и B_2 ее $[a, b]$ -ограничением B'_1 и B'_2 соответственно. Тогда x будет оптимальным в $B'_1 \cap B'_2$. Выбрав далее в графе окрестностей точки x в базисных системах B'_1 и B'_2 вершину i^+ с $x(i) < 0$ (либо i^- с $x(i) > 0$), $i \in E_0$, найдем проходящий через нее *неразложимый* орцикл C *минимального* веса и заменим x на $x + z_C$. Полученный таким способом элемент $x + z_C$ будет E_0 -оптимальным.

Повторение указанной процедуры (в случае $|B_1 \cap B_2| < \infty$) приведет в конечном счете либо к решению рассматриваемой задачи, либо к установлению ее неразрешимости в силу отсутствия в $B_1 \cap B_2$ элементов с нулевыми значениями на множестве E_0 . (Последнее обстоятельство проявится на некотором этапе в отсутствии орциклов нужного вида в графе окрестностей.)

Вернемся теперь к исходной задаче (28).

Введем в рассмотрение множества $\bar{E}$ и E' — “двойники” множества E , базисные системы $\bar{B}_2$ и B^* (см. пример) и базисную систему $B' = \{z \in Z^{E'} \mid z[E'] = 0\}$. Полагая далее $\bar{B}_1 = B_1 \times (-\bar{B}_2) \times B'$, легко видеть, что $(x, y, z) \in \bar{B}_1 \cap B^*$ и $z = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in B_1 \cap B_2$ и $y(\bar{e}) = -x(e)$ при любом $e \in E$. Отсюда следует, что исходная задача сводится к задаче поиска в $\bar{B}_1 \cap B^* \cap \{(x, y, z) \mid z = 0\}$ минимума функции $f(x, y, z)$

($= f(x)$), т. е. к рассмотренной выше задаче поиска в $\bar{B}_1 \cap B^*$ E' -оптимального решения с нулевым значением на множестве E' .

Процедура выбора для последней задачи какого-либо E' -оптимального решения может быть более простой, чем процедура выбора допустимого решения исходной задачи. В качестве такого решения можно взять (x, y, z) , где x — точка минимума f на B_1 , y — произвольный элемент из $(-\bar{B}_2)$ и $z(e') = -x(e) - y(\bar{e})$ при всех $e \in E$.

Изложенный способ решения задачи (28) есть, по существу, метод сокращения невязок, в котором роль вектора невязок играет компонента z рассматриваемых векторов (x, y, z) .

Из приведенных выше рассмотрений следует, что исходная задача минимизации на пересечении базисных систем B_1 и B_2 сводится к задаче минимизации на пересечении базисных систем $B_1 \times (-\bar{B}_2)$ и $B_0 = \{(x, y) \in Z^{E \cup \bar{E}} \mid x(e) + y(\bar{e}) = 0, \forall e \in E\}$. В связи с этим в работе было уделено внимание задаче (28) в том случае, когда B_1 есть (произвольная) базисная система B на множестве $E \cup \bar{E}$, а $B_2 = B_0$, где $B_0 = \{x \in Z^{E \cup \bar{E}} \mid x(e) + x(\bar{e}) = 0, \forall e \in E\}$.

Если следовать изложенной ранее схеме решения этой задачи, то пришлось бы на каждой итерации рассматривать граф $H(x)$ с числом вершин $4|E|$. Однако ввиду специфичности базисной системы B_0 можно некоторые пары вершин рассматривать как одну вершину и сократить тем самым вдвое общее число вершин графа. Так, при любом $e \in E$ в графе $H(x)$ присутствуют вершины $e^+, e^-, \bar{e}^+, \bar{e}^-$, из них e^+ и $\bar{e}^-$ можно отождествить и считать одной новой вершиной e , а e^- и $\bar{e}^+$ — новой вершиной $\bar{e}$.

В результате подобной редукции мы будем иметь дело с графом $H^*(x) = (E \cup \bar{E}, A^*)$, где $A^* = \{(\bar{p}, q) \mid x + \delta^q - \delta^p \in B\}$ (здесь при $p = \bar{e}$ считается $\bar{p} = e$, т. е. $\bar{\bar{e}} = e$). При этом соответствующим образом определяются и веса новых вершин, а именно,

$$W(e) = W(e^+) + W(\bar{e}^-) = f(x + \delta^e) + f(x - \delta^{\bar{e}}) - 2f(x) \quad \text{и}$$

$$W(\bar{e}) = W(e^-) + W(\bar{e}^+) = f(x + \delta^{\bar{e}}) + f(x - \delta^e) - 2f(x).$$

Наконец, для простого орцикла C графа $H^*(x)$ вектор z_C определяется так: $z_C(p) = -z_C(\bar{p}) = 1$, если $p \in C$ и $\bar{p} \notin C$; $z_C(p) = 0$ — в остальных случаях.

Пусть в последней задаче B есть декартово произведение базисных систем (E_v, B_v) , $v \in V$, где $\{E_v \mid v \in V\}$ — разбиение множества $E \cup \bar{E}$. Такому разбиению может быть поставлен во взаимнооднозначное соответствие ориентированный мультиграф $G = (V, E)$, в котором вершина v считается началом (концом) дуги e , если $e \in E_v$ ($\bar{e} \in E_v$). Если дополнительно предполагается, что $|E_v \cap \{e, \bar{e}\}| \leq 1$ при любых v и e , то G не будет иметь петель.

В результате мы получаем не что иное как базисную сеть, рассматривавшуюся нами в [19]. Под базисной сетью там понимается конечный ори-

ентированный мультиграф $G = (V, E)$ без петель, каждой вершине которого поставлена в соответствие базисная система B на множестве $E_v^- \cup E_v^+$, $v \in V$. Базисным потоком в G называется функция $x : E \rightarrow Z$, такая, что $(-x^-, x^+) \in B_v$, $v \in V$. Таким образом, базисным потоком в смысле данного в [19] определения будет являться сужение на E любого $x \in B \cap B_0$, т.е. множество базисных потоков представляет собой проекцию на Z^E множества $B \cap B_0$. Принимая это во внимание, можно заключить, что задача о базисном потоке минимальной стоимости представляет собой “структурированную” форму задачи минимизации на пересечении базисных систем.

Учет внутренней структуры задачи может быть использован, например, для получения некоторых аналогов теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе. Одна из таких теорем была сформулирована и доказана в [19, 20].

Пусть $s, t \in V$, $e_0 \in E_t$ и $\bar{e}_0 \in E_s$. Если $X, Y \subset V$, то посредством (X, Y) будем обозначать множество всех дуг графа G , направленных из X в Y . Всякое множество Y , $s \in Y \subset V \setminus t$, определяет (s, t) -разрез $C(Y)$ графа $G \setminus e_0$, где $C(Y) = (Y, V \setminus Y) \cup (V \setminus Y, Y) \setminus e_0$. Положим далее

$$D(Y) = \sum_{v \in Y} r_v(E_v),$$

где r_v — ранговая функция базисной системы B_v . (Функция $r : 2^N \rightarrow Z \cup \{+\infty\}$ называется ранговой функцией базисной системы (N, B) , если $r(A) = \max_{z \in B} z[A]$, $A \subset N$.)

$$P(Y) = \min \sum_{v \in Y} r_v(A_v),$$

где $A_v = E_v \cap (A \cup \bar{A})$, $\bar{A} = \{\bar{e} \mid e \in A\}$ и минимум берется по всем множествам A таким, что $C(Y) \subset A \subset E \setminus e_0$. Наконец, на базисную систему B_t наложим ограничение: при любых $z \in B_t$ и $q \in E_t$ имеет место $z + \delta^{e_0} - \delta^q \in B_t$.

Содержательная трактовка величины $D(Y)$ становится вполне очевидной, если заметить, что в случае $r_v(E_v) > 0$ ($r_v(E_v) < 0$) вершина v является источником (стоком) сети G , имеющим мощность $r_v(E_v)$ ($|r_v(E_v)|$). Величина $P(Y)$ может трактоваться как пропускная способность (s, t) -разреза, определяемого множеством Y .

Теорема 18 [19, 20]. *Если $B \cap B_0 \neq \emptyset$, то*

$$\max x(e_0) = \min(P(Y) - D(Y)),$$

где максимум берется по всем x из $B \cap B_0$, а минимум — по всем множествам Y , определяющим (s, t) -разрезы в $G \setminus e_0$.

Введенное ограничение на базисную систему B_t не является существенным и используется лишь для придания формулировке вышеприведенной теоремы большего сходства с классической теоремой о максимальном потоке и минимальном разрезе. В том случае, когда наложенное на базисную систему B_t ограничение не выполняется, теорема тем не менее остается в силе, если только в ее формулировке вместо множеств Y , определяющих (s, t) -разрезы, рассматривать любые множества, содержащие s . При этом в случае $t \in Y$ в A должна входить дуга e_0 .

Рассматривавшиеся в цитированной выше работе Лоулера и Мартела полиматроидные потоки являются частным случаем базисных потоков, однако этого нельзя утверждать относительно содержащейся в этой работе теоремы о максимальном полиматроидном потоке и минимальном разрезе и нашей теоремы. Применительно к полиматроидным потокам утверждение теоремы 18 оказывается в некотором смысле слабее аналогичного утверждения из работы Лоулера и Мартела.

3. Задачи теории расписаний [8–12]

Выше уже отмечалась важная роль задачи о кратчайшем пути при построении алгоритмов решения некоторых задач стандартизации. Ниже будет показано, что использование кратчайших (и минимаксных) путей оказывается весьма целесообразным и при исследовании некоторых задач теории расписаний, приводя к установлению ряда полезных свойств и эффективной разрешимости этих задач.

Так, в статье [8] рассматривалась задача составления оптимального расписания выполнения двух работ при следующих предположениях. Работа 1 состоит из m операций $O'_1, O'_2, \dots, O'_m$, а работа 2 — из n операций $O''_1, O''_2, \dots, O''_n$. Выполнение операции $O'_r(O''_s)$ может быть начато лишь после завершения операции $O'_{r-1}(O''_{s-1})$. Известны продолжительности операций O'_r и O''_s , равные a_r и b_s соответственно ($r = 1, \dots, m, s = 1, \dots, n$). Кроме того, задано множество запретов G , являющееся подмножеством множества $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$. Если $(r, s) \in G$, то операции O'_r и O''_s , выполняться одновременно не могут. Требуется выполнить данные работы, затратив на это минимальное количество времени. Минимальное время, достаточное для выполнения этих работ, называется длиной оптимального расписания. Целью данной статьи было установление верхней оценки длины оптимального расписания.

В несколько иной формулировке подобная задача рассматривалась в работах Акерса [1956]²⁶, Хардгрейва и Немхаузера [1963]²⁷ и др., где предлагалась геометрическая модель, с помощью которой решение этой задачи сводилось к отысканию кратчайшего пути между двумя полюсами некоторой конечной сети. В нашем случае эта модель использовалась для получения верхней оценки длины кратчайшего пути (оптимального расписания). Сама модель основана, по существу, на использовании фазового пространства рассматриваемой системы и состоит в следующем.

Для удобства изложения введем дополнительные операции O'_{m+1} и O''_{n+1} с продолжительностями $a_{m+1} = b_{n+1}$ и рассмотрим положительный квадрант плоскости xOy , точки которого могут характеризовать степень завершенности данных работ (состояния системы). Для этого достаточно состояние системы, при котором операции $O'_1, O'_2, \dots, O'_{r-1}$ и $O''_1, O''_2, \dots, O''_{s-1}$ выполнены, а операции O'_r и O''_s еще не завершены и выполнялись лишь a'_r ($0 \leq a'_r < a_r$) и b'_s ($0 \leq b'_s < b_s$) единиц времени соответственно, изображать

²⁶Akers Sheldon B. Jr. A graphical approach to production scheduling problems. — Operat. Res. 4, 2, 1956, 244–245.

²⁷Hardgrave William W. and Nemhauser George L. A geometric model and a graphical algorithm for a sequencing problem. — Operat. Res. 11, 6, 1963, 889–900.

точкой (x, y) , где $x = \sum_{k=1}^{r-1} a_k + a'_r$ и $y = \sum_{k=1}^{s-1} b_k + b'_s$.

Кроме перечисленных выше ограничений, дополнительно предполагается, что всякая операция, будучи начатой, не может прерываться до полного завершения. (Случай с прерываниями рассматривается отдельно). В таком случае некоторые состояния системы оказываются недопустимыми, так как в них система не сможет находиться ни при каком порядке выполнения работ, удовлетворяющем наложенным ограничениям. Если положить $A_0 = 0$, $A_r = A_{r-1} + a_r$ ($r = 1, \dots, m$) и $B_0 = 0$, $B_s = B_{s-1} + b_s$ ($s = 1, \dots, n$), то внутренние точки прямоугольников $[A_{r-1}, A_r; B_{s-1}, B_s]$, $(r, s) \in G$, и только они, соответствуют как раз таким недопустимым состояниям (эти точки мы также будем называть недопустимыми).

Всякому способу выполнения работ, допустимому относительно рассматриваемых ограничений (при множестве запретов G), в пространстве состояний (плоскости xOy) будет соответствовать некоторая траектория, исходящая из начала координат. Такую траекторию естественно называть допустимой (относительно G).

Допустимая траектория не проходит через недопустимые точки и представляет собой связную ломаную линию, состоящую из горизонтальных звеньев, вертикальных звеньев и звеньев, составляющих с осями координат углы, равные 45° , причем каждое горизонтальное (вертикальное) звено должно лежать на некоторой прямой вида $y = B_s$ ($x = A_r$). При движении по допустимой траектории ни одна из координат не может убывать. “Длину” горизонтального (вертикального) звена траектории следует считать равной его обычной евклидовой длине, тогда как под “длиной” наклонного звена следует понимать длину его проекции на ось координат (в нашем случае длины обеих проекций равны). Тогда общая “длина” траектории равняется сумме “длин” всех ее звеньев, и задача составления оптимального расписания сводится к задаче нахождения допустимой траектории, оканчивающейся в точке (A_m, B_n) и имеющей минимальную “длину”.

Введем еще некоторые определения и обозначения.

Всякую траекторию, оканчивающуюся в точке (x, y) , назовем (x, y) -траекторией, а точку (x, y) t -достижимой, если существует допустимая (x, y) -траектория, “длина” которой не превосходит t . Через E_t обозначим множество всех t -достижимых точек. Точку (x, y) будем называть t -квазидостижимой, если существует t -достижимая точка (x', y') такая, что $x \leq x'$, $y \leq y'$. Множество всех t -квазидостижимых точек обозначим через H_t .

Легко доказывается утверждение: “если $(A_r, B_s) \in H_t$, то $(A_r, B_s) \in E_t$ ”, которое позволяет, учитывая очевидное соотношение $E_t \subset H_t$, сформулировать задачу определения длины оптимального расписания следующим образом: найти минимальное t° , при котором $(A_m, B_n) \in H_{t^\circ}$.

Следует отметить, что введение в рассмотрение множества H_t оправдывается тем обстоятельством, что оно, с одной стороны, теснейшим образом связано с E_t , а с другой стороны, имеет по сравнению с ним более регулярную структуру и в связи с этим легче поддается исследованию и использованию в наших целях.

При любом $t \geq 0$ множество H_t представляет собой многоугольник, содержащийся в квадрате $[0, t; 0, t]$, причем, если $x \leq t$, $y \leq t$ и $(x, y) \notin H_t$, то и весь прямоугольник $[x, t; y, t]$ не имеет общих точек с H_t . Следовательно, если через $S(H)$ обозначить площадь многоугольника H , то при $A_m \leq t$, $B_n \leq t$ и $(A_m, B_n) \notin H_t$ будем иметь $S(H_t) + (t - A_m) \times (t - B_n) < t^2$. Таким образом, если при некотором $\bar{t}$ последнее неравенство не выполняется и $\bar{t} \geq A_m$, $\bar{t} \geq B_n$, то $\bar{t} \geq t^\circ$. Эта идея и положена в основу получения верхней оценки длины оптимального расписания.

Основная тяжесть в статье [8] приходится на доказательство неравенства

$$t^2 - S(H_t) \leq P(G)$$

при любом $t \geq 0$, где

$$P(G) = \sum_{(r,s) \in G} (a_r + b_s)^2 / 4.$$

Отсюда легко получается искомая оценка:

$$t^\circ \leq (A_m + B_n)/2 + \sqrt{(A_m - B_n)^2/4 + P(G)}. \quad (29)$$

Опираясь на доказанное неравенство, нетрудно получить аналогичную оценку для случая, когда процесс выполнения любой операции может быть прерван произвольное число раз. Если обозначить в этом случае через t^* длину оптимального расписания, то оценка будет иметь прежний вид, только вместо $P(G)$ следует взять $Q(G) = \sum_{(r,s) \in G} a_r b_s$:

$$t^* \leq (A_m + B_n)/2 + \sqrt{(A_m - B_n)^2/4 + Q(G)}. \quad (30)$$

Аналогичная задача, но при более сильных ограничениях, рассматривалась В. Э. Хенкиным [1966]²⁸. Полученная им верхняя оценка следует из (29) при соответствующих предположениях. Оценки (29), (30) не могут быть улучшены, так как нетрудно построить примеры, когда они достигаются.

Исследование свойств множества H_t , проведенное с целью получения оценок (29) и (30), послужило также основой для построения эффективных

²⁸Хенкин В. Э. Об одном вопросе теории расписаний. — Кибернетика, 6, 1966.

алгоритмов отыскания оптимальных расписаний как в случае непрерывного выполнения операций, так и в случае, когда допускаются прерывания. Этому посвящена работа [9]. В ней вводятся в рассмотрение плоскость переменных u, v и играющее существенную роль отображение $g : (x, y) \rightarrow (u, v)$, где $u = x - t$, $v = y - t$, $t = \min\{t' \mid (x, y) \in H_{t'}\}$.

Для описания его свойств будем использовать следующие обозначения. Если (c_r, d_r) , $r = 1, 2, \dots, p$ ($p \geq 2$), — некоторые точки плоскости xy или uv , то посредством $\langle (c_1, d_1), (c_2, d_2), \dots, (c_p, d_p) \rangle$ обозначается ломаная линия, звеньями которой являются отрезки прямых с концами в точках (c_r, d_r) и (c_{r+1}, d_{r+1}) , $r = 1, \dots, p - 1$.

$$M'_{rs} = \langle (A_{r-1}, B_s), (A_{r-1}, B_{s-1}), (A_r, B_{s-1}) \rangle,$$

$$M''_{rs} = \langle (A_{r-1}, B_s), (A_r, B_s), (A_r, B_{s-1}) \rangle.$$

Рассмотрим сначала первый (“без прерываний”) вариант задачи и отметим некоторые свойства отображения g в этом случае.

- 1.1) Если точки отрезка $\langle (x, y), (x + t, y + t) \rangle$ являются допустимыми, то $g(x + t, y + t) = g(x, y)$.
- 1.2) Пусть $(x, y) \in M''_{rs}$, $g(A_{r-1}, B_s) = (u_1, v_1)$, $g(A_r, B_{s-1}) = (u_2, v_2)$ и $(r, s) \in G$. Тогда $g(x, y) = (x - t, y - t)$, где $t = \min(x - u_1, y - v_2)$, откуда, в частности, следует $g(M''_{rs}) = \langle (u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_2, v_2) \rangle$.

Соответствующие свойства отображения g для второго (“с прерываниями”) варианта задачи имеют вид:

- 2.1) Если отрезок $\langle (x, y), (x + t, y + t) \rangle$ не содержит особых точек, то $g(x + t, y + t) = g(x, y)$. (Особыми здесь называются точки, которые в первом варианте задачи назывались недопустимыми. Изменение термина вызвано тем, что соответствующие этим точкам состояния системы во втором варианте задачи являются допустимыми, но одновременное выполнение обеих работ при этом невозможно.)
- 2.2) Пусть $(r, s) \in G$, $g(A_{r-1}, B_s) = (u', v')$, $g(A_r, B_{s-1}) = (u'', v'')$ и $(x, y) \in M'_{rs}$. Тогда $g(x, y) = (x - t, y - t)$, где $t = \min(x - u', y - v'')$.

Кроме того, если

$$g(M'_{rs}) = \langle (u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_2, v_2), \dots, (u_{i-1}, v_i), (u_i, v_i) \rangle, \quad (31)$$

где $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_i$, $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_i$,
 $(u_1, v_1) = g(A_{r-1}, B_s)$, $(u_i, v_i) = g(A_r, B_{s-1})$, то

$$g(M''_{rs}) = \langle (u'_1, v'_1), (u'_1, v'_2), (u'_2, v'_2), \dots, (u'_{i-1}, v'_i), (u'_i, v'_i) \rangle,$$

где $v'_j = v_j$, $u'_j = \max(u_1, u_j - b_s)$, $j = 1, \dots, i$, в случае $v_i - u_1 > B_s - A_r$, и $u'_j = u_j$, $v'_j = \max(v_i, v_j - a_r)$, $j = 1, \dots, i$, в случае $v_i - u_1 \leq B_s - A_r$.

Из отмеченных свойств отображения g следует, что для нахождения $g(x, y)$ при $(x, y) \in M''$ в обоих вариантах рассматриваемой задачи достаточно иметь значения g в точках ломаной M'_{rs} . Причем если $g(M'_{rs})$ представляет собой ломаную линию вида (31), то и $g(M''_{rs})$ является ломаной линией того же вида. Это обстоятельство позволило предложить эффективный способ нахождения значений $g(x, y)$ и построения в конечном счете оптимального расписания.

В процессе выполнения предлагаемых алгоритмов для $k = 0, 1, \dots, q$, где $q = |G|$, определяются:

- a) упорядоченное множество $P_k = \{(u_r, v_r) \mid r = 1, 2, \dots, r_k\}$ такое, что $-\infty = u_0 < u_1 < \dots < u_{r_k-1} = u_{r_k} = 0 = v_0 = v_1 > \dots > v_{r_k} = -\infty$.
- b) множество $Q_k = \cup\{P_s \mid s = 0, \dots, k\} \setminus \{(-\infty, 0), (0, -\infty)\}$.
- c) множество $R_k \subset Q_k \times Q_k$.
- d) отображение $h : Q_k \rightarrow R^2$.

В результате будут построены множества P_q , Q_q , R_q и отображение h , обладающие следующими свойствами.

Если $P_q = \{(u_r, v_r) \mid r = 0, 1, \dots, r_q\}$, то ломаная

$$W = \bigcup \{ \langle (u_{r-1}, v_{r-1}), (u_{r-1}, v_r), (u_r, v_r) \rangle \mid r = 1, \dots, r_q \}$$

служит образом для $M = \langle (0, +\infty), (0, B_n), (A_m, B_n), (A_m, 0), (+\infty, 0) \rangle$ при отображении g . Следовательно, образом точки (A_m, B_n) при отображении g является точка пересечения ломаной W с прямой $v - u = B_n - A_m$.

Если (u, v) — элемент множества Q_q , отличный от $(0, 0)$, то существует единственный элемент $(u', v') \in Q_q$, такой, что $\langle (u, v), (u', v') \rangle \in R_q$, причем либо $u = u'$, $v < v'$, либо $u < u'$, $v = v'$.

Пусть $\langle (u, v), (u', v') \rangle \in R_q$, $h(u, v) = (x, y)$, $h(u', v') = (x', y')$; тогда $x' \leq x$, $y' \leq y$. Обозначим посредством $\langle h(u, v) \dots h(u', v') \rangle$ ломаную линию $\langle (x, y), (\bar{x}, \bar{y}), (x', y') \rangle$, где $\bar{x} = x' + \min(x - x', y - y')$, $\bar{y} = y' + \min(x - x', y - y')$. Отрезок $\langle (x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle$ лежит на некоторой прямой вида $x = A_r$, либо $y = B_s$. В то же время отрезок $\langle (\bar{x}, \bar{y}), (x', y') \rangle$ не содержит недопустимых точек. Следовательно, если к любой допустимой (x', y') -траектории присоединить ломаную $\langle h(u, v) \dots h(u', v') \rangle$, то получим допустимую (x, y) -траекторию.

Построение оптимального расписания завершается после определения номера i такого, что

$$v_i - u_i \geq B_n - A_m > v_{i+1} - u_{i+1}, \quad (u_i, v_i), (u_{i+1}, v_{i+1}) \in P_q.$$

Тогда $g(A_m, B_n) = (u^0, v^0)$, где $u^0 = A_m - t^0$, $v^0 = B_n - t^0$, $t^0 = \min(A_m - u_i, B_n - v_{i+1})$ — длина оптимального расписания. Далее однозначным образом строится последовательность $(u^0, v^0), (u^1, v^1), \dots, (u^s, v^s)$, такая, что

$(u^1, v^1) = (u_i, v_i)$ в случае $v_{i+1} - u_i \leq B_n - A_m$ и $(u^1, v^1) = (u_{i+1}, v_{i+1})$ в противном случае, $\langle (u^j, v^j), (u^{j+1}, v^{j+1}) \rangle \in R_q$ ($j = 1, \dots, s-1$), $(u^s, v^s) = (0, 0)$. Выделенной последовательности соответствует ломаная

$$L^0 = \bigcup \{ \langle h(u^{j-1}, v^{j-1}) \dots h(u^j, v^j) \rangle \mid j = 1, \dots, s \},$$

которая является допустимой (A_m, B_n) -траекторией, а ее “длина” равна t^0 , т. е. L^0 есть искомая оптимальная траектория (здесь $h(u^0, v^0) = (A_m, B_n)$).

В работе [10] приведенная выше оценка (29) была использована для получения некоторой нетривиальной верхней оценки длины оптимального расписания в задаче обработки n деталей на m станках. Формулировка этой задачи имеет следующий вид. Пусть требуется выполнить n работ (изготовить n деталей). Каждая работа состоит из m различных операций (одних и тех же для всех работ), выполняемых в заданном (вообще говоря, разном для разных работ) порядке на разных станках. Одновременно две (и более) одинаковые операции выполняться не могут. Длительность выполнения каждой операции считается равной единице. Требуется составить кратчайшее расписание выполнения данных работ.

Привлекая индукцию (по числу деталей) и оценку (29), легко получается верхняя оценка длины оптимального расписания, равная $m + (n - 1)\sqrt{m}$. Наряду с этим в рассматриваемой работе получена также нижняя оценка для функции Шеннона $L(n, m)$, значение которой равно, по определению, длине кратчайшего расписания в наихудшем случае (при фиксированных значениях параметров m и n). Эта оценка имеет вид:

$$L(n, m) \geq \begin{cases} m + p[\sqrt{m/p}] + n - p - 1, & \text{при } m > 4p, \\ m + [m/4] + n - 1, & \text{при } m \leq 4p, \end{cases}$$

где $p = [\log n]$.

Наконец, в работе [13] рассматривается известная задача Джонсона обработки деталей на станках. В общем случае при числе станков больше двух эта задача является NP -трудной, однако в ряде частных случаев она эффективно решается посредством сведения к некоторой задаче с двумя станками.

Полученные в работе результаты содержат различные достаточные условия такой сводимости, обобщающие некоторые из ранее известных. Более подробно исследуются условия сводимости для задачи с тремя станками, а для задач с большим числом станков приводится лишь формулировка основного результата, иллюстрируемая одним частным случаем.

Пусть имеется n деталей, каждая из которых должна пройти обработку на станках A , B и C в указанной последовательности. Введем следующие обозначения:

$J = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество номеров деталей;

a_k, b_k, c_k — длительности обработки k -й детали на станках A, B и C соответственно;

σ — некоторая перестановка элементов множества J ;

$V = \{(r, s) \mid r \leq s, r, s \in J\}$;

$V_0 = \{(k, k) \mid k \in J\}$;

$F(\sigma; r, s) = \sum_{k=1}^r a_{\sigma(k)} + \sum_{k=r}^s b_{\sigma(k)} + \sum_{k=s}^n c_{\sigma(k)}$;

$F(\sigma; V') = \max\{F(\sigma; r, s) \mid (r, s) \in V'\}, V' \subset V$.

Если детали обрабатываются на каждом станке в последовательности, задаваемой перестановкой σ , то время, затрачиваемое на обработку всех деталей, будет равно $F(\sigma; V)$. Задача состоит в отыскании перестановки σ^0 , для которой

$$(V) \quad F(\sigma^0; V) = \min_{\sigma} F(\sigma; V).$$

Здесь будет уместно заметить, что $F(\sigma; V)$ представляет собой длину самого длинного (“критического”) пути из вершины x_0 в вершину z_0 в графе G_{σ} с множеством вершин $\{x_0, z_0\} \cup \{x_k, y_k, z_k \mid k = 1, \dots, n\}$ и множеством дуг

$$\bigcup_{k=1}^n \{(x_k, y_k), (y_k, z_k)\} \cup \{(x_0, x_{\sigma(1)}), (z_{\sigma(n)}, z_0)\} \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} \{(x_{\sigma(k)}, x_{\sigma(k+1)}), (y_{\sigma(k)}, y_{\sigma(k+1)}), (z_{\sigma(k)}, z_{\sigma(k+1)})\};$$

причем длины дуг, исходящих из вершины x_k (соответственно, y_k и z_k), равны a_k (соответственно, b_k и c_k), $k = 1, \dots, n$. Учитывая это, задачу (V) можно рассматривать как специфическую задачу о минимаксном пути.

Для любого $V', V' \subset V$, имеет место неравенство $F(\sigma; V') \leq F(\sigma; V)$, вследствие чего при выполнении условия

$$\min_{\sigma} F(\sigma; V') = F(\sigma^0; V) \quad (32)$$

σ^0 есть оптимальное решение задачи (V), т. е. исходная задача сводится к вспомогательной задаче (V'). При $V' = V_0$ задача (V₀) в свою очередь сводится к задаче определения оптимальной последовательности обработки n деталей на двух станках A' и B' с длительностями обработки k -й детали, равными $a_k + b_k$ и $b_k + c_k$ соответственно. В связи с полиномиальной разрешимостью последней задачи представляется естественным и вполне оправданным исследование условия (32) сводимости исходной задачи (V) к задаче (V₀).

В работе Джонсона [1954]²⁹ были указаны следующие два случая сводимости: а) $\min_k a_k \geq \max_k b_k$; б) $\min_k c_k \geq \max_k b_k$.

В дальнейшем В. Я. Бурдюк [1969]³⁰ заметил, что интересующая нас сводимость имеет место при нескольких ослабленных ограничениях, а именно:

а') $a_r \geq b_s$ при $r \neq s, r, s \in J$;

б') $c_r \geq b_s$ при $r \neq s, r, s \in J$.

Задача (V) сводится к задаче (V₀), если для любой перестановки σ и $(r, s) \in V$ найдется такое $k \in J$, что

$$F(\sigma; r, s) \leq F(\sigma; k, k). \quad (33)$$

Так, например, в случае а') неравенство (33) выполняется при $k = s$, а в случае б') — при $k = r$. В нашей работе [13] было проведено изучение условий, при которых

$$F(\sigma; r, s) \leq \max\{F(\sigma; r, r), F(\sigma; s, s)\}. \quad (34)$$

Последнее неравенство имеет место тогда и только тогда, когда для любых r и s из $J, r \neq s$, и любого подмножества $J' \subset J$, не содержащего r и s , выполняется неравенство

$$\max\left\{\sum_{k \in J'} (a_k - b_k) + a_s - b_r, \sum_{k \in J'} (c_k - b_k) + c_r - b_s\right\} \geq 0. \quad (35)$$

Пусть $J_{rs} = J \setminus \{r, s\}$, X_{rs} — $(n - 2)$ -мерное пространство векторов $x = (x_j \mid j \in J_{rs})$, а E_{rs} — единичный куб в X_{rs} , вершинами которого являются булевы векторы. Тогда при фиксированных r и s условие (35) означает, что открытое множество

$$Q_{rs} = \{x \in X_{rs} \mid \sum_k (a_k - b_k)x_k + a_s - b_r < 0, \sum_k (c_k - b_k)x_k + c_r - b_s < 0\}$$

не содержит вершин куба E_{rs} . Уловить указанное обстоятельство посредством более или менее обозримых необходимых и достаточных условий весьма затруднительно. Поэтому мы довольствуемся несколько более слабым результатом, гарантирующим выполнение отмеченного выше условия за счет отделимости множеств Q_{rs} и E_{rs} , что имеет место при отсутствии общих точек у них.

Используя обозначения $P_k(t) = ta_k - (1 - t)b_k$ и $Q_k(t) = (1 - t)c_k - tb_k$, мы получаем следующий результат.

²⁹Johnson S. M. Optimal Two- and Three- Stage Production Schedules with Setup Times Included. — Nav. Res. Log. Quart., 1954, 1, 1, 61-68. [Русский перевод: Джонсон С. Оптимальное расписание для двух- и трехступенчатых процессов с учетом времени наладки. — В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 1. Сборник переводов. М.: Мир, 1965, 78-86.]

³⁰Бурдюк В. Я. О задаче m станков ($m > 2$). — Кибернетика, Киев, 1969, 3, 74-76.

Теорема 19 [13]. Если для любых r и s из J , $r \neq s$, существует $t \in [0, 1]$, удовлетворяющее неравенству

$$\sum_{k \in J_{rs}} (P_k(t) + Q_k(t))^+ + P_s(t) + Q_r(t) \geq 0, \quad (36)$$

то задача (V) сводится к задаче (V_0) . (Здесь $(a)^+ = \max(0, a)$.)

В случае выполнения условий теоремы может, вообще говоря, не существовать такое t , при котором неравенство (36) было бы верным при любых r и s , $r \neq s$. Формулируемая ниже теорема касается того случая, когда это не так.

Теорема 20 [13]. Неравенства (36) имеют общее решение t тогда и только тогда, когда

$$P_s(t) + Q_r(t) \geq 0 \quad (37)$$

для любых r и s , $r \neq s$.

Следствия теорем 19 и 20. Каждое из условий $1^\circ - 5^\circ$ является достаточным условием сводимости $(3 \times n)$ -задачи Джонсона к $(2 \times n)$ -задаче Джонсона.

$$1^\circ. \exists t \in [0, 1] : \min_k P_k(t) + \min_k Q_k(t) \geq 0.$$

$$2^\circ. \max_k b_k / c_k \leq \min_k a_k / b_k.$$

$$3^\circ. (\forall k) \ b_k \leq \min(a_k, c_k).$$

$$4^\circ. \min_k a_k \geq \max_k b_k.$$

$$5^\circ. \min_k c_k \geq \max_k b_k.$$

Подход, использованный для получения условий (36), (37), $1^\circ - 5^\circ$ сводимости задачи с тремя станками к задаче с двумя станками, может быть применен и в случае большего числа станков, если при этом ограничиться поиском оптимального расписания в классе тех расписаний, при которых обработка деталей на каждом станке производится в одной и той же последовательности.

Рассмотрим $(m \times n)$ -задачу определения оптимальной последовательности обработки n деталей на m станках ($m > 3$), длительность обработки k -й детали на i -м станке обозначим посредством d_{ik} . Будем говорить, что $(m \times n)$ -задача сводится к $(2 \times n)$ -задаче, если оптимальная последовательность обработки n деталей на двух станках A' и B' при длительностях

обработки деталей, равных $a'_k = \sum_{i=1}^{m-1} d_{ik}$ и $b'_k = \sum_{i=2}^m d_{ik}$ соответственно, является оптимальной и для исходной задачи.

Обозначим через W совокупность всевозможных троек $[x, y, z]$ натуральных чисел таких, что $1 \leq x < y < z \leq m$. Если $w = [x, y, z] \in W$, то положим

$$P_k^w(t) = t \sum_{i=x}^{y-1} d_{ik} - (1-t) \sum_{i=y}^{z-1} d_{ik},$$

$$Q_k^w(t) = (1-t) \sum_{i=y+1}^z d_{ik} - t \sum_{i=x+1}^y d_{ik}.$$

Пусть W_0 есть множество всех тех троек w из W , для которых имеет место

$$\max_{t \in [0,1]} \left\{ \sum_{k \in J} (P_k^w(t) + Q_k^w(t))^+ + P_s^w(t) + Q_r^w(t) \right\} \geq 0$$

при любых r и s из J , $r \neq s$.

Систему троек T , $T \subset W$, назовем согласованной, если

- 1) T содержит тройку вида $[1, y, m]$;
- 2) T содержит тройку вида $[x, y', y]$ (соответственно $[y, y', z]$), если $[x, y, z] \in T$ и $y - x > 1$ ($z - y > 1$).

Тогда обобщением теоремы 19 будет служить

Теорема 21 [13]. *Если W_0 содержит некоторую согласованную систему троек, то исходная m -станочная задача сводится к задаче с двумя станками.*

Так, например, в случае $m = 4$ согласованная система $T = \{[1, 2, 3], [1, 3, 4]\}$ будет содержаться в W_0 , если

$$\max_k b_k/c_k \leq \min_k a_k/b_k \quad \text{и} \quad \max_k (b_k + c_k)/d_k \leq \min_k (a_k + b_k)/c_k,$$

где d_k — длительность обработки k -й детали на 4-м станке.

Таким образом, используя изложенный подход, можно выделять частные случаи многостаночных задач Джонсона, сводящихся к задаче с двумя станками.

Заключение

В работе получены следующие результаты:

1) Доказаны достаточные условия выпуклости последовательностей минимальных значений величин, порожденных n -звенными путями некоторого бесконечного графа, что позволило объединить ранее известные, но разрозненные результаты. Продемонстрировано их применение в задачах стандартизации при построении более эффективных алгоритмов.

2) В случае базовой задачи стандартизации (выбора типажа оборудования) предложен способ построения нижней оценки целевой функции, основанный на использовании тупиковых решений двойственной задачи, и обосновано его преимущество по сравнению с известным способом. На этой основе построен малотрудоемкий приближенный алгоритм с апостериорной оценкой точности.

3) Для задачи минимизации выпуклой сепарабельной функции полностью охарактеризованы множества (полиматроиды), на которых решение задачи может быть получено методом покоординатного спуска. Выделен также класс множеств, для которых указанный метод позволяет решать соответствующую задачу минимизации выпуклой функции более общего вида. Исследован способ задания множеств с требуемыми (для применимости указанного метода) свойствами посредством систем линейных неравенств.

4) Доказаны теоремы, характеризующие локальное строение множеств, являющихся пересечением двух целочисленных полиматроидов. На их основе получен критерий оптимальности для задачи минимизации выпуклой сепарабельной функции на пересечениях полиматроидов и обоснован метод пошагово-локальной оптимизации, число шагов которого не превосходит минимального из рангов полиматроидов, а трудоемкость каждого шага полиномиальным образом зависит от размерности пространства и линейным образом — от суммарной трудоемкости процедур вычисления значений целевой функции и проверки принадлежности точки данным полиматроидам.

5) Введено и изучено понятие базисной системы, родственное понятию полиматроида, но более удобное для построения обобщения задачи о потоке в сети. Результаты, касающиеся пересечения полиматроидов, перенесены на случай пересечения базисных систем. Установленные свойства использованы для введения и обоснования некоторой достаточно общей операции над базисными системами. Предложен метод “сокращения невязок” (относящийся к классу методов пошагово-локальной оптимизации) для решения задачи минимизации выпуклой сепарабельной функции на пересечении двух базисных систем.

6) Рассмотрена задача о потоке минимальной стоимости в базисной сети с выпуклыми функциями стоимостей перевозок по дугам, представляющая собой далеко идущее обобщение изучавшейся другими авторами задачи о полиматроидном потоке максимальной мощности. Показана ее эквивалентность задаче минимизации выпуклой сепарабельной функции на пересечении двух базисных систем. Для базисных сетей доказан также некоторый аналог теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе.

7) Для сформулированной задачи составления оптимального расписания выполнения двух работ предложен основанный на свойствах кратчайших путей метод получения верхней оценки (и сама оценка) длины оптимального расписания, что использовано для построения алгоритма решения данной задачи и получения верхней оценки в задаче Акерса–Фридмена в случае одинаковых длительностей операций. Для последней задачи получена также нетривиальная нижняя оценка функции Шеннона (длины оптимального расписания в наихудшем случае). Выделен ряд случаев полиномиальной разрешимости многостаночной задачи Джонсона путем обоснования некоторых достаточных условий ее сводимости к задаче с двумя станками.

Список публикаций

1. О выпуклых последовательностях. — Сб. “Дискретный анализ”, вып. 4, Новосибирск, 1965, с. 10–22.
2. Об одном классе задач типа стандартизации, унификации и размещения. /Совместно с Гимади Э.Х./ — Тезисы II Всесоюзной конф. по проблемам теоретической кибернетики, Новосибирск, 1971, с. 29–31.
3. О динамике развития однородных технических систем. /Совместно с Дементьевым В. Т. и Сычевым А.Н./ — Сб. “Управляемые системы”, вып. 8, Новосибирск, 1971, с. 51–67.
4. Некоторые задачи выбора оптимальных параметрических рядов и методы их решения. /Совместно с Дементьевым В. Т. и Гимади Э.Х./ — II-ой Симпозиум по приложениям математики в стандартизации, Варшава, 1972, с. 283–295.
5. Об одном методе построения нижней оценки приближенного решения с апостериорной оценкой точности решения для задач стандартизации. /Совместно с Гимади Э.Х. и Дементьевым В. Т. / — Сб. “Управляемые системы”, вып. 13, Новосибирск, 1974, с. 26–31.
6. Об одном приближенном алгоритме с апостериорной оценкой точности решения для задачи размещения. /Совместно с Гимади Э.Х. и Перепелицей В. А./ — Сб. “Оптимальное перспективное планирование в отраслях промышленного производства”, ч. 1, Новосибирск, 1974, с. 53–61.
7. Типовая методика оптимизации одномерного параметрического ряда. /Совместно с Гимади Э.Х. и Дементьевым В. Т./ — Издательство стандартов, М., 1976, 64 с.
8. О верхней оценке длины оптимального расписания для двух работ. — Сб. “Проблемы кибернетики”, вып. 20, М., 1968, с. 225–229.
9. Алгоритм составления оптимального расписания для двух работ. — Сб. “Управляемые системы”, вып. 1, Новосибирск, 1968, с. 14–20.
10. О нижней и верхней оценках для одной задачи теории расписаний. /Совместно с Перепелицей В. А./ — Сб. “Исследования по кибернетике”, Изд. “Сов. радио”, М., 1969, с. 11–17.

11. Исследования по теории расписаний. /Совместно с Гимади Э. Х. и Перепелицей В. А./ — Сб. “Управляемые системы”, вып. 12, Новосибирск, 1974, с. 3–10.
12. Некоторые случаи сводимости m -станочной задачи Джонсона к задаче с двумя станками. — Сб. “Управляемые системы”, вып. 17, Новосибирск, 1978, с. 46–51.
13. Об одном классе задач выпуклого целочисленного программирования. — Сб. “Управляемые системы”, вып. 11, Новосибирск, 1973, с. 38–42.
14. О разрешимости некоторых задач выпуклого целочисленного программирования посредством алгоритма покоординатного спуска. — Тезисы IV-ой Всесоюзной конф. по проблемам теор. кибернетики, Новосибирск, 1977, с. 98–99.
15. О применимости метода покоординатного спуска к некоторым задачам выпуклого целочисленного программирования. — Сб. “Управляемые системы”, вып. 17, Новосибирск, 1978, с. 52–59.
16. Обобщение задачи о потоке в сети. — “Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях. Ч. 2. Теория и алгоритмы”, Новосибирск, 1982, с. 30–32.
17. О задаче минимизации выпуклой сепарабельной функции на пересечении полиматроидов. — Сб. “Управляемые системы”, вып. 23, Новосибирск, 1983, с. 33–43.
18. Аналог теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе для базисных сетей. — “Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях. Ч. 2. Теория и алгоритмы”, Новосибирск, 1984, с. 29–30.
19. Базисные системы и задача минимизации на пересечении базисных систем. — Сб. “Управляемые системы”, вып. 25, Новосибирск, 1984, с. 58–67.
20. Задача минимизации на пересечении базисных систем. — Тезисы VII Всесоюзной конф. по проблемам теор. кибернетики, Иркутск, 1985, с. 37.
21. Optimization problems on discrete sets of polymatroidal structure. — Abstracts Second Int. conf. on Discrete Math. and Appl., Blagoevgrad, 1990, p. 34.

22. Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации. /Совместно с Гимади Э. Х. и Перепелицей В. А./ — Сб. “Проблемы кибернетики”, вып. 31, М., 1975, с. 35–42.
23. Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации. — Mathematischen Gesellschaft der DDR, Mitteilungen, Berlin, Н. 2–3, 1977, s. 35–39.
24. Экстремальные задачи принятия решений. /Совместно с Гимади Э. Х./ — Новосибирск: НГУ, 1982, 80 с.
25. Разработка математических методов и программного обеспечения для решения большеразмерных задач дискретной оптимизации. /Совместно с Гимади Э. Х./ — Тезисы докладов Всесоюзного научно-технического семинара “Семейство моделей многопроцессорных вычислительных комплексов “Эльбрус” — состояние и перспективы развития”, М., 1990, с. 84–86.
26. Сложность вычисления некоторых функций от графов. /Совместно с Косточкой А. В./ — Сб. “Методы дискретного анализа в синтезе реализаций булевых функций”, Новосибирск, 1991, вып. 51, с. 7–16.
27. Дискретные экстремальные задачи принятия решений. /Совместно с Гимади Э. Х./ — Новосибирск: НГУ, 1991, 76 с.

МЕТОДЫ ДИСКРЕТНОГО АНАЛИЗА В СИНТЕЗЕ РЕАЛИЗАЦИЙ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Сборник трудов

1991 г.

Института математики СО АН СССР

Выпуск 51

УДК 519.17

СЛОЖНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ ОТ ГРАФОВ

Н. И. Глебов, А. В. Косточка

Приведена простая конструкция, из которой следует, что для некоторого бесконечного класса функций от графов задачи вычисления значений этих функций являются NP -трудными. В частности, этому классу принадлежат число Хадwigера и псевдоахроматическое число.

§ 1. Определения и примеры

Для любого графа G будем обозначать:

$V(G)$ — множество его вершин;

$E(G)$ — множество ребер;

$\bar{G}$ — дополнение графа G ;

$G \cup H$ — граф, состоящий из двух непересекающихся графов: G и H ,

т. е.

$$V(G \cup H) = V(G) \cup V(H),$$

$$E(G \cup H) = E(G) \cup E(H),$$

$$V(G) \cap V(H) = \emptyset;$$

$G \oplus v$ — граф, полученный из G путем добавления к нему новой вершины v , смежной со всеми вершинами G .

Через K_0 обозначается “пустой” граф, для которого имеют место соотношения

$$V(K_0) = E(K_0) = \emptyset, \quad \bar{K}_0 = K_0, \quad K_0 \cup K_0 = K_0.$$

Если $V_0 \subset V(G)$, то через $G(V_0)$ (соответственно $G \setminus V_0$), обозначается подграф G , порожденный множеством вершин V_0 (соответственно $V(G) \setminus V_0$). В частности, $G(\emptyset) = G \setminus V(G) = K_0$. Запись $G' \subset G$ означает, что G' есть порожденный подграф графа G . Если V_1 и V_2 — непересекающиеся подмножества $V(G)$, то через $G(V_1, V_2)$ обозначается двудольный граф (V_1, V_2, E) , получающийся из $G(V_1 \cup V_2)$ удалением всех ребер подграфов $G(V_1)$ и $G(V_2)$.

Пусть P — какое-либо свойство графов. Будем писать $P(G) = 1$ (соответственно $P(G) = 0$), если G обладает (соответственно не обладает) свойством P . Всюду в дальнейшем считается, что $P(K_0) = 1$, т.е. пустой граф обладает любым свойством P .

Яннакакис и Льюис [1] называли свойство P нетривиальным, если

$$(R1) \quad |\{G \mid P(G) = 1\}| = \infty, \quad |\{G \mid P(G) = 0\}| = \infty,$$

и наследственным если

$$(R2) \quad \forall G \quad [(P(G) = 1 \ \& \ G' \subset G) \Rightarrow P(G') = 1].$$

Назовем свойство ультранаследственным, если оно наследственное и удовлетворяет условию

$$(R3) \quad \forall G \quad [P(G) = 1 \Rightarrow P(G \cup G) = 1].$$

ПРИМЕР 1. Нетривиальными и ультранаследственными являются свойства:

- а) быть планарным графом,
- б) иметь хроматическое число не более t ,
- в) не содержать как порожденный подграф заданный связный граф, не равный K_1 .

ПРИМЕР 2. Свойство “быть вложимым в тор” не является ультранаследственным, поскольку для него не выполняется (R3).

ПРИМЕР 3. Через W_s далее будем обозначать свойство быть s -вырожденным графом [2], т.е. иметь в каждом подграфе вершину, степень которой меньше s . В частности, свойство W_1 означает: не иметь ребер. Понятно, что W_s является нетривиальным ультранаследственным свойством при любом $s \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для произвольного нетривиального ультранаследственного свойства P и любого графа G из $P(G) = 1$ следует $P(G \cup K_1) = 1$, поскольку $G \cup K_1$ есть подграф графа $G \cup G$ (в случае $G \neq K_0$) и $P(K_1) = 1$. В частности, $P(\bar{K}_n) = 1$ при любом $n \geq 0$.

Для каждого свойства P через $\mathcal{B}_1(P)$ обозначим множество таких отображений f семейства всех конечных графов в Z^+ , что:

- (B1) а) $P(G) = 1 \Rightarrow f(G) = |V(G)|$;
 б) $P(G) = 0 \Rightarrow \exists X \subset V(G) : X \neq \emptyset$ и $f(G) \leq 0,5|X| + f(G \setminus X)$.

ПРИМЕР 4. Для каждого наследственного свойства P функция

$$\mu_P(G) = \max\{|V(G')| : G' \subset G \text{ и } P(G') = 1\}$$

принадлежит $\mathcal{B}_1(P)$.

ПРИМЕР 5. Функция $f(G)$, равная числу компонент связности графа G , принадлежит $\mathcal{B}_1(W_1)$ (см. пример 3).

Обозначим через $\mathcal{B}_2(P)$ множество таких функций f из $\mathcal{B}_1(P)$, для которых выполняется

(B2) для любого графа G и любых его вершин v_1 и v_2 , принадлежащих разным компонентам связности, справедливо неравенство

$$f(G \setminus \{v_1, v_2\}) \leq f(G) - 1.$$

ПРИМЕР 6. Пусть $\varphi_{s,r}(G)$, $s \geq 1$, $r \geq 2$, равняется наибольшей длине t такой последовательности подмножеств $V_1, \dots, V_t$ множества $V(G)$, что

- (S1) $1 \leq |V_j| \leq r$, $j = 1, \dots, t$;
 (S2) $G(V_j)$ не содержит ребер, $j = 1, \dots, t$;
 (S3) $V_i \cap V_j = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq t$;
 (S4) $\forall 1 \leq i < t \left| \left\{ V_j \mid (j > i) \ \& \ (|E(G(V_i, V_j))| > 0,5|V_i||V_j|) \right\} \right| < s$.

Нетрудно показать, что $\varphi_{s,r} \in \mathcal{B}_2(W_s)$ (см. пример 9).

§ 2. Основная конструкция и ее применения

ЛЕММА 1. Пусть P — наследственное свойство, $f \in \mathcal{B}_1(P)$. Тогда для любого графа G

$$f(G) \leq 0,5(|V(G)| + \mu_P(G)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по числу вершин G . Если $V(G) = \emptyset$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $|V(G)| = n \geq 1$. В случае $P(G) = 1$ имеем $\mu_P(G) = n$ и, согласно (B1, 'а'),

$$f(G) = n = 0,5(|V(G)| + \mu_P(G)).$$

В случае $P(G) = 0$ согласно (B1,'б') найдется такое непустое X , $X \subset V(G)$, что

$$f(G) \leq 0,5|X| + f(G \setminus X).$$

Учитывая предположение индукции и очевидное неравенство $\mu_P(G \setminus X) \leq \mu_P(G)$, получаем

$$\begin{aligned} f(G) &\leq 0,5|X| + f(G \setminus X) \leq \\ &\leq 0,5|X| + 0,5(|V(G) \setminus X| + \mu_P(G \setminus X)) \leq \\ &\leq 0,5(|V(G)| + \mu_P(G)). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть P — нетривиальное ультранаследственное свойство, $f_1 \in \mathcal{B}_1(P)$, $f_2 \in \mathcal{B}_2(P)$ и $f_1(G) \geq f_2(G)$ для любого графа G . Тогда задача вычисления значений $f_1(G)$ является NP -трудной. (В частности, вычисление значений любой функции из $\mathcal{B}_2(P)$ является NP -трудной задачей.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — произвольный граф,

$$\begin{aligned} V(G) &= \{v_1, \dots, v_n\}, \quad \mu_P(G) = m, \\ G' &\subset G, \quad P(G') = 1, \quad V(G') = \{v_1, \dots, v_m\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$H = G \cup G', \quad V(H) = \{v_i^j \mid i = 1, \dots, n, j = 1, 2\}$$

и обозначим

$$H' = H(\{v_1^1, \dots, v_m^1, v_1^2, \dots, v_m^2\}), \quad \text{т.е. } H' = G' \cup G'.$$

Поскольку P — ультранаследственное свойство, то

$$P(H') = 1 \quad \text{и} \quad \mu_P(H) = 2m.$$

Согласно (B2), имеем:

$$\begin{aligned} f_2(H \setminus \{v_n^1, v_n^2\}) &\leq f_2(H) - 1, \\ f_2(H \setminus \{v_{n-1}^1, v_{n-1}^2, v_n^1, v_n^2\}) &\leq f_2(H \setminus \{v_n^1, v_n^2\}) - 1 \leq f_2(H) - 2, \\ &\dots\dots\dots \\ f_2(H') &\leq f_2(H) - (n - m). \end{aligned}$$

В силу (B1,'а'), $f_2(H') = 2m$. Следовательно, $f_2(H) \geq n + m$.

С другой стороны, по лемме 1,

$$f_1(H) \leq 0,5(|V(H)| + \mu_P(H)) = 0,5(2n + 2m) = n + m.$$

Таким образом, для любого графа G имеет место

$$f_1(G \cup G) = f_2(G \cup G) = |V(G)| + \mu_P(G),$$

откуда следует полиномиальная сводимость задачи вычисления значений функции μ_P к аналогичной задаче для f_1 . Однако в [1] доказано, что вычисление значений $\mu_P(G)$ является NP -трудной задачей для любого нетривиального наследственного свойства P .

Теорема доказана.

В связи с данной теоремой возникает естественный вопрос: не являются ли множества $\mathcal{B}_2(P)$ пустыми, а сама теорема бессодержательной? Из приведенных ниже теорем 2 и 3 следует, что для многих P упомянутые множества непусты.

Введем теперь в рассмотрение класс T бинарных отношений на множестве графов. Отношение $\prec$ принадлежит T , если оно удовлетворяет аксиомам (T0) и (T1):

(T0) а) $K_0 \prec G$;

б) $G \prec G$;

(T1) если $H \prec G$ и $H \notin \{K_0, G\}$, то

а) $|V(H)| < |V(G)|$,

б) $\exists v \in V(H), X \subset V(G) : |X| \geq 2, H \setminus \{v\} \prec G \setminus X$.

Отношение $\prec$, удовлетворяющее аксиомам (T0) и (T1), будем в дальнейшем называть отношением сжатия. Отношение сжатия $\prec$ будем называть регулярным, если оно удовлетворяет аксиоме

(T2) для любого графа G и любых его вершин v_1 и v_2 , принадлежащих разным компонентам связности G , из $H \prec G \setminus \{v_1, v_2\}$ следует $H \cup K_1 \prec G$.

ПРИМЕР 7. Стягиванием ребра (u, v) в графе G называется замена концевых вершин данного ребра на одну новую вершину, смежную с теми и только теми вершинами, с которыми была смежна в G хотя бы одна из вершин u и v . Скажем, что граф G стягивается на граф H (запись $H \leftarrow G$), если из какогонибудь порожденного подграфа G' графа G при помощи последовательности стягиваний ребер можно получить H . Легко проверить, что отношение $\leftarrow$ удовлетворяет аксиомам (T0) и (T1); т.е. является отношением сжатия. Значит, и отношение $\leftrightarrow$, где $H \leftrightarrow G$ означает, что дополнение $\bar{G}$ графа G стягивается на дополнение $\bar{H}$ графа H , тоже является

отношением сжатия. Более того, отношение $\leftarrow$ удовлетворяет и (Т2), т.е. является регулярным. Действительно, если v_1 и v_2 принадлежат разным компонентам связности G и $\bar{G} \setminus \{v_1, v_2\}$ стягивается на $\bar{H}$, стянув v_1 с v_2 в $\bar{G}$, получим стягивание $\bar{G}$ на $\bar{H} \oplus v$. Таким образом, $H \cup K_1 \leftarrow G$.

Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, доказывается, что k -стягиваниями, т.е. такими преобразованиями графа, при которых в каждую вершину стягивается не более k вершин, при $k \geq 2$ тоже порождаются отношения сжатия, а k -стягиваниями дополнений порождаются регулярные отношения сжатия.

ТЕОРЕМА 2. Если свойство P нетривиально и ультранаследственно, а отношение сжатия $\prec$ регулярно, то функция

$$\nu(G) = \max\{|V(H)| : H \prec G \text{ и } P(H) = 1\} \quad (1)$$

принадлежит $\mathcal{B}_2(P)$ и, следовательно, задача вычисления ее значений является NP -трудной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим выполнение условий (В1) и (В2).

Условие (В1,'а') сразу следует из (Т0,'б') и (Т1,'а'). Пусть $P(G) = 0$. Если $\nu(G) = 0$, то (В1,'б') выполняется тривиальным образом. Если $\nu(G) \geq 1$, то пусть $\nu(G) = |V(H)|$, где $H \prec G$ и $P(H) = 1$. Тогда, в силу (Т1), $|V(H)| < |V(G)|$ и найдутся такие $v \in V(H)$, $X \subset V(G)$, что $|X| \geq 2$ и $H \setminus \{v\} \prec G \setminus X$. Теперь из (R2) имеем

$$P(H \setminus \{v\}) = 1, \quad \nu(G \setminus X) \geq |H \setminus \{v\}| = \nu(G) - 1 \geq \nu(G) - 0,5|X|.$$

Значит, (В1,'б') тоже выполняется.

Условие (В2) следует из (Т2) и ультранаследственности P . В самом деле, пусть вершины v_1 и v_2 принадлежат разным компонентам связности графа G ,

$$\nu(G \setminus \{v_1, v_2\}) = |V(H)|, \quad H \prec G \setminus \{v_1, v_2\}, \quad P(H) = 1.$$

В силу (Т2), $H \cup K_1 \prec G$, а, по замечанию 1, $P(H \cup K_1) = 1$. Следовательно,

$$\nu(G) \geq |V(H)| + 1 = \nu(G \setminus \{v_1, v_2\}) + 1.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Из теоремы 2 следует, что для перечисленных в примерах 1 и 3 свойств P вычисление значений функции

$$\tau(G) = \max\{|V(H)| : H \leftrightarrow G \text{ \& } P(H) = 1\}$$

является NP -трудной задачей. Поскольку число Хадвигера дополнения графа G равно

$$\max\{|V(H)| : H \hookrightarrow G \text{ \& } W_1(H) = 1\},$$

то отсюда следует и NP -трудность задачи нахождения числа Хадвигера графов. Последнее утверждение остается справедливым и в случае k -стягиваний, $k \geq 2$.

§ 3. Некоторые уточнения и дальнейшие примеры

Отметим сразу, что условие (B2) в определении множества $\mathcal{B}_2(P)$ может быть ослаблено. Из доказательства теоремы 1 видно, что слова “разным компонентам” в (B2) могут быть заменены на “разным, но изоморфным компонентам”. По аналогичным соображениям неравенство $f_1(G) \geq f_2(G)$ в условии теоремы 1 можно заменить на $f_1(G \cup G) \geq f_2(G \cup G)$.

Укажем один способ построения регулярных отношений сжатия.

Пусть заданы некоторое множество графов $\mathcal{F}_1$ и множество двудольных графов $\mathcal{F}_2$. Определим отношение $\prec$, положив $H \prec G$, если $V(H) = \{1, \dots, t\}$, $t \geq 0$, и существует такая последовательность непустых непересекающихся подмножеств $V_1, \dots, V_t$ множества $V(G)$, что

- 1) $G(V_i) \in \mathcal{F}_1$, $1 \leq i \leq t$,
- 2) $(i, j) \in E(H) \Leftrightarrow G(V_i, V_j) \in \mathcal{F}_2$, $1 \leq i < j \leq t$.

При выполнении указанных условий последовательность $V_1, \dots, V_t$ будем называть удостоверяющей (соотношение $H \prec G$).

ТЕОРЕМА 3. Бинарное отношение $\prec$, определяемое множествами $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, будет регулярным отношением сжатия, если

- (α) $K_1, \bar{K}_2 \in \mathcal{F}_1$;
- (β) $K_2 \in \mathcal{F}_2$;
- (γ) $\bar{K}_2 \notin \mathcal{F}_2$;
- (δ) $(X, Y; E) \notin \mathcal{F}_2$, если $|X| = 2$ и каждая вершина из Y не смежна с какой-нибудь вершиной из X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнение условия (T0, 'a') очевидно. Пусть $H \prec G$ и $V_1, \dots, V_t$ — удостоверяющая последовательность, $t = |V(H)|$. Очевидно, неравенство $t > |V(G)|$ невозможно. Если же $t = |V(G)|$, то все множества V_i должны быть одноэлементными и, в силу (β) и (γ), $H = G$. Отсюда следует, что условия (T0, 'б') и (T1, 'a') выполняются. Наконец, если

$0 < t < |V(G)|$, то, считая, что

$$|V_t| = \max_{1 \leq i \leq t} |V_i|, \quad X = V(G) \setminus \bigcup_{i=1}^{t-1} V_i,$$

имеем $|X| \geq 2$ и $H \setminus \{t\} \prec G \setminus X$ с удостоверяющей последовательностью $V_1, \dots, V_{t-1}$, т.е. условие (T1,'б') тоже выполняется.

Пусть теперь вершины v_1 и v_2 принадлежат разным компонентам связности графа G и $H \prec G \setminus \{v_1, v_2\}$ с удостоверяющей последовательностью $V_1, \dots, V_t$. Если обозначить $V_{t+1} = \{v_1, v_2\}$, то получим $H \cup K_1 \prec G$ с удостоверяющей последовательностью $V_1, \dots, V_{t+1}$. Это следует из того, что $G(V_{t+1}) = \bar{K}_2 \in \mathcal{F}_1$, а двудольные графы $G(V_{t+1}, V_i)$, $i = \overline{1, t}$, в силу условия (δ), не принадлежат $\mathcal{F}_2$, поскольку $|V_{t+1}| = 2$ и в G нет вершин, смежных одновременно с v_1 и v_2 . Тем самым (T2), а с ним и теорема доказаны.

ПРИМЕР 8. Отношение $\leftrightarrow$ (см. пример 7) получаем при

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{G : \bar{G} \text{ связан}\} \quad \text{и} \\ \mathcal{F}_2 &= \{(X, Y; E) : |E| = |X||Y|\}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 9. Если положить

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{\bar{K}_n \mid 1 \leq n \leq r\}, \quad r \geq 2, \\ \mathcal{F}_2 &= \{(X, Y; E) : |E| > 0,5|X||Y|\}, \end{aligned}$$

то соответствующее бинарное отношение $\prec$ будет, по теореме 3, регулярным отношением сжатия. Кроме того, если $P = W_s$, то определяемая соотношением (1) функция ν совпадает с $\psi_{r,s}$ (см. пример 6). Из теоремы 2 получаем, что $\psi_{r,s} \in \mathcal{B}_2(W_S)$.

ПРИМЕР 10. Псевдоахроматическое число $\psi(G)$ графа G (см. [4]) можно определить как наибольшее число непустых непересекающихся подмножеств $V_1, \dots, V_t$ множества $V(G)$, удовлетворяющих условию

$$(X) \quad \forall 1 \leq i < j \leq t \quad E(G(V_i, V_j)) \neq \emptyset.$$

Определим функцию $\bar{\psi}$, положив $\bar{\psi}(G) = \psi(\bar{G})$. Тогда $\bar{\psi} = \nu$ при $P = W_1$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{G : G \text{ — любой}\}, \\ \mathcal{F}_2 &= \{(X, Y; E) : |E| = |X||Y|\}. \end{aligned}$$

Следовательно, вычисление $\psi(G)$ есть NP -трудная задача.

ПРИМЕР 11. Берков [5, гл. 2] изучал функцию h_0 , ставящую в соответствие каждому графу G наибольшую длину t последовательности непустых

непересекающихся подмножеств $V_1, \dots, V_t$ множества $V(G)$, удовлетворяющих условиям:

$$(B1) \quad G(V_i) \text{ связан } \forall i, 1 \leq i \leq t;$$

$$(B2) \quad \forall i, 1 \leq i \leq t \quad \forall v \in V(G) \setminus \bigcup_{j=1}^i V_j \quad \exists w \in V_i : (w, v) \in E(G).$$

Положим $\bar{h}_0(G) = h_0(\bar{G})$. Тогда $\bar{h}_0 = \nu$ при $P = W_1$ и

$$\mathcal{F}_1 = \{G : \bar{G} \text{ связан}\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{(X, Y; E) : \text{в } Y \text{ есть вершина, смежная со всеми вершинами из } X\};$$

т. е. нахождение h_0 есть NP -трудная задача.

ПРИМЕР 12. В [5] изучалась также функция $h(G) = \max_{G' \subset G} h_0(G')$, где h_0 взята из примера 11. Пусть $\bar{h}(G) = h(\bar{G})$. Легко проверить, что $\bar{h} \in \mathcal{B}_1(W_1)$. Поскольку $\bar{h}$ мажорирует $\bar{h}_0$, то, по теореме 1, нахождение $\bar{h}$ (а следовательно, и h) есть NP -трудная задача.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Класс регулярных отношений сжатия, описанный в теореме 3, может быть расширен. Для этого достаточно заменить множество $\mathcal{F}_2$ на два непересекающихся множества $\mathcal{F}_2^0, \mathcal{F}_2^1$ и произвести следующую корректировку условий 2 и (β) — (δ) :

$$\begin{aligned} 2') \quad G(V_i, V_j) \in \mathcal{F}_2^0 &\Rightarrow (i, j) \notin E(H) && \text{и} \\ G(V_i, V_j) \in \mathcal{F}_2^1 &\Rightarrow (i, j) \in E(H), && 1 \leq i < j \leq t. \end{aligned}$$

$$(\beta') \quad K_2 \in \mathcal{F}_2^1;$$

$$(\gamma') \quad \bar{K}_2 \notin \mathcal{F}_2^0;$$

$(\delta') \quad (X, Y; E) \notin \mathcal{F}_2^0$, если $|X| = 2$ и каждая вершина из Y не смежна с какой-нибудь вершиной из X .

Литература

1. **Lewis J. M., Yannakakis M.** The node-deletion problem for hereditary properties is *NP*-complete // J. Comp. & Syst. Sciences. — 1980. — Vol. 20. — P. 219–230.
2. **Lick D. R., White A. T.** The point partition numbers of closed 2-manifolds // J. London Math. Soc. — 1972. — Vol. 4, No 4. — P. 577–583.
3. **Зыков А. А.** Теория конечных графов. — Новосибирск: Наука, 1969. — 543 с.
4. **Chartrand G., Mitchem J.** Graphical theorems of Nordhaus–Gaddum class // Lect. Notes in Math. — Springer, Berlin. — Vol. 186. — 1971. — P. 55–61.
5. **Берков В. В.** Критические графы относительно числа Хадwigера и близкие к нему инварианты. Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. — Кишинев, 1986. — 112 с.

Поступила в ред.-изд. отдел
31 августа 1990 г.

УДК 519.8

АЛГОРИТМ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА
И ЕГО ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ*)

Э. Х. Гимади, Н. И. Глебов, А. И. Сердюков

Описывается полиномиальный алгоритм приближенного решения задачи коммивояжера, основу которого составляет рандомизированный вариант алгоритма для задачи о назначениях. Вероятностный анализ алгоритма проводится в случае таких вероятностных распределений на множестве входов (матриц расстояний между городами), относительно которых столбцы случайной матрицы представляют собой последовательность симметрично зависимых случайных величин. При некоторых дополнительных предположениях, касающихся величины коэффициента разброса элементов матрицы расстояний, устанавливается асимптотическая точность алгоритма и обосновываются соответствующие оценки относительной погрешности и вероятности несрабатывания алгоритма.

Ввиду NP-трудности задачи коммивояжера (ЗК) понятны многочисленные попытки построения малотрудоемких алгоритмов ее приближенного решения и получения оценок качества этих алгоритмов (см., например, [1–6]). В число основных характеристик качества алгоритма наряду с трудоемкостью входят относительная погрешность и вероятность несрабатывания. Оценки для двух последних характеристик получают в предположении, что на множестве всех индивидуальных ЗК (т. е. входов) задано вероятностное распределение из определенного класса. В силу этого сами характеристики и их оценки существенным образом зависят от класса распределений.

Особый интерес представляют такие малотрудоемкие приближенные алгоритмы и классы вероятностных распределений, относительно которых алгоритмы являются асимптотически точными, т. е. вероятность несрабатывания и относительная погрешность каждого такого алгоритма стремятся к нулю с ростом размерности задачи [1]. В этом направлении был получен ряд результатов, касающихся алгоритма «Иди в ближайший непройденный город», в предположении, что элементы

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-012-417).

© 1994 Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Сердюков А. И.

матрицы расстояний выбираются из некоторого множества в соответствии с одним и тем же распределением вероятностей и независимо друг от друга [2–4].

Ниже предлагается полиномиальный алгоритм для приближенного решения ЗК, основанный на использовании оптимального решения соответствующей задачи о назначениях (ЗН), и проводится его вероятностный анализ. Устанавливается асимптотическая точность алгоритма для более широкого, по сравнению с рассматривавшимися ранее, класса вероятностных распределений.

Классическая задача коммивояжера состоит в нахождении обхода n городов, имеющего минимальную длину. При этом предполагаются заданными расстояния между городами c_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$). Обходом коммивояжера считается замкнутый маршрут, проходящий через каждый город ровно один раз. Формально задача может быть поставлена на ориентированном взвешенном n -вершинном графе, в котором вершины соответствуют городам, а вес дуги (i, j) — расстоянию c_{ij} от i -го города до j -го.

Задача коммивояжера может быть записана следующим образом: минимизировать $\sum_{i=1}^n c_{\pi_i \pi_{i+1}}$ на множестве всех перестановок $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$, представляющих собой последовательность вершин графа в порядке их прохождения коммивояжером ($\pi_{n+1} = \pi_1$).

Соответствующая задача о назначениях формулируется так: требуется найти $\min_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^n c_{i\sigma(i)}$, где S_n — симметрическая группа подстановок n -й степени.

Далее посредством $ЗН(C)$ и $ЗК(C)$ мы будем обозначать соответственно индивидуальные задачи о назначениях и коммивояжера с матрицей расстояний $C = (c_{ij})$. Условимся также не делать различия между перестановкой $\alpha = (\alpha(1), \dots, \alpha(n))$ и подстановкой $\alpha: i \rightarrow \alpha(i)$.

- Матрицу C будем называть *лексикографически упорядоченной*, если ее столбцы образуют лексикографически неубывающую последовательность, т. е.

$$\forall j \in \{1, \dots, n-1\} \exists k \in \{1, \dots, n+1\}: c_{ij} = c_{ij+1}$$

при $i < k$ и $c_{kj} < c_{kj+1}$ в случае $k \leq n$.

Легко видеть, что для любой матрицы C существует единственная лексикографически упорядоченная матрица C^0 , получаемая из C перестановкой столбцов. Матрицы C и C^0 при подходящем выборе $\alpha \in S_n$ связаны соотношением $C^0 = CE_\alpha$, где $E_\alpha = (e_{ij}^\alpha)$ — матрица подстановки α такая, что

$$e_{ij}^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{при } i = \alpha(j), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В дальнейшем при записи произведения $\alpha\beta$ подстановок α и β мы полагаем, что $E_\alpha E_\beta = E_{\alpha\beta}$, т. е. $\alpha\beta(i) = \alpha(\beta(i))$.

Опишем теперь алгоритм $\mathcal{A}$ приближенного решения ЗК в случае произвольной матрицы C . Алгоритм состоит из двух этапов — отыскания точного решения $\text{ЗН}(C)$ и построения приближенного решения $\text{ЗК}(C)$.

Этап 1. Рандомизированный алгоритм $\mathcal{A}_{\text{ЗН}}$ решения задачи о назначениях.

Вход: матрица C .

- 1.1. Построение по C лексикографически упорядоченной матрицы C^0 и перестановки $\lambda(C)$: $C^0 = CE_{\lambda(C)}$.
- 1.2. Нахождение (каким-либо известным детерминированным алгоритмом) подстановки $\beta(C^0)$ — решения $\text{ЗН}(C^0)$.
- 1.3. Выбор из подгруппы подстановок $S(C^0) = \{\alpha \in S_n \mid C^0 = C^0 E_{\alpha}\}$ некоторой подстановки σ в соответствии с равномерным распределением вероятностей на $S(C^0)$.
- 1.4. $\beta := \lambda(C)\sigma\beta(C^0)$.

Выход: подстановка β — решение $\text{ЗН}(C)$.

Этап 2. Разложение подстановки в произведение независимых циклов и построение приближенного решения ЗК.

Вход: подстановка β — полученное на выходе этапа 1 решение $\text{ЗН}(C)$.

- 2.1. Выделение всех циклов $B_1, \dots, B_m$ подстановки β и выбор номеров $i_k \in B_k$, $k = 1, \dots, m$.
- 2.2. Построение циклической подстановки $\tilde{\beta}$:

$$\tilde{\beta}(i) = \begin{cases} \beta(i_{k+1}), & \text{если } i = i_k \ (i_{m+1} = i_1), \\ \beta(i), & \text{если } i \notin \{i_1, \dots, i_m\}. \end{cases}$$

- 2.3. Определение перестановки π : $\pi_1 = 1$, $\pi_k = \tilde{\beta}(\pi_{k-1})$, $k = 2, \dots, n$.

Выход: перестановка π — приближенное решение $\text{ЗК}(C)$.

Для выполнения вероятностного анализа алгоритма $\mathcal{A}$ будем предполагать заданным некоторое распределение вероятностей $\mathbf{P}$ на множестве всех матриц размеров $n \times n$, относительно которого столбцы ξ_k случайной матрицы $C = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ образуют последовательность n -мерных случайных величин с симметрической функцией совместного распределения (симметрично зависимые случайные величины см. [7, т. 2, с. 283]), т. е.

$$\mathbf{P}\{\xi_{\alpha(1)} \in \Lambda_1, \dots, \xi_{\alpha(n)} \in \Lambda_n\} = \mathbf{P}\{\xi_1 \in \Lambda_1, \dots, \xi_n \in \Lambda_n\}$$

для любых борелевских множеств $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ из $\mathbf{R}^n$ и любой подстановки α из S_n . Класс таких распределений обозначим через $\mathcal{P}$.

Получаемая в такой ситуации на выходе алгоритма $\mathcal{A}_{3H}$ подстановка β будет являться случайной величиной с некоторым распределением $\mathbf{P}_\beta$ на множестве S_n . В дальнейшем существенно используется следующая лемма.

Лемма 1. *Распределение $\mathbf{P}_\beta$ является равномерным.*

Доказательство. Прежде всего, отметим, что в силу симметричной зависимости столбцов случайной матрицы $C = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ случайная величина $\tilde{C} = CE_\sigma = (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n)$ имеет распределение вероятностей $\tilde{\mathbf{P}}$, равное распределению $\mathbf{P}$ случайной величины C , если случайная величина $\sigma \in S_n$ не зависит от C . Для установления этого факта достаточно убедиться, что равенство $\tilde{\mathbf{P}}\{\tilde{C} \in \Lambda\} = \mathbf{P}\{C \in \Lambda\}$ имеет место для множеств Λ вида $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n$, где Λ_k — борелевские множества из $\mathbf{R}^n$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}\{\tilde{\xi}_1 \in \Lambda_1, \dots, \tilde{\xi}_n \in \Lambda_n\} &= \sum_{\alpha \in S_n} \mathbf{Pr}\{\sigma = \alpha\} \mathbf{P}\{\xi_{\alpha(1)} \in \Lambda_1, \dots, \xi_{\alpha(n)} \in \Lambda_n\} \\ &= \mathbf{P}\{\xi_1 \in \Lambda_1, \dots, \xi_n \in \Lambda_n\} \sum_{\alpha \in S_n} \mathbf{Pr}\{\sigma = \alpha\} \\ &= \mathbf{P}\{\xi_1 \in \Lambda_1, \dots, \xi_n \in \Lambda_n\}. \end{aligned}$$

(Здесь и далее посредством $\mathbf{Pr}\{\dots\}$ обозначается вероятность события $\{\dots\}$ в тех случаях, когда отсутствие специального обозначения для распределения вероятностей на пространстве элементарных событий, к которому относится рассматриваемое событие, не может привести к недоразумению). Пусть

$\mathcal{K}^0$ — множество всех лексикографически упорядоченных матриц размеров $n \times n$;

y — случайная величина, являющаяся функцией от C со значениями в $\mathcal{K}^0$ такая, что $y(C) = C^0 (= CE_{\lambda(C)})$;

$\mathbf{P}_y$ — распределение вероятностей случайной величины y .

Рассмотрим пространство $\mathcal{K}^0 \times S_n$ с распределением вероятностей $\mathbf{P}_y \times \mathbf{P}_0$, где $\mathbf{P}_0$ — равномерное распределение на S_n . Для произвольной точки $(C^0, \alpha) \in \mathcal{K}^0 \times S_n$ положим $C' = C^0 E_\alpha$. Случайная величина C' имеет то же самое распределение, что и C . В самом деле, $C' = C^0 E_\alpha = CE_{\lambda(C)} E_\alpha = CE_{\lambda(C)\alpha}$. Поскольку α не зависит от C и имеет равномерное распределение, получаем

$$\mathbf{Pr}\{\lambda(C)\alpha = \pi, C \in \Lambda\} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{Pr}\{\lambda(C) = \sigma, \alpha = \sigma^{-1}\pi, C \in \Lambda\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{Pr}\{\lambda(C) = \sigma, C \in \Lambda\} \mathbf{P}_0\{\alpha = \sigma^{-1}\pi\} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{Pr}\{\lambda(C) = \sigma, C \in \Lambda\} = \frac{1}{n!} \mathbf{P}\{C \in \Lambda\},
\end{aligned}$$

т. е. случайная величина $\lambda(C)\alpha$ не зависит от C и имеет (что в данном случае несущественно) равномерное распределение. Теперь остается лишь сослаться на сделанное выше замечание.

В силу совпадения вероятностных распределений случайных величин C и C' , утверждение леммы достаточно доказать для C' . Если $C' = C^0 E_\alpha$ является входом алгоритма $\mathcal{A}_{3H}$, то на его выходе будет получена с вероятностью $|S(C^0)|^{-1}$ некоторая подстановка β из множества $\lambda(C')S(C^0)\beta(C^0)$, совпадающего с $\alpha^{-1}S(C^0)\beta(C^0)$, так как $\lambda(C')$ и α^{-1} принадлежат одному и тому же левому классу смежности по подгруппе $S(C^0)$, т. е. $\alpha\lambda(C') \in S(C^0)$.

Рассмотрим произведение пространств $\langle \mathcal{K}^0 \times S_n, \mathbf{P}_y \times \mathbf{P}_0 \rangle$ и S_n с точками (C^0, α, β) и определим переходную вероятность (см. [8, с. 109]), положив

$$p(C^0, \alpha, \beta) = \begin{cases} |S(C^0)|^{-1}, & \text{если } \beta \in \alpha^{-1}S(C^0)\beta(C^0), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда вероятность получения на выходе алгоритма $\mathcal{A}_{3H}$ фиксированной подстановки π будет равна

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_\beta(\pi) &= \mathbf{Pr}\{\beta = \pi\} = \int_{\mathcal{K}^0 \times S_n} p(C^0, \alpha, \pi) \mathbf{P}_y \times \mathbf{P}_0(dC^0, d\alpha) \\
&= \int_{\mathcal{K}^0} \int_{S_n} p(C^0, \alpha, \pi) \mathbf{P}_0(d\alpha) \mathbf{P}_y(dC^0) = \int_{\mathcal{K}^0} \sum_{\alpha \in S_n} p(C^0, \alpha, \pi) \frac{1}{n!} \mathbf{P}_y(dC^0) \\
&= \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{K}^0} |S(C^0)|^{-1} |\{\alpha: \pi \in \alpha^{-1}S(C^0)\beta(C^0)\}| \mathbf{P}_y(dC^0) \\
&= \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{K}^0} |S(C^0)|^{-1} |\{\alpha: \alpha \in S(C^0)\beta(C^0)\pi^{-1}\}| \mathbf{P}_y(dC^0) \\
&= \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{K}^0} \mathbf{P}_y(dC^0) = \frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Трудоемкость описанного алгоритма ограничена величиной $O(n^3)$ и определяется временем отыскания точного решения задачи о назначениях (см. этап 1, пункт 1.2). Алгоритм точного решения ЗН изложен в [9]. Остальные пункты алгоритма $\mathcal{A}$ реализуются с меньшей сложностью. Введем обозначения:

$F_{\text{ЗН}}^*(C)$, $F_{\text{ЗК}}^*(C)$ — оптимальные значения целевых функций в ЗН(C) и ЗК(C) соответственно;

$F_{\mathcal{A}}(C)$ — значение целевой функции в ЗК(C), полученное алгоритмом $\mathcal{A}$;

c^* — максимальный элемент матрицы C ;

$m(C)$ — число циклов в перестановке $\beta = \beta(C)$, полученной алгоритмом $\mathcal{A}$.

Лемма 2. Для алгоритма $\mathcal{A}$ при решении ЗК(C) справедлива следующая оценка относительной погрешности :

$$\varepsilon_{\mathcal{A}} \leq \frac{m(C) \cdot c^*}{F_{\text{ЗН}}^*(C)}.$$

Доказательство. Учитывая, что $F_{\text{ЗК}}^*(C) \geq F_{\text{ЗН}}^*(C)$ и

$$F_{\mathcal{A}}(C) = F_{\text{ЗН}}^*(C) + \sum_{k=1}^{m(C)} (c_{i_k \pi(i_k)} - c_{i_k \beta(i_k)}),$$

получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathcal{A}} &= \frac{F_{\mathcal{A}}(C) - F_{\text{ЗК}}^*(C)}{F_{\text{ЗК}}^*(C)} \leq \frac{F_{\mathcal{A}}(C) - F_{\text{ЗН}}^*(C)}{F_{\text{ЗН}}^*(C)} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{m(C)} (c_{i_k \pi(i_k)} - c_{i_k \beta(i_k)})}{F_{\text{ЗН}}^*(C)} \leq \frac{\sum_{k=1}^{m(C)} c^*}{F_{\text{ЗН}}^*(C)} = \frac{m(C) \cdot c^*}{F_{\text{ЗН}}^*(C)}. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Число циклов в перестановке $\beta(C)$ не превышает $2 \ln n$ с вероятностью, стремящейся к 1 с ростом n .

Доказательство. Следуя методу из [7, т. 1, с. 264], число циклов $m(C)$ в случайной перестановке можно представить в виде суммы $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$ взаимно независимых случайных величин $X_1, \dots, X_n$, распределенных по закону Бернулли: $\Pr(X_k = 1) = 1/k$ и $\Pr(X_k = 0) = 1 - 1/k$

с математическим ожиданием $\mathbf{M}X_k = 1/k$ и дисперсией $\sigma_k^2 = (k-1)/k^2$. Следовательно,

$$\mathbf{M}Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln n + 1, \quad \mathbf{D}Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k^2} \leq \ln n - 1.$$

С помощью неравенства Чебышева получаем

$$\mathbf{Pr}\{Y_n > 2 \ln n\} \leq \mathbf{Pr}\{|Y_n - \mathbf{M}Y_n| > \ln n - 1\} \leq \frac{1}{\ln n - 1} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Лемма 3 доказана.

Оценку скорости сходимости к нулю вероятности $\mathbf{Pr}\{Y_n > 2 \ln n\}$ можно существенно улучшить, воспользовавшись теоремой Петрова [10, с. 81] о вероятностях больших отклонений.

Лемма 4. *Справедливо соотношение*

$$\mathbf{Pr}\{m(C) > 2 \ln n\} \leq \left(\frac{e}{n}\right)^{0,38}.$$

Доказательство. Покажем, что при постоянных $T = 0,76$ и $g_k = 1,31\sigma_k^2$, $k = 1, \dots, n$, для случайных величин $Z_k = X_k - \mathbf{M}X_k$ справедливы условия теоремы Петрова:

$$\mathbf{M}e^{tZ_k} \leq \exp\left(\frac{g_k t^2}{2}\right)$$

при всех $k = 1, \dots, n$ и $0 \leq t \leq T$. Действительно,

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{M}e^{tZ_k} &\leq \mathbf{M}e^{tZ_k} - 1 = \frac{1}{k} \exp\left(t\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \exp\left(-\frac{t}{k}\right) - 1 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \left[\frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^i + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(-\frac{1}{k}\right)^i \right] \\ &= \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \left[\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{i-1} - \left(-\frac{1}{k}\right)^{i-1} \right] \leq \sigma_k^2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \\ &= \frac{\sigma_k^2 t^2}{2} \cdot \frac{e^t - 1 - t}{t^2/2} \leq \frac{\sigma_k^2 t^2}{2} \cdot \frac{e^T - 1 - T}{T^2/2} \leq 1,31 \frac{\sigma_k^2 t^2}{2} = \frac{g_k t^2}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, требуемые условия выполнены для любых $k = 1, \dots, n$ и $0 \leq t \leq T$. Отсюда с учетом

$$G = \sum_{k=1}^n g_k = 1,31 \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 = 1,31 D Y_n \leq 1,31(\ln n - 1),$$

$GT \leq \ln n - 1$ и неравенства $\Pr\{Y_n - MY_n > \varphi\} \leq \exp(-T\varphi/2)$, справедливого при $\varphi \geq GT$, имеем

$$\begin{aligned} \Pr\{Y_n > 2 \ln n\} &\leq \Pr\{Y_n - MY_n > \ln n - 1\} \\ &\leq \exp\left(-\frac{0,76(\ln n - 1)}{2}\right) = \exp(-0,38(\ln n - 1)) = \left(\frac{e}{n}\right)^{0,38}, \end{aligned}$$

т. е. $\Pr\{m(C) > 2 \ln n\} \leq (e/n)^{0,38}$. Лемма 4 доказана.

- Следуя [1], говорим, что алгоритм $\mathcal{A}$ удовлетворяет оценкам $(\varepsilon_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}})$ на классе задач $\text{ЗК}(C)$, если выполнено неравенство

$$\Pr\{F_{\mathcal{A}}(C) > (1 + \varepsilon_{\mathcal{A}})F_{\text{ЗК}}^*(C)\} \leq \delta_{\mathcal{A}},$$

где $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ — относительная погрешность, получаемая в результате работы алгоритма $\mathcal{A}$, и $\delta_{\mathcal{A}}$ — вероятность несрабатывания алгоритма $\mathcal{A}$.

- Алгоритм $\mathcal{A}$ называем *асимптотически точным* на классе $\text{ЗК}(C)$, если существуют оценки $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ и $\delta_{\mathcal{A}}$, стремящиеся к нулю с ростом размерности задачи.

Теорема 1. Алгоритм $\mathcal{A}$ для решения $\text{ЗК}(C)$ относительно рассматриваемого класса распределений $\mathcal{P}$ на множестве матриц имеет следующие оценки относительной погрешности и вероятности несрабатывания:

$$\varepsilon_{\mathcal{A}} = \frac{2c^* \ln n}{F_{\text{ЗН}}^*(C)}, \quad \delta_{\mathcal{A}} = \left(\frac{e}{n}\right)^{0,38}.$$

Доказательство. Покажем, что при таком выборе оценок для $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ и $\delta_{\mathcal{A}}$ справедливо соотношение

$$\Pr\{F_{\mathcal{A}}(C) > (1 + \varepsilon_{\mathcal{A}})F_{\text{ЗК}}^*(C)\} \leq \delta_{\mathcal{A}}.$$

Из леммы 2 следует, что

$$F_{\mathcal{A}}(C) \leq \left(1 + \frac{m(C)c^*}{F_{\text{ЗН}}^*(C)}\right) F_{\text{ЗК}}^*(C),$$

откуда с учетом леммы 4 имеем

$$\begin{aligned} \Pr\{F_{\mathcal{A}}(C) > (1 + \varepsilon_{\mathcal{A}})F_{3K}^*(C)\} \\ \leq \Pr\left\{\left(1 + \frac{m(C)c^*}{F_{3H}^*(C)}\right) F_{3K}^*(C) > (1 + \varepsilon_{\mathcal{A}}) F_{3K}^*(C)\right\} \\ = \Pr\left\{\frac{m(C)c^*}{F_{3H}^*(C)} > \varepsilon_{\mathcal{A}}\right\} = \Pr\{m(C) > 2 \ln n\} \leq \left(\frac{e}{n}\right)^{0,38} = \delta_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Алгоритм $\mathcal{A}$ для рассматриваемой ЗК(C) с дополнительным условием $a_n \leq c_{ij} \leq b_n$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, $a_n > 0$, асимптотически точен, если

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\psi(n)} \cdot \frac{n}{\ln n},$$

где $\psi(n)$ — произвольная растущая функция, $\psi(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $\delta_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а с учетом $F_{3H}^*(C) \geq na_n$ и $c^* \leq b_n$ получаем

$$\varepsilon_{\mathcal{A}} \leq \frac{2c^* \ln n}{F_{3H}^*(C)} \leq \frac{2b_n \ln n}{na_n}.$$

Следовательно, в условиях рассматриваемой теоремы относительная погрешность $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ также стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, алгоритм $\mathcal{A}$ асимптотически точен.

Заметим, что описанный выше подход может быть применен и для приближенного решения ЗК на максимум длины обхода. В этом случае алгоритм приближенного решения этой задачи основан на использовании точного решения соответствующей задачи о назначениях при условии, что $\sum_{i=1}^n c_{i\sigma(i)}$ принимает максимально возможное значение.

Трудоемкость и оценки качества алгоритма приближенного решения ЗК на максимум длины обхода остаются такими же, как и для рассмотренной в статье задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Перепелица В. А. Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. М., 1976. Вып. 31. С. 35–42.
2. Перепелица В. А., Гимади Э. Х. К задаче нахождения минимального гамильтонова контура на графе с взвешенными дугами // Дискретный анализ. Новосибирск, 1969. Вып. 15. С. 57–65.

3. Гимади Э. Х., Перепелица В. А. Асимптотический подход к решению задачи коммивояжера // Управляемые системы. Новосибирск, 1974. Вып. 12. С. 35–45.
4. Гимади Э. Х. О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов // Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сиб. отд-ние. 1988. Т. 10. С. 89–115.
5. The traveling salesman problem / A Guided Tour of Combinatorial Optimization. New York: Wiley, 1985.
6. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. Т. 1, 2.
8. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
9. Диниц Е. А., Кронрод М. А. Один алгоритм решения задачи о назначении // Докл. АН СССР. 1969. Т. 189, № 1. С. 23–25.
10. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.

Адрес авторов:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики СО РАН

Статья поступила

15 марта 1994 г.

УДК 519.17

О НАИМЕНЬШИХ НЕЗАВИСИМЫХ ДОМИНИРУЮЩИХ
МНОЖЕСТВАХ В ГРАФАХ*)*Н. И. Глебов, А. В. Косточка*

Изучается вопрос о том, насколько сильно величина $\text{id}(G)$ наименьшего независимого доминирующего множества в графе G может отличаться от величины $d(G)$ наименьшего доминирующего множества в графе G при ограничениях на степени вершин в G . Получены верхние оценки отношения $\text{id}(G)/d(G)$ для графов с заданной максимальной степенью вершин и для однородных графов заданной степени.

В работах [1–3] при некоторых ограничениях на структуру графа G рассматривался вопрос о соотношении между величиной $\text{id}(G)$ — числом вершин наименьшего независимого доминирующего множества графа G и величиной $d(G)$ — числом вершин наименьшего доминирующего множества графа G . Так, Р. Аллан и Р. Ласкар [1] показали, что $\text{id}(G) = d(G)$ для любого графа G , не содержащего подграфов, изоморфных графу $K_{1,3}$. С другой стороны, в [3] построена бесконечная серия кубических 3-связных графов G таких, что $\text{id}(G)/d(G) \geq 37/34$. В данной работе проводится более детальное исследование отношения $\text{id}(G)/d(G)$. Обозначим через $\mathcal{H}_k$ класс графов с максимальной степенью, не превосходящей k .

Из вышеупомянутого результата [1] следует, что $\text{id}(G) = d(G)$ для любого графа $G \in \mathcal{H}_2$. В связи с этим в работе основное внимание уделено графам из пограничного класса $\mathcal{H}_3$. Очевидно, что $d(K_{3,3}) = 2$, $\text{id}(K_{3,3}) = 3$. Поэтому для любого графа G , состоящего из нескольких копий графа $K_{3,3}$, имеем $\text{id}(G)/d(G) = 3/2$. Оказалось, что для связных графов $G \in \mathcal{H}_3$ с числом вершин больше 6 величина $\text{id}(G)/d(G)$ всегда меньше $3/2$. В теореме 1 доказано, что отношение $\text{id}(G)/d(G)$ для таких графов не превосходит $7/5$, и эта оценка, как показано далее, достижима на бесконечном семействе графов. В теореме 2 установлено, что максимум рассматриваемого отношения в классе связных

*) Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-012-489), работа второго автора — при финансовой поддержке Международного научного фонда (код проекта RPY000) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-1486).

кубических графов, отличных от $K_{3,3}$, не превосходит $4/3$. Эта оценка достигается на 5-угольной призме. Построена также бесконечная серия 2-связных кубических графов G с $\text{id}(G)/d(G) \geq 5/4$.

При больших k условие связности становится менее обременительным. Мы покажем, что $\text{id}(G)/d(G) \leq k + 2 - 2\sqrt{k}$ для любого графа $G \in \mathcal{H}_k$ (теорема 3), и для k , являющихся полными квадратами, построим бесконечные серии связных графов $G \in \mathcal{H}_k$ с $\text{id}(G)/d(G) = k + 2 - 2\sqrt{k} - O(k^{-0.5})$ (пример 2). Далее, мы покажем, что $\text{id}(G)/d(G) \leq k/2$ для любого k -однородного графа G (теорема 4), и для четных k укажем бесконечные серии k -однородных k -связных графов G с $\text{id}(G)/d(G) \geq (k - 3)/2$ (пример 4). В заключение мы найдем максимум отношения $\text{id}(G)/d(G)$ на множестве n -вершинных графов (теорема 5).

В § 1 вводятся обозначения и доказываются вспомогательные утверждения о структуре доминирующих множеств в графах с максимальной степенью 3. В § 2, 3 получены верхние и нижние оценки для величины $\text{id}(G)/d(G)$ в графах из $\mathcal{H}_3$ и в § 4 рассмотрены графы из $\mathcal{H}_k$ при $k > 3$.

§ 1. Обозначения и предварительные результаты

Подграф графа G , порожденный множеством $X \subset V(G)$, обозначается через $G(X)$.

Расстоянием $\rho_G(u, v)$ между вершинами u, v графа G называется длина кратчайшего пути между ними. Индекс G в обозначении расстояния часто будем опускать. Для $X \subseteq V(G)$, $v \in V(G)$ положим

$$\begin{aligned}\rho(v, X) &= \min\{\rho(v, u) | u \in X\}, \\ N(X) &= \{v \in V(G) | \rho(v, X) = 1\}, \\ \tilde{N}(X) &= N(X) \cup X, \\ N(v) &= N(\{v\}), \quad \deg(v) = |N(v)|.\end{aligned}$$

Будем говорить, что множество $X \subseteq V(G)$ покрывает множество $Y \subseteq V(G)$ (вершину v), если $Y \subseteq \tilde{N}(X)$ ($v \in \tilde{N}(X)$).

Согласно общепринятой терминологии множество $D \subseteq V(G)$ называется доминирующим в графе G , если D покрывает $V(G)$. Доминирующее множество D в графе G назовем 2-множеством, если каждая компонента графа $G(D)$ содержит не более двух вершин; при этом пары смежных вершин множества D будем называть связками.

Лемма 1. Пусть $H \in \mathcal{H}_3$, I — независимое множество в H такое, что $\rho(v, I) \leq 2$ для всех $v \in V(H)$. Тогда в графе H существует независимое доминирующее множество I^* , мощность которого не превосходит $3|I|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V(H) = I \cup P_1 \cup P_2$, где

$$P_r = \{v \in V(H) \mid \rho(v, I) = r\}, \quad r = 1, 2.$$

Если $P_2 = \emptyset$, то утверждение леммы тривиально.

Пусть $P_2 \neq \emptyset$. Определим множество $D_1 = \{v \in P_1 \mid N(v) \cap P_2 \neq \emptyset\}$. Заметим, что все вершины v из I , для которых $N(v) \cap D_1 = \emptyset$, могут быть сразу включены в I^* и исключены вместе с $N(v)$ из дальнейшего рассмотрения. Поэтому будем считать, что $N(v) \cap D_1 \neq \emptyset$ для любой вершины $v \in I$.

Пусть D_0 — максимальное независимое подмножество множества $\{v \in P_1 \mid \rho(v, D_1) \geq 2\}$, $D = D_1 \cup D_0$. Тогда, как нетрудно видеть, D покрывает $V(H)$. Более того, D есть 2-множество, все связки которого $s_1, \dots, s_t$ содержатся в D_1 . Имеет место также очевидная цепочка неравенств

$$|D| \leq \sum_{v \in I} |N(v) \cap D| \leq 2|I| + |\Psi|, \quad (1)$$

где $\Psi = \{v \in I \mid |N(v) \cap D| = 3\}$.

Предполагая множество связок $L = \{s_1, \dots, s_t\}$ непустым (иначе можно положить $I^* = D$), рассмотрим двудольный граф Γ с долями I и L , в котором вершины $v \in I$ и $s \in L$ смежны, если и только если $N(v) \cap s \neq \emptyset$. Поскольку все связки содержатся в D_1 и $H \in \mathcal{H}_3$, то $\Gamma \in \mathcal{H}_3$. По теореме Кенига в графе Γ существует паросочетание, покрывающее все вершины степени 3; множество таких вершин из доли I обозначим через I_3 . Наличие указанного паросочетания позволяет ввести обозначения для вершин в связках $s_i = \{x_i, y_i\}$ таким образом, что для каждой вершины $v \in I_3$ будет выполняться соотношение

$$N(v) \cap \{x_1, \dots, x_t\} \neq \emptyset. \quad (2)$$

В частности, для каждой вершины $v \in I_3$ множество $N(v) \cap (D \setminus Y)$, где $Y = \{y_1, \dots, y_t\}$, непусто.

Пусть Z — максимальное независимое подмножество множества $\{z \in P_2 \mid \rho(z, D \setminus Y) \geq 2\}$. Тогда множество $D' = (D \setminus Y) \cup Z$ обладает следующими свойствами:

- (а) D' — независимое множество;
- (б) D' покрывает $I_3 \cup P_1 \cup P_2$;
- (с) $|D'| \leq |D|$.

Свойства (а), (б) достаточно очевидны, а (с) следует из того, что $|Z| \leq |Y|$, поскольку $Z \subseteq \{z \in P_2 \mid \rho(z, Y) = 1\}$ и $|N(y) \cap P_2| = 1$ для любой вершины $y \in Y$.

Рассмотрим теперь множества $I' = \{v \in I \mid \rho(v, D') \geq 2\}$, $I^* = D' \cup I'$. Легко видеть, что множество I^* является независимым и доминирующим в графе H . Для завершения доказательства леммы ввиду (1) и (с) достаточно убедиться, что $I' \cap \Psi = \emptyset$.

Пусть $v \in \Psi$, т. е. $v \in I$, $|N(v) \cap D| = 3$. Если $N(v) \cap (D \setminus Y) \neq \emptyset$, то $N(v) \cap D' \neq \emptyset$ и, следовательно, $v \notin I'$. Если же $N(v) \cap (D \setminus Y) = \emptyset$, то $|N(v) \cap Y| = |N(v) \cap D| = 3$, а поскольку множество Y образовано из представителей различных связок, то степень вершины v в графе Γ равна 3, т. е. $v \in I_3$. Это противоречит (2). Лемма 1 доказана.

Будем называть 2-множество в графе G $(2, 3)$ -множеством, если

- расстояние в G между любыми двумя связками не меньше 3;
- каждая вершина, входящая в какую-нибудь связку, имеет степень 3 и не входит в 3-циклы.

Лемма 2. В любом графе $G \in \mathcal{H}_3$ имеется $(2, 3)$ -множество мощности $d(G)$.

Доказательство. Покажем, что таким множеством является, в частности, наименьшее доминирующее множество D^0 с минимально возможным числом ребер в $G(D^0)$.

Пусть $v_1, v_2 \in D^0$, $\rho(v_1, v_2) = 1$, $N = N(v_1) \setminus \{v_2\}$, $Q = \{v \in V(G) \mid \rho(v, D^0 \setminus \{v_1\}) \geq 2\}$. Нетрудно видеть, что $Q \subseteq N$ и максимальное независимое подмножество Z множества Q содержит не более одной вершины в каждом из перечисленных ниже случаев:

Случай 1: $\deg(v_1) \leq 2$;

Случай 2: v_1 входит в 3-цикл;

Случай 3: найдется $v \in D^0 \setminus \{v_1, v_2\}$ с $\rho(v, N) \leq 1$.

Следовательно, в указанных случаях для доминирующего множества $D' = (D^0 \setminus \{v_1\}) \cup Z$ имеет место либо $|D'| < |D^0|$, либо $|D'| = |D^0|$ и $|E(G(D'))| < |E(G(D^0))|$, что противоречит выбору D^0 . Таким образом, D^0 есть $(2, 3)$ -множество. Лемма 2 доказана.

Замечание 1. Из доказательства леммы 2 видно, что D^0 обладает следующим свойством: для любой связки $s = \{x, y\}$ из D^0 расстояние от s до $D^0 \setminus s$ не меньше 3.

В дальнейшем множество связок $\{s_0, s_1, \dots, s_t\}$ будем называть пучком, если $t \geq 1$ и $\rho(s_0, s_i) = 3$ ($1 \leq i \leq t$).

Лемма 3. Пусть D есть $(2, 3)$ -множество в графе $G \in \mathcal{H}_3$, $\{s_0, s_1, \dots, s_t\}$ — пучок связок из D и $S = \bigcup_{i=0}^t s_i$. Тогда существует независимое множество I , удовлетворяющее следующим условиям:

$I \subseteq \{v \in V(G) \mid \rho(v, D \setminus S) \geq 2\}$;

$(D \setminus S) \cup I$ есть $(2, 3)$ -множество;

$|I| \leq 4|S|/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s_i = \{x_i, y_i\}$, $N(y_i) = \{x_i, z_i^1, z_i^2\}$ ($0 \leq i \leq t$), $X = \{x_0, x_1, \dots, x_t\}$, $Q = \{v \in V(G) \mid \rho(v, D \setminus S) \geq 2\}$, $Z_0 = \{z_0^1, z_0^2\} \cap Q$. Без потери общности можно считать, что $\rho(y_0, y_i) = 3$ при $i = 1, \dots, k$, где $k \geq t/2$.

Пусть Z — некоторое максимальное независимое подмножество множества $Q_1 = \{v \in Q \mid \rho(v, X \cup Z_0) \geq 2\}$. Положим $I = X \cup Z_0 \cup Z$. Нетрудно видеть, что I — независимое множество, $I \subseteq Q$ и $(D \setminus S) \cup I$ есть $(2, 3)$ -множество. Остается показать, что $|I| \leq 8(t+1)/3$.

Пусть $Z_i = \{z_i^1, z_i^2\} \cap Z$ ($i = 1, \dots, t$), и $\{1, \dots, k\} = J_1 \cup J_2$, где $J_j \subseteq \{i \mid \rho(z_0^j, y_i) = 2\}$ ($j = 1, 2$) и $J_1 \cap J_2 = \emptyset$. Поскольку $Z \subseteq \bigcup_{i=1}^t \{z_i^1, z_i^2\}$ и множества Z_i попарно не пересекаются, имеем $|Z| = \sum_{i=1}^t |Z_i|$.

Справедливы следующие утверждения.

- Если $z_0^j \in Z_0$, то $|Z_i| \leq 1$ ($i \in J_j$), поэтому $\sum_{i \in J_j} |Z_i| \leq |J_j|$ ($j = 1, 2$).
- Если $z_0^j \notin Z_0$, то $|J_j| \leq 1$ ($j \in J_j$), поэтому $\sum_{i \in J_j} |Z_i| \leq 1 + |J_j|$ ($j = 1, 2$).

С учетом этих утверждений получаем $\sum_{i=0}^k |Z_i| \leq 2 + k$ и, наконец,

$$|I| \leq |X| + \sum_{i=0}^t |Z_i| \leq (t+1) + (2+k) + 2(t-k) = 3(t+1) - k.$$

Но при $k \geq 1$ и $t \leq 2k$ имеем $3(t+1) - k \leq 8(t+1)/3$. Лемма 3 доказана.

Связку s из $(2, 3)$ -множества D назовем *изолированной*, если расстояние от s до любой другой связки из D больше 3.

Лемма 4. Пусть D есть $(2, 3)$ -множество в графе $G \in \mathcal{H}_3$, не содержащее изолированных связок, а S — множество всех вершин, входящих в связки. Тогда существует независимое доминирующее множество F такое, что $|F \setminus (D \setminus S)| \leq 4|S|/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала убедимся, что множество всех связок из D можно разбить на конечное число непересекающихся пучков с множествами входящих в них вершин $F_0^1, \dots, F_0^r$, $\bigcup_{j=1}^r F_0^j = S$. С этой целью рассмотрим граф Γ_0 , вершинами которого являются связки из D , а множество ребер состоит из тех пар связок, расстояние между которыми равно 3. По условиям леммы в Γ_0 нет изолированных вершин.

Рассмотрим минимальный остовный подграф Γ графа G_0 , не имеющий изолированных вершин. Поскольку удаление из графа ребра, обе концевые вершины которого имеют степень больше 1, не приводит к появлению изолированных вершин, в графе Γ таких ребер нет. Таким образом, компонентами графа Γ являются лишь звезды, т. е. графы вида $K_{1,t}$, $t \geq 1$. Эти компоненты соответствуют пучкам связок из D и порождают нужное нам разбиение $(F_0^1, \dots, F_0^r)$ множества S .

Последовательное применение леммы 3 к упомянутым пучкам связок позволяет получить независимые множества $I^1, \dots, I^r$ и $(2, 3)$ -множества $F^0, \dots, F^r$ такие, что

$$F^0 = D, I^j \subseteq \{v \in V(G) \mid \rho(v, F^{j-1} \setminus F_0^j) \geq 2\},$$

$$F^j = (D \setminus (F_0^1 \cup \dots \cup F_0^j)) \cup I^1 \cup \dots \cup I^j, |I^j| \leq 4|F_0^j|/3.$$

Тогда множество $F = F^r (= (D \setminus S) \cup I^1 \cup \dots \cup I^r)$ удовлетворяет утверждению леммы. Лемма 4 доказана.

§ 2. Графы с максимальной степенью 3. Верхние оценки

Теорема 1. Для любого связного графа $G \in \mathcal{H}_3$ с числом вершин больше 6 справедливо неравенство $\text{id}(G)/d(G) \leq 7/5$.

Доказательство. Пусть D есть $(2, 3)$ -множество в G и $|D| = d(G)$ (по лемме 2 такое множество существует). Обозначим через S^0 (соответственно S) множество всех вершин, входящих в изолированные (соответственно неизолированные) связки из D , а через I — множество вершин из D , не входящих в связки. В силу замечания 1 можно считать, что $\rho(I, S \cup S^0) \geq 3$.

Вначале покажем, что существует $(2, 3)$ -множество F' , в котором множество всех вершин, входящих в связки, совпадает с S и $|F' \setminus S| \leq 7|D \setminus S|/5$. С этой целью определим два максимальных независимых подмножества I^1 и I^2 множества $Q = \{v \in V(G) \mid \rho(v, S) \geq 2\}$ и убедимся, что верно неравенство

$$5 \min(|I^1|, |I^2|) \leq 7|I \cup S^0|. \quad (3)$$

Тогда меньшее по мощности из множеств $I^1 \cup S$ и $I^2 \cup S$ можно взять в качестве F' .

Пусть $S^0 = \bigcup_{i=1}^m s_i$, где $\{s_1, \dots, s_m\}$ — множество всех изолированных связок из D , $s_i = \{x_i, y_i\}$; $N(y_i) = \{x_i, z_i^1, z_i^2\}$ ($i = 1, \dots, m$); $X = \{x_1, \dots, x_m\}$; $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$; $Z = \bigcup_{i=1}^m \{z_i^1, z_i^2\}$. При этом выберем обозначения x_i и y_i так, что число вершин в $N(y_i) \setminus \{x_i\} (= \{z_i^1, z_i^2\})$,

находящихся на расстоянии 2 от I , не меньше числа таких вершин в $N(x_i) \setminus \{y_i\}$. Легко убедиться, что множество $I^1 = I \cup X \cup Z$ является максимальным независимым подмножеством множества Q и $|I^1| = k + 3m$, где $k = |I|$.

Для построения множества I^2 рассмотрим разбиение множества $V(G)$ на подмножества V_1 , V_2 и Z' , где

$$V_1 = \{v \in V(G) \mid \rho(v, S \cup X) \leq 1\},$$

$$V_2 = \{v \in V(G) \mid \rho(v, S \cup X) \geq 2, \rho(v, I) \leq 2\},$$

$$Z' = \{v \in V(G) \mid \rho(v, S \cup X) \geq 2, \rho(v, I) \geq 3\}.$$

Прежде всего, заметим, что $Z' \subseteq Z$, так как в Z' могут входить только вершины, покрытые множеством Y и не входящие в X . Покажем, что $\rho(Z', V_2) \geq 2$. Предположим противное, т. е. $\rho(z, v) = 1$ для некоторых вершин $z \in Z'$, $v \in V_2$. Поскольку $\rho(z, I) \geq 3$ и $\rho(v, I) \leq 2$, имеем $\rho(v, I) = 2$. А так как $\rho(v, S \cup X) \geq 2$, вершина v должна покрываться множеством Y , т. е. найдется $y' \in Y \cap N(v)$. В свою очередь, для z найдется $y \in Y \cap N(z)$. Поскольку через вершины из связок не проходят 3-циклы, то $y \neq y'$. Но это противоречит изолированности связок, которым принадлежат y и y' .

Поскольку $|V(G)| > 6$, $|\tilde{N}(s_i)| = 6$ ($1 \leq i \leq m$) и граф G связан, для каждой изолированной связки s_i существует такая вершина $v_i \in N(s_i)$, что $\rho(v_i, I) \leq 2$. Из-за выбора обозначений x_i и y_i можно считать, что $v_i = z_i^1$. Отсюда следуют неравенства

$$|Z' \cap \{z_i^1, z_i^2\}| \leq 1 \quad (i = 1, \dots, m),$$

из которых получаем $|Z'| \leq m$.

Теперь воспользуемся леммой 1. Заметим, что в графе $H = G(V_2)$ для любой вершины $v \in V_2$ выполняется неравенство $\rho_H(v, I) \leq 2$, так как $\{v \in V(G) \mid \rho_G(v, I) \leq 1\} \subseteq V_2$ в силу $\rho_G(I, X \cup S) \geq 3$. Следовательно, граф H и множество I удовлетворяют условиям леммы 1, согласно которой найдется максимальное независимое подмножество I^* множества V_2 с $|I^*| \leq 3|I|$.

Таким образом, получаем максимальное независимое подмножество $I^2 = I^* \cup X \cup Z'$ множества Q такое, что $|I^2| \leq 3k + 2m$.

Наконец, непосредственной проверкой убеждаемся, что для указанных множеств I^1 и I^2 выполняется неравенство (3), т. е.

$$\begin{aligned} 5 \min\{|I^1|, |I^2|\} - 7|I \cup S^0| &\leq 5 \min\{k + 3m, 3k + 2m\} - 7(k + 2m) \\ &= \min\{m - 2k, 4(2k - m)\} \leq 0. \end{aligned}$$

Теперь по лемме 4, примененной к $(2, 3)$ -множеству F' , получаем независимое доминирующее множество F такое, что

$$|F \setminus (F' \setminus S)| \leq 4|S|/3.$$

В итоге имеем

$$|F| \leq |F \setminus (F' \setminus S)| + |F' \setminus S| \leq 4|S|/3 + 7|D \setminus S|/5 \leq 7|D|/5,$$

откуда окончательно получаем $\text{id}(G) \leq 7d(G)/5$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Для любого связного кубического графа G , отличного от $K_{3,3}$, справедливо неравенство $\text{id}(G)/d(G) \leq 4/3$.

Доказательство. Здесь можно повторить все рассуждения из доказательства теоремы 1 за одним, по существу, исключением: вместо неравенства (3) мы установим неравенство

$$3 \min(|I^1|, |I^2|) \leq 4|I \cup S^0|, \quad (4)$$

из которого будет следовать утверждение теоремы. При этом в качестве $(2, 3)$ -множества D следует взять множество D^0 из доказательства леммы 2.

Нетрудно видеть, что неравенство (4) будет выполняться, если будет установлена оценка $|I^2| \leq 3k + m$. Такая оценка, очевидно, имеет место, если $Z' = \emptyset$.

Для того чтобы Z' было пустым, достаточно, чтобы при любом $i = 1, \dots, m$ вершины z_i^1 и z_i^2 находились на расстоянии 2 от I . Допустим, что при некотором i последнее условие нарушается. В этом случае, в силу выбора обозначений x_i и y_i , найдется по крайней мере по одной вершине в $N(y_i) \setminus \{x_i\}$ и в $N(x_i) \setminus \{y_i\}$, расстояние от которых до I больше 2. Тогда степени этих вершин в графе $H = G(\tilde{N}(s_i))$ будут равны 3. Поскольку $G \neq K_{3,3}$ и вершины x_i и y_i не входят в 3-циклы, граф H представляет собой граф $K_{3,3}$ с одним удаленным ребром. Если в D вершины x_i и y_i заменить вершинами, имеющими степень 2 в H (они не смежны между собой), то получим $(2, 3)$ -множество той же мощности, но с меньшим, чем в D , числом связок. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

§ 3. Графы с максимальной степенью 3. Примеры

В данном параграфе будут построены бесконечные серии

- связных графов $A \in \mathcal{H}_3$ с $\text{id}(A)/d(A) = 7/5$;
- 2-связных кубических графов B с $\text{id}(B)/d(B) \geq 5/4$;
- 3-связных кубических графов C с $\text{id}(C)/d(C) \geq 8/7$.

На рис. 1–3 (см. ниже) изображены графы, которые будут использоваться в качестве «блоков» при построении указанных серий графов.

Предварительно выясним некоторые свойства этих графов. При этом будет использоваться очевидное

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если вершины v и w не смежны между собой и $N(v) = N(w)$, то любое независимое множество, покрывающее v и w , либо содержит обе эти вершины, либо не содержит ни одной из них.

Лемма 5. Любое независимое множество $I \subseteq V(A_0)$ (см. рис. 1), покрывающее $V(A_0) \setminus \{v_0, w_0\}$, содержит не менее 7 элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I удовлетворяет условиям леммы. Поскольку имеют место соотношения

$$|I \cap \{v_3, v_4\}| \leq 1,$$

$$|I \cap \{w_3, w_4\}| \leq 1,$$

справедливы неравенства

$$|I \cap \{v_0, v_1, \dots, v_6\}| \geq 3,$$

$$|I \cap \{w_0, w_1, \dots, w_6\}| \geq 3.$$

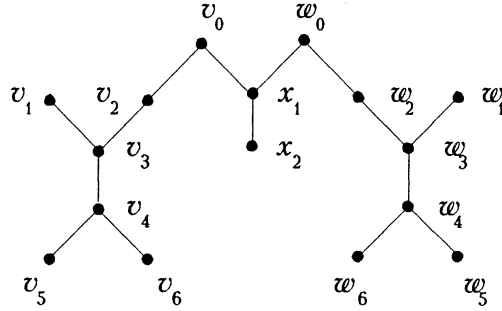


Рис. 1. Граф A_0

Кроме того, для того чтобы вершина x_2 была покрыта, должно быть выполнено неравенство $|I \cap \{x_1, x_2\}| \geq 1$. Следовательно, $|I| \geq 7$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Любое независимое множество $I \subseteq V(B_0)$ (см. рис. 2), покрывающее $V(B_0) \setminus \{v_0, w_0\}$, содержит не менее 5 элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I удовлетворяет условиям леммы. Учитывая замечание 2 и симметрию графа B_0 , достаточно рассмотреть три случая.

Если $\{v_2, v_3, w_2, w_3\} \subseteq I$, то $|I \cap \{x_1, x_2\}| \geq 1$. Следовательно, $|I| \geq 5$.

Если $\{w_2, w_3\} \subseteq I$, $I \cap \{v_2, v_3\} = \emptyset$, то $|I \cap \{v_1, v_0\}| = |I \cap \{x_1, v_4\}| = |I \cap \{x_2, v_5\}| = 1$, так что $|I| \geq 5$.

Если $I \cap \{v_2, v_3, w_2, w_3\} = \emptyset$, то верна цепочка равенств

$$\begin{aligned} |I \cap \{v_1, v_0\}| &= |I \cap \{x_1, v_4\}| \\ &= |I \cap \{x_2, v_5\}| = |I \cap \{w_1, w_0\}| \\ &= |I \cap \{x_1, w_4\}| = |I \cap \{x_2, w_5\}| = 1. \end{aligned}$$

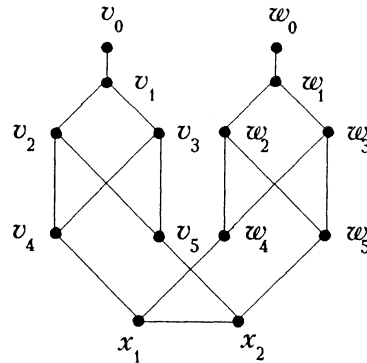


Рис. 2. Граф B_0

Учитывая, что $|I \cap \{x_1, x_2\}| \leq 1$, снова получаем $|I| \geq 5$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Любое независимое множество $I \subseteq V(C_0)$ (см. рис. 3), покрывающее $V(C_0) \setminus \{v_0, w_0, x_0\}$, содержит не менее 8 элементов.

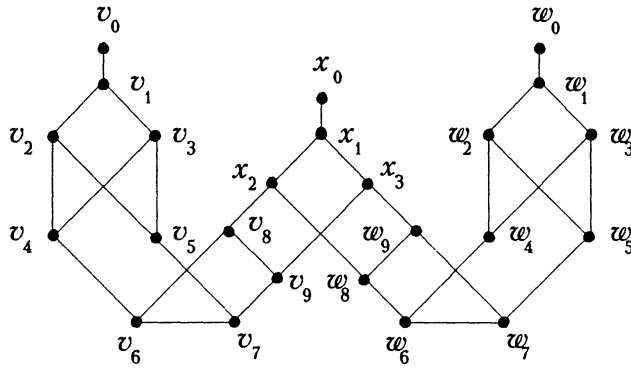


Рис. 3. Граф C_0

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I удовлетворяет условиям леммы,

$$I_1 = I \cap \{v_0, v_1, \dots, v_7\}, \quad I_2 = I \cap \{w_0, w_1, \dots, w_7\}.$$

Покажем, что $|I_1| \geq 3$. Согласно замечанию 2 достаточно рассмотреть два случая.

СЛУЧАЙ 1: $\{v_2, v_3\} \subseteq I$. Тогда $|I \cap \{v_6, v_7\}| = 1$, поскольку $I \cap \{v_4, v_5\} = \emptyset$ и $|I \cap \{v_8, v_9\}| \leq 1$.

СЛУЧАЙ 2: $I \cap \{v_2, v_3\} = \emptyset$. Тогда верна цепочка равенств

$$|I \cap \{v_1, v_0\}| = |I \cap \{v_6, v_4\}| = |I \cap \{v_7, v_5\}| = 1.$$

Таким образом, в обоих случаях $|I_1| \geq 3$. Аналогично убеждаемся, что верно неравенство $|I_2| \geq 3$.

Нетрудно видеть, что из семи вершин $x_1, x_2, x_3, v_8, v_9, w_8, w_9$ не более двух вершин покрыто множеством $I_1 \cup I_2$. Следовательно, не менее пяти вершин должно быть покрыто множеством $I \setminus (I_1 \cup I_2)$, так что $|I \setminus (I_1 \cup I_2)| \geq 2$ и $|I| \geq 8$. Лемма 7 доказана.

Теперь опишем графы, составляющие серии (а), (b) и (с).

СЕРИЯ (а). Эту серию образуют графы A_n , $n \geq 1$, такие, что A_n состоит из n копий $A_0^1, \dots, A_0^n$ графа A_0 , изображенного на рис. 1; и при $j = 1, \dots, n-1$ вершины w_0^j и v_0^{j+1} соединены ребром. Понятно, что A_n — связный граф из $\mathcal{H}_3$. По лемме 5 имеем $\text{id}(A_n) \geq 7n$. С другой стороны, множество $\bigcup_{j=1}^n \{x_1^j, v_3^j, v_4^j, w_3^j, w_4^j\}$ является доминирующим в A_n . Следовательно, $\text{id}(A_n)/d(A_n) \geq 7/5$.

СЕРИЯ (b). Эту серию образуют графы B_n , $n \geq 2$, такие, что B_n состоит из n копий $B_0^1, \dots, B_0^n$ графа B_0 , изображенного на рис. 2, и из $3n$ ребер, соединяющих вершины

$$w_0^j, v_0^j \quad (j = 1, \dots, n)$$

так, как показано на рис. 4. По лемме 6 имеем $\text{id}(B_n) \geq 5n$. В то же время множество

$$\bigcup_{j=1}^n \{x_1^j, x_2^j, v_1^j, w_1^j\}$$

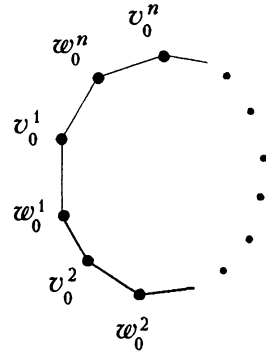


Рис. 4

является доминирующим в B_n . Следовательно, $\text{id}(B_n)/d(B_n) \geq 5/4$.

СЕРИЯ (c). Эту серию образуют графы C_n , $n \geq 1$, такие, что C_n состоит из n копий $C_0^1, \dots, C_0^n$ графа C_0 , изображенного на рис. 3, и из $2n$ ребер, соединяющих вершины

$$w_0^j, v_0^j, x_0^j \quad (j = 1, \dots, n)$$

так, как показано на рис. 5. По лемме 7 имеем $\text{id}(C_n) \geq 8n$. В то же время множество

$$\bigcup_{j=1}^n \{x_1^j, v_1^j, v_6^j, v_7^j, w_1^j, w_6^j, w_7^j\}$$

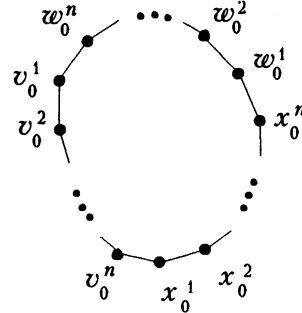


Рис. 5

является доминирующим в C_n . Следовательно, $\text{id}(C_n)/d(C_n) \geq 8/7$.

§ 4. Графы с большой максимальной степенью

В данном параграфе устанавливаются верхние оценки отношения $\text{id}(G)/d(G)$ для графов с максимальной степенью вершин, большей 3. Приводятся также примеры, демонстрирующие близость полученных оценок к оптимальным. В заключение дается точная верхняя оценка величины $\text{id}(G)/d(G)$ через число вершин графа.

Теорема 3. Если $G \in \mathcal{H}_k$, то $\text{id}(G)/d(G) \leq k + 2 - 2\sqrt{k}$.

Доказательство. Пусть D — доминирующее множество в G и $|D| = d(G)$. Положим $Q_0 = \emptyset$ и для $i = 1, 2, \dots$ определим Q_i как

некоторое максимальное независимое подмножество в $D \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} Q_j$. Тогда по построению будем иметь

$$|Q_1| \geq |Q_2| \geq \dots, \quad (5)$$

$$N(x) \cap Q_j \neq \emptyset \text{ для всех } x \in Q_i \text{ при } j < i. \quad (6)$$

Пусть $s+1$ — последний индекс, для которого $Q_{s+1} \neq \emptyset$. В силу (6) имеем $s \leq k$. Используя полученное разбиение множества D , построим независимое доминирующее множество F по правилам:

- $F_{s+2} := D$;
- $F_j := (F_{j+1} \setminus Q_j) \cup I_j$ ($j = s+1, s, \dots, 2$), где I_j — некоторое максимальное независимое подмножество множества $\{v \in V(G) \mid \rho(v, F_{j+1} \setminus Q_j) \geq 2\}$;
- $F := F_2$.

Ввиду (6) имеем

$$\begin{aligned} |F| &= |I_{s+1}| + \dots + |I_2| + |Q_1| \\ &\leq (k-s)|Q_{s+1}| + [(k-s+1)|Q_s| - |Q_{s+1}|] + \dots + [(k-1)|Q_2| - |Q_3| - \dots - |Q_{s+1}|] + |Q_1| \\ &= (k-2s+1)|Q_{s+1}| + (k-2s+3)|Q_s| + \dots + (k-1)|Q_2| + |Q_1|. \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом неравенства (5) получение верхней оценки для $\text{id}(G)$ свелось к нахождению максимума линейной функции

$$f(x) = x_1 + \sum_{i=1}^s (k-2i+1)x_{i+1}$$

на множестве $P \subset \mathbb{R}^{s+1}$, заданном линейными ограничениями

$$\sum_{i=1}^{s+1} x_i = d(G), \quad x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{s+1} \geq 0.$$

Вершинами многогранника P являются точки $\mathbf{x}^t = (x_1^t, \dots, x_{s+1}^t)$, $t = 1, \dots, s+1$, где $x_i^t = d(G)/t$ при $i = 1, \dots, t$ и $x_i^t = 0$ при $i > t$. Поскольку $f(\mathbf{x}^t) = (k+2-t-k/t)d(G) \leq (k+2-2\sqrt{k})d(G)$, а максимум $f(x)$ на P достигается в вершине, окончательно имеем

$$\text{id}(G)/d(G) \leq |F|/d(G) \leq k+2-2\sqrt{k}.$$

Теорема 3 доказана.

ПРИМЕР 1. Пусть $\sqrt{k}$ — целое число, $G = (V, E)$ — связный граф такой, что

$$V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset, |V_1| = \sqrt{k}, |V_2| = \sqrt{k}(k+1-\sqrt{k});$$

$G(V_1)$ — полный граф;

$$\deg(v) = k \quad \forall v \in V_1;$$

$$\deg(v) = 1 \quad \forall v \in V_2.$$

Тогда $d(G) = \sqrt{k}$ и $\text{id}(G) = 1 + (\sqrt{k} - 1)(k + 1 - \sqrt{k}) = (k + 2 - 2\sqrt{k})\sqrt{k}$.

ПРИМЕР 2. Для построения графа H_n берем n копий графа G из примера 1 и в каждой копии G_i выбираем по одной висячей вершине v_i . Затем добавляем n ребер, соединяющих вершины $v_1, \dots, v_n$ в цикл. Тогда $d(H_n) = n\sqrt{k}$,

$$\text{id}(H_n) \geq n\sqrt{k}(k + 2 - 2\sqrt{k}) - 2n/3 = d(H_n)((k + 2 - 2\sqrt{k}) - 2/3\sqrt{k}).$$

Теорема 4. Если G — k -однородный граф, то $\text{id}(G)/d(G) \leq k/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = |V(G)|$, D — доминирующее множество в G и $|D| = d = d(G)$. Заметим, что любое независимое множество в G мощности m инцидентно km ребрам. Отсюда с учетом равенства $|E(G)| = kn/2$ получаем $\text{id}(G) \leq n/2$. Таким образом, если $dk \geq n$, то для G утверждение теоремы справедливо.

Пусть $kd < n$. Так как $|N(D)| = n - d$, то число ребер в подграфе $G(D)$ не превосходит $(kd - (n - d))/2$. Поэтому мощность наибольшего независимого подмножества I множества D не меньше $d - (kd - (n - d))/2$ и, следовательно, больше $d/2$.

Пусть J — наибольшее независимое подмножество множества $Q = \{v \in V(G) \mid \rho(v, I) \geq 2\}$. Понятно, что $I \cup J$ — независимое доминирующее множество в G и $\text{id}(G) \leq |I \cup J|$. С другой стороны,

$$|J| \leq |Q| \leq |N(D \setminus I) \setminus I| \leq (k - 1)|D \setminus I|.$$

Таким образом,

$$|I \cup J| \leq (k - 1)d - (k - 2)|I| < d(k - 1 - (k - 2)/2) = kd/2.$$

Теорема 4 доказана.

ПРИМЕР 3. Для графа G , состоящего из m копий графа $K_{k,k}$, имеем $d(G) = 2m$, $\text{id}(G) = km = \frac{k}{2}d(G)$.

ПРИМЕР 4. Пусть k — четное число, $p = k/2$, $H = K_{k,k-1}$, $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ — большая доля и B — меньшая доля в H . Обозначим через R_n граф такой, что

$$1) V(R_n) = V_1 \cup \dots \cup V_n, \text{ где } V_i = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,k}\}, i = 1, \dots, n;$$

- 2) $R_n(\{v_{i,1}, \dots, v_{i,p}\}) = K_p$, $R_n(\{v_{i,p+1}, \dots, v_{i,k}\}) = K_p$, $i = 1, \dots, n$;
- 3) $(v_{i,j}, v_{i+1,j+1}) \in E(R_n)$ при любых i, j ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$) (первый индекс рассматривается по модулю n , второй — по модулю k);
- 4) других ребер в R_n нет.

Легко видеть, что R_n является $(1+p)$ -однородным графом. Для построения интересующего нас графа G_n возьмем $n(p-1)$ копий $H(i, j)$ графа H и один граф R_n . Затем для каждой тройки (i, j, l) , где $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p-1$, $1 \leq l \leq k$, вершину $a_l(i, j)$ соединим ребром с вершиной $v_{i,l}$. Полученный в результате граф G_n является k -однородным и k -связным.

Пусть $b(i, j)$ — некоторая вершина из меньшей доли $B(i, j)$ графа $H(i, j)$. Определим множество

$$M = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^{p-1} \{a_j(i, j), b(i, j)\} \cup \{v_{i,p+1}\} \right).$$

Очевидно, что $|M| = n(2(p-1) + 1) = n(k-1)$.

Убедимся, что M — доминирующее множество. При любых $i \leq p-1$ и $j \leq p-1$ вершина $v_{i,j}$ и множество $A(i, j) \cup B(i, j)$ покрыты множеством $\{a_j(i, j), b(i, j)\}$, вершина $v_{i,p}$ покрыта вершиной $v_{i+1,p+1}$, а вершины $v_{i,p+1}, \dots, v_{i,k}$ покрывает вершина $v_{i,p+1}$. Следовательно, $d(G_n) \leq n(k-1)$.

Пусть X — произвольное независимое доминирующее множество в G_n . Для любой пары (i, j) либо $B(i, j) \subset X$, либо $B(i, j) \cap X = \emptyset$. В первом случае $|B(i, j) \cap X| = k-1$. Во втором случае лишь две вершины из $A(i, j)$ могут быть покрыты извне (по свойству (2) графа R_n). Значит, в этом случае $|A(i, j) \cap X| \geq k-2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{id}(G_n) &\geq n(k-2)(p-1), \\ \frac{\text{id}(G_n)}{d(G_n)} &\geq \frac{(k-2)^2 n}{2(k-1)n} \geq \frac{k-3}{2}. \end{aligned}$$

Пусть $\varphi(n) = \max\{\text{id}(G)/d(G) : |V(G)| = n\}$. Легко проверить равенства $\varphi(1) = \varphi(2) = \varphi(3) = 1$.

Теорема 5. Если $n \geq 4$, то

$$\varphi(n) = \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Доказательство. Пример полного двудольного графа $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ показывает, что $\varphi(n) \geq \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ при любом $n \geq 4$.

Допустим, что $\text{id}(G)/d(G) > \frac{1}{2} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ для некоторого графа G с числом вершин $n \geq 4$. Выберем в G доминирующее множество $D = \{v_1, \dots, v_d\}$ с $d = d(G)$. Поскольку $\text{id}(G) > \frac{d}{2} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq d$, множество D не является независимым. Следовательно,

$$\deg(v_1) + \dots + \deg(v_d) \geq n - d + 2. \quad (7)$$

Используя очевидное неравенство

$$\text{id}(G) \leq n - \deg(v), \quad (8)$$

справедливое при любом $v \in V(G)$, и неравенство (7), получаем

$$\text{id}(G) \leq n - \left\lceil \frac{n - d + 2}{d} \right\rceil.$$

Так как при $d \neq 3$ и $n \geq 4$, а также при $d = 3$, $n \geq 4$, $n \neq 7$ справедливо неравенство

$$n - \left\lceil \frac{n - d + 2}{d} \right\rceil \leq \frac{d}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

ввиду выбора G имеем $d = 3$, $n = 7$, $\text{id}(G) = 5$. В таком случае в силу (8) должно выполняться неравенство $\deg(v) \leq 2$ для всех $v \in V(G)$. Но тогда согласно [1] $\text{id}(G) \Rightarrow d(G)$ (это равенство следует также из леммы 2), что противоречит выбору G . Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Allan R. B., Laskar R. On domination and independent domination numbers of a graph // Discrete Math. 1978. V. 23. P. 73–76.
2. Barefoot C., Harary F., Jones K. F. What is the difference between domination and independent domination numbers of a cubic graph? // Graphs Combin. 1991. V. 7, N 2. P. 205–208.
3. Kostochka A. V. The independent domination number of a cubic 3-connected graph can be much larger than its domination number // Graphs Combin. 1993. V. 9, N 3. P. 235–237.

Адрес авторов:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики СО РАН

Статья поступила

22 августа 1994 г.

УДК 519.854

О СЛОЖНОСТИ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЙ ДВУХСТАНОЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЖОНСОНА*)

А. Г. Шукин, Н. И. Глебов

Рассматриваются некоторые обобщения двухстаночной задачи Джонсона, изучавшиеся ранее другими авторами в предположении, что последовательности обработки деталей на первом и втором станках совпадают. При таком допущении задачи оказывались полиномиально разрешимыми, так как они сводились (с линейной сложностью) к обычной задаче Джонсона с двумя станками.

В статье доказана теорема, одним из следствий которой является утверждение о том, что эти задачи NP-трудны, если не предполагать совпадения упомянутых последовательностей. Другое следствие этой теоремы характеризует один известный полиномиальный алгоритм в определенном смысле как достаточно точный приближенный алгоритм для решения рассматриваемых задач. Наряду с этим получено также некоторое достаточное условие полиномиальной разрешимости.

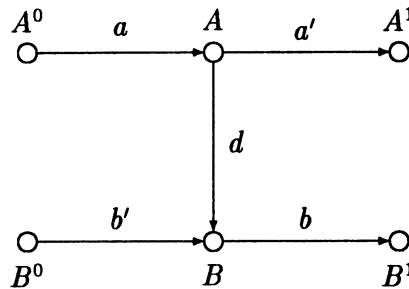
Известно, что в двухстаночной задаче Джонсона [1] (и в некоторых ее обобщениях) существуют оптимальные перестановочные расписания, т. е. расписания, в которых последовательности обработки деталей на каждом станке одинаковы. Однако не все обобщения этой задачи обладают указанным свойством. Тем не менее в работах [2–20] при рассмотрении различных обобщений двухстаночной задачи изначально предполагается, что последовательности обработки деталей на каждом станке совпадают. Как показано в этих работах, при таком допущении эти более общие задачи оказываются полиномиально разрешимыми, а если говорить точнее, они полиномиально (с линейной сложностью) сводятся к исходной задаче Джонсона.

В данной работе мы рассматриваем, по существу, те же самые обобщения двухстаночной задачи, но при этом допускаем, что последовательности обработки деталей на первом и втором станках могут не совпадать, т. е. отыскиваем оптимальное расписание в более широком

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-00489).

классе допустимых расписаний. Такое расширение множества допустимых расписаний может привести и, как правило, приводит к тому, что задача существенно усложняется и становится NP-трудной.

1. Далее будем предполагать, что интересующие нас особенности технологии изготовления каждой детали описываются сетевым графиком (см. рисунок), имеющим два полюса-входа A^0 , B^0 , два полюса-выхода A^1 , B^1 и пять дуг-операций с заданными длительностями.



Операции (A^0, A) и (A, A^1) выполняются на первом станке и имеют длительности a и a' соответственно, а операции (B^0, B) и (B, B^1) , имеющие длительности b' и b соответственно, выполняются на втором станке. Пятая операция (A, B) , имеющая длительность d , выполняется на некотором оборудовании, возможности которого позволяют выполнять подобные операции в любом количестве одновременно. Относительно операций, выполняемых на первом и втором станках, принимаются стандартные допущения, т. е. предполагается, что на станке одновременно может выполняться не более одной операции.

Таким образом, формальная постановка задачи сводится к следующему. Пусть перестановки π_1 и π_2 определены на множестве $\{1, \dots, n\}$ номеров деталей, подлежащих изготовлению, и задают порядок обработки деталей на первом и втором станках соответственно. Точнее, $\pi_1(r)$ (соответственно $\pi_2(r)$) означает порядковый номер r -й детали в последовательности обработки на первом (соответственно втором) станке. Тогда время (общая длительность) изготовления всех деталей равняется длине критического пути (т. е. самого длинного пути из входного полюса в выходной) в сети $G(\pi_1, \pi_2)$, построенной следующим образом:

— входные полюсы A_r^0 и B_s^0 сетевых графиков, соответствующих деталям $r = \pi_1^{-1}(1)$ и $s = \pi_2^{-1}(1)$, отождествляются и становятся входом сети;

— выходные полюсы A_r^1 и B_s^1 сетевых графиков, соответствующих деталям $r = \pi_1^{-1}(n)$ и $s = \pi_2^{-1}(n)$, отождествляются и становятся выходом сети;

— отождествляются полюсы A_r^1 и A_s^0 , где $r = \pi_1^{-1}(k)$, $s = \pi_1^{-1}(k+1)$, $k = 1, \dots, n-1$;

— отождествляются полюсы B_r^1 и B_s^0 , где $r = \pi_2^{-1}(k)$, $s = \pi_2^{-1}(k+1)$, $k = 1, \dots, n-1$.

Длина критического пути в построенной сети (а следовательно, и время изготовления всех деталей при выбранном порядке их обработки на станках) равна

$$\hat{F}(\pi_1, \pi_2) = \max \left\{ \sum_{i=1}^n (a_i + a'_i), \sum_{i=1}^n (b_i + b'_i), F(\pi_1, \pi_2) \right\},$$

где

$$F(\pi_1, \pi_2) = \max_{1 \leq s \leq n} f(\pi_1, \pi_2, s),$$

$$f(\pi_1, \pi_2, s) = \sum \{a_r + a'_r \mid \pi_1(r) < \pi_1(s)\} + a_s + d_s + b_s + \sum \{b_r + b'_r \mid \pi_2(r) > \pi_2(s)\},$$

a_i, a'_i, b_i, b'_i и d_i — длительности операций i -й детали, $1 \leq i \leq n$.

В результате получаем задачу

$$\min_{\pi_1, \pi_2} \hat{F}(\pi_1, \pi_2). \quad (1)$$

Вместо нее нам будет удобнее рассматривать другую задачу:

$$\min_{\pi_1, \pi_2} F(\pi_1, \pi_2), \quad (2)$$

к которой тривиальным образом сводится исходная. Поскольку любое оптимальное решение второй задачи является также оптимальным решением первой, не исключается логическая возможность того, что первая задача в вычислительном плане существенно проще второй. Из доказываемой нами ниже теоремы 1 будет следовать, что обе эти задачи в общем случае NP-трудны и, следовательно, по сложности они не могут существенным образом различаться.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Общим случаем задач (1), (2) мы считаем тот, когда параметры a, a', b и b' могут принимать любые неотрицательные целочисленные значения, а параметр d — любые целочисленные значения. Вводить ограничение на знак параметра d представляется нецелесообразным, поскольку изменение параметра d на одну и ту же величину у всех деталей приводит к аналогичному изменению значения целевой функции $F(\pi_1, \pi_2)$ задачи (2) независимо от π_1 и π_2 , что, по существу, не меняет задачу. С другой стороны, сохраняя большую свободу для выбора значений параметра d , мы получаем дополнительные возможности по сведению к задаче (2) некоторых других задач.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Обычная двухстаночная задача Джонсона получается при $a' = b' = d = 0$. (Здесь и в дальнейшем, говоря о том или ином частном случае задачи, мы дополнительно полагаем, что некоторое условие вида $P(a, a', b, b', d)$ выполняется для всех деталей.)

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Задача нахождения $\min_{\pi} F(\pi, \pi)$, как уже отмечалось выше, является полиномиально разрешимой. Оптимальная перестановка в этом случае может быть построена по следующему правилу [9]: детали из множества $\{r \mid a_r + a'_r \leq b_r + b'_r\}$ располагаются в порядке неубывания величин $a_r - b'_r + d_r$, а за ними следуют остальные детали в порядке невозрастания величин $b_r - a'_r + d_r$.

2. В формулируемой и доказываемой ниже теореме 1 предполагается, что $d = 0$, а $g(x, y, z)$ является полиномиально вычислимой функцией, определенной в области неотрицательных целочисленных значений аргументов и удовлетворяющей при некотором целом положительном q условию $g(x, x, x + q) = x$ для всех x .

Теорема 1. Задача о выполнимости неравенства

$$\min_{\pi_1, \pi_2} F(\pi_1, \pi_2) \leq g \left(\sum_{i=1}^n (a_i + a'_i), \sum_{i=1}^n (b_i + b'_i), \min_{\pi} F(\pi, \pi) \right) \quad (3)$$

является NP-полной.

Доказательство. Поскольку функция $F(\pi_1, \pi_2)$ и все три аргумента функции g в правой части неравенства (3), а следовательно, и правая часть этого неравенства вычисляются по заданным длительностям операций с полиномиальной сложностью, принадлежность рассматриваемой задачи классу NP сомнений не вызывает. Остается лишь убедиться, что к ней полиномиально сводится некоторая NP-полная задача. В качестве таковой возьмем задачу РАЗБИЕНИЕ, которая заключается в следующем: для заданных целых положительных чисел $c_1, \dots, c_t$, $t \geq 2$, требуется выяснить существование подмножества S множества $T = \{1, \dots, t\}$ такого, что $\sum \{c_i \mid i \in S\} = \sum \{c_i \mid i \in T \setminus S\}$. Очевидно, можно считать, что $\sum_{i=1}^t c_i = 2c$, c — целое. Более того, нетрудно видеть, что эта задача с указанными входными данными эквивалентна по сложности задаче с модифицированными данными: $t' = t + 2$; $c'_i = (2q + 1)c_i$, $i = 1, \dots, t$; $c'_{t+1} = c'_{t+2} = q$. Поэтому далее будем предполагать, что $\min_i c_i = q$, и для определенности будем считать $c_1 = q$.

По входным данным задачи РАЗБИЕНИЕ определим входные данные задачи (3):

$$n = t + 2;$$

$$a_i = c_i, b_i = (D + 2)c_i, a'_i = b'_i = 0, \quad i = 1, \dots, t;$$

$$a_{n-1} = a_n = b_{n-1} = b_n = 1;$$

$$a'_{n-1} = a'_n = (D+2)c+1; b'_{n-1} = b'_n = c+1.$$

Здесь $D = \sum_{i=1}^t c_i = 2c$. Положим $Y = (D+3)D+4$ и отметим также,

$$\text{что } \sum_{i=1}^n (a_i + a'_i) = \sum_{i=1}^n (b_i + b'_i) = Y.$$

Минимум функции $F(\pi, \pi)$ достигается на перестановке $\hat{\pi}$, в соответствии с которой в начале располагаются детали из множества T в порядке неубывания величин $a_i - b'_i$, а после них — детали $n-1$ и n в порядке невозрастания величин $b_i - a'_i$. В частности, в нашем случае это означает существование оптимальной перестановки $\hat{\pi}$, для которой $\hat{\pi}(1) = 1$, $\hat{\pi}(n-1) = n-1$ и $\hat{\pi}(n) = n$. Нетрудно, однако, убедиться, что для любой перестановки $\hat{\pi}$ с указанным свойством $F(\hat{\pi}, \hat{\pi}) = Y + q$. В самом деле,

$$\begin{aligned} f(\hat{\pi}, \hat{\pi}, n) &= \sum \{a_r + a'_r \mid \hat{\pi}(r) < n\} + a_n + b_n \\ &= D + 1 + (D+2)c + 1 + 1 + 1 < Y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\hat{\pi}, \hat{\pi}, n-1) &= \sum \{a_r + a'_r \mid \hat{\pi}(r) < n-1\} + a_{n-1} + b_{n-1} + b_n + b'_n \\ &= D + 1 + 1 + 1 + c + 1 < Y. \end{aligned}$$

Далее, при $s \in T \setminus \{1\}$ имеем

$$\begin{aligned} f(\hat{\pi}, \hat{\pi}, s) &\leq \sum \{a_r + a'_r \mid r \in T\} + \sum \{b_r + b'_r \mid \hat{\pi}(r) > 1\} \\ &= D + (D+2)(D-q) + 2(c+2) \leq (D+3)D + 2 < Y \end{aligned}$$

и

$$f(\hat{\pi}, \hat{\pi}, 1) = a_1 + b_1 + \sum \{b_r + b'_r \mid \hat{\pi}(r) > 1\} = q + Y.$$

Таким образом, $\min_{\pi} F(\pi, \pi) = Y + q$ и в силу сделанных ранее допущений, касающихся функции g , правая часть неравенства (3) равняется Y .

Покажем теперь, что в задаче *РАЗБИЕНИЕ* существует множество S с требуемым свойством в том и только в том случае, когда в построенной задаче (3) существуют перестановки π_1 и π_2 , удовлетворяющие неравенству $F(\pi_1, \pi_2) \leq Y$ (или $f(\pi_1, \pi_2, s) \leq Y$ при $s = 1, \dots, n$).

(1) Пусть $S \subset T$ и $\sum \{c_i \mid i \in S\} = \sum \{c_i \mid i \in T \setminus S\} = c$. Рассмотрим перестановки π_1 и π_2 такие, что

$$\pi_1(n-1) = |S| + 1, \pi_1(n) = n, \{r \mid \pi_1(r) \leq |S|\} = S,$$

$$\pi_2(n-1) = 1, \pi_2(n) = |S| + 2, \{r \mid 1 < \pi_2(r) < |S| + 2\} = S.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(\pi_1, \pi_2, n-1) &= \sum \{a_r + a'_r \mid r \in S\} + a_{n-1} + b_{n-1} \\ &+ \sum \{b_r + b'_r \mid r \in T\} + b_n + b'_n = c + 1 + 1 + (D+2)D + 1 + c + 1 = Y, \\ f(\pi_1, \pi_2, n) &= \sum \{a_r + a'_r \mid \pi_1(r) < \pi_1(n)\} + a_n + b_n \\ &+ \sum \{b_r + b'_r \mid \pi_2(r) > \pi_2(n)\} = D + 1 + (D+2)c + 1 + 1 + 1 + (D+2)c = Y. \end{aligned}$$

Далее, при $s \in S$

$$\begin{aligned} f(\pi_1, \pi_2, s) &\leq \sum \{a_r \mid \pi_1(r) \leq |S|\} + \sum \{b_r + b'_r \mid \pi_2(r) > 1\} \\ &= c + (D+2)D + 1 + c + 1 = Y - 2, \end{aligned}$$

а при $s \in T \setminus S$

$$\begin{aligned} f(\pi_1, \pi_2, s) &\leq \sum \{a_r + a'_r \mid \pi_1(r) < n\} + \sum \{b_r \mid \pi_2(r) > |S| + 2\} \\ &= D + 1 + (D+2)c + 1 + (D+2)c = Y - 2. \end{aligned}$$

(2) Пусть $\sum \{c_i \mid i \in S\} = c + \Delta$ и $\Delta \neq 0$ для любого подмножества S .

Для произвольных перестановок π_1 и π_2 определим множества $S = \{r \mid \pi_1(r) < \pi_1(n-1)\}$ и $S' = \{r \mid \pi_2(r) < \min(\pi_2(n-1), \pi_2(n))\}$. При этом далее предполагаем, что $\pi_1(n-1) < \pi_1(n)$, т. е. $n \notin S$. Это не уменьшает общности наших рассуждений ввиду идентичности деталей $n-1$ и n . Нашей целью является доказательство существования такого номера s , что справедливо неравенство $f(\pi_1, \pi_2, s) > Y$.

Если $S' \neq \emptyset$, то для $s = \pi_2^{-1}(1) \in S'$ имеем

$$\begin{aligned} f(\pi_1, \pi_2, s) &\geq a_s + b_s + \sum \{b_r + b'_r \mid \pi_2(r) > 1\} \\ &\geq 1 + (D+2)D + 2(c+2) = Y + 1. \end{aligned}$$

Поэтому далее будем считать множество S' пустым, что эквивалентно равенству $\min(\pi_2(n-1), \pi_2(n)) = 1$.

Если $\Delta > 0$, то пусть $s \in \{n-1, n\}$ и $\pi_2(s) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\pi_1, \pi_2, s) &\geq \sum \{a_r \mid r \in S\} + a_s + b_s + \sum \{b_r + b'_r \mid \pi_2(r) > 1\} \\ &= c + \Delta + 1 + 1 + (c+2) + (D+2)D = Y + \Delta > Y. \end{aligned}$$

Если $\Delta < 0$, то положим $s = \arg \min \{\pi_2(r) \mid r \in T \setminus S\}$ (т. е. $s \in T \setminus S$ и $\pi_2(s) \leq \pi_2(r)$ при любом $r \in T \setminus S$). Тогда

$$\begin{aligned} f(\pi_1, \pi_2, s) &\geq a_{n-1} + a'_{n-1} + a_s + \sum \{b_r \mid r \in T \setminus S\} \\ &\geq 1 + (D+2)c + 1 + 1 + (D+2)(c - \Delta) \\ &= (D+2)D + 3 + (D+2)(-\Delta) \\ &\geq (D+2)D + 3 + (D+2) = Y + 1. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим некоторые следствия теоремы 1.

Следствие 1. Задача о выполнимости неравенства

$$\min_{\pi_1, \pi_2} F(\pi_1, \pi_2) \leq \max \left\{ \sum_{i=1}^n (a_i + a'_i), \sum_{i=1}^n (b_i + b'_i) \right\} \quad (4)$$

является NP-полной.

Из данного утверждения следует, что задачи (1) и (2) являются NP-трудными даже в случае $d = 0$. Более того, они оказываются NP-трудными также и в случае $a' = b' = 0$, поскольку преобразованием

$$(a, a', b, b', d) \rightarrow (a + a', 0, b + b', 0, d - a' - b') \quad (5)$$

общий случай сводится к указанному частному случаю.

Следствие 2. Задача о выполнимости неравенства

$$\min_{\pi_1, \pi_2} F(\pi_1, \pi_2) < \min_{\pi} F(\pi, \pi) \quad (6)$$

является NP-полной.

Это утверждение получается из теоремы 1 при $g(x, y, z) = z - 1$. Оно, в частности, позволяет рассматривать известный полиномиальный (как и любой другой) алгоритм нахождения $\min_{\pi} F(\pi, \pi)$ как алгоритм для получения достаточно «хорошего» приближенного решения задачи (2) в том смысле, что в случае справедливости гипотезы $P \neq NP$ не существует алгоритма полиномиальной сложности, который позволял бы получать приближенное решение этой задачи, имеющее меньшее отклонение от оптимального, если (и только если) такое решение существует.

3. Рассмотрим теперь некоторое достаточное условие, при выполнении которого имеет место равенство

$$\min_{\pi_1, \pi_2} F(\pi_1, \pi_2) = \min_{\pi} F(\pi, \pi), \quad (7)$$

влекущее полиномиальную сводимость задачи (2) к обычной двухстаночной задаче Джонсона.

Из сказанного выше следует, что, не уменьшая общности, можно провести наш анализ для случая $a' = b' = 0$.

Теорема 2. Равенство (7) справедливо, если

$$\max_{1 \leq k \leq n} d_k \leq \min_{1 \leq s \leq n} (d_s + \max\{a_s, b_s\}). \quad (8)$$

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы не выполняется, т. е. $\pi_1 \neq \pi_2$ для любой пары перестановок (π_1, π_2) , являющейся решением задачи (2).

Для произвольных перестановок π_1 и π_2 , $\pi_1 \neq \pi_2$, определим две характеристики:

$$p = \min\{i \mid \pi_1^{-1}(i) \neq \pi_2^{-1}(i)\}, \\ l = \pi_1(\pi_2^{-1}(p)).$$

Затем среди пар перестановок, являющихся решениями задачи (2) и имеющих максимальное значение первой характеристики, выберем пару (π_1, π_2) с минимальным значением l .

Введем также обозначения:

$$s' = \pi_1^{-1}(p), \quad s'' = \pi_2^{-1}(p), \quad k = \pi_2(s').$$

Очевидно, что $\pi_1(s') < \pi_1(s'')$ и $\pi_2(s') > \pi_2(s'')$. В соответствии с условиями теоремы возможны два случая:

- (а) $d_{s'} \leq d_{s''} + a_{s''}$;
- (б) $d_{s'} \leq d_{s''} + b_{s''}$.

В случае (а) рассмотрим перестановку π'_2 :

$$\pi'_2(r) = \begin{cases} p, & \text{если } \pi_2(r) = k \text{ (т. е. } r = s'), \\ \pi_2(r) + 1, & \text{если } p \leq \pi_2(r) < k, \\ \pi_2(r) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\{r \mid \pi'_2(r) \geq \pi'_2(s)\} \subset \{r \mid \pi_2(r) \geq \pi_2(s)\}$ при $s \neq s'$ и $\{r \mid \pi'_2(r) \geq \pi'_2(s')\} = \{r \mid \pi_2(r) \geq \pi_2(s'')\}$. Отсюда далее следуют неравенства

$$\begin{aligned} f(\pi_1, \pi'_2, s') &= \sum \{a_r \mid \pi_1(r) \leq \pi_1(s')\} + d_{s'} + \sum \{b_r \mid \pi'_2(r) \geq \pi'_2(s')\} \\ &= \sum \{a_r \mid \pi_1(r) \leq \pi_1(s'')\} + d_{s'} + \sum \{b_r \mid \pi_2(r) \geq \pi_2(s'')\} \\ &\quad - \sum \{a_r \mid \pi_1(s') < \pi_1(r) \leq \pi_1(s'')\} \\ &\leq f(\pi_1, \pi_2, s'') - d_{s''} - a_{s''} + d_{s'} \leq f(\pi_1, \pi_2, s'') \end{aligned}$$

и при $s \neq s'$

$$f(\pi_1, \pi'_2, s) \leq f(\pi_1, \pi_2, s).$$

Из полученных неравенств вытекает $F(\pi_1, \pi'_2) \leq F(\pi_1, \pi_2)$, что означает оптимальность пары (π_1, π'_2) . Однако это противоречит выбору (π_1, π_2) (либо сделанному выше допущению), так как у (π_1, π'_2) значение первой характеристики больше, чем у (π_1, π_2) (либо $\pi_1 = \pi'_2$).

В случае (б) определим перестановку π'_1 :

$$\pi'_1(r) = \begin{cases} l, & \text{если } \pi_1(r) = p \text{ (т. е. } r = s'), \\ \pi_1(r) - 1, & \text{если } p < \pi_2(r) \leq l, \\ \pi_1(r) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда, как легко видеть, справедливо равенство $\{r \mid \pi'_1(r) \leq \pi'_1(s')\} = \{r \mid \pi_1(r) \leq \pi_1(s'')\}$, а при $s \neq s'$ имеем $\{r \mid \pi'_1(r) \leq \pi'_1(s)\} \subset \{r \mid \pi_1(r) \leq \pi_1(s)\}$. Используя эти соотношения, получаем неравенства

$$\begin{aligned} f(\pi'_1, \pi_2, s') &= \sum \{a_r \mid \pi'_1(r) \leq \pi'_1(s')\} + d_{s'} + \sum \{b_r \mid \pi_2(r) \geq \pi_2(s')\} \\ &= \sum \{a_r \mid \pi_1(r) \leq \pi_1(s'')\} + d_{s'} + \sum \{b_r \mid \pi_2(r) \geq \pi_2(s'')\} \\ &\quad - \sum \{b_r \mid \pi_2(s') > \pi_2(r) \geq \pi_2(s'')\} \\ &\leq f(\pi_1, \pi_2, s'') - d_{s''} - b_{s''} + d_{s'} \leq f(\pi_1, \pi_2, s'') \end{aligned}$$

и при $s \neq s'$

$$f(\pi'_1, \pi_2, s) \leq f(\pi_1, \pi_2, s).$$

Как и в предыдущем случае, из полученных выше неравенств следует оптимальность пары (π'_1, π_2) , что также противоречит либо сделанному нами допущению, либо выбору пары (π_1, π_2) , поскольку у (π'_1, π_2) либо первая характеристика больше, чем у (π_1, π_2) , либо при их равенстве вторая характеристика меньше, чем у (π_1, π_2) . Теорема 2 доказана.

Установленное для частного случая достаточное условие (8) полиномиальной разрешимости задачи (2) с использованием преобразования (5) переносится и на общий случай.

В результате получаем условие

$$\max_{1 \leq k \leq n} (d_k - a'_k - b'_k) \leq \min_{1 \leq s \leq n} (d_s - a'_s - b'_s + \max\{a_s + a'_s, b_s + b'_s\}). \quad (9)$$

Следствие. Если $a' \cdot b' = d = 0$, то задача (2) полиномиально разрешима.

В данном случае легко убедиться в том, что условие (9) выполняется, так как $\max_k (-a'_k - b'_k) \leq 0$ и $\min_s (-a'_s - b'_s + \max\{a_s + a'_s, b_s + b'_s\}) \geq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson S. M. Optimal two- and three-stage production schedules with set-up times included // Naval Res. Log. Quart. 1954. V. 1, N 1. P. 61–68. (Русский перевод: Джонсон С. Оптимальное расписание для двух- и трехступенчатых процессов с учетом времени наладки // Кибернетический сборник. Нов. сер. М.: Мир, 1965. Вып. 1.)
2. Jackson J. R. An extension of Johnson's results on job lot scheduling // Naval Res. Log. Quart. 1956. V. 3. P. 201–203.

3. **Johnson S. M.** Discussion: Sequencing n jobs on two machines with arbitrary time lags // *Manag. Sci.* 1959. V. 5, N 3. P. 299–303.
4. **Mitten L. G.** Sequencing n jobs on two machines with arbitrary time lags // *Manag. Sci.* 1959. V. 5, N 3. P. 293–298.
5. **Mitten L. G.** A scheduling problems // *J. Industr. Eng.* 1959. V. 10, N 3. P. 131–135.
6. **Nabeshima I.** Sequencing on two machines with start lag and stop lag // *J. Oper. Res. Soc. Japan.* 1963. V. 5. P. 97–101.
7. **Szwarc W.** On some sequencing problems // *Naval Res. Log. Quart.* 1969. V. 15. P. 123–155.
8. **Kurisu T.** Flow shop sequencing problem with time lags // *Technol. Reps. Osaka Univ.* 1973. N 2. P. 303–314.
9. **Левнер Е. В.** Сетевой подход к задачам теории расписаний // *Исследования по дискретной математике.* М.: Наука, 1973. С. 135–150.
10. **Yoshida T., Hitomi K.** Optimal two-stage production scheduling with setup times separated // *AIIE Trans.* 1979. V. 11, N 2. P. 261–263.
11. **Maggu P. L., Das G.** On $2 \times n$ sequencing problem with transportation times of jobs // *Pure Appl. Math. Sci.* 1980. V. 12, N 1–2. P. 1–6.
12. **Maggu P. L., Das G., Kumar R.** On equivalent-job for job-block in $2 \times n$ sequencing problem with transportation-times // *J. Oper. Res. Soc. Japan.* 1981. V. 24, N 2. P. 136–146.
13. **Sule D. R.** Sequencing n jobs on two machines with setup processing and removal times separated // *Naval Res. Log. Quart.* 1982. V. 29, N 3. P. 517–519.
14. **Maggu P. L., Singhal M. L., Mohammad N., Yadav S. K.** On N -job, 2-machine flow-shop scheduling problem with arbitrary time lags and transportation times of jobs // *J. Oper. Res. Soc. Japan.* 1982. V. 25, N 3. P. 219–227.
15. **Szwarc W.** Flow-shop problems with time lags // *Manag. Sci.* 1983. V. 29, N 4. P. 477–481.
16. **Sule D. R., Huang K. Y.** Sequencing on two and three machines with setup processing and removal times separated // *Intern. J. Prod. Res.* 1983. V. 21, N 5. P. 723–732.
17. **Monma C. L., Rinnooy Kan A. H. G.** A concise survey of efficiently solvable special cases of the permutation flow-shop problem // *RAIRO Rech. Opér.* 1983. V. 17, N 2. P. 105–119.
18. **Khurana K., Bagga P. C.** Minimizing the makespan in a 2-machine flowshop with time lags and setup conditions // *Z. Oper. Res. Ser. A.* 1984. V. 28, N 2. P. 163–174.

19. **Bagga P. C., Khurana K.** Transportation of job-blocks with separated setup times and removal times // *Cahiers Centre Études Rech. Opér.* 1984. V. 26, N 3–4. P. 195–200.
20. **Левнер Е. В.** Эффективные графовые алгоритмы для задач теории расписаний джонсоновского типа // *Экономико-математическое моделирование и анализ дискретных систем.* М.: Изд-во ЦЭМИ АН СССР, 1988. С. 109–125.

Адреса авторов:

А. Г. Щукин
Россия,
630090 Новосибирск,
ул. Пирогова, 2,
Новосибирский
государственный университет
Н. И. Глебов
Россия,
630090 Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: nigleb@math.nsk.su

Статья поступила

5 декабря 1995 г.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ПОГАШЕНИЯ ВЗАИМНЫХ ДОЛГОВ ПРЕДПРИЯТИЙ*)

Э. Х. Гимади, Н. И. Глебов, В. В. Залюбовский

Предлагаются две математические модели погашения взаимных долгов предприятий. Первая модель касается задачи целесообразного перераспределения долгов предприятий с учетом их важности (приоритетов, весов и т. п.) и допустимых объемов долгов, получаемых в результате перераспределения, вторая модель — задачи целесообразного использования дополнительных (кредитных) ресурсов, направляемых на погашение взаимных долгов. Решение возникающих при этом оптимизационных задач основано на сведении их к хорошо известной задаче о циркуляции минимальной стоимости. Приводится информация о практической реализации рассматриваемых задач и возможных направлениях дальнейшего развития предлагаемого подхода.

Введение

Необходимость разработки рассматриваемых моделей вызвана высоким уровнем взаимных неплатежей, которые в условиях сильных инфляционных процессов привели к резкому сокращению налоговых поступлений и увеличению дефицита бюджета. Невыполнение платежных обязательств предприятиями, областными администрациями и федеральными органами приводит к длительным задержкам заработной платы, общему спаду производства и усиливает социально-экономическую напряженность в стране.

Проблема неплатежей, несомненно, очень сложна и многогранна. В силу этого авторы не ставят перед собой цель всестороннего исследования причин этого явления и способов его устранения. Ограничимся рассмотрением достаточно простой ситуации, когда для некоторого множества предприятий известна информация об их задолженности друг другу в виде простых соотношений типа «предприятие x должно предприятию y сумму $d(x, y)$ ». В качестве показателя напряженности такой системы используем сумму величин $d(x, y)$ либо их взвешенную сумму.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01591).

Известны по крайней мере два пути снижения суммы взаимных задолженностей предприятий: перераспределение долгов и проведение циклических взаимозачетов.

Первый из этих возможных способов снижения напряженности рассматриваемой системы заключается в проведении некоторого перераспределения долгов предприятий, направленного на уменьшение суммарной задолженности.

Основным аргументом в пользу применения такой процедуры является тот факт, что для большого числа предприятий сумма его долгов сравнима с суммой средств, которые ему должны другие предприятия. В работах [1–3] рассмотрена постановка задачи зачета взаимных долгов предприятий, в которой в качестве функционала фигурирует сумма квадратов долгов предприятий, остающихся после перераспределения. Такой выбор целевой функции представляется искусственным, поскольку не выражает существа дела и может быть объяснен пристрастием авторов к методу неопределенных множителей Лагранжа.

В работах [4, 5] приводится постановка задачи с более естественным функционалом, равным сумме всех долгов предприятий. С математической точки зрения рассматриваемая задача тривиально сводится к нахождению произвольного допустимого решения транспортной задачи, когда стоимость транспортировки не учитывается. Предложенные в [4, 5] способы получения таких решений транспортной задачи давно и хорошо известны специалистам в области исследования операций. Так, в [4] используется алгоритм, являющийся, по сути, вариацией метода «северо-западного» угла. В [5] перераспределение долгов производится пропорционально балансам платежей предприятий.

Несмотря на многообещающее название статьи [4], используемый подход имеет ряд существенных недостатков. Один из них заключается в том, что рассматриваемые в модели долги характеризуются только своими размерами. На практике же существует определенная дифференциация долгов, связанная с их важностью для предприятия либо системы в целом. Например, платежи в бюджет, просроченная задолженность предприятия, на которую производится начисление пени, и т. п.

Частичный учет этого фактора возможен, если с каждым долгом $d(x, y)$ связать некоторую величину $c(x, y)$, которую будем называть *ценой единичной задолженности предприятия x предприятию y* . В качестве $c(x, y)$ могут быть взяты приоритет долга $d(x, y)$, взимаемый штраф либо премия за его ликвидацию. При этом в качестве целевой функции естественно взять сумму величин $c(x, y)f(x, y)$, где $f(x, y)$ — долг предприятия x предприятию y после процедуры перераспределения. Очевидно, что в этом случае предложенные в [4, 5] методы не гарантируют получение точного решения.

Более существенным недостатком является то, что в результате подобного перераспределения могут возникнуть новые отношения «должник — заемщик» между предприятиями, не связанными ранее между собой никакими реальными обязательствами. В условиях децентрализованной экономики и самостоятельности предприятий реализация подобных отношений может оказаться затруднительной либо невыполнимой.

Второй из упомянутых способов снижения суммы взаимных задолженностей предприятий — метод циклических взаимозачетов — предполагает абсолютное запрещение новых долговых связей. Вследствие этого каждое предприятие может производить расчеты только с теми предприятиями, с которыми оно изначально связано отношениями «должник — заемщик». Очевидно, в силу столь жесткого ограничения эффект циклического взаимозачета может быть меньше, чем в случае перераспределения долгов, но он представляется более удобным с точки зрения практической реализации. Кроме того, эффект такого взаимозачета может быть существенно увеличен за счет использования кредитных ресурсов.

Отличительной особенностью предлагаемого в настоящей статье подхода является то, что для любых двух предприятий x и y задается диапазон допустимых значений величины, полученной в ходе перераспределения долгов задолженности предприятия x предприятию y . В этом случае мы имеем дело с обобщением упомянутых выше подходов. Действительно, если положить верхние границы всех диапазонов равными достаточно большому числу, а нижние границы — нулю, то получим задачу перераспределения долгов. Если же верхние границы считать равными $d(x, y)$, а нижние — нулю, то будем иметь модель циклических взаимозачетов. Кроме того, в целевой функции мы допускаем взвешенное суммирование долгов предприятий.

В настоящей статье предлагаются две математические модели погашения долгов. Решение возникающих при этом оптимизационных задач основано на сведении их к хорошо известной задаче о циркуляции минимальной стоимости [6, 7]. Под *сводимостью задачи A к задаче B* будем понимать возможность построения исходных данных задачи B по исходным данным задачи A и получения по оптимальному решению задачи B оптимального решения задачи A .

В разд. 1 вводятся необходимые обозначения и описывается базовая математическая модель. В разд. 2 рассматривается обобщенная задача целесообразного перераспределения долгов предприятий с учетом упомянутой выше функции $c(x, y)$. Разд. 3 посвящен решению задачи целесообразного использования дополнительных ресурсов, направляемых на погашение взаимных долгов. В заключении приводится информация о практической реализации рассматриваемых задач и возможных направлениях дальнейшего развития предлагаемого подхода.

1. Базовая математическая модель

Для описания базовой модели введем ориентированный граф $G = (V, U)$ с множеством вершин V и множеством дуг $U \subset V \times V$.

Для непересекающихся подмножеств X и Y из V через (X, Y) обозначим множество всех дуг графа G , ведущих из $x \in X$ в $y \in Y$.

Для любой функции w , определенной на множестве U , обозначим через $\text{div}_w(x)$ дивергенцию функции w в вершине $x \in V$, вычисляемую по формуле

$$\text{div}_w(x) = \sum_{u \in A(x)} w(u) - \sum_{u \in B(x)} w(u),$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — множества дуг в графе G , выходящих из вершины x и входящих в вершину x соответственно.

Функцию f , определенную на множестве U , называют циркуляционным потоком, или *циркуляцией*, если $\text{div}_f(v) = 0$ для всякого $v \in V$.

Задача о циркуляции минимальной стоимости (ЗЦМС) на графе $G = (V, U)$ может быть записана в следующем виде.

Минимизировать

$$\sum_{u \in U} c(u)f(u) \tag{1}$$

при выполнении следующих ограничений:

$$\text{div}_f(v) = 0 \text{ при каждом } v \in V, \tag{2}$$

$$\check{a}(u) \leq f(u) \leq \hat{a}(u) \text{ при каждом } u \in U, \tag{3}$$

где $c(u)$ — цена прохождения единичного потока по дуге u ; $\check{a}(u)$ и $\hat{a}(u)$ — ограничения снизу и сверху на величину потока по дуге $u \in U$.

Эффективные методы решения ЗЦМС имеются, например, в [6–8]. В [8] содержится обширный материал, посвященный особенностям реализации методов решения ЗЦМС и сравнительному анализу различных алгоритмов.

2. Обобщенная задача

перераспределения долгов предприятий

Обозначим через $N = \{1, \dots, n\}$ множество предприятий. На множестве $E = \{(i, j) \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$ заданы функции $d(e)$, $c(e)$ и $a(e)$, равные для $e = (i, j)$ соответственно долгу, цене единичной задолженности и максимально допустимой величине задолженности предприятия i предприятию j . Естественно предположить, что $d(e) \geq 0$ и $a(e) \geq 0$ при любом $e \in E$.

Для функции d , определенной на множестве E , дивергенцию $\text{div}_d(x)$ в вершине $x \in N$ для простоты будем обозначать через $\Delta(x)$.

Обобщенная задача перераспределения долгов предприятий (далее ЗПДП) может быть сформулирована следующим образом: при заданных функциях $d(e)$, $c(e)$ и $a(e)$ найти такое перераспределение долгов $f(e)$, которое минимизирует функцию

$$\sum_{e \in E} c(e)f(e) \quad (4)$$

при условии совпадения дивергенции функции f с дивергенцией искомой функции d , т. е. при каждом $x \in N$

$$\operatorname{div}_f(x) = \Delta(x), \quad (5)$$

и выполнении ограничений на задолженность, т. е. при каждом $e \in E$

$$0 \leq f(e) \leq a(e). \quad (6)$$

Утверждение 1. ЗПДП (4)–(6) сводится к ЗЦМС (1)–(3).

Доказательство. Очевидно, что пара (N, E) образует ориентированный граф. Покажем, что ЗПДП может быть сведена к ЗЦМС на некотором расширенном графе $\tilde{G} = (V, U)$, где $V = N \cup \{s\}$, $U = E \cup (s, S) \cup (T, s)$, s — фиктивная вершина, а множества S и T определены следующим образом:

$$S = \{x \in N \mid \Delta(x) > 0\}; \quad T = \{x \in N \mid \Delta(x) < 0\}.$$

Множество S состоит из предприятий, чей суммарный долг участникам рассматриваемой системы больше суммарной задолженности участников системы этому предприятию. В дальнейшем такие предприятия будем называть *дебиторами системы*. Предприятия, составляющие множество T , будем называть *кредиторами системы*.

По исходным данным ЗПДП построим ЗЦМС на графе $\tilde{G} = (V, U)$ со следующими значениями функций $c(u)$, $\check{a}(u)$ и $\hat{a}(u)$:

$$c(u) = \begin{cases} c(u), & \text{если } u \in E, \\ 0, & \text{если } u \in (s, S) \cup (T, s); \end{cases} \quad (7)$$

$$\check{a}(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \in E, \\ \Delta(x), & \text{если } u = (s, x) \in (s, S), \\ -\Delta(x), & \text{если } u = (x, s) \in (T, s); \end{cases} \quad (8)$$

$$\hat{a}(u) = \begin{cases} a(u), & \text{если } u \in E, \\ \Delta(x), & \text{если } u = (s, x) \in (s, S), \\ -\Delta(x), & \text{если } u = (x, s) \in (T, s). \end{cases} \quad (9)$$

Пусть $\tilde{f}(u)$ — оптимальное решение ЗЦМС на расширенном графе $\tilde{G} = (V, U)$. Покажем, что $f(e) = \tilde{f}(e)$, $e \in E$, является оптимальным решением ЗПДП.

Пусть $A(x)$, $B(x)$ — множества дуг в графе G , выходящих из вершины x и входящих в вершину x соответственно. Используем обозначения $\tilde{A}(x)$, $\tilde{B}(x)$ для аналогичных множеств в графе $\tilde{G}$. Очевидно, что

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} A(x), & \text{если } x \in S, \\ A(x) + \tilde{f}(x, s), & \text{если } x \in T; \end{cases} \quad (10)$$

$$\tilde{B}(x) = \begin{cases} B(x) + \tilde{f}(s, x), & \text{если } x \in S, \\ B(x), & \text{если } x \in T. \end{cases} \quad (11)$$

С учетом равенств (2), (10), (11) и очевидного соотношения $\tilde{f}(s, x) = \Delta(x)$ при $x \in S$ и $\tilde{f}(x, s) = -\Delta(x)$ при $x \in T$ следует выполнение ограничений (5) для всякого $x \in N$:

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{div}_{\tilde{f}}(x) &= \sum_{u \in \tilde{A}(x)} \tilde{f}(u) - \sum_{u \in \tilde{B}(x)} \tilde{f}(u) = \sum_{e \in A(x)} f(e) - \sum_{e \in B(x)} f(e) - \Delta(x) \\ &= \operatorname{div}_f(x) - \Delta(x). \end{aligned}$$

Выполнение ограничения (6) непосредственно следует из (3), поскольку для всякого $e \in E$ в силу (8)–(9) справедливы равенства $\tilde{a}(e) = 0$ и $\tilde{a}(e) = a(e)$.

Наконец, из (7) следует совпадение оптимального значения целевой функции ЗЦМС на графе $\tilde{G}$ со значением целевой функции ЗПДП на указанном решении $f(e)$, $e \in E$. Отсюда непосредственно следуют оптимальность решения $f(e)$, $e \in E$, и сводимость ЗПДП к ЗЦМС. Утверждение 1 доказано.

3. Задача целесообразного кредитования для погашения долгов предприятий

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ — множество предприятий, а $\mathcal{A} \subset E = \{(i, j) \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$ — подмножество пар (i, j) , для которых заданы долги d_{ij} предприятия i предприятию j . Известен также суммарный кредит Q , предоставляемый предприятиям для погашения долгов.

Каждому предприятию $i \in N$, в принципе, предоставляется возможность взятия некоторого кредита q_i , $0 \leq q_i \leq Q$, и в результате дальнейших взаиморасчетов некоторая сумма p_i может оказаться на «свободном» счете этого предприятия.

Далее сумму значений произвольной функции w по дугам, соединяющим непересекающиеся множества X и Y , будем обозначать соответствующей заглавной буквой:

$$W(X, Y) = \sum_{(i,j) \in (X,Y)} w_{ij}.$$

Рассмотрим следующую задачу целесообразного кредитования: найти систему выплат f_{ij} , кредитования q_i предприятий и «чистых» возвратов долгов p_i , минимизирующую сумму оставшихся долгов

$$\sum_{j=1}^n q_j + \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} (d_{ij} - f_{ij}) \quad (12)$$

при следующих условиях:

- сумма использованного кредитного ресурса не превышает лимита предоставляемого ресурса, т. е. при любом $j \in N$

$$\sum_{j=1}^n q_j \leq Q, \quad q_j \geq 0; \quad (13)$$

- выплата предприятия i предприятию j не превышает величины его долга, т. е. при любых $(i, j) \in \mathcal{A}$

$$0 \leq f_{ij} \leq d_{ij}; \quad (14)$$

- сумма средств, поступающих предприятию в виде кредита и выплат от других предприятий, равно сумме средств, оставляемых на «свободном» счете предприятия, и выплат его кредиторам, т. е. при любом $i \in N$

$$F(N, i) + q_i = F(i, N) + p_i. \quad (15)$$

Задачу (12)–(15) обозначим через ЗЦК.

Отметим некоторые свойства величин p_i и q_i , $i \in N$.

Утверждение 2. Решение ЗЦК удовлетворяет соотношению

$$\sum_{i \in N} q_i = \sum_{i \in N} p_i.$$

Доказательство. Просуммировав (15) по i , получим

$$\sum_{i \in N} F(N, i) + \sum_{i \in N} q_i = \sum_{i \in N} F(i, N) + \sum_{i \in N} p_i.$$

Отсюда в силу совпадения сумм потоков следует справедливость утверждения 2.

Утверждение 3. В оптимальном решении ЗЦК при любом $i \in N$ выполняется равенство $p_i q_i = 0$, т. е. если $q_i > 0$, то $p_i = 0$, и если $p_i > 0$, то $q_i = 0$.

Доказательство. Допустим, что в оптимальном решении для некоторого $i \in N$ справедливы неравенства $p_i > 0$ и $q_i > 0$. Тогда, не изменяя системы выплат f_{ij} , можно уменьшить кредит q_i , предоставленный предприятию i , и размер средств на «свободном» счете p_i на величину $\min(p_i, q_i) > 0$ и тем самым получить решение задачи с меньшим значением целевой функции. Полученное противоречие доказывает утверждение 3.

Воспользуемся обозначениями для множеств дебиторов и кредиторов системы, введенными в предыдущем разделе: $S = \{v \in N \mid \text{div}_d(v) > 0\}$; $T = \{v \in N \mid \text{div}_d(v) < 0\}$.

Имеют место следующие свойства оптимального решения ЗЦК.

Утверждение 4. В оптимальном решении ЗЦК для всякого кредитора $j \in T$ кредит q_j равен 0.

Доказательство. Допустим, что $q_j > 0$ для некоторого $j \in T$. Тогда из утверждения 2 следует, что

$$F(N, j) + q_j = F(j, N) \leq D(j, N) \leq D(N, j),$$

т. е. $F(N, j) < D(N, j)$, и, таким образом, найдется дуга $(i, j) \in \mathcal{A}$, для которой $f_{ij} < d_{ij}$. Положив $\delta = \min(q_j, d_{ij} - f_{ij}) > 0$ и перестроив поток $f'_{ij} = f_{ij} + \delta$, $q'_j = q_j - \delta$, $q'_i = q_i + \delta$, получим допустимый поток со значением целевой функции, уменьшенном на величину $\delta > 0$. Полученное противоречие доказывает утверждение 4.

Аналогичным способом может быть доказано

Утверждение 5. В оптимальном решении ЗЦК для всякого дебитора $i \in S$ свободный остаток p_i равен 0.

Доказательство. Пусть $p_i > 0$ для некоторого $i \in S$. Имеем

$$D(i, N) > D(N, i) \geq F(N, i) = F(i, N) + p_i > F(i, N),$$

откуда найдется дуга $(i, j) \in \mathcal{A}$, для которой $f_{ij} < d_{ij}$. Положив $\delta = \min(p_i, d_{ij} - f_{ij}) > 0$ и перестроив поток $f'_{ij} = f_{ij} + \delta$, $p'_i = p_i - \delta$, $p'_j = p_j + \delta$, получим допустимый поток со значением целевой функции, уменьшенном на величину $\delta > 0$, что противоречит оптимальности решения ЗЦК. Утверждение 5 доказано.

Утверждение 6. ЗЦК (12)–(15) сводится к ЗЦМС (1)–(3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательный граф $\tilde{G} = (V, U)$, где $V = N \cup \{s, t\}$ — множество вершин (s, t — фиктивные); $U = \mathcal{A} \cup (s, S) \cup (T, t) \cup (t, s)$ — множество дуг с параметрами

$$c(u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u \in \mathcal{A}, \\ 1, & \text{если } u \in (s, S), \\ 0, & \text{если } u \in (T, t) \cup (t, s); \end{cases} \quad (16)$$

$$\check{a}(u) = 0, \quad \text{если } u \in U; \quad (17)$$

$$\hat{a}(u) = \begin{cases} d(u), & \text{если } u \in \mathcal{A}, \\ Q, & \text{если } u \in (s, S) \cup (T, t) \cup (t, s). \end{cases} \quad (18)$$

Заметим, что если $\tilde{f}(u)$ — произвольное допустимое решение ЗЦМС на графе $\tilde{G}$, то решение ЗЦК, определяемое как $f_{ij} = \tilde{f}(u)$ для $u = (i, j) \in \mathcal{A}$, также является допустимым и дает значение целевой функции, отличающееся от значения целевой функции ЗЦМС на постоянную величину $\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} d_{ij}$. Отсюда следует, что сужение оптимального решения ЗЦМС на графе $\tilde{G}$ на множество $\mathcal{A}$ дает оптимальное решение ЗЦК. Утверждение 6 доказано.

Заключение

На основе предложенных моделей авторами создано программное обеспечение, позволяющее решать реальные задачи погашения взаимных долгов предприятий на персональных компьютерах. Существующая версия позволяет получать решения задач, содержащих до 50000 клиентов и несколько миллионов связей (долгов) между ними. Эта размерность соответствует объему информации о предприятиях крупной области и даже региона. Время счета на компьютере с процессором Intel Pentium 200 и объемом оперативной памяти 64 Мб при случайно генерируемых данных составляет 15 минут при 1 млн. связей. При числе связей 2 млн. время работы программы увеличивается до 2,5 часов. Следует отметить, что при использовании реальных данных время работы программы, как правило, существенно меньше. К сожалению, в настоящее время авторы не располагают реальной информацией подобных размеров.

Разработанная программа используется в Национальном банке республики Бурятия (г. Улан-Удэ) и АКБ «Кузбасспромбанк» (г. Кемерово). Готовится ее внедрение в Красноярской расчетной палате и АИК-ПСБ «Омскпромстройбанк». Широкое внедрение программы сдерживается сложностью сбора необходимой информации и недостаточной правовой поддержкой процедуры проведения взаимозачета.

В качестве основных направлений развития предложенных моделей наиболее перспективными представляются следующие:

- учет приоритетов платежей в задаче целесообразного кредитования;
- учет товарообменных операций при проведении взаимозачета;
- возможность учета операций взаимозачета, не сохраняющих проплату.

Два первых направления, в принципе, могут быть реализованы в рамках задачи о циркуляции минимальной стоимости. Для решения последней задачи необходимо использование более общей модели, учитывающей изменение потока при прохождении определенных дуг графа.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Калиткин Н. Н.** Оптимальный взаимозачет долгов предприятий // Мат. моделирование. 1995. Т. 7, № 1. С. 11–21.
2. **Калиткин Н. Н.** Задача зачета взаимных долгов предприятий // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 1. С. 12–14.
3. **Калиткин Н. Н., Кузьмина Л. В.** О зачете взаимных долгов предприятий // Мат. моделирование. 1995. Т. 7, № 4. С. 64–72.
4. **Калиткин Н. Н., Михайлов А. П.** Идеальное решение задачи зачета взаимных долгов // Мат. моделирование. 1995. Т. 7, № 6. С. 111–117.
5. **Цициашвили Г. Ш.** Решение задачи о погашении взаимных долгов // Дальневосточный мат. сб. 1995. № 1. С. 126–131.
6. **Goldberg A. V., Tarjan R. E.** Finding minimum-cost circulations by cancelling negative cycles // J. Assoc. Comput. Mach. 1989. V. 36, N 4. P. 873–886.
7. **Goldberg A. V., Tarjan R. E.** Finding minimum-cost circulations by successive approximation // Math. Oper. Res. 1990. V. 15, N 3. P. 430–466.
8. **Johnson D. S., McGeoch C. C. (eds.)** Network flows and matching: first DIMACS implementation challenge. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. (DIMACS series in discrete mathematics and theoretical computer science; V. 12).

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
13 июня 1997 г.

УДК 519.176

О ЗАДАЧАХ ЦЕЛЕСООБРАЗНОГО ТОВАРООБМЕНА*)

Э. Х. Гимади, Н. И. Глебов, В. В. Залюбовский

Предлагаются математические модели нахождения планов целесообразного товарообмена и погашения взаимных долгов предприятий с помощью товарообменных операций. Рассмотрена возможность учета затрат на транспортировку продукции. Решение возникающих при этом оптимизационных задач основано на сведении их к хорошо известной задаче о циркуляции минимальной стоимости. Приводится информация о программном продукте, в котором реализованы предлагаемые модели.

Введение

В работе [1] были предложены две математические модели погашения взаимных долгов предприятий, в которых рассматривались оптимизационные задачи нахождения схем денежных взаимозачетов с учетом важности и допустимых объемов долгов, а также с использованием дополнительных кредитных ресурсов. Однако в силу недостатка оборотных средств и ряда других причин при реальных расчетах между предприятиями доля денежных платежей нередко составляет менее 10% от общей суммы. Остальной объем платежей приходится на товарообменные (бартерные) операции и операции с различными видами ценных бумаг и их суррогатов.

Очевидно, что подобные платежные инструменты обладают существенно меньшей универсальностью, что на фоне отсутствия централизованных систем снабжения и торговли, а также неразвитости рынка ценных бумаг порождает серьезные трудности в организации поставок сырья и сбыта продукции для отдельно взятого предприятия. Каждое предприятие, как правило, хорошо знает потенциальных поставщиков необходимого ему сырья и оборудования, а также непосредственных покупателей своей продукции. Но такой информации зачастую бывает

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01591).

недостаточно для организации устойчивых товарообменных операций в условиях нехватки оборотных средств. Одним из возможных выходов из сложившейся ситуации представляется возможность нахождения схем целесообразного товарообмена на основе комплексного анализа ресурсных потребностей и производственных возможностей соответствующей совокупности предприятий.

В настоящей работе предлагаются математические модели погашения долгов предприятий с использованием товарообменных операций. Как и в [1], в качестве базовой математической модели, к которой осуществляется сведение рассматриваемых в работе задач целесообразного товарообмена, использована задача о циркуляции минимальной стоимости.

1. Базовая математическая модель

Пусть имеется ориентированный граф $G = (V, U)$ с множеством вершин V и множеством дуг $U \subset V \times V$.

Для непересекающихся подмножеств X и Y из V через (X, Y) обозначим множество всех дуг графа G , ведущих из $x \in X$ в $y \in Y$.

Для любой функции w , определенной на множестве U , обозначим через $\text{div}_w(x)$ дивергенцию функции w в вершине $x \in V$, вычисляемую по формуле

$$\text{div}_w(x) = \sum_{u \in A(x)} w(u) - \sum_{u \in B(x)} w(u),$$

где $A(x)$, $B(x)$ — множества дуг в графе G , выходящих из вершины x и входящих в вершину x соответственно.

Функцию f , определенную на множестве U , называют циркуляционным потоком, или *циркуляцией*, если $\text{div}_f(v) = 0$ для всякого $v \in V$.

Задача о циркуляции минимальной стоимости (далее ЗЦМС) на графе $G = (V, U)$ может быть записана в следующем виде.

Минимизировать

$$\sum_{u \in U} c(u)f(u) \quad (1)$$

при выполнении следующих ограничений:

$$\text{div}_f(v) = 0, \quad v \in V, \quad (2)$$

$$\check{a}(u) \leq f(u) \leq \hat{a}(u), \quad u \in U, \quad (3)$$

где $c(u)$ — цена прохождения единичного потока по дуге u ; $\check{a}(u)$ и $\hat{a}(u)$ — ограничения снизу и сверху на величину потока по дуге $u \in U$.

Эффективные методы решения ЗЦМС имеются, например, в [2–3].

2. Задача целесообразного товарообмена

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ — множество предприятий, $R = \{1, \dots, m\}$ — множество типов товаров (ресурсов), выпускаемых и/или потребляемых предприятиями из множества N . В дальнейшем мы не будем различать понятия «товар» и «ресурс», так как один и тот же продукт (услуга) может быть для одного предприятия потребляемым ресурсом, а для другого — производимым товаром.

Для каждого предприятия $i \in N$ и товара $r \in R$ заданы величины $s_i^r \geq 0$ и $p_i^r \geq 0$, равные соответственно объему спроса и предложения (исчисляемых в стоимостном выражении). Без уменьшения общности можно считать, что $s_i^r p_i^r = 0$ для любых $i \in N$ и $r \in R$. Содержательный смысл этого условия заключается в том, что никакое предприятие не может являться одновременно поставщиком и покупателем одного и того же товара.

Под схемой (планом) товарообмена будем понимать совокупность величин $f_{ij}^r \geq 0$, $i, j \in N$, $r \in R$. При этом значение f_{ij}^r равно объему (в стоимостном выражении) товара r , передаваемого предприятием i предприятию j . Далее будем полагать, что $f_{ij}^r f_{ji}^r = 0$, т. е. отсутствуют встречные поставки одного и того же товара между парой предприятий.

Задача нахождения целесообразного товарообмена (далее ЗЦТ) может быть сформулирована следующим образом: при заданных величинах s_i^r и p_i^r найти такую схему товарообмена (f_{ij}^r), которая максимизировала бы суммарный объем товарообменных операций:

$$\sum_{(i,j) \in N \times N} \sum_{r \in R} f_{ij}^r \quad (4)$$

при выполнении следующих условий:

- суммарный объем товара r , передаваемый предприятием i , не должен превосходить его возможностей, т. е. при любых $r \in R$, $i \in N$

$$\sum_{j \in N} f_{ij}^r \leq p_i^r; \quad (5)$$

- суммарный объем товара r , получаемый предприятием j , не должен превосходить потребностей последнего, т. е. при любых $r \in R$, $j \in N$

$$\sum_{i \in N} f_{ij}^r \leq s_j^r; \quad (6)$$

- суммарный объем товаров, приобретенных предприятием, равен суммарному объему реализованных этим предприятием товаров, т. е. при любом $i \in N$

$$\sum_{r \in R} \sum_{j \in N} f_{ji}^r = \sum_{r \in R} \sum_{j \in N} f_{ij}^r. \quad (7)$$

Справедливо следующее

Утверждение 1. ЗЦТ (4)–(7) сводится к ЗЦМС (1)–(3).

Доказательство. По исходным данным ЗЦТ построим некоторый взвешенный ориентированный граф и покажем, что из решения ЗЦМС на этом графе можно получить решение ЗЦТ.

Рассмотрим граф G с множеством вершин $V = N \cup R$ и множеством дуг U , определяемым по следующим правилам.

1. Дуга $u = (i, r)$, идущая от вершины, соответствующей предприятию $i \in N$, к вершине, соответствующей товару $r \in R$, существует тогда и только тогда, когда $p_i^r > 0$ (т. е. предприятие i предлагает для реализации товар r). При этом для дуги u полагаем $\check{a}(u) = 0$, $\hat{a}(u) = p_i^r$ и $c(u) = -1/2$.

2. Дуга $u = (r, i)$, идущая от вершины, соответствующей товару $r \in R$, к вершине, соответствующей предприятию $i \in N$, существует тогда и только тогда, когда $s_i^r > 0$ (т. е. предприятию i требуется товар r). При этом для дуги u полагаем $\check{a}(u) = 0$, $\hat{a}(u) = s_i^r$ и $c(u) = -1/2$.

Покажем, что любая циркуляция в построенном нами графе соответствует некоторому допустимому плану товарообмена. Пусть $f(u)$ — некоторая циркуляция в G . Определим по ней значения величин f_{ij}^r . Известно, что любая циркуляция может быть представлена в виде суммы элементарных (циклических) циркуляций. Обозначим через $Q_1, Q_2, \dots, Q_T$ циклы, соответствующие элементарным циркуляциям, сумма которых равна циркуляции f . Каждому такому циклу соответствует положительная величина q_t , равная величине потока, проходящего по циклу Q_t . (Заметим, что разложение циркуляции на элементарные может быть неоднозначным, но нас устраивает *любое* из них.) Определим множество индексов $F_{ij}^r \subset \{1, 2, \dots, T\}$ ($i, j \in N$; $t \in T$) по следующему правилу:

$$t \in F_{ij}^r \iff \text{цикл } Q_t \text{ содержит фрагмент вида } (i, r, j).$$

Теперь мы можем определить величины f_{ij}^r , воспользовавшись формулой

$$f_{ij}^r = \sum_{t \in F_{ij}^r} q_t.$$

Нетрудно проверить, что полученные таким образом значения f_{ij}^r удовлетворяют всем ограничениям ЗЦТ. Кроме того, величина функционала ЗЦМС на любой циркуляции равна значению функционала (4) ЗЦТ на соответствующем плане товарообмена, взятому с противоположным знаком.

Так же просто доказывается, что любому допустимому решению (f_{ij}^r) ЗЦТ можно поставить в соответствие циркуляцию f в графе G

со значением функционала, равным по абсолютной величине суммарному объему товарообменных операций. Для этого достаточно положить

$$f(i, r) = \sum_{j \in N} f_{ij}^r \text{ и } f(r, j) = \sum_{i \in N} f_{ij}^r.$$

На основании изложенного выше можно сделать вывод о том, что оптимальному решению ЗЦМС будет соответствовать оптимальное решение ЗЦТ. Утверждение 1 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Число вершин в графе G , построенном при доказательстве утверждения 1, равно $n + m$, а число дуг не превосходит величины nm .

3. Задача погашения долгов с использованием товарообменных операций

Предположим, что в дополнение к исходным данным ЗЦТ, описанной в предыдущем разделе, для каждой пары предприятий $(i, j) \in N \times N$ задана величина $d_{ij} \geq 0$, характеризующая задолженность предприятия i предприятию j . Без уменьшения общности можно считать, что $d_{ij} \cdot d_{ji} = 0$ для любых $i, j \in N$.

Наряду с величинами $f_{ij}^r \geq 0$ ($i, j \in N, r \in R$), равными объему (в стоимостном выражении) товара r , передаваемого предприятием i предприятию j , введем в рассмотрение величины $f_{ij} \geq 0, i, j \in N$. При этом значение f_{ij} определим как величину долга, который предприятие i зачитывает предприятию j .

Под планом (схемой) товарообмена, допустимом в рамках задачи погашения долгов, будем понимать совокупность величин (f_{ij}^r, f_{ij}) , удовлетворяющую следующим условиям:

- суммарный объем товара r , передаваемый предприятием i , не должен превосходить его возможностей, т. е. при любых $r \in R, i \in N$

$$\sum_{j \in N} f_{ij}^r \leq p_i^r; \quad (8)$$

- суммарный объем товара r , получаемый предприятием j , не должен превосходить потребностей последнего, т. е. при любых $r \in R, j \in N$

$$\sum_{i \in N} f_{ij}^r \leq s_j^r; \quad (9)$$

- сумма объемов товаров, приобретенных предприятием, и долгов, зачтенных его кредиторами, равна сумме объемов реализованных этим

предприятием товаров и долгов, зачтенных его дебиторам, т. е. при любом $i \in N$

$$\sum_{r \in R} \sum_{j \in N} f_{ji}^r + \sum_{j \in N} f_{ji} = \sum_{r \in R} \sum_{j \in N} f_{ij}^r + \sum_{j \in N} f_{ij}; \quad (10)$$

• величина долга, зачитываемая предприятием i предприятию j , не должна превосходить величины задолженности предприятия j предприятию i , т. е. для любых $i \in N$, $j \in N$

$$f_{ij} \leq d_{ji}. \quad (11)$$

Пусть также заданы неотрицательные величины $\alpha, \beta \geq 0$, смысл которых будет пояснен позднее.

Задача максимального погашения долгов с использованием товарообменных операций (далее ЗПД) может быть сформулирована следующим образом: при заданных величинах $\alpha, \beta, s_i^r, p_i^r$ и d_{ij} найти такую схему товарообмена (f_{ij}^r, f_{ij}) , которая максимизировала бы взвешенную сумму объема товарообменных операций и зачетов:

$$\alpha \sum_{r \in R} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} f_{ij}^r + \beta \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} f_{ij} \quad (12)$$

при выполнении ограничений (8)–(11).

Коэффициенты α и β отражают степень важности (приоритет) товарообменных и зачетных операций соответственно. В частности, положив $\alpha = 0$, получим задачу нахождения максимального погашения задолженностей с использованием товарообменных операций. Случай $\beta = 0$ соответствует задаче максимизации суммарного объема товарообменных операций. (Заметим, что даже в этом случае ЗПД не эквивалентна рассмотренной ранее ЗЦТ, так как наличие дополнительных связей, соответствующих долговым отношениям, расширяет множество допустимых вариантов товарообмена.)

Утверждение 2. ЗПД (8)–(12) сводится к ЗЦМС (1)–(3).

Доказательство. По исходным данным ЗПД построим некоторый взвешенный ориентированный граф такой, что из решения ЗЦМС на этом графе можно получить решение ЗПД.

Рассмотрим граф $G = (V, U)$ с множеством вершин $V = N \cup R$ и множеством дуг U , состоящим из трех непересекающихся подмножеств $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$. Множества U_1 и U_2 определяются так же, как в доказательстве утверждения 1: $U_1 = \{u = (i, r) \mid i \in N, r \in R, p_i^r > 0\}$, $U_2 = \{u = (r, i) \mid i \in N, r \in R, s_i^r > 0\}$. Множество U_3 состоит из дуг,

соединяющих вершины, соответствующие предприятиям, которые связаны отношением задолженности: $U_3 = \{u = (i, j) \mid i \in N, j \in N, d_{ji} > 0\}$. При этом для всякой дуги $u \in U$ полагаем $\check{a}(u) = 0$,

$$\hat{a}(u) = \begin{cases} p_i^r, & u = (i, r) \in U_1, \\ s_i^r, & u = (r, i) \in U_2, \\ d_{ji}, & u = (i, j) \in U_3; \end{cases}$$

$$c(u) = \begin{cases} -\alpha/2, & u \in U_1 \cup U_2, \\ -\beta, & u \in U_3. \end{cases}$$

Далее, как и в доказательстве утверждения 1, можно показать, что любая циркуляция в графе G соответствует некоторому плану товарообмена задачи ЗПД. В то же время любому допустимому решению ЗПД можно поставить в соответствие циркуляцию в графе G . При этом на соответствующих решениях рассматриваемых задач значения функционалов по абсолютной величине совпадают. Отсюда следует, что оптимальному решению ЗЦМС на графе G будет соответствовать оптимальное решение ЗПД. Утверждение 2 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Число вершин в графе G , построенном при доказательстве утверждения 2, равно $n + m$, а число дуг не превосходит величины $n(m + n)$.

4. Учет транспортных затрат

Одним из наиболее существенных недостатков рассмотренных выше моделей является отсутствие учета затрат на транспортировку товара. Реальные транспортные затраты при существующих тарифах могут существенно повлиять на процесс формирования рациональной схемы товарообмена.

Рассмотрим модификацию модели, позволяющую принимать во внимание расходы на транспортировку товара, на примере задачи целесообразного товарообмена.

Пусть для каждой пары предприятий $(i, j) \in E$ заданы неотрицательные числа $t_{ij}^r \geq 0$, $r = 1, \dots, M$, отражающие удельный вес затрат на транспортировку товара r от предприятия i к предприятию j . Тогда можно сформулировать задачу нахождения целесообразного товарообмена с учетом транспортных затрат (ЗЦТТЗ): в условиях ограничений (5)–(7) найти схему товарообмена (f_{ij}^r) , минимизирующую следующий функционал:

$$\sum_{(i,j) \in N \times N} \sum_{r \in R} (1 - t_{ij}^r) f_{ij}^r. \quad (13)$$

Имеет место

Утверждение 3. ЗЦТТЗ (5)–(7), (13) сводится к ЗЦМС (1)–(3).

Доказательство. Построим по исходным данным ЗЦТТЗ взвешенный ориентированный граф $G = (V, U)$ такой, что из решения ЗЦМС на этом графе можно получить решение исходной задачи.

Множество V вершин графа G состоит из трех непересекающихся множеств: $V = N \cup X \cup Y$. Множества X и Y при этом определяются следующим образом:

$$X = \{x_i^r \mid p_i^r > 0, i \in N, r \in R\}, \quad Y = \{y_i^r \mid s_i^r > 0, i \in N, r \in R\}.$$

Множество дуг U графа G также состоит из трех непересекающихся множеств: $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$.

Множество U_1 состоит из дуг вида (i, x_i^r) , $i \in N, r \in R$, соединяющих вершины множеств N и X . При этом для дуги $u = (i, x_i^r)$ полагаем $\hat{a}(u) = 0$, $\hat{a}(u) = p_i^r$, $c(u) = 0$.

Дуги множества U_2 соединяют элементы множеств X и Y и имеют вид (x_i^r, y_j^r) , $i, j \in N, r \in R$. При этом полагаем $\hat{a}(u) = 0$, $\hat{a}(u) = \min\{p_i^r, s_j^r\}$, $c(u) = 1 - t_{ij}^r$.

Множество U_3 состоит из дуг вида (y_i^r, i) , $i \in N, r \in R$, соединяющих вершины множеств Y и N . При этом для дуги $u = (y_i^r, i)$ полагаем $\hat{a}(u) = 0$, $\hat{a}(u) = s_i^r$, $c(u) = 0$.

Теперь, как и в доказательстве утверждения 1, можно показать, что любая циркуляция в графе G соответствует некоторому плану товарообмена задачи ЗЦТТЗ. В то же время любому допустимому решению ЗЦТТЗ можно поставить в соответствие циркуляцию в графе G . При этом на соответствующих решениях рассматриваемых задач значения функционалов по абсолютной величине совпадают. Отсюда следует, что оптимальному решению ЗЦМС на графе G будет соответствовать оптимальное решение ЗЦТТЗ. Утверждение 3 доказано.

Замечание 3. Число вершин в графе G , построенном при доказательстве утверждения 3, оценивается величиной $O(nm)$, а число дуг — $O(mn^2)$.

Аналогичным образом можно учесть транспортные затраты в задаче погашения долгов предприятий с использованием товарообменных операций. При этом целевая функция задачи примет вид

$$\alpha \sum_{r \in R} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} (1 - t_{ij}^r) f_{ij}^r + \beta \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} f_{ij}.$$

При доказательстве сводимости получаемой задачи к ЗЦМС может быть использован граф G из доказательства утверждения 3. При этом необходимо модифицировать значения $c(u)$ для дуг из множества U_2 ,

положив $c(u) = -\alpha(1 - t_{ij}^r)$ для всех $u = (x_i^r, y_j^r) \in U_2$. Кроме того, множество дуг U графа G необходимо дополнить множеством

$$U_4 = \{u = (i, j) \mid i, j \in N, d_{ji} > 0\}.$$

При этом для всякой $u = (i, j) \in U_4$ полагаем $\hat{a}(u) = 0$, $\hat{a}(u) = d_{ji}$, $c(u) = -\beta$.

Заключение

На основе предложенных моделей авторами создан программный продукт, позволяющий решать реальные задачи погашения взаимных долгов предприятий с использованием товарообменных операций на персональных компьютерах. В силу того, что процессы сведения к задаче ЗЦМС в рассмотренных выше моделях, равно как и последующего восстановления решений исходных задач, являются конструктивными, пользователю предоставлена возможность ввода необходимой информации в естественном виде.

Существующая версия позволяет получать решения задач, содержащих информацию о десятках тысяч клиентов при числе связей между ними, исчисляемых миллионами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Залюбовский В. В. О некоторых задачах погашения взаимных долгов предприятий // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1997. Сер. 2. Т. 4, № 1. С. 30–39.
2. Goldberg A. V., Tarjan R. E. Finding minimum-cost circulations by cancelling negative cycles // J. Assoc. Comput. Mach. 1989. V. 36, N 4. P. 873–886.
3. Goldberg A. V., Tarjan R. E. Finding minimum-cost circulations by successive approximation // Math. Oper. Res. 1990. V. 15, N 3. P. 430–466.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
25 мая 1998 г.

УДК 519.8

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫБОРА ЦИКЛИЧЕСКОГО МАРШРУТА И ЗАГРУЗКИ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА*)

Э. Х. Гимади, Н. И. Глебов, А. И. Сердюков

Исследуется задача выбора такого простого циклического маршрута и такого плана загрузки транспортного средства, когда максимизируется прибыль от купли и продажи загруженных товаров различных видов во всех заданных пунктах обхода. Произведено сведение этой задачи к задаче коммивояжера с матрицей расстояний, удовлетворяющей неравенству треугольника. Предложены полиномиальные алгоритмы решения исходной задачи с гарантированной погрешностью для ряда типов загрузки. Выделены классы задач, когда описанные алгоритмы позволяют получить либо точные, либо асимптотически точные решения.

В рассматриваемой задаче предполагается, что транспортное средство ограниченной вместимости (грузоподъемности) $A > 0$ должно осуществить простой циклический обход вершин (пунктов) полного n -вершинного графа G_n . При перемещении из пункта i в пункт j (по дуге (i, j) в графе G_n) имеется возможность закупить товары в пункте i и загрузить ими транспортное средство (с учетом его вместимости), а затем продать эти товары в пункте j . Считаются известными величины a_r и d_{ri} , где a_r — вес одной единицы товара типа r , а d_{ri} — стоимость единицы товара r -го типа в i -м пункте, $1 \leq r \leq m$, $1 \leq i \leq n$.

Под прибылью, получаемой при перемещении по дуге (i, j) , будем понимать разницу между суммарной стоимостью товаров, проданных в пункте j и приобретенных в пункте i .

Для формулировки задачи оптимального выбора маршрута и загрузки транспортного средства введем в рассмотрение переменные x_{ri} , равные количеству единиц товара r -го типа, приобретенного в i -м пункте, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq r \leq m$. Будем также считать заданным

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01591).

подмножество X множества неотрицательных вещественных чисел R_+ , представляющего собой множество возможных значений переменных x_{ri} .

Задача 1. Требуется найти такой циклический обход заданных пунктов и такой допустимый план (x_{ri}) закупки товаров и загрузки ими транспортного средства в каждом пункте обхода, чтобы суммарная прибыль, получаемая в результате купли и продажи товаров, была максимальной.

Обозначим через $F(\pi)$ максимальную суммарную прибыль, получаемую при фиксированном обходе $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$, где π — перестановка чисел $1, \dots, n$.

Нетрудно видеть, что $F(\pi)$ складывается из величин прибылей c_{ij} , получаемых при перемещении по дуге (i, j) , $i = \pi_k$ и $j = \pi_{k+1}$, где $k = 1, \dots, n$, а $\pi_{n+1} = \pi_1$. Очевидно, что c_{ij} является оптимальным значением целевой функции в следующей задаче о ранце.

Найти максимум функции

$$\sum_{r=1}^m (d_{rj} - d_{ri}) x_{ri} \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{r=1}^m a_r x_{ri} \leq A, \quad (2)$$

$$x_{ri} \in X, \quad r = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где $(b - a) = \max(0, b - a)$.

Таким образом, задача 1 заключается в максимизации функции

$$F(\pi) = \sum_{k=1}^n c_{\pi_k \pi_{k+1}} \quad (4)$$

по всем перестановкам $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ чисел $1, \dots, n$, где $\pi_{n+1} = \pi_1$.

Другими словами, задача 1 есть не что иное, как задача коммивояжера на максимум для специальных матриц $C = (c_{ij})$, элементы которых определяются результатами решения задач (1)–(3).

Известно, что задача коммивояжера на максимум в общей постановке, так же как и обычная задача коммивояжера (на минимум), NP-трудна [6, 11]. Известен ряд работ, посвященных построению приближенных эффективных алгоритмов с оценками для решения задачи коммивояжера на максимум [1, 3–5, 7–10]. Поставленная выше задача 1 в случаях $X \subset Z_+$ и $X = \{0, 1\}$ является NP-трудной, поскольку NP-трудными являются соответствующие задачи о ранце (1)–(3) [6]. Отметим, что в случае $a_r \in Z_+$ для решения задач о ранце имеются псевдополиномиальные алгоритмы (см., например, [2]).

Перейдем теперь к рассмотрению свойств матрицы C .

Утверждение 1. Элементы матрицы C удовлетворяют неравенству треугольника, т. е. для любых i, s, j из $\{1, \dots, n\}$

$$c_{ij} \leq c_{is} + c_{sj}.$$

Действительно, обозначив через (x_r^1) , (x_r^2) , (x_r^3) оптимальные векторы загрузки при перемещении транспортного средства по дугам (i, j) , (i, s) , (s, j) соответственно, имеем

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{r=1}^m (d_{rj} \dot{-} d_{ri}) x_r^1 \leq \sum_{r=1}^m \{(d_{rj} \dot{-} d_{rs}) + (d_{rs} \dot{-} d_{ri})\} x_r^1 = \sum_{r=1}^m (d_{rj} \dot{-} d_{rs}) x_r^1 \\ &+ \sum_{r=1}^m (d_{rs} \dot{-} d_{ri}) x_r^1 \leq \sum_{r=1}^m (d_{rj} \dot{-} d_{rs}) x_r^3 + \sum_{r=1}^m (d_{rs} \dot{-} d_{ri}) x_r^2 = c_{is} + c_{sj}. \end{aligned}$$

Рассмотрим вопрос о сложности вычисления элементов матрицы C в зависимости от типа загрузки, т. е. от вида множества X в ограничении (3).

Утверждение 2. При $X = Z_+$ и целочисленных a_r , $1 \leq r \leq m$, элементы матрицы C можно вычислить за время $O(mn^2A)$ при используемой рабочей памяти $O(A)$.

Доказательство. В данном случае мы имеем линейную задачу о ранце с целочисленными переменными [3], для которой при произвольных $a_r \in R_+$ справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$D_{ij}(\alpha) = \max\{D_{ij}(\alpha - a_r) + (d_{rj} \dot{-} d_{ri}) \mid r = 1, \dots, m \text{ и } a_r \leq \alpha\}, \quad (5)$$

где $0 \leq \alpha \leq A$ и $c_{ij} = D_{ij}(A)$, $1 \leq i, j \leq n$.

Нетрудно видеть, что при $a_r \in Z_+$, $1 \leq r \leq m$, для вычисления всех n^2 элементов матрицы C с использованием этих соотношений требуется $O(mn^2A)$ времени при памяти $O(A)$ (без учета памяти для хранения исходной информации и элементов матрицы C). Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. При $X = \{0, 1\}$ и целочисленных a_r , $1 \leq r \leq m$, элементы матрицы C можно вычислить за время $O(mn^2A)$ при используемой рабочей памяти $O(mA)$.

Доказательство. В этом случае мы имеем задачу о ранце с $\{0, 1\}$ -переменными [2], для которой при $a_r \in R_+$ и $0 \leq \alpha \leq A$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} D_{ij}(1, \alpha) &= \begin{cases} (d_{1j} \dot{-} d_{1i}) & \text{при } a_1 \leq \alpha, \\ 0 & \text{при } a_1 > \alpha; \end{cases} \\ D_{ij}(r, \alpha) &= \max \begin{cases} D_{ij}(r-1, \alpha - a_r) + (d_{rj} \dot{-} d_{ri}) \\ D_{ij}(r-1, \alpha) \end{cases} \quad (2 \leq r \leq m). \end{aligned} \quad (6)$$

Ясно, что $c_{ij} = D_{ij}(m, A)$, $1 \leq i, j \leq n$. При целочисленных a_r , $1 \leq r \leq m$, вычисление всех n^2 элементов матрицы C с использованием соотношений (6) требует времени $O(mn^2A)$ при используемой памяти $O(mA)$. Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. При $X = R_+$ элементы матрицы C имеют вид

$$c_{ij} = A \max_{1 \leq r \leq m} \frac{(d_{rj} - d_{ri})}{a_r}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

и матрица C может быть вычислена за время $O(mn^2)$.

Доказательство. Легко видеть, что в рассматриваемом случае имеется оптимальный план (x_{ri}) , при котором транспортное средство в каждом пункте загружается товарами одного типа. Отсюда следует указанный в утверждении вид элементов матрицы, а также оценка временной сложности. Утверждение 4 доказано.

Теорема 1. Задача 1 может быть решена за время $O(n^3 + mn^2A)$ с относительной погрешностью не более $1/4$ для исходных данных, когда $X = Z_+$ или $X = \{0, 1\}$.

Доказательство. Предлагаем следующий трехэтапный алгоритм $\widetilde{\mathcal{A}}$ решения задачи 1.

1-й этап (формирование матрицы C). Вход: натуральные числа m, n, A , вектор $(a_r) \in Z_+^m$, $1 \leq r \leq m$, и матрица $(d_{ri}) \in R_+^{m \times n}$. Выход: $(c_{ij}) \in R_+^{n \times n}$.

2-этап (отыскание маршрута π в задаче коммивояжера на максимум с оценкой относительной погрешности $1/4$). Вход: натуральное число n и матрица расстояний C . Выход: перестановка (маршрут) $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$.

3-й этап (вычисление плана загрузки $x(\pi)$ транспортного средства). Вход: натуральные числа m, n, A , вектор $(a_r) \in Z_+^m$, $1 \leq r \leq m$, матрица $(d_{ri}) \in R_+^{m \times n}$ и перестановка π , полученная на предыдущем этапе. Выход: план загрузки $x(\pi)$.

Алгоритм $\widetilde{\mathcal{A}}$ описан полностью.

На первом этапе элементы матрицы C вычисляются в соответствии с соотношениями (5) и (6). Согласно этим соотношениям временная сложность первого этапа алгоритма $\widetilde{\mathcal{A}}$ равна $O(mn^2A)$.

Из утверждения 1 и работы [7] следует, что второй этап может быть реализован за время $O(n^3)$. При этом относительная погрешность для полученного решения задачи отыскания максимального гамильтонова контура не превышает $1/4$.

На третьем этапе практически повторяются действия первого этапа, но только для вычисления n элементов матрицы C , соответствующих

дугам маршрута π , полученного на втором этапе. Это потребует времени в n раз меньше, чем на первом этапе, т. е. $O(mnA)$. Кроме вычисления упомянутых элементов матрицы здесь формируется план $x(\pi)$ загрузки транспортного средства. Время выполнения этих действий не превышает той же величины $O(mnA)$.

Итак, время работы алгоритма $\mathcal{A}$ при решении задачи 1 не превосходит $O(n^3 + mn^2A)$; при этом относительная погрешность получаемого решения не превышает $1/4$. Теорема 1 доказана.

Перейдем к рассмотрению случая $X = R_+$ (непрерывных планов (x_{ri})). В этом случае будем решать задачу 1 с помощью алгоритма $\widetilde{\mathcal{A}}_1$, являющегося модификацией уже описанного алгоритма $\mathcal{A}$. Модификация касается второго этапа алгоритма.

Введем некоторые понятия и обозначения.

Рассматривается m -мерное векторное пространство R^m , где r -му орту соответствует тип товара r , $1 \leq r \leq m$. Пункту i , $1 \leq i \leq n$, ставится в соответствие точка $\tilde{y}_i = (\tilde{y}_i^1, \dots, \tilde{y}_i^m) \in R^m$, где $\tilde{y}_i^r$ есть стоимость единицы товара r -го вида в i -м пункте, т. е. $\tilde{y}_i^r = d_{ri}$. Под расстоянием от точки $\tilde{y}_i$ до $\tilde{y}_j$ будем понимать величину

$$\rho(\tilde{y}_i, \tilde{y}_j) = A \max_{1 \leq r \leq m} \frac{(\tilde{y}_j^r - \tilde{y}_i^r)}{a_r}$$

(в прежних обозначениях равную c_{ij}). В условиях исходной задачи это означает прибыль, получаемую при перемещении транспортного средства из пункта i в пункт j . Расширим введенное понятие расстояния на все точки пространства R^m . Пусть $\mathcal{I} = \{y \in R^m \mid \rho(0, y) \leq 1\}$ — шар радиуса один, соответствующий введенному расстоянию.

ЗАМЕЧАНИЕ. Шар $\mathcal{I}$ есть пересечение полупространств: $y^r \leq A/a^r$, $1 \leq r \leq m$. Таким образом, $\mathcal{I}$ является выпуклым полиэдром с m гипергранями

$$\Gamma_r = \{(y^1, \dots, y^m) \in \mathcal{I} \mid y^r = A/a_r\}, \quad 1 \leq r \leq m.$$

В работе [10] предложен алгоритм для решения задачи коммивояжера на максимум в R^m с временной сложностью $O(n^3)$ и оценкой относительной погрешности $\varepsilon_n = (\lfloor s/2 \rfloor - 1)/n$, если единичный шар, соответствующий функции попарных расстояний между точками, является выпуклым многогранником с числом гиперграней $s \geq m + 1$. Поскольку $\mathcal{I}$ не является многогранником, то после применения алгоритма из [10] к матрице C нельзя гарантировать оценку точности найденного решения, аналогичную ε_n .

Пусть K_r — наименьший конус с вершиной в точке 0 , содержащий все точки гиперграней Γ_r , $1 \leq r \leq m$, а K_{m+1} — отрицательный ортант.

Согласно замечанию относительно III набор конусов $\{K_1, \dots, K_{m+1}\}$ покрывает пространство R^m . Для полиэдра III справедливо следующее утверждение, аналогичное утверждению для многогранников [10].

Утверждение 5. Для любых четырех точек y_1, y_2, y_3, y_4 из R^m таких, что $(y_2 - y_1) \in K_r, (y_4 - y_3) \in K_r$ для некоторого $r, 1 \leq r \leq m+1$, справедливо неравенство

$$\rho(y_1, y_2) + \rho(y_3, y_4) \leq \rho(y_1, y_4) + \rho(y_3, y_2).$$

Доказательство. При $r = m+1$ неравенство выполняется, поскольку левая часть равна 0. При $r = 1, \dots, m$ доказательство аналогично случаю, когда III — многогранник (см. [10]). Утверждение 5 доказано.

С учетом утверждений 4, 5 и работы [10] в случае $X = R_+$ справедливы следующие факты.

Утверждение 6. Задача коммивояжера на максимум с матрицей C может быть решена за время $O(n^3)$ с оценкой относительной погрешности, не превосходящей $\varepsilon_n = (\lfloor (m+1)/2 \rfloor - 1)/n$.

Теорема 2. Задача 1 решается за время $O(mn^2 + n^3)$ с оценкой относительной погрешности $\varepsilon_n = (\lfloor (m+1)/2 \rfloor - 1)/n$.

Следствие 1. Задача 1 при $m = 2$ полиномиально разрешима.

Следствие 2. Алгоритм $\tilde{\mathcal{A}}_1$ позволяет находить асимптотически точное решение задачи 1 в случае, когда $m = n/\psi_n$, где $\psi_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э. Х. Задача коммивояжера на максимум: условия асимптотической точности алгоритма «Иди в самый удаленный город» // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. Вып. 29. С. 11–15.
2. Гимади Э. Х., Глебов Н. И. Экстремальные задачи принятия решений. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1982.
3. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Перепелица В. А. Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1975. Вып. 31. С. 35–42.
4. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Сердюков А. И. Алгоритм для приближенного решения задачи коммивояжера и его вероятностный анализ // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 2. С. 8–17.
5. Гимади Э. Х., Максишко Н. К. Обоснование условий асимптотической точности приближенного алгоритма решения задачи коммивояжера на максимум в случае дискретного распределения // Управляемые системы: Сб.

- науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. Вып. 30. С. 26–29.
6. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
 7. Косточка А. В., Сердюков А. И. Полиномиальные алгоритмы с оценками $3/4$ и $5/6$ для задачи коммивояжера на максимум // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. Вып. 26. С. 55–59.
 8. Сердюков А. И. Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. Вып. 27. С. 79–87.
 9. Сердюков А. И. Полиномиальные алгоритмы с оценками точностей решений для одного класса задач коммивояжера на максимум // Комбинаторно-алгебраические методы в дискретной оптимизации. Нижн. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 1991. С. 107–114.
 10. Сердюков А. И. Задача коммивояжера на максимум в конечномерных вещественных пространствах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2., № 1. С. 50–56.
 11. **The Traveling Salesman Problem.** A Guided Tour of Combinatorial Optimization. Chichester: Wiley, 1985.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
9 апреля 1998 г.

УДК 519.8

О ПРИМЕНИМОСТИ АЛГОРИТМА ПОКООРИНАТНОГО ПОДЪЕМА К ЗАДАЧАМ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*)

Н. И. Глебов, В. В. Шенмайер

Для задачи максимизации вогнутой сепарабельной функции на подмножестве, состоящем из всех максимальных относительно частичного порядка точек некоторого конечного множества в R^n , обоснован критерий ее разрешимости посредством «жадного» алгоритма. Доказано также одно достаточное условие применимости данного алгоритма и указан класс задач целочисленного программирования, удовлетворяющих полученному критерию разрешимости.

Известно, что для решения некоторых задач целочисленного программирования может быть использован алгоритм покоординатного подъема (жадный алгоритм). В данной статье исследуется вопрос о применимости подобного алгоритма для решения задачи максимизации вогнутой сепарабельной функции на подмножестве максимальных относительно частичного порядка точек некоторого конечного множества.

Рассматриваемая задача имеет вид: найти

$$\max\{f(x) \mid x \in \tilde{Q}\} \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — n -мерный целочисленный вектор,

$$f(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j), \quad (2)$$

$\tilde{Q}$ — множество максимальных относительно частичного порядка $\leq$ точек из Q ; Q — конечное множество целочисленных точек неотрицательного ортанта; $f_j(\cdot)$ — вогнутые (т. е. выпуклые вверх) функции.

Посредством $E(x)$ далее обозначается множество $\{j \mid x + e_j \in Q\}$, где e_j есть j -й орт пространства R^n . Будем предполагать, что $0 \in Q$,

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00510) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 274).

$E(x) \neq \emptyset$ в случае $x \in Q \setminus \tilde{Q}$ и все точки множества Q *достижимы* из начала координат. При этом под достижимостью точки x понимается существование такой последовательности $0 = x^0, x^1, \dots, x^k = x$ точек множества Q , что в случае $k \geq 1$ векторы $x^s - x^{s-1}$ являются ортами пространства R^n при $s = 1, 2, \dots, k$.

Согласно правилам рассматриваемого нами алгоритма покоординатного подъема процесс вычислений начинается с точки 0. По достижении некоторой точки $x \in Q \setminus \tilde{Q}$ на очередном шаге процесса происходит переход к такой точке $x' = x + e_j \in Q$, для которой приращение функции $f(x)$ является максимальным (возможно и отрицательным). Очевидно, что при сделанных выше допущениях процесс закончится в некоторой точке $\bar{x} \in \tilde{Q}$.

Исследуется вопрос: для каких множеств Q при любых $f(x)$ вида (2) алгоритм покоординатного подъема находит точку $\bar{x}$, являющуюся решением задачи (1)–(2)?

Ранее в [1] был получен критерий разрешимости посредством жадного алгоритма задачи, отличающейся от рассматриваемой отсутствием требования максимальности $\bar{x}$, т. е. максимизация функции $f(x)$ производилась на множестве Q , а не на $\tilde{Q}$. Частный случай задачи (1)–(2), когда Q есть множество булевых векторов (или система подмножеств конечного множества), рассмотрен в работах [4, 5], в которых установлен критерий разрешимости задачи посредством жадного алгоритма. Этот результат распространяется нами и на более общую задачу (1)–(2). К рассматриваемому направлению могут быть отнесены также работы [2, 3].

1. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$I = \{1, 2, \dots, n\}$;

Z_+ — множество всех целых неотрицательных чисел;

$x \leq y$ эквивалентно $y - x \in Z_+$;

$[x, y] = \{z \in Z_+ \mid x \leq z \leq y\}$;

$I(x) = \{j \in I \mid x_j > 0\}$;

$|x| = \sum_{j=1}^n |x_j|$ — норма вектора x ;

$\Delta_j f(x) = f(x + e_j) - f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Точку $x \in Q$ будем называть *f-достижимой*, если существует такая последовательность $0 = x^0, x^1, \dots, x^k = x$ точек множества Q , что $x^s = x^{s-1} + e_{j(s)}$, $s = 1, 2, \dots, k$, где $j(s) \in E(x^{s-1})$ и

$$\Delta_{j(s)} f(x^{s-1}) = \max\{\Delta_j f(x^{s-1}) \mid j \in E(x^{s-1})\}. \quad (3)$$

Последовательность с указанными выше свойствами будем называть *f-допустимой* (для точки x). В случае, когда выполнение равенства (3) не предполагается, последовательность называется просто *допустимой*.

Очевидно, что максимальные f -достижимые точки и только они могут являться результатом работы (выходом) алгоритма покоординатного подъема.

Основным результатом данной статьи является

Теорема 1. Для того чтобы при любых $f(x)$ вида (2) все максимальные f -достижимые точки были оптимальными решениями задачи (1)–(2), необходимо и достаточно, чтобы множество Q обладало свойством:

$$(PP) \quad \begin{cases} \text{для любых двух точек } x \in Q, y \in \tilde{Q} \text{ таких, что } x \leq y \\ \text{и } x_i = y_i \text{ при некотором } i \in E(x), \text{ найдется номер} \\ j \in E(x) \text{ такой, что } y_j > x_j \text{ и } y + e_i - e_j \in Q. \end{cases}$$

Ради краткости далее будем говорить, что выполнено условие (или имеет место свойство) (Opt) , если «при любых $f(x)$ вида (2) все максимальные f -достижимые точки являются оптимальными решениями задачи (1)–(2)».

При доказательстве теоремы 1 будут использоваться две леммы.

Лемма 1. Если выполнено условие (Opt) , то все элементы множества $\tilde{Q}$ имеют одинаковую норму.

Доказательство. Положим $f_i(t) = t$ для любого $i \in I$. Тогда каждая точка $x \in \tilde{Q}$ будет f -достижимой и при этом $f(x) = |x|$. Следовательно, в силу условия (Opt) должно быть $|x| \equiv \text{const}$ при $x \in \tilde{Q}$. Лемма доказана.

В дальнейшем величину нормы элементов множества $\tilde{Q}$ будем обозначать посредством l .

Лемма 2. Пусть выполнено условие (Opt) . Тогда при любом $x \in Q \setminus \tilde{Q}$ и любом $y \in \tilde{Q}$

$$E(x) \cap I(y - x) \neq \emptyset. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $x \in Q \setminus \tilde{Q}$ и $y \in \tilde{Q}$. Определим функцию f , положив $f_i(t) = \min\{t, \max\{x_i, y_i\}\}$, $i \in I$. Легко видеть, что $f(z) \leq |z|$ для любого $z \in Z_+^n$ и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $z_i \leq \max\{x_i, y_i\}$ при каждом $i \in I$. В частности, $f(y) = |y| = l$. Кроме того, любая допустимая последовательность $0 = x^0, x^1, \dots, x^k = x$ является f -допустимой и может быть продолжена с сохранением этого свойства до последовательности вида $0 = x^0, x^1, \dots, x^k, \dots, \tilde{x}$, где $\tilde{x} \in \tilde{Q}$.

По лемме 1 имеем $|\tilde{x}| = l$. Так как $x \neq \tilde{x}$ и $x = x^k \leq x^{k+1} \leq \tilde{x}$, то $x_j = x_j^k < x_j^{k+1} \leq \tilde{x}_j$ при некотором $j \in I$, так что $x^{k+1} = x + e_j$, $j \in E(x)$. По условию (Opt) справедливо неравенство $f(\tilde{x}) \geq f(y) = l$, поскольку $y \in \tilde{Q}$ и точка $\tilde{x}$ является максимальной и f -достижимой.

Наряду с этим имеем $l = |\tilde{x}| \geq f(\tilde{x})$. Из полученных неравенств следует равенство $f(\tilde{x}) = |\tilde{x}|$, которое, в свою очередь, влечет неравенства $\tilde{x}_i \leq \max\{x_i, y_i\}$, $i \in I$. В частности, в силу полученного выше неравенства $x_j < \tilde{x}_j$ должно быть $\tilde{x}_j \leq y_j$. Таким образом, $x_j < y_j$ и $j \in E(x)$, т. е. $E(x) \cap I(y - x) \neq \emptyset$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Необходимость. Пусть $x \in Q$, $y \in \tilde{Q}$, $x \leq y$, $x_i = y_i$, $i \in E(x)$. Определим функцию f , положив

$$f_p(t) = \begin{cases} \min\{t, x_p\}, & \text{если } p \in E(x); \\ \min\{t, y_p\}, & \text{если } p \in I \setminus E(x). \end{cases}$$

В этом случае точка $x + e_i$ оказывается f -достижимой. В самом деле, любая допустимая (для точки x) последовательность $0 = x^0, x^1, \dots, x^k = x$ является f -допустимой, поскольку все приращения $\Delta f = f(x^s) - f(x^{s-1})$, $s = 1, 2, \dots, k$, равны 1, т. е. имеют максимально возможное значение. Последовательность, полученная из рассматриваемой посредством добавления точки $x^{k+1} = x + e_i$, является также f -допустимой, так как $\Delta_j f(x) = 0$ при любом $j \in E(x)$.

Отметим также, что в случае $x' \geq x$ имеем

$$\Delta_s f(x') = \begin{cases} 1, & \text{если } x'_s < y_s \text{ и } s \notin E(x), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда видно, что равенство $\Delta_s f(x') = 1$ влечет принадлежность номера s множеству $I(y - x')$. Это в свою очередь приводит к тому, что максимальное значение величины $\Delta_j f(x')$ (как функции от j) на множестве $E(x')$ совпадает с максимальным значением на множестве $E(x') \cap I(y - x')$, если только последнее не пусто. По лемме 2 оно не пусто, когда $x' \in Q \setminus \tilde{Q}$.

Сказанное выше позволяет утверждать, что в случае $x' \in Q \setminus \tilde{Q}$ и $x' \geq x$ любая f -допустимая для точки x' последовательность может быть продолжена (с сохранением f -допустимости) путем добавления некоторой точки $x'' = x' + e_j$, где $j \in E(x') \cap I(y - x')$. При этом из условия $x' \leq y + e_i$ будет следовать $x'' \leq y + e_i$, поскольку $y_j > x'_j$.

Таким образом, учитывая f -достижимость точки $x + e_i$, из приведенных рассуждений следует существование такой максимальной f -достижимой точки $\tilde{y}$, что $x + e_i \leq \tilde{y} \leq y + e_i$. Отсюда, принимая во внимание равенство $|\tilde{y}| = |y|$, справедливое согласно лемме 1, следует, что $\tilde{y} = y + e_i - e_j$ при некотором j , $j \neq i$.

Осталось показать, что $j \in E(x)$. Если допустить, что $j \notin E(x)$, то, учитывая $\tilde{y} \geq x$, получаем

$$f(\tilde{y}) = \sum \{x_p \mid p \in E(x)\} + \sum \{y_p \mid p \notin E(x) \cup j\} + \tilde{y}_j = f(y) - 1,$$

что противоречит оптимальности $\tilde{y}$. Необходимость условия (PP) доказана.

Достаточность. Сначала покажем, что каждая максимальная точка x удовлетворяет условию $|x| = l$, где l — некоторая константа. Пусть $x \in \tilde{Q}$, $l = |x|$ и существуют максимальные точки z такие, что $|z| > l$. По условию достижимости имеется допустимая (для точки x) последовательность $0 = x^0, x^1, \dots, x^l = x$. Обозначим через y максимальную точку, которая удовлетворяет условию $|y| > l$ и которой соответствует наибольший номер s со свойством $x^s \leq y$.

Нетрудно видеть, что $s < l$. Для некоторого номера $i \in E(x^s)$ имеем $x^{s+1} = x^s + e_i$ и $x_i^s = y_i$. Применяя условие (PP) к точкам x^s , y и номеру i , можно утверждать, что существует такой номер $j \in E(x^s)$, что $x_j^s < y_j$ и $y + e_i - e_j \in Q$. Для максимальной точки $\tilde{y}$, мажорирующей $y + e_i - e_j$, будем иметь $\tilde{y} \geq x^{s+1}$ и $|\tilde{y}| \geq |y| > l$. Но это противоречит выбору y . Следовательно, при некотором l точки $x \in \tilde{Q}$ удовлетворяют условию $|x| = l$.

Теперь рассмотрим произвольную максимальную f -достижимую точку x и f -допустимую (для точки x) последовательность $0 = x^0, x^1, \dots, x^l = x$. Предполагая существование максимальных точек z таких, что $f(z) > f(x)$, обозначим через y ту из них, которой соответствует наибольший номер s со свойством $x^s \leq y$.

Проведя далее рассуждения, аналогичные приведенным выше, получим, что при некоторых $i, j \in E(x^s)$ справедливы соотношения $x^{s+1} = x^s + e_i$, $x_i^s = y_i$, $x_j^s < y_j$ и $y + e_i - e_j \in Q$. Пусть $\tilde{y} = y + e_i - e_j$. Так как $|\tilde{y}| = |y|$, то по доказанному выше точка $\tilde{y}$ должна быть максимальной. Кроме того, в соответствии с правилами жадного алгоритма имеем $f(x^s + e_i) \geq f(x^s + e_j)$, т. е. выполняется неравенство

$$f_i(x_i^s + 1) + f_j(x_j^s) \geq f_i(x_i^s) + f_j(x_j^s + 1). \quad (5)$$

Так как f_j — вогнутая функция и $\tilde{y}_j \geq x_j^s$, то

$$f_j(x_j^s + 1) - f_j(x_j^s) \geq f_j(\tilde{y}_j + 1) - f_j(\tilde{y}_j). \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует неравенство

$$f_i(x_i^s + 1) + f_j(\tilde{y}_j) \geq f_i(x_i^s) + f_j(\tilde{y}_j + 1).$$

Учитывая равенства $x_i^s + 1 = \tilde{y}_i$, $x_i^s = y_i$ и $\tilde{y}_j + 1 = y_j$, окончательно получаем $f(\tilde{y}) \geq f(y)$. Последнее неравенство вместе с неравенством $x^{s+1} \leq \tilde{y}$ противоречат выбору y . Теорема доказана.

2. Рассмотрим теперь одно достаточное условие применимости алгоритма покоординатного подъема.

Теорема 2. Пусть элементы множества $\tilde{Q}$ имеют одинаковую норму и выполняется условие

$$\begin{cases} \text{для любых } y, z \in \tilde{Q} \text{ и } x \in Q, x \leq z, \\ \text{из } E(x) \cap I(z - y) \neq \emptyset \text{ следует } E(x) \cap I(y - z) \neq \emptyset. \end{cases} \quad (7)$$

Тогда множество Q обладает свойством (*Opt*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что имеет место свойство (4): если $x \in Q \setminus \tilde{Q}$, $y \in \tilde{Q}$, то $E(x) \cap I(y - x) \neq \emptyset$. Предположим, что оно нарушается для точек $x \in Q \setminus \tilde{Q}$ и $y \in \tilde{Q}$. Пусть $i \in E(x)$ и $x + e_i \leq z$, где $z \in \tilde{Q}$. Тогда $i \notin I(y - x)$ и выполняются неравенства $y_i \leq x_i < z_i$, из которых следует, что $E(x) \cap I(z - y) \neq \emptyset$. Отсюда и из условия (7) вытекает, что $E(x) \cap I(y - z) \neq \emptyset$. Однако это противоречит предположению о том, что $E(x) \cap I(y - x) = \emptyset$, поскольку $I(y - z) \subset I(y - x)$.

Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что выполняется условие (*PP*) теоремы 1. Пусть $x \leq y$ и $x_i = y_i$, где $x \in Q$, $y \in \tilde{Q}$ и $i \in E(x)$. Принимая во внимание свойство (4), можно утверждать, что существует максимальная точка $z \in \tilde{Q}$, удовлетворяющая неравенствам $x + e_i \leq z \leq y + e_i$. Так как по условиям теоремы для максимальных точек y и z справедливо равенство $|z| = |y|$, то при некотором $j \in I(y - x)$ имеем $z = y + e_i - e_j$. Остается показать, что $j \in E(x)$. Так как $x_i = y_i$, то $i \neq j$ и $E(x) \cap I(z - y) = \{i\} \neq \emptyset$. Отсюда с учетом условий теоремы получаем $E(x) \cap I(y - z) = E(x) \cap \{j\} \neq \emptyset$, т. е. $j \in E(x)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Анализируя доказательство теоремы 2, нетрудно заметить, что в его заключительной части вместо условия (7) достаточно использовать свойство (4) и более слабое условие, а именно,

$$\begin{cases} \text{для любых } y, z \in \tilde{Q} \text{ и } x \in Q \text{ таких, что } x \leq y, x \leq z, \\ \text{из } E(x) \cap I(z - y) \neq \emptyset \text{ следует } E(x) \cap I(y - z) \neq \emptyset. \end{cases} \quad (8)$$

Если также учесть, что свойство (4) следует из (7), то полученный результат может быть несколько усилен путем замены условия (7) на его ослабленный вариант (8) и требование наличия свойства (4).

3. В заключение рассмотрим одно семейство множеств Q , удовлетворяющих условиям теоремы 1 (включая и условия достижимости).

Пусть функция $q : Z_+^n \rightarrow R$ обладает свойствами:

(α) $q(0) \geq 0$;

(β) $\Delta_i q(x) (= q(x + e_i) - q(x))$ равняется либо 0, либо $\delta(q(x))$ при $i \in I$ и $x \in Z_+^n$, где $\delta(t)$ — некоторая невозрастающая функция и $\delta(t) \geq 1$;

(γ) $\Delta_i q(x) \geq \Delta_i q(y)$ при $x \leq y$ и любом $i \in I$.

(Примером функции с такими свойствами может служить $q(x) = \delta r(I(x))$, где $\delta \geq 1$ и $r(\cdot)$ — ранговая функция матроида.)

Рассмотрим множество $Q \subset Z_+^n$, определяемое условиями

$$|x| \leq q(x), \quad (9)$$

$$x \in D, \quad (10)$$

где $D = [0, d]$, $d \in Z_+^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вектор x из Z_+^n будем называть *независимым* (относительно q), если $q(x - e_i) < q(x)$ при любом $i \in I(x)$.

Через Q_1 обозначим множество всех независимых векторов, принадлежащих множеству D .

Отметим ряд свойств функции q и множеств Q и Q_1 .

Лемма 3. Пусть последовательность $q_0 < q_1 < \dots < q_s < \dots$ такова, что $q_0 = q(0)$, $q_{s+1} = q_s + \delta(q_s)$, $s = 0, 1, \dots$. Тогда $q(x) = q_{|x|}$, если $x \in Q_1$, и $q(x) \leq q_{|x|} - 1$, если $x \in D \setminus Q_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $|x| = 0$ имеем $x = 0 \in Q_1$ и утверждение леммы очевидным образом выполняется. Допустим, что утверждение справедливо при $|x| = s$, и пусть $|y| = s + 1$. Если $y \in Q_1$, то в силу свойства (γ) имеем $[0, y] \subset Q_1$. Полагая $x = y - e_i$, $i \in I(y)$, имеем $x \in Q_1$ и $q(y) = q(x) + \delta(q(x)) = q_s + \delta(q_s) = q_{s+1}$. Если $y \notin Q_1$, то $q(y) = q(y - e_i)$ при некотором $i \in I(y)$. При $x = y - e_i$ имеем $q(y) = q(x) \leq q_s = q_{s+1} - \delta(q_s) \leq q_{|y|} - 1$. Лемма доказана.

Следствие. $Q_1 = \{x \in D \mid q(x) = q_{|x|}\}$.

Лемма 4. Пусть $x, y \in D$, $x \leq y$. Тогда

- a) $q(x) = q(y)$ эквивалентно тому, что $\Delta_i q(x) = 0$ для каждого $i \in I(y - x)$;
- b) если $q(x) = q(y)$, то при любом $j \in I$ $\Delta_j q(z) \equiv \text{const}$ на $[x, y]$;
- c) если $q(x) = q(y)$ и $y \in Q$, то $[x, y] \subset Q$;
- d) если $\Delta_i q(y - e_i) > 0$ при каждом $i \in I(y - x)$ и $x \in Q$ ($x \in Q_1$), то $[x, y] \subset Q$ ($[x, y] \subset Q_1$).

Доказательство утверждений леммы может быть осуществлено по общей схеме: достаточно доказать каждое утверждение для случая $|y - x| = 1$, а затем провести индукцию по $s = |y - x|$. Мы ограничимся рассмотрением лишь начального шага индукции для пунктов b) и d).

Пусть $y = x + e_i$. В случае b) имеем $\Delta_i q(x) = 0$. Отсюда в силу свойства (γ) следует, что $\Delta_i q(x + e_j) = 0$. Используя соотношение $\Delta_i q(x) + \Delta_j q(x + e_i) = \Delta_j q(x) + \Delta_i q(x + e_j)$, получаем $\Delta_j q(x + e_i) = \Delta_j q(x)$, что и требовалось доказать.

В случае d) имеем $\Delta_i q(x) > 0$. Если $x \in Q$, то $q(y) = q(x) + \Delta_i q(x) = q(x) + \delta(q(x)) \geq q(x) + 1 \geq |x| + 1 = |y|$, так что $y \in Q$. Если $x \in Q_1$, то, используя лемму 3, имеем $q(y) = q(x) + \delta(q(x)) = q_{|x|} + \delta(q_{|x|}) = q_{|x|+1} = q_{|y|}$, что влечет $y \in Q_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку $0 \in Q \cap Q_1$, свойство d) влечет включение $Q_1 \subset Q$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Вектор x будем называть *базовым для y* , если x есть максимальный элемент множества $Q_1 \cap [0, y]$, $y \in D$.

Лемма 5. Множество Q_1 является целочисленным полиматроидом, т. е.

- 1) из $x \in Q_1$ следует $[0, x] \subset Q_1$;
- 2) при любом $y \in D$ все базовые для y векторы имеют одинаковую норму.

Доказательство. Утверждение 1), как уже отмечалось ранее, следует из свойства (γ) . При доказательстве утверждения 2) можно считать, что $y \notin Q_1$, так как в случае $y \in Q_1$ единственным базовым для y является вектор y . Пусть вектор x — базовый для y . Предположим, что $\Delta_i q(x) > 0$ при некотором $i \in I(y-x)$. Тогда согласно пункту d) леммы 4 из $x \in Q_1$ следует $x + e_i \in Q_1$. Однако это противоречит тому, что вектор x — базовый для y . Поэтому $\Delta_i q(x) = 0$ для каждого $i \in I(y-x)$, что согласно пункту а) леммы 4 влечет равенство $q(x) = q(y)$. Следовательно, базовые для y векторы имеют одно и то же значение функции q , что согласно лемме 3 влечет совпадение их норм. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства леммы 5 следует, что для любого вектора x , являющегося базовым для y , имеет место равенство $q(x) = q(y)$.

Теорема 3. Множество Q , определяемое условиями (9)–(10), обладает свойствами:

- (E⁺) если $x \in Q \setminus \tilde{Q}$, то $x + e_i \in Q$ при некотором $i \in I$;
- (E⁻) если $x \in Q \setminus \{0\}$, то $x - e_i \in Q$ при некотором $i \in I(x)$;
- (PP) если $x \in Q$, $y \in \tilde{Q}$, $x \leq y$, $x_i = y_i$, $i \in E(x)$, то существует номер $j \in E(x)$ такой, что $y_j > x_j$ и $y + e_i - e_j \in Q$.

Доказательство. Убедимся в справедливости (E⁺). Пусть $x \in Q \setminus \tilde{Q}$. Тогда существует вектор $y \in \tilde{Q}$, мажорирующий x . Если $q(x) = q(y)$, то согласно пункту с) леммы 4 имеем $[x, y] \subset Q$, откуда получаем $E(x) \supset I(y-x) \neq \emptyset$. Если $q(x) < q(y)$, то согласно пункту а) леммы 4 имеем $\Delta_i q(x) > 0$ при некотором $i \in I(y-x)$, что в силу пункта d) леммы 4 влечет $x + e_i \in Q$.

Справедливость (E⁻) вытекает из следующих рассуждений. Пусть $x \in Q \setminus \{0\}$. Если $\Delta_i q(x - e_i) = 0$ при некотором $i \in I(x)$, то $x - e_i \in Q$

согласно пункту с) леммы 4. Если $\Delta_i q(x - e_i) > 0$ при всех $i \in I(x)$, то в силу пункта d) леммы 4 имеем $[0, x] \subset Q$, так что $x - e_i \in Q$ при $i \in I(x)$.

Наконец, убедимся в справедливости (PP). Пусть $x \in Q$, $y \in \tilde{Q}$, $x \leq y$, $x_i = y_i$, где $i \in E(x)$.

Сразу же отметим, что все рассматриваемые ниже по ходу доказательства векторы вида $y + e_i - e_j$ и $x + e_j$ принадлежат множеству D , поскольку они мажорируются вектором $y + e_i$, принадлежность которого множеству D следует из условий: $x_i = y_i$, $x + e_i \in D$ и $y \in D$.

Случай 1. $q(x + e_i) = q(x)$.

Используя свойства (β) , (γ) и лемму 4, легко устанавливается, что $q(z) = q(z + e_i)$ и $\Delta_j q(z) = \Delta_j q(z + e_i)$ при $z \geq x$ и любом $j \in I$.

Рассмотрим две возможности.

1а) $\Delta_j q(x - e_j) > 0$ при любом $j \in I(y - x)$. Тогда согласно сказанному выше имеем $\Delta_j q(y + e_i - e_j) > 0$ при любом $j \in I(y - x)$. Учитывая условие $x + e_i \in Q$ и пункт d) леммы 4, получаем $y + e_i \in Q$, что противоречит максимальнойности y .

1б) $\Delta_j q(x - e_j) = 0$ при некотором $j \in I(y - x)$. Тогда, учитывая равенство $\Delta_i q(y - e_j) = 0$, вытекающее из условий (γ) и $\Delta_i q(x) = 0$, имеем $q(y + e_i - e_j) = q(y) \geq |y| = |y + e_i - e_j|$, так что $y + e_i - e_j \in Q$. Кроме того, $q(x + e_j) \geq q(x) = q(x + e_i) \geq |x + e_i| = |x + e_j|$. Следовательно, $x + e_j \in Q$.

Случай 2. $q(x + e_i) > q(x)$.

Пусть вектор $\bar{x}$ — базовый для x , а $\bar{y}$ — базовый для y и мажорирующий $\bar{x}$, т. е. $\bar{y} \geq \bar{x}$. Существование такого $\bar{y}$ следует непосредственно из определения базового вектора и неравенства $\bar{x} \leq y$. Согласно замечанию к лемме 5 имеем $q(\bar{x}) = q(x)$ и $q(\bar{y}) = q(y)$.

Рассмотрим две возможности.

2а) $\bar{x} = \bar{y}$. В этом случае имеем $q(x) = q(y)$. Отсюда и из леммы 4 следует, что $\Delta_j q(z) = 0$ и $\Delta_i q(z) = \delta$ при любом $z \in [x, y]$ и $j \in I(y - x)$, где δ — некоторая неотрицательная константа.

Если $\delta > 0$, то из условия $y \in Q$ следует, что $y + e_i \in Q$. Это противоречит максимальнойности y .

Пусть $\delta = 0$. Тогда $q(z + e_i) = q(z) = q(y)$ при любом $z \in [x, y]$ и в силу неравенства $q(y) \geq |y|$ имеем $y + e_i - e_j \in Q$ и $x + e_j \in Q$ при любом $j \in I(y - x)$.

2б) $\bar{x} \neq \bar{y}$. Если $\bar{y} + e_i \in Q_1$, то $\bar{y} + e_i - e_j \in Q_1$ при любом $j \in I(\bar{y} - \bar{x})$.

Пусть $\bar{y} + e_i \notin Q_1$. Тогда вектор $\bar{y}$ является базовым для $\bar{y} + e_i$. Из $\Delta_i q(x) > 0$ и $\bar{x} \leq x$ следует, что $\Delta_i q(\bar{x}) > 0$, и далее согласно пункту d) леммы 4 имеем $\bar{x} + e_i \in Q_1$. Рассмотрим вектор $\tilde{y}$, который мажорирует $\bar{x} + e_i$ и является базовым для $\bar{y} + e_i$. Тогда $|\tilde{y}| = |\bar{y}|$ и $\tilde{y} = \bar{y} + e_i - e_j$.

при некотором $j \in I(\bar{y} - \bar{x})$. Таким образом, в любом случае существует номер $j \in I(\bar{y} - \bar{x})$ такой, что $\bar{y} + e_i - e_j \in Q_1$. При этом уместно отметить, что $\bar{x} + e_j \leq \bar{y}$ и, следовательно, $\bar{x} + e_j \in Q_1$, $q(\bar{x} + e_j) \geq q(\bar{x}) + 1$.

Далее легко проверяется справедливость соотношений

$$\begin{aligned} q(y + e_i - e_j) &\geq q(\bar{y} + e_i - e_j) = q(\bar{y}) = q(y) \geq |y| = |y + e_i - e_j|, \\ q(x + e_j) &\geq q(\bar{x} + e_j) \geq q(\bar{x}) + 1 \geq q(x) + 1 \geq |x| + 1 = |x + e_j|, \end{aligned}$$

из которых следует, что $y + e_i - e_j \in Q$ и $x + e_j \in Q$.

Остается показать, что $j \in I(y - x)$. Пусть это не так, т. е. $y_j \leq x_j$. Тогда, учитывая неравенства $\bar{x} \leq x$ и $\bar{x} + e_j \leq \bar{y} \leq y$, получаем $\bar{x} + e_j \leq x$. Поскольку $\bar{x} + e_j \in Q_1$, полученное неравенство противоречит тому, что вектор $\bar{x}$ является базовым для x . Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Любой целочисленный полиматроид P входит в класс множеств, описываемый теоремой 3. Для проверки этого утверждения достаточно положить $q(x) = |\bar{x}|$, где $\bar{x}$ — максимальный элемент множества $P \cap [0, x]$, и выбрать вектор d так, чтобы выполнялось включение $P \subset [0, d]$. Нетрудно убедиться, что функция $q(x)$ обладает свойствами (α) , (β) , (γ) и $Q = Q_1 = P$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глебов Н. И. Об одном классе задач выпуклого целочисленного программирования // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1973. Вып. 11. С. 38–42.
2. Колмычевская Н. В. Некоторые обобщения алгоритма покоординатного спуска для матроида // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1981. Вып. 21. С. 13–17.
3. Шенмайер В. В. Максимизация линейной целевой функции с помощью жадного алгоритма // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 4. С. 104–120.
4. Goecke O., Korte B., Lovasz L. Examples and algorithmic properties of greedoids // Combinatorial optimization. Berlin: Springer-Verl., 1986. P. 119–161. (Lecture Notes in Math.; V. 1403).
5. Goetschel R., jr. Linear objective functions on certain classes of greedoids // Discrete Appl. Math. 1986. V. 14, N 1, P. 11–16.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
10 августа 2000 г.

УДК 519.8

К ОПИСАНИЮ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ, РАЗРЕШИМЫХ АЛГОРИТМОМ ПОКООРДИНАТНОГО ПОДЪЕМА*)

Н. И. Глебов

Достаточные условия разрешимости посредством алгоритма по-координатного подъема некоторых задач целочисленного программирования были получены в работе [1]. В случае задания множества допустимых решений задачи системами линейных неравенств с целочисленными неотрицательными коэффициентами эти условия выражаются в терминах свойств некоторых семейств множеств, теснейшим образом связанных со структурой системы линейных ограничений и целевой функцией задачи. В данной статье дается более полное описание (характеризация) указанных семейств множеств, основанное на специального вида представимости этих семейств параллельно-последовательными сетями.

В работе [1] рассматривалась задача целочисленного программирования, имеющая вид: найти

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^m f_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \mid x \in P \right\}, \quad (1)$$

где $f_i(\cdot)$ — вогнутые функции;

$A = \{a_{ij}\}$ — матрица размера $m \times n$ с неотрицательными целочисленными элементами a_{ij} ;

P — конечное множество целочисленных точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, лежащее в положительном ортанте пространства R^n и содержащее начало координат.

Исследовалась разрешимость данной задачи посредством алгоритма покоординатного подъема (жадного алгоритма). Полученные достаточные условия разрешимости воспроизведем здесь в частном случае, когда

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00510) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 274).

множество P определяется следующими условиями:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = m+1, \dots, \overline{m}, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_j - \text{целое}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

а элементы a_{ij} расширенной матрицы $A = \{a_{ij}\}$ размера $\overline{m} \times n$ принимают значения из множества $\{0, 1\}$ и матрица A не имеет нулевых строк и столбцов. Для формулировки упомянутых условий рассмотрим семейство $\mathcal{A} = \{A_i \mid i = 1, \dots, \overline{m}\}$ подмножеств $A_i = \{j \mid a_{ij} = 1\}$ множества $\{1, \dots, n\}$. Его подсемейство $\mathcal{A}'$ называется *тупиковым покрытием*, если объединение множеств из $\mathcal{A}'$ покрывает $\{1, \dots, n\}$, а удаление любого множества из $\mathcal{A}'$ нарушает это свойство.

Тупиковое покрытие называется *разбиением*, если любые два множества покрытия имеют пустое пересечение. Из установленных в [1] условий разрешимости задачи (1) алгоритмом покоординатного подъема следует

Утверждение 1. Задача (1)–(4) разрешима алгоритмом покоординатного подъема, если любое подсемейство $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, являющееся тупиковым покрытием, есть разбиение и каждое множество A_i , $1 \leq i \leq m$, входит в некоторое разбиение.

Целью данной статьи является полное описание семейств множеств, обладающих указанными в утверждении 1 свойствами.

Введем некоторые определения.

Пусть S — конечное множество, $\mathcal{E} = \{E_i \mid i \in I\}$ — семейство его непустых подмножеств, покрывающих S , т. е. $\bigcup \{E_i \mid i \in I\} = S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Семейство $\mathcal{E}$ будем называть α -семейством, если любое его подсемейство $\mathcal{E}'$, являющееся тупиковым покрытием, есть разбиение множества S на попарно непересекающиеся подмножества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. α -семейство $\mathcal{E}$ будем называть $\alpha\beta$ -семейством, если любое множество E_i этого семейства входит в некоторое подсемейство $\mathcal{E}'$, являющееся разбиением.

Для описания $\alpha\beta$ -семейств будет использовано их представление посредством множеств путей в сетях. При объединении двух или более семейств считается, что индексное множество объединенного семейства равно объединению индексных множеств исходных семейств. Если исходные семейства не являются подсемействами одного и того же семейства, то дополнительно предполагается, что их индексные множества не имеют общих элементов. Операция удаления некоторого множества

семейства трактуется как удаление из индексного множества семейства индекса удаляемого множества. При этом ниже, вообще говоря, не предполагается, что используемые в обозначениях те или иные индексы рассматриваемых множеств совпадают с теми индексами, которые эти множества имеют в качестве членов содержащих их семейств.

Под двухполюсной сетью мы понимаем ориентированный мультиграф $H = (VH, EH)$ с множеством вершин VH , множеством дуг EH и двумя выделенными вершинами-полюсами s (вход) и t (выход).

Ниже особую роль будут играть параллельно-последовательные сети (π -сети). Для определения класса параллельно-последовательных сетей рассмотрим две операции над сетями [2]. Пусть H_1 — сеть с входом s_1 и выходом t_1 , H_2 — сеть с входом s_2 и выходом t_2 и при этом H_1 и H_2 не имеют общих элементов. Сеть $H_1 \cdot H_2$ с входом s_1 и выходом t_2 , полученная отождествлением вершин s_2 и t_1 , называется *последовательным соединением* сетей H_1 и H_2 . Сеть $H_1 \vee H_2$ с входом s_1 и выходом t_1 , полученная отождествлением входов s_1 и s_2 и выходов t_1 и t_2 , называется *параллельным соединением* сетей H_1 и H_2 . Тогда класс параллельно-последовательных сетей (π -сетей) определяется индуктивно:

- 1) сеть $H = (VH, EH)$ с множеством вершин $VH = \{s, t\}$, где s — вход и t — выход, и множеством дуг $EH = \{(s, t)\}$ является π -сетью;
- 2) если $H_i = (VH_i, EH_i)$ — π -сети без общих элементов с входами s_i и выходами t_i ($i = 1, 2$), то $H_1 \cdot H_2$ и $H_1 \vee H_2$ — тоже π -сети.

Будет использоваться также другое (эквивалентное) определение класса π -сетей, отличающееся от приведенного выше п. 2:

- 2') если H — π -сеть, e — ее дуга, то π -сетями являются также сети H' и H'' , получаемые из H дублированием дуги e и заменой дуги e двумя дугами (u, w) и (w, v) , где u, v — начальная и конечная вершины дуги e , а w — новая вершина.

Пусть $\mathcal{E} = \{E_i \mid i \in I\}$ — семейство подмножеств множества S и $H = (VH, EH)$ — сеть с входом s и выходом t . *Представимость* семейства $\mathcal{E}$ сетью H будем понимать в следующем смысле:

существуют биективное отображение $\varphi : I \rightarrow EH$ и отображение ψ множества S на множество всех простых путей в H , ведущих из s в t , такие, что при любом $i \in I$ справедливо равенство

$$E_i = \bigcup_{\eta} \psi^{-1}(\eta),$$

где объединение ведется по множеству всех простых (s, t) -путей η , проходящих по дуге $\varphi(i)$.

Другими словами, представимость семейства $\mathcal{E}$ двухполюсной сетью H означает, что между множествами из $\mathcal{E}$ и дугами сети H может быть установлено взаимно однозначное соответствие, а каждому элементу из

S может быть поставлен в соответствие некоторый простой (s, t) -путь в H , так что каждому (s, t) -пути соответствует хотя бы один элемент, и если множеству $E \in \mathcal{E}$ поставлена в соответствие дуга e , то E состоит из всех элементов множества S , которым поставлены в соответствие (s, t) -пути, содержащие дугу e .

С использованием данного определения может быть сформулировано и обосновано описание $\alpha\beta$ -семейств.

Теорема 1. Семейство $\mathcal{E}$ является $\alpha\beta$ -семейством тогда и только тогда, когда оно представимо некоторой π -сетью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Достаточность. Пусть семейство $\mathcal{E}$ представимо π -сетью $H = (VH, EH)$ при отображениях $\varphi : I \rightarrow EH$ и $\psi : S \rightarrow \rho$, где ρ — множество всех (s, t) -путей в H .

Если сеть H содержит только одну дугу, то утверждение тривиально. Пусть $|EH| > 1$. Тогда сеть H получена из некоторых сетей $H_1 = (VH_1, EH_1)$ и $H_2 = (VH_2, EH_2)$ посредством либо операции параллельного соединения, либо операции последовательного соединения. Очевидно, что $|EH_1| < |EH|$ и $|EH_2| < |EH|$. Сначала рассмотрим случай $H = H_1 \vee H_2$. Тогда любой (s, t) -путь в сети H содержится либо в H_1 , либо в H_2 . Это приводит к тому, что любые два множества семейства $\mathcal{E}$ не пересекаются, если они соответствуют дугам из разных «подсетей» H_1 и H_2 . Отсюда далее следует, что множество S разбивается на два подмножества S_1 и S_2 такие, что при $x \in S_1$ (соответственно $x \in S_2$) путь $\psi(x)$ содержится в H_1 (соответственно в H_2). В соответствии с этим и семейство $\mathcal{E}$ делится на два подсемейства $\mathcal{E}_1 = \{E_i \mid i \in I_1\}$ и $\mathcal{E}_2 = \{E_i \mid i \in I_2\}$ такие, что $E_i \subset S_1$ при $i \in I_1$ и $E_i \subset S_2$ при $i \in I_2$. Нетрудно видеть, что семейство $\mathcal{E}_1$ (соответственно $\mathcal{E}_2$) представимо сетью H_1 (соответственно H_2). (При этом используемые отображения $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ получаются из φ и ψ посредством их сужения на множества I_1, I_2, S_1 и S_2 соответственно.) Привлекая индукцию, можно считать, что $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ являются $\alpha\beta$ -семействами. Отсюда следует, что $\mathcal{E}$ является также $\alpha\beta$ -семейством.

Рассмотрим теперь случай $H = H_1 \cdot H_2$. Сети H_1 и H_2 можно рассматривать как подсети сети H с одной общей вершиной z , которая в H_1 является выходом, а в H_2 — входом. Каждый (s, t) -путь η в сети H проходит через z и делится ею на две части η_1 и η_2 : на (s, z) -путь η_1 в H_1 и на (z, t) -путь η_2 в H_2 .

Пусть φ и ψ — отображения, реализующие представление семейства $\mathcal{E}$ сетью H ; $I_1 = \{i \in I \mid \varphi(i) \in EH_1\} = \varphi^{-1}(EH_1)$, $I_2 = \varphi^{-1}(EH_2)$, $\mathcal{E}_1 = \{E_i \mid i \in I_1\}$ и $\mathcal{E}_2 = \{E_i \mid i \in I_2\}$. Рассмотрим отображения φ_1 и ψ_1 . В качестве φ_1 возьмем ограничение отображения φ на множество I_1 , а ψ_1 — отображение множества S на множество (s, z) -путей в H_1 —

определяется так, что $\psi_1^{-1}(\eta_1) = \bigcup_{\eta_2} \psi^{-1}(\eta_1 \eta_2)$, где объединение берется по множеству всех (z, t) -путей η_2 в H_2 . Тем самым получается представление семейства $\mathcal{E}_1$ π -сетью H_1 . Аналогично показывается, что семейство $\mathcal{E}_2$ представимо π -сетью H_2 . Тогда, используя предположение индукции, можно считать, что $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ являются $\alpha\beta$ -семействами.

Пусть подсемейство $\mathcal{E}' = \{E_i \mid i \in I'\}$, $I' \subset I$, является тупиковым покрытием множества S . Оно распадается на два подсемейства $\mathcal{E}'_1 = \{E_i \mid i \in I'_1\}$ и $\mathcal{E}'_2 = \{E_i \mid i \in I'_2\}$, где $I'_1 = I' \cap I_1$ и $I'_2 = I' \cap I_2$.

Тот факт, что $\mathcal{E}'$ есть покрытие множества S , означает: для любого (s, t) -пути η в сети H существует индекс $i \in I'$ такой, что дуга $\varphi(i)$ принадлежит пути η , т. е. путь η содержит дугу из множества $\varphi(I')$.

Если (s, z) -путь η_1 в H_1 не содержит дуг из множества $\varphi_1(I'_1)$, а (z, t) -путь η_2 в H_2 не содержит дуг из множества $\varphi_2(I'_2)$, то (s, t) -путь $\eta = \eta_1 \eta_2$ в сети H не содержит дуг из множества $\varphi(I')$. Последнее противоречит тому, что семейство $\mathcal{E}'$ является покрытием. Следовательно, либо в любом (s, z) -пути в сети H_1 имеется дуга из множества $\varphi_1(I'_1)$, либо в любом (z, t) -пути в сети H_2 имеется дуга из множества $\varphi_2(I'_2)$. В первом случае семейство $\mathcal{E}'_1$, а во втором случае семейство $\mathcal{E}'_2$ является покрытием множества S . Далее из тупиковости покрытия $\mathcal{E}'$ следует, что либо $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}'_2 = \emptyset$, либо $\mathcal{E}'_1 = \emptyset$ и $\mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}'$. Отсюда, привлекая предположение индукции, в любом случае получаем, что тупиковое покрытие $\mathcal{E}'$ является разбиением. Наконец, вхождение каждого множества семейства $\mathcal{E}$ в некоторое разбиение следует из того, что $\mathcal{E}$ является объединением $\alpha\beta$ -семейств $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $\mathcal{E} = \{E_i \mid i \in I\}$ является $\alpha\beta$ -семейством. Чтобы доказать представимость семейства $\mathcal{E}$ некоторой π -сетью, сформулируем и докажем ряд лемм. В их формулировке под разбиениями $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ и т. д. понимаются подсемейства семейства $\mathcal{E}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Непустое множество C , $C \subset S$, будем называть *компонентой связности* семейства $\mathcal{F}$, если

- 1) для любого множества $E \in \mathcal{F}$ либо $E \cap C = \emptyset$, либо $E \cap C = E$;
- 2) никакое собственное подмножество C не обладает свойством 1.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ — разбиения, $E_1 \in \mathcal{R}_1$. Тогда компонента связности семейства $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, содержащая множество E_1 , является объединением всех множеств из $\mathcal{R}_2$, имеющих непустое пересечение с E_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что любое множество из $\mathcal{R}_2$, содержащееся в той же самой компоненте связности, что и E_1 , имеет с E_1 непустое пересечение. Предположим противное. Пусть для множества $E_2 \in \mathcal{R}_2$ из рассматриваемой компоненты связности имеем $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Тогда по определению компоненты связности $E_1 \notin \mathcal{R}_2$,

$E_2 \notin \mathcal{R}_1$ и существует последовательность $F_1, F_2, \dots, F_k, k \geq 2$, множеств из $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ такая, что $F_1 = E_1, F_k = E_2$ и $F_i \cap F_{i+1} \neq \emptyset$ при $i = 1, \dots, k-1$. Кроме того, семейство $(\mathcal{R}_1 \setminus \{E_1\}) \cup (\mathcal{R}_2 \setminus \{E_2\})$, являясь покрытием, должно содержать некоторое разбиение $\mathcal{R}$. Нетрудно видеть, что последовательность $F_1, \dots, F_k$ является «чередующейся» относительно $\mathcal{R}_1$, т. е. при любом $i = 1, \dots, k-1$ из двух множеств F_i и F_{i+1} одно принадлежит $\mathcal{R}_1$, а другое не принадлежит $\mathcal{R}_1$. Из $F_1 \in \mathcal{R}_1$ и $F_k \notin \mathcal{R}_1$ следует, что k четно. С другой стороны, та же последовательность является чередующейся и относительно $\mathcal{R}$. При этом $F_1, F_k \notin \mathcal{R}$, так что k должно быть нечетным. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Лемма 2. Пусть $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ — разбиения, $E_1 \in \mathcal{R}_1, E_2 \in \mathcal{R}_2$ и C — компонента связности семейства $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, содержащая $E_1 \cup E_2$. Тогда C не зависит от выбора $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$.

Доказательство. Наряду с $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ рассмотрим разбиения $\mathcal{R}'_1$ и $\mathcal{R}'_2$ такие, что $E_1 \in \mathcal{R}'_1$ и $E_2 \in \mathcal{R}'_2$. Тогда C есть компонента связности семейства $\mathcal{R}'_1 \cup \mathcal{R}_2$, поскольку согласно лемме 1 компонента связности, содержащая E_1 , является объединением всех множеств из $\mathcal{R}_2$, имеющих непустое пересечение с E_1 . Аналогично доказывается, что C есть компонента связности семейства $\mathcal{R}'_1 \cup \mathcal{R}'_2$ (так как C есть объединение всех множеств из $\mathcal{R}'_1$, имеющих непустое пересечение с E_2). Лемма 2 доказана.

Множества $C \subset S$, типа рассматриваемых в лемме 2, в дальнейшем будем называть *инвариантными*. Каждое такое множество однозначным образом определяется некоторыми множествами E_1 и E_2 из $\mathcal{E}$, имеющими непустое пересечение.

Лемма 3. Любая совокупность попарно непересекающихся множеств семейства $\mathcal{E}$ входит в некоторое разбиение.

Доказательство (по индукции). Если совокупность состоит из одного множества, то утверждение верно в силу определения $\alpha\beta$ -семейства.

Пусть утверждение справедливо для всех совокупностей, мощность которых не превышает $k-1$ и $\mathcal{P} = \{E_1, \dots, E_k\}, E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j, 1 \leq i, j \leq k$. Тогда для семейства $\mathcal{P}_1 = \{E_1, \dots, E_{k-1}\}$ существует разбиение $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1 \supset \mathcal{P}_1$, для множества E_k — разбиение $\mathcal{R}_2, E_k \in \mathcal{R}_2$.

Обозначим через C компоненту связности семейства $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, содержащую E_k . В силу леммы 1 имеем $E_i \cap C = \emptyset, i = 1, \dots, k-1$. Если теперь рассмотреть разбиение $\mathcal{R}$, получающееся из $\mathcal{R}_1$ посредством замены в нем всех множеств, входящих в C , на аналогичные множества из $\mathcal{R}_2$, то полученное разбиение будет содержать $\mathcal{P}$. Лемма 3 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что множества E_1, E_2 семейства $\mathcal{E}$ образуют *сцепленную пару*, если в любое разбиение $\mathcal{R}$, $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$, множества E_1 и E_2 входят или не входят одновременно.

Лемма 4. Если $|\mathcal{E}| \geq 2$ и все множества семейства $\mathcal{E}$ попарно различны, то в $\mathcal{E}$ существуют по крайней мере два множества, образующие сцепленную пару.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если семейство $\mathcal{E}$ является разбиением, то утверждение леммы тривиально. В противном случае в совокупности инвариантных множеств C , порождаемых всевозможными парами множеств E и F из $\mathcal{E}$ такими, что $E \cap F \neq \emptyset$ и $E \neq F$, выберем минимальное по включению множество C_0 , соответствующее множествам E_0 и F_0 . Можно считать, что $F_0 \setminus E_0 \neq \emptyset$. Пусть E_0 содержится в разбиении $\mathcal{R}_1$, а F_0 — в $\mathcal{R}_2$. Тогда в C_0 содержится не менее двух множеств из $\mathcal{R}_1$: $E_0, E^1, \dots, E^k$, $k \geq 1$. Покажем, что любые два из этих множеств могут быть взяты в качестве E_1 и E_2 , образующих сцепленную пару. Если это не так, то существует разбиение $\mathcal{R}$, которое содержит по меньшей мере одно из перечисленных множеств, но не все. Для определенности пусть $E_0 \in \mathcal{R}$ и $E^1 \notin \mathcal{R}$. Тогда в $\mathcal{R}$ должно входить некоторое множество F^1 такое, что $F^1 \cap E^1 \neq \emptyset$ и $F^1 \neq E^1$. Порождаемое множествами F^1 и E^1 инвариантное множество C'_0 по лемме 3 является компонентой связности семейства $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}_1$. По этой же лемме множество C_0 является компонентой связности семейства $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}_2$, так что из $E \cap C_0 \neq \emptyset$ следует $E \subset C_0$ для любого множества $E \in \mathcal{R}$. Так как компонента связности C'_0 семейства $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}_1$ является объединением всех множеств разбиения $\mathcal{R}$, имеющих с E^1 непустое пересечение, и $E^1 \subset C_0$, то $C'_0 \subset C_0$. При этом $E_0 \cap C'_0 = \emptyset$, т. е. $C'_0 \subset C_0 \setminus E_0$, поскольку $E_0 \cap E^1 = \emptyset$. Последнее противоречит выбору C_0 . Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Если множества E^1 и E^2 образуют сцепленную пару, то из $F \cap E^1 \neq \emptyset$ следует $F \cap E^2 \neq \emptyset$ для любого множества F семейства $\mathcal{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (от противного). Пусть $F \cap E^1 \neq \emptyset$. Если $F \cap E^2 = \emptyset$, то по лемме 2 существует разбиение $\mathcal{R}$, содержащее F и E^2 . В то же время разбиение $\mathcal{R}$ вместе с E^2 должно содержать и E^1 , что невозможно. Лемма 5 доказана.

Лемма 6 (центрированность). Если $\{E_i \mid i = 1, \dots, k\}$ — совокупность попарно пересекающихся множеств семейства $\mathcal{E}$, то $\bigcap_{i=1}^k E_i \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем методом индукции. Можно считать, что множества рассматриваемой совокупности попарно различны. При $k = 2$ утверждение леммы тривиально. Пусть $k > 2$ и при числе

множеств, равно $k - 1$, утверждение справедливо. Предположим, что $\bigcap_{i=1}^k E_i = \emptyset$. Рассмотрим разбиения $\mathcal{R}_i$ такие, что $E_i \in \mathcal{R}_i$, $i = 1, \dots, k$.

Из сделанного допущения следует, что семейство множеств $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{R}_i \setminus \{E_i \mid i = 1, \dots, k\}$ является покрытием. В самом деле, для любого элемента x из S существует номер i такой, что $x \notin E_i$. Тогда $x \in E'_i$ при некотором E'_i из $\mathcal{R}_i$. Так как $E'_i \cap E_i = \emptyset$ и $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, то $E'_i \neq E_j$ при $j = 1, \dots, k$ и, следовательно, E'_i содержится в рассматриваемом семействе $\mathcal{P}$. Из предположения индукции следует, что существуют элементы $e_1 \in \bigcap_{i=2}^k E_i$ и $e_k \in \bigcap_{i=1}^{k-1} E_i$. Пусть E'_1 и E'_k есть такие элементы разбиений $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_k$ соответственно, что $e_1 \in E'_1$ и $e_k \in E'_k$. Очевидно, что $E'_1 \neq E_1$, $E'_k \neq E_k$ и любое разбиение, получаемое из покрытия $\mathcal{P}$, будет содержать множества E'_1 и E'_k . Следовательно, $E'_1 \cap E'_k = \emptyset$. С другой стороны, эти множества входят в одну и ту же компоненту связности семейства $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_k$, так как $E'_1 \cap E_k \neq \emptyset$, $E'_k \cap E_1 \neq \emptyset$ и $E_1 \cap E_k \neq \emptyset$. Тогда по лемме 1 имеем $E'_1 \cap E'_k \neq \emptyset$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 6.

Далее для доказательства необходимости условий теоремы используем индукцию по числу множеств семейства $\mathcal{E}$.

База индукции ($|\mathcal{E}| = 1$). π -сеть, представляющая $\mathcal{E}$, будет состоять из входа s , выхода t и одной дуги (s, t) , которая соответствует единственному множеству E_1 семейства $\mathcal{E}$. Каждому элементу множества $S (= E_1)$ поставлен в соответствие путь, состоящий из дуги (s, t) .

Индуктивный шаг ($|\mathcal{E}| \geq 2$). В зависимости от наличия или отсутствия в $\mathcal{E}$ равных множеств достаточно рассмотреть два случая.

Случай 1. В семействе $\mathcal{E}$ есть равные множества E' и E'' (в $\mathcal{E}$ эти множества имеют разные индексы, которые мы опускаем). Преобразуем $\mathcal{E}$, заменяя E' и E'' одним равным им множеством E . Получаем семейство $\mathcal{E}'$ с меньшим числом членов, обладающее свойствами (α) , (β) . Согласно предположению индукции существует π -сеть H' (и отображения φ и ψ), представляющая семейство $\mathcal{E}'$.

Сеть H , представляющая семейство $\mathcal{E}$, получается из H' следующим образом: дуга e сети H' , соответствующая множеству E , заменяется на путь из двух (новых) дуг e' и e'' , сопоставляемых с множествами E' и E'' соответственно. При этом новые пути из s в t , проходящие по дугам e' и e'' , заменяют старые пути из s в t , проходящие по дуге e , и им соответствуют те же самые элементы множества S . Очевидно, что сеть H представляет семейство $\mathcal{E}$ в принятом нами смысле.

Случай 2. В семействе $\mathcal{E}$ нет равных множеств. Тогда согласно лемме 4 в $\mathcal{E}$ имеются по меньшей мере два множества E' и E'' , образующие сцепленную пару. Преобразуем $\mathcal{E}$, заменяя E' и E'' на множество $E = E' \cup E''$. Полученное семейство $\mathcal{E}'$ будет также обладать свойствами (α) и (β) . По предположению индукции семейство $\mathcal{E}'$ представимо некоторой π -сетью H' (с отображениями φ и ψ), при этом множеству E соответствует некоторая дуга e . π -сеть H , представляющая семейство $\mathcal{E}$, получается из H' посредством замены дуги e на две параллельные дуги e' и e'' , сопоставляемые с множествами E' и E'' соответственно.

Остается скорректировать отображение ψ , которое элементам множества S ставит в соответствие (s, t) -пути в H' . Для (s, t) -пути в H' (и в H также), не содержащего дуги e , множество поставленных ему в соответствие элементов множества S сохраняется. Пусть (s, t) -путь η в сети H' содержит дугу e . В сети H ему соответствуют два пути η' и η'' , получаемые из η заменой дуги e на дуги e' и e'' соответственно. Корректируя отображение ψ , элементам множества $\psi^{-1}(\eta) \cap E'$ поставим в соответствие путь η' , а элементам множества $\psi^{-1}(\eta) \cap E''$ — путь η'' . Так как $E' \cap E'' = \emptyset$ и по определению представимости $\psi^{-1}(\eta) \subset E (= E' \cup E'')$, то указанные множества не пересекаются, а их объединение равно $\psi^{-1}(\eta)$. Остается лишь показать, что оба эти множества непусты. Для доказательства этого утверждения прежде всего заметим, что $\psi^{-1}(\eta)$ является пересечением всех множеств из $\mathcal{E}'$, соответствующих дугам пути η . (В самом деле, нарушение этого равенства означало бы, что в указанном пересечении имеются элементы, не принадлежащие множеству $\psi^{-1}(\eta)$. Отсюда следовало бы существование в H' некоторого (s, t) -пути $\tilde{\eta}$, который отличен от η и содержит все дуги последнего, что для простых путей невозможно.)

Рассмотрим теперь произвольное множество F из $\mathcal{E}'$, соответствующее некоторой дуге пути η . Тогда $F \cap E \neq \emptyset$ и так как множества E' и E'' образуют сцепленную пару в $\mathcal{E}$, то согласно лемме 5 имеем $F \cap E' \neq \emptyset$ и $F \cap E'' \neq \emptyset$. Следовательно, любая пара множеств в $\mathcal{E}$, соответствующих дугам пути η' , имеет непустое пересечение. Тогда по лемме 6 множество $\psi^{-1}(\eta) \cap E'$, являющееся пересечением всех множеств семейства $\mathcal{E}$, соответствующих дугам пути η' , непусто. Аналогичным образом устанавливается, что $\psi^{-1}(\eta) \cap E'' \neq \emptyset$. После проведения описанных выше корректировок отображений φ и ψ получаем представление семейства $\mathcal{E}$ π -сетью H . Теорема 1 доказана.

Ниже, как и прежде, под $\mathcal{E}$ будем понимать некоторое семейство $\{E_i \mid i \in I\}$, элементами которого являются непустые подмножества S и $\bigcup_i E_i = S$. Для x из S через $I(x)$ обозначим множество $\{i \in I \mid x \in E_i\}$.

Лемма 7. Если $\mathcal{E}$ является $\alpha\beta$ -семейством, то для любых $x, y \in S$ никакое из множеств $I(x)$ и $I(y)$ не может быть собственным подмножеством другого.

ПОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, в случае $I(x) \subset I(y)$ при $i \in I(y) \setminus I(x)$ множество E_i не входит в разбиения, так как элемент y будет покрываться некоторым множеством E_j , $j \in I(x)$. Лемма 7 доказана.

Для описания α -семейств введем одну операцию над семействами множеств, которая в случае $\alpha\beta$ -семейств порождает α -семейства.

Пусть $\chi : S' \rightarrow S$, где S' — множество (возможно, пустое), не имеющее с S общих элементов. Рассмотрим семейство $\mathcal{E}' = \{E_i \cup E'_i \mid i \in I\}$, где $E'_i = \cup\{\chi^{-1}(x) \mid x \in E_i\}$, и некоторое семейство $\mathcal{E}''$ подмножеств множества S' . Семейство $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}' \cup \mathcal{E}''$ будем называть χ -расширением $\mathcal{E}$. В случае $S' = \emptyset$ естественно считать, что $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$.

Нетрудно показать, что χ -расширение семейства $\mathcal{E}$ будет α -семейством, если $\mathcal{E}$ есть $\alpha\beta$ -семейство. Верно в некотором смысле и обратное утверждение. Следующая теорема дает полное описание α -семейств.

Теорема 2. α -семействами являются χ -расширения $\alpha\beta$ -семейств и только они.

ПОКАЗАТЕЛЬСТВО. О том, что χ -расширения $\alpha\beta$ -семейств являются α -семействами, было уже сказано выше. Докажем вторую часть утверждения.

Для этого представим α -семейство $\mathcal{E}$ в виде объединения $\mathcal{E}' \cup \mathcal{E}_1$ двух подсемейств, где $\mathcal{E}' = \{E_i \mid i \in I'\}$, $I' \subset I$, состоит из тех множеств семейства $\mathcal{E}$, которые не входят в разбиения, и $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$. Очевидно, что $\mathcal{E}_1$ является $\alpha\beta$ -семейством и в случае $\mathcal{E}' = \emptyset$ α -семейство $\mathcal{E}$ есть тривиальное расширение $\alpha\beta$ -семейства.

Пусть $I' \neq \emptyset$, $S' = \cup\{E_i \mid i \in I'\}$, $S_1 = S \setminus S'$ и $I_1 = I \setminus I'$. Заметим, что любое подсемейство $\mathcal{E}'' \subset \mathcal{E}_1$, являющееся покрытием множества S_1 , будет также и покрытием множества S' , так как в противном случае семейство $\mathcal{E}'' \cup \mathcal{E}'$, являясь покрытием множества S , должно содержать разбиения и в каждом из них будет содержаться некоторое множество семейства $\mathcal{E}'$, что невозможно в силу определения семейства $\mathcal{E}'$.

Положим $I_1(x) = \{i \in I_1 \mid x \in E_i\}$ для $x \in S$ и рассмотрим семейство $\bar{\mathcal{E}}_x = \{E_i \mid i \in I_1 \setminus I_1(x)\}$. Поскольку при $x \in S'$ это семейство не является покрытием множества S' , оно не является также покрытием множества S_1 . Следовательно, для любого элемента $x \in S'$ существует элемент $y \in S_1$ такой, что $I_1(y) \cap (I_1 \setminus I_1(x)) = \emptyset$ или $I_1(y) \subset I_1(x)$. В силу леммы 7 это влечет равенство $I_1(y) = I_1(x)$. Таким образом, мы имеем возможность определить такое отображение $\chi : S' \rightarrow S_1$, что для любого $x \in S'$ элемент $y = \chi(x)$ удовлетворяет условию $I_1(y) = I_1(x)$. Из

этого следует, что семейство $\mathcal{E}$ является χ -расширением $\alpha\beta$ -семейства $\mathcal{E}_1$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глебов Н. И.** О применимости метода покоординатного спуска к некоторым задачам выпуклого целочисленного программирования // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1978. Вып. 17. С. 52–59.
2. **Дискретная** математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974. Т. 1. С. 149–206.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: ngleb@math.nsc.ru

Статья поступила
9 июня 2001 г.

УДК 519.8

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ЖАДНЫМ АЛГОРИТМОМ^{*)}

Н. И. Глебов

Дается обзор результатов, относящихся к условиям разрешимости некоторых задач целочисленного программирования (комбинаторной оптимизации) посредством алгоритма покоординатного подъема (жадного алгоритма).

Задача дискретной (комбинаторной) оптимизации характеризуется, во-первых, конечным множеством $\hat{Q}$ допустимых решений, элементами которого в случае задачи целочисленного программирования являются целочисленные векторы, и, во-вторых, целевой функцией f , принадлежащей определенному классу Φ . Речь будет идти о задачах максимизации.

В случае использования жадного алгоритма наряду с множеством допустимых решений $\hat{Q}$ задается также некоторое множество Q , элементы которого могут «просматриваться» жадным алгоритмом в процессе поиска оптимального допустимого решения. При этом предполагается, что Q содержит $\hat{Q}$ и целевая функция f определена на множестве Q .

Согласно рассматриваемой версии алгоритма покоординатного подъема процесс вычислений начинается с точки θ . (Предполагается, что начало координат принадлежит множеству Q .) По достижении некоторой точки $x \in Q$ на очередном шаге процесса происходит переход к такой точке $x' \in Q$, при котором только одна из координат вектора x изменяется, увеличиваясь на 1, и приращение функции $f(x)$ оказывается максимальным (а в случае $x \in \hat{Q}$ — и положительным). Процесс вычислений заканчивается и (последняя) достигнутая точка объявляется результатом работы алгоритма, если осуществить из нее переход в другую точку с соблюдением перечисленных выше условий невозможно.

^{*)} Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-01153) и Федеральной программы «Университеты России» (проект УР.04.01.012).

Что касается множеств Q и $\hat{Q}$, то фактически исследовались два случая: в одном из них $\hat{Q}$ представляет собой множество максимальных относительно частичного порядка $\leq$ точек множества Q (задача 1), а в другом — $Q = \hat{Q}$ (задача 2). (Для векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ неравенство $x \leq y$ эквивалентно тому, что компоненты вектора $y - x$ неотрицательны.)

По поводу класса Φ целевых функций f можно отметить, что наибольшее внимание исследователей было уделено классам линейных и вогнутых сепарабельных функций. Затронуты были также класс функций, являющихся суперпозицией вогнутых сепарабельных и линейных функций, и классы, характерные для задач на узкие места.

Наряду с указанной выше версией алгоритма рассматривались также некоторые ее модификации. Если в основном варианте рассматриваемого алгоритма множество допустимых направлений перехода из текущей точки в следующую определяется только условием принадлежности последней множеству Q , то в модифицированных версиях это множество тем или иным образом сужается. Исследовались и другие модификации жадного алгоритма.

Следует также упомянуть, что рассматривались условия разрешимости жадным алгоритмом специальной задачи о длиннейшем пути в ациклическом графе, которая является обобщением упомянутых задач целочисленного программирования в том случае, когда Q является множеством булевых векторов (или системой подмножеств конечного множества).

1. Можно считать, что усиление внимания к вопросу о разрешимости оптимизационных задач жадным алгоритмом было связано с появлением работы Дж. Краскала [22], в которой этот алгоритм применялся для решения задачи о минимальном (максимальном) остовном дереве графа. В связи с этим соответствующий алгоритм обычно приписывается Дж. Краскалу, хотя еще в 1926 г. подобный алгоритм решения упомянутой задачи (в несколько иных терминах) был предложен О. Борувкой [11]. Подтверждением такого внимания к жадному алгоритму может служить работа Р. Радо [24], в которой устанавливается разрешимость посредством жадного алгоритма задачи поиска базы матроида максимального веса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Под *системой множеств* над конечным множеством E понимается пара $(E, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F} \subseteq 2^E$. Система множеств есть *матроид*, если выполняются следующие аксиомы:

- (M1) $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- (M2) если $X \subset Y \in \mathcal{F}$, то $X \in \mathcal{F}$;
- (M3) если $X, Y \in \mathcal{F}$ и $|X| > |Y|$, то существует $x \in X \setminus Y$ такой, что $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$.

Система множеств называется *системой независимости*, если выполняются аксиомы (M1) и (M2). Максимальное по включению множество системы называется *базой*.

Дж. Эдмондс [13] получил результат, в определенном смысле обратный результату Радо: если жадный алгоритм находит оптимальное решение задачи 1 для системы независимости $(E, \mathcal{F})$ при любой линейной целевой функции, то $(E, \mathcal{F})$ является матроидом.

Таким образом, справедливо

Утверждение 1. Система независимости есть матроид в том и только в том случае, если жадный алгоритм получает оптимальное решение задачи 1 при любой линейной целевой функции.

2. Более общий результат, касающийся разрешимости задачи 1, получен для существенно более широкого класса систем множеств, а именно для так называемых *доступных* систем множеств (или систем *достижимых* множеств).

Доступной называется система множеств, удовлетворяющая аксиоме (M1) и ослабленной аксиоме (M2): если $X \in \mathcal{F}$ и $X \neq \emptyset$, то существует $x \in X$ такой, что $X \setminus \{x\} \in \mathcal{F}$.

Справедлива следующая

Теорема [16]. Если $(E, \mathcal{F})$ — доступная система множеств, то жадный алгоритм находит оптимальное решение задачи 1 при любой линейной целевой функции тогда и только тогда, когда имеет место усиленное обменное свойство:

$$(P) \begin{cases} \text{если } X \in \mathcal{F}, Y \supseteq X, Y - \text{ база } \mathcal{F} \text{ и если } X \cup \{x\} \in \mathcal{F} \\ \text{для некоторого } x \in E \setminus Y, \text{ то существует } y \in Y \setminus X \text{ такой, что} \\ X \cup \{y\} \in \mathcal{F} \text{ и } Y \cup \{x\} \setminus \{y\} \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

3. Задача 1 для систем множеств в случае линейной целевой функции (как и некоторые другие задачи, о которых речь пойдет ниже) может рассматриваться как частный случай задачи о длиннейшем пути в графе в некоторой специфической постановке.

Под *индексированным* графом $\langle G, \nu, v_0 \rangle$ будем понимать ориентированный бесконтурный граф $G = (V, \mathcal{A})$ с заданной индексацией дуг $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ и выделенной вершиной $v_0 \in V$.

Обозначим через $\widehat{W}$ множество всех непродолжаемых путей графа G , начинающихся в v_0 . Предполагается, что все вершины графа достижимы из v_0 , все пути из множества $\widehat{W}$ имеют одинаковое количество дуг и в каждом пути индексы дуг не повторяются.

Весовой функцией графа назовем любое отображение вида $w : \{1, \dots, n\} \rightarrow R$. Длина дуги e считается равной величине $w(\nu(e))$,

а под длиной пути μ понимается, как обычно, сумма длин его дуг:
 $f(\mu) = \sum_{s=1}^{l(\mu)} w(i_s(\mu))$, где $l(\mu)$ — число дуг в пути μ , $i_s(\mu)$ — индекс его s -й по счету дуги.

Задача, являющаяся обобщением задачи из предыдущего пункта, состоит в отыскании $\max\{f(\mu) \mid \mu \in \widehat{W}\}$. Жадный алгоритм для рассматриваемой задачи характеризуется правилом: «иди по длиннейшей дуге, выходящей из достигнутой вершины» (при условии, что движение начинается из вершины v_0). Таким образом, множество Q состоит из всех путей графа G , исходящих из вершины v_0 , $\widehat{Q} = \widehat{W}$.

Обозначим через $\mathcal{G}$ класс всех индексированных графов, для каждого из которых жадный алгоритм дает точное решение рассматриваемой задачи при любой весовой функции w .

Для каждого пути $\mu \in \widehat{W}$ определим бинарное отношение $\succ_\mu$ на индексном множестве $I = \{1, \dots, n\}$: $i \succ_\mu j$ если (и только если) существует такая последовательность номеров $s(1), \dots, s(p)$, что $i = i_{s(1)}(\mu)$, $j = i_{s(p)}(\mu)$, и при $q = 1, \dots, p-1$ среди дуг, начинающихся в $s(q)$ -й по счету вершине пути μ , есть дуга с индексом $i_{s(q+1)}(\mu)$.

Справедлив следующий критерий [5].

Утверждение 2. Индексированный граф $\langle G, \nu, v_0 \rangle$ принадлежит классу $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда для любых путей $\mu, \eta \in \widehat{W}$ существует такая биекция $\pi : \{1, \dots, l(\mu)\} \rightarrow \{1, \dots, l(\eta)\}$, что

$$i_s(\mu) \succ_\mu i_{\pi(s)}(\eta), \quad s = 1, \dots, l(\mu).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь и далее $I(\mu)$ — множество всех индексов, приписанных дугам пути μ , и $t(\mu)$ — конечная вершина пути μ .

Задача о длиннейшем пути в индексированном графе совпадает с задачей 1 предыдущего пункта для доступных систем множеств, если выполняются условия:

$$\begin{aligned} (G1) & \left\{ \begin{array}{l} \text{для любых путей } \mu \text{ и } \eta, \text{ исходящих из вершины } v_0, \\ \text{имеет место } I(\mu) = I(\eta) \iff t(\mu) = t(\eta), \end{array} \right. \\ (G2) & \left\{ \begin{array}{l} \text{если пути } \mu \text{ и } \eta, \text{ исходящие из вершины } v_0, \text{ таковы, что} \\ I(\mu) \subset I(\eta) \text{ и } I(\eta) \setminus I(\mu) = \{i\}, \text{ то в графе } G \text{ имеется дуга} \\ (t(\mu), t(\eta)), \text{ индекс которой равен } i. \end{array} \right. \end{aligned}$$

4. Пусть индексированный граф $\langle G, \nu, v_0 \rangle$ удовлетворяет условию (G1) и множество $\mathcal{M}$ есть система всех множеств вида $I(\mu)$, где μ — путь в графе G , начинающийся в вершине v_0 .

В рассматриваемом случае предполагается, что система множеств $\{I(\mu)\}$ является матроидом. Обозначим через $J(v)$ множество всех индексов, приписанных дугам графа G , исходящим из вершины $v \in V$.

Из результата работы [6] следует

Утверждение 3. Задача о длиннейшем пути в описанном случае разрешима жадным алгоритмом при любой весовой функции w тогда и только тогда, когда для каждой вершины v множество $J(v)$ является объединением некоторых коциклов матроида $\mathcal{M} = \{I(\mu)\}$.

(Напомним, что коциклом матроида $\mathcal{M}$ называется цикл двойственного матроида или любое минимальное по включению подмножество множества I , имеющее непустое пересечение с каждой базой матроида $\mathcal{M}$.)

5. Наряду с задачей о длиннейшем пути в случае индексированных графов могут быть рассмотрены и другие задачи, в частности задача о пути максимальной пропускной способности. Для этого достаточно соответствующим образом определить класс целевых функций, например, для пути $\mu = (e_1, \dots, e_p)$ положить значение $f(\mu)$ равным

$$\min(w(i_1, 1), \dots, w(i_p, p)), \quad (1)$$

где $i_s = \nu(e_s)$, $s = 1, \dots, p$, функция $w : I \times Z_+ \rightarrow R$ удовлетворяет условию $w(i, q) \leq w(i, q+1)$ для любых $i \in I$ и $q \in Z_+$. При этом следует очевидным образом уточнить правила жадного алгоритма: «иди по выходящей из достигнутой вершины дуге, доставляющей максимальное приращение целевой функции» (при условии, что движение начинается из вершины v_0).

В работе [19] рассматривалась задача 1 для целевых функций вида (1) в случае, когда элементами множества Q являются упорядоченные подмножества некоторого конечного множества (в нашем случае — множества I).

Множество Q такой задачи может быть получено исходя из индексированного графа $\langle G, \nu, v_0 \rangle$, удовлетворяющего условиям (G1) и (G2). Для этого каждому пути $\mu = (e_1, \dots, e_p)$ в графе G , начинающемуся в вершине v_0 , следует поставить в соответствие упорядоченное множество индексов дуг пути μ : $(\nu(e_1), \dots, \nu(e_p))$. Так полученные множества и только они являются элементами множества Q . При этом $\hat{Q}$ будет состоять из множеств, соответствующих непродолжаемым путям.

Из результатов работы [19] следует

Утверждение 4. Задача о пути максимальной пропускной способности для индексированного графа $\langle G, \nu, v_0 \rangle$, удовлетворяющего условиям (G1) и (G2), разрешима жадным алгоритмом при любой целевой функции f вида (1) тогда и только тогда, когда система упорядоченных множеств Q , соответствующая индексированному графу $\langle G, \nu, v_0 \rangle$, является гридоидом.

(Конечная система конечных упорядоченных множеств $\mathcal{L}$ называется *гридоидом*, если: (а) любой начальный отрезок множества $(i_1, \dots, i_p) \in \mathcal{L}$ принадлежит $\mathcal{L}$ (наследственность); (б) для любых множеств $(i_1, \dots, i_p), (j_1, \dots, j_q) \in \mathcal{L}$, $p < q$, существует элемент j_s , $1 \leq s \leq q$, такой, что $(i_1, \dots, i_p, j_s) \in \mathcal{L}$.)

Более широкий, чем в [19], класс целевых функций для задачи 1 в случае систем упорядоченных множеств был рассмотрен в [14].

Применительно к задаче о пути максимальной пропускной способности в индексированном графе это соответствует тому, что класс Φ целевых функций состоит из функций $f(\mu)$ вида

$$f(\mu) = \min(w(i_1, \tau(i_1)), \dots, w(i_p, \tau(i_1) + \dots + \tau(i_p))), \quad (2)$$

где $\mu = (e_1, \dots, e_p)$ — путь в графе G ; $i_s = \nu(e_s)$, $s = 1, \dots, p$; функция $w : I \times R \rightarrow R$ удовлетворяет условию $w(i, q) \leq w(i, r)$ для любых $i \in I$ и $q < r$; и $\tau(i) \geq 0$ при любом $i \in I$.

Определим множество Q аналогично предыдущему случаю. Тогда из результатов работы [14] следует

Утверждение 5. Задача о пути максимальной пропускной способности для индексированного графа $\langle G, \nu, v_0 \rangle$, удовлетворяющего условиям (G1) и (G2), разрешима жадным алгоритмом при любой целевой функции f вида (2) тогда и только тогда, когда система упорядоченных множеств Q , соответствующая индексированному графу $\langle G, \nu, v_0 \rangle$, есть гридоид, обладающий свойством: если $(i_1, \dots, i_k), (j_1, \dots, j_l) \in Q$, $\{j_1, \dots, j_{l-1}\} \subset \{i_1, \dots, i_k\}$ и $j_l \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, то $(i_1, \dots, i_k, j_l) \in Q$.

(Системы упорядоченных множеств, отвечающие условиям последнего утверждения, получили название *антиматроиды*.)

Далее будут рассмотрены ситуации, когда элементами множества Q являются неотрицательные целочисленные n -векторы, т. е. элементы множества Z_+^n .

6. В работе [5] рассматривалась задача 1 в случае, когда $Q \subset Z_+^n$, а множество Φ целевых функций задачи состоит из всех вогнутых сепарабельных функций, т. е. функций f вида

$$f(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j), \quad (3)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in Z_+^n$, $f_j(\cdot)$ — вогнутые функции.

Далее посредством $J(x)$ обозначается множество $\{j \mid x + \delta_j \in Q\}$, где δ_j есть j -й орт пространства R^n . Предполагается, что $0 \in Q$, $J(x) \neq \emptyset$ в случае $x \in Q \setminus \widehat{Q}$ и все точки множества Q достижимы из начала

координат. (Последнее эквивалентно условию: для любой точки $x \in Q \setminus \{0\}$ существует точка $y \in Q$ такая, что $x - y$ есть орт пространства.)

Одним из результатов упомянутой работы является

Утверждение 6. Задача 1 в рассматриваемом случае разрешима жадным алгоритмом при любой целевой функции вида (3) тогда и только тогда, когда Q обладает свойством:

$$(PP) \left\{ \begin{array}{l} \text{для любых точек } x \in Q, y \in \widehat{Q} \text{ таких, что } x \leq y \text{ и } x_i = y_i \\ \text{при некотором } i \in J(x), \text{ найдется номер } j \in J(x) \text{ такой, что} \\ y_j > x_j \text{ и } y + \delta_i - \delta_j \in Q. \end{array} \right.$$

Далее будут рассмотрены результаты, относящиеся к разрешимости жадным алгоритмом задачи 2.

7. В работе [1] разрешимость жадным алгоритмом задачи 2 исследовалась для множеств $Q \subset Z_+^n$, а класс Φ целевых функций состоял из всех вогнутых сепарабельных функций f вида (3). По этому поводу доказан критерий разрешимости.

Утверждение 7. Задача 2 разрешима жадным алгоритмом при любой целевой функции вида (3) тогда и только тогда, когда Q обладает свойствами:

- (а) если $x \in Q, y \in Z_+^n$ и $y \leq x$, то $y \in Q$;
- (б) при любом $z \in Z_+^n$ все максимальные относительно частичного порядка $\leq$ векторы множества $\{x \in Q \mid x \leq z\}$ имеют одинаковую сумму компонент.

Множества Q , обладающие свойствами (а) и (б), получили название *целочисленные полиматроиды* [12].

8. Задача 2 в случае целевых функций, представляющих собой суперпозицию вогнутых и линейных функций, рассматривалась в работе [2]. Более точно целевые функции задачи имеют вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(a_i x), \quad (4)$$

где $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in Z_+^n$, $f_i(\cdot)$ — вогнутые функции, $i = 1, \dots, m$.

Относительно множества Q , $Q \subset Z_+^n$, предполагается, что его размерность равна n и оно удовлетворяет условию (а) из предыдущего пункта. Обозначим через A матрицу размера $m \times n$, строками которой являются векторы a_i , $i = 1, \dots, m$.

Основным результатом работы [2] является достаточное условие разрешимости.

Утверждение 8. Задача 2 с целевыми функциями вида (4) разрешима жадным алгоритмом при любых вогнутых функциях $f_i(\cdot)$, если матрица A и множество Q обладают свойствами:

(b') для любого вектора $z \in Z_+^n$ все максимальные относительно частичного порядка $\leq$ векторы множества $\{x \in Q \mid Ax \leq z\}$ имеют одинаковую сумму компонент;

(с) n -вектор $(1, \dots, 1)$ является относительно внутренним вектором конуса, порожденного векторами a_i , $i = 1, \dots, m$.

Выделяемый этим утверждением класс разрешимых задач содержит ранее выделенный в п. 7 класс задач, поскольку для единичной матрицы A условие (с) очевидным образом выполняется, а условие (b') в этом случае совпадает с условием (b).

В случае задания множества $\hat{Q}$ допустимых решений задачи системами линейных неравенств с целочисленными неотрицательными коэффициентами эти условия выражаются в терминах свойств некоторых семейств множеств, теснейшим образом связанных со структурой системы линейных ограничений и целевой функцией задачи. В работе [3] дано более полное описание (характеризация) указанных семейств множеств, основанное на специального вида представимости этих семейств параллельно-последовательными сетями.

9. В заключение отметим критерий разрешимости [15, 16] задачи 2 посредством *модифицированного* жадного алгоритма в случае булевых систем векторов (или систем подмножеств конечного множества).

Подходящей версией жадного алгоритма для задачи 2 в случае систем достижимых множеств является следующий модифицированный жадный алгоритм.

Шаг 1. Положить $F^* = \emptyset$ и $F = \emptyset$.

Шаг 2. Выбрать $x \in E \setminus F$ такой, что $F \cup x \in \mathcal{F}$ и $f(F \cup x) \geq f(F \cup y)$ для всех $y \in E \setminus F$ при условии $F \cup y \in \mathcal{F}$; если такого x не существует — STOP (F^* есть решение, полученное жадным алгоритмом).

Шаг 3. Если $f(F \cup x) > f(F^*)$, то заменить F^* на $F \cup x$.

Шаг 4. Заменить F на $F \cup x$ и перейти на шаг 2.

В случае неупорядоченных подмножеств *гридоидом* называется такая система $(E, \mathcal{F})$ достижимых множеств, что если $X, Y \in \mathcal{F}$ и $|X| > |Y|$, то существует $x \in X \setminus Y$ такой, что $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$. Справедливо

Утверждение 9. Пусть $(E, \mathcal{F})$ — система достижимых множеств; тогда для каждой линейной целевой функции $f : \mathcal{F} \rightarrow R$ модифицированный жадный алгоритм получает оптимальное решение задачи 2, если и только если $(E, \mathcal{F})$ есть такой гридоид, что если $B, (B \setminus e) \cup \{x, y\} \in \mathcal{F}$, где $e \in B$, $\{x, y\} \cap B = \emptyset$, то либо $B \cup \{y\} \in \mathcal{F}$, либо $(B \setminus e) \cup \{y\} \in \mathcal{F}$.

Используемое в приведенной формулировке понятие гридоида в случае систем неупорядоченных множеств естественным образом связано с аналогичным понятием в случае упорядоченных множеств. Достаточно заметить, что любой гридоид в неупорядоченном случае получается из некоторого гридоида в упорядоченном случае путем простого превращения упорядоченных множеств в неупорядоченные.

Некоторые дополнительные сведения по рассматриваемому в данной статье вопросу можно найти также в работах [7–10, 17, 18, 20, 21, 23].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глебов Н. И.** Об одном классе задач выпуклого целочисленного программирования // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Вып. 11. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1973. С. 38–42.
2. **Глебов Н. И.** О применимости метода покоординатного спуска к некоторым задачам выпуклого целочисленного программирования // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Вып. 17. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1978. С. 52–59.
3. **Глебов Н. И.** К описанию одного класса задач, разрешимых алгоритмом покоординатного подъема // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 3. С. 15–25.
4. **Глебов Н. И., Шенмайер В. В.** Жадный алгоритм в задаче о длиннейшем пути // Материалы Междунар. конф. «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 1997. С. 48.
5. **Глебов Н. И., Шенмайер В. В.** О применимости алгоритма покоординатного подъема к задачам целочисленного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 38–47.
6. **Колмычевская Н.** Некоторые обобщения алгоритма покоординатного спуска для матроида // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Вып. 21. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1981. С. 13–17.
7. **Овчинников В. Г.** Об одной задаче целочисленного программирования // Кибернетика. 1976. № 1. С. 131–135.
8. **Шенмайер В. В.** Максимизация линейной целевой функции с помощью жадного алгоритма // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 4. С. 104–120.
9. **Bixby R. E., Cunningham W. H.** Matroid optimization and algorithms // Handbook of combinatorics. V. 1. Amsterdam: Elsevier, 1995. P. 551–609.
10. **Björner A.** On matroids, groups, and exchange languages // Matroid Theory. Amsterdam–New York: North Holland, 1985. P. 25–60. (Colloq. Math. Soc. János Bolyai; V. 40).
11. **Boruvka O.** On a minimal problem // Práce Moravské Přírodovědecké Společnosti (Acta Societatis Scientiarum Moravicae). 1926. V. 3. P. 37–58.

12. **Edmonds J.** Submodular functions, matroids, and certain polyhedra // Combinatorial Structures and their Applications. New York: Gordon and Breach, 1970. P. 69–87.
13. **Edmonds J.** Matroids and the greedy algorithm // Math. Programming. 1971. V. 1, N 2. P. 127–136.
14. **Faigle U.** Submodular combinatorial structures // Habilitationsschrift Universität Bonn, 1985.
15. **Goecke O.** A greedy algorithm for hereditary set systems and a generalization of the Rado-Edmonds characterization of matroids // Discrete Appl. Math. 1988. V. 20, N 1. P. 39–49.
16. **Goecke O., Korte B., Lovász L.** Examples and algorithmic properties of greedoids // Combinatorial optimization. Berlin: Springer, 1989. P. 113–161. (Lecture Notes in Math.; V. 1403).
17. **Goetchel R.** Linear objective functions on certain classes of greedoids // Discrete Appl. Math. 1986. V. 14, N 1. P. 11–16.
18. **Korte B., Lovász L.** Mathematical structures underlying greedy algorithm // Fundamentals of computation theory. Berlin: Springer, 1981. P. 205–209. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 117).
19. **Korte B., Lovász L.** Greedoids — a structural framework for the greedy algorithm // Progress in combinatorial optimization (Waterloo, 1982). Toronto, Ont.: Acad. Press, 1984. P. 221–243.
20. **Korte B., Lovász L.** Greedoids and linear objective functions // SIAM J. Algebraic and Discrete Math. 1984. V. 5, N 2. P. 229–238.
21. **Korte B., Lovász L., Schrader R.** Greedoids. Algorithms and Combinatorics // Berlin: Springer-Verl., 1991.
22. **Kruskal J. B.** On the shortest spanning subtree of a graph and the travelling salesman problem // Proc. Amer. Math. Soc. 1956. V. 7, N 1. P. 48–50.
23. **Prim R. C.** Shortest connection networks and some generalizations // Bell System Techn. J. 1957. V. 36, N 6. P. 1389–1401. (Рус. пер.: Прим Р. К. Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения // Кибернетический сборник. Вып. 2. М.: Мир, 1961. С. 95–107.)
24. **Rado R.** Note on independence functions // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7, N 3. P. 300–320.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
20 июня 2001 г.

УДК 519.854

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ^{*)}

Н. И. Глебов

Для некоторого обобщения минимаксной задачи о назначениях, представляющего собой транспортную задачу с минимаксным критерием и ограниченными целочисленными переменными, предложен алгоритм, который в общем случае является псевдополиномиальным. В случае несбалансированной минимаксной задачи о назначениях алгоритм полиномиален, а при определенном соотношении параметров задачи его оценка трудоемкости линейным образом зависит от размерности задачи.

Рассматриваемая задача представляет собой обобщение известной минимаксной задачи о назначениях или, более точно, транспортную задачу с минимаксным критерием и ограниченными целочисленными переменными:

$$\max_{i,j} f_{ij}(x_{ij}) \longrightarrow \min_x \quad (1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad x_{ij} - \text{целое}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

где a_i , b_j , d_{ij} — натуральные числа и $f_{ij}(\cdot)$ — монотонно неубывающие функции.

Обычная минимаксная задача о назначениях соответствует случаю $a_i = b_j = d_{ij} = 1$, $f_{ij}(0) = 0$ и $n = m$. Ссылки на посвященные ей работы можно найти в [2, 3].

^{*)}Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-01153) и гранта ведущих научных школ РФ (проект НШ-313.2003.1).

Ниже предлагается алгоритм получения точного решения рассматриваемой задачи, который в общем случае является псевдополиномиальным. В случае $a_i = b_j = d_{ij} = 1$ и $f_{ij}(x_{ij}) = c_{ij}x_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$) алгоритм оказывается полиномиальным и имеет оценку трудоемкости $O(n^3 + nm)$, так что при $n = O(\sqrt{m})$ трудоемкость алгоритма сравнима по порядку с числом элементов матрицы (c_{ij}) размера $n \times m$.

Алгоритм решения задачи.

Для описания алгоритма нам понадобятся некоторые понятия и обозначения.

Определение 1. Матрицу $x = (x_{ij})$ будем называть *частично допустимым решением* задачи, если ее элементы удовлетворяют ограничениям (2) и (4). Если при этом они удовлетворяют также и ограничению (3), то x будет называться *допустимым решением*.

Определение 2. *Дефектом* частично допустимого решения x будем называть величину $D(x) = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n x_{ij} - b_j)^+$, где $a^+ = \max\{0, a\}$.

Очевидно, что $0 \leq D(x) \leq \sum_{i=1}^n a_i$ и частично допустимое решение x является допустимым решением задачи (1)–(4), если $D(x) = 0$.

Через F_0 обозначим $\min_x \max_{ij} f_{ij}(x_{ij})$, где минимум берется по всем допустимым решениям x . Таким образом, для оптимальности допустимого решения x необходимо и достаточно, чтобы при любых i и j выполнялось неравенство $f_{ij}(x_{ij}) \leq F_0$.

Необходимыми условиями существования допустимых решений, а следовательно, и разрешимости задачи (1)–(4), являются неравенства

$$\sum_{j=1}^m d_{ij} \geq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для существования частично допустимых решений эти условия являются не только необходимыми, но и достаточными. В связи с этим в дальнейшем они наряду с неравенством $\sum_{j=1}^m b_j \geq \sum_{i=1}^n a_i$ будут предполагаться выполненными.

Общая идея алгоритма. Начиная с некоторого частично допустимого решения x , удовлетворяющего условию

$$\max_{i,j} f_{ij}(x_{ij}) \leq F_0, \tag{5}$$

будет производиться последовательное преобразование x так, чтобы, во-первых, вновь получаемое частично допустимое решение удовлетворяло условию (5) и, во-вторых, новое частично допустимое решение имело меньший дефект. В случае разрешимости задачи это обеспечит в конечном счете получение искомого решения, т. е. допустимого решения, удовлетворяющего условию оптимальности (5).

Все действия алгоритма в промежутке между двумя последовательными преобразованиями частично допустимого решения (и от момента получения начального частично допустимого решения до первого преобразования этого решения) будем называть *этапом*. Таким образом, число этапов не превосходит $\sum_i a_i$, поскольку при каждом преобразовании решения его дефект уменьшается на единицу.

В процессе работы алгоритма имеется следующая информация:

i1) Частично допустимое решение x , удовлетворяющее условию (5).

i2) Величины $b'_j = b_j - \sum_i x_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, m$ и $D(x) = \sum_j (-b'_j)^+$.

i3) Множество (или список) R номеров свободных и/или помеченных столбцов. (j -й столбец называется *свободным*, если $b'_j > 0$. Некоторым столбцам, для которых $b'_j = 0$, могут быть приписаны метки. Такие столбцы считаются помеченными. В качестве метки столбца, обозначаемой посредством $\nu(j)$, выступает номер некоторой "обработанной" строки i , при этом $x_{ij} > 0$.)

i4) Множество Q номеров обработанных строк и список S номеров i таких необработанных строк, что $\{j \in R \mid x_{ij} < d_{ij}\} \neq \emptyset$.

i5) Номера $j(i)$, $i \in Q \cup S$, характеризующиеся следующими свойствами: $j(i) \in R$ и $f_{ij(i)}(x_{ij(i)} + 1) = \min\{f_{ij}(x_{ij} + 1) \mid j \in R, x_{ij} < d_{ij}\}$.

Замечание 1. Для каждой обработанной строки i имеем:

а) $f_{ij(i)}(x_{ij(i)} + 1) \leq F_0$ (доказательство см. ниже);

б) если $x_{ij} > 0$, то $j \in R$.

Крупноблочная схема алгоритма.

1) Начальная подготовка. (Основное назначение блока — построение начального частично допустимого решения x , удовлетворяющего условию (5)).

2) Если $D(x) = 0$, то Конец (x — оптимальное решение), иначе перейти к п. 3.

3) Подготовительная работа (очередного этапа).

4) Выделение множества строк (для предполагаемой обработки).

5) Определение возможности выполнения преобразования частично допустимого решения x . Если ответ положительный, то переход к п. 7,

в противном случае — переход к п. 6.

6) Обработка строк и переход к п. 4.

7) Преобразование x и переход к п. 2.

Поблочное описание алгоритма.

Блок 1 (*начальная подготовка*). Здесь производится построение начального частично допустимого решения x . Для этого значения элементов x_{ij} i -й строки матрицы x определяются независимо от других строк по следующему правилу: начальные значения элементов полагаются равными нулю, а затем производится последовательное увеличение на единицу одной из компонент x_{il} , удовлетворяющей условиям $x_{il} < d_{il}$ и

$$f_{il}(x_{il} + 1) = \min\{f_{ij}(x_{ij} + 1) \mid x_{ij} < d_{ij}\}.$$

Указанная процедура должна выполняться, пока имеет место неравенство $\sum_j x_{ij} < a_i$. Построенное таким способом частично допустимое решение x при каждом значении $i = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяет условию

$$\max\{f_{ij}(x_{ij}) \mid x_{ij} > 0\} \leq \min\{f_{ij}(x_{ij} + 1) \mid x_{ij} < d_{ij}\}.$$

Кроме того, как будет показано ниже, оно удовлетворяет также условию (5).

В этом же блоке производится вычисление величин b'_j и $D(x)$.

Блок 2. Действия, выполняемые в этом логическом блоке, вполне очевидны. Напомним лишь, что при равенстве дефекта нулю частично допустимое решение является допустимым, а при выполнении условия (5) оно будет и оптимальным решением задачи (1)–(4).

Блок 3 (*подготовительная работа*). В этом блоке определяются информационные объекты, перечисленные в пунктах i3)–i5). На данной стадии вычислений множество Q пусто, а множество R состоит из номеров всех свободных столбцов (обработанных строк и помеченных столбцов пока нет).

Блок 4 (*выделение множества строк*). В случае $S \neq \emptyset$ из списка S выделяется часть S^0 , состоящая из строк i таких, что

$$f_{ij(i)}(x_{ij(i)} + 1) = \min\{f_{kj}(x_{kj} + 1) \mid x_{kj} < d_{kj}, k \in S, j \in R\}.$$

В случае $S = \emptyset$ задача (1)–(4) неразрешима, так как ограничения (2)–(4) несовместны.

Блок 5. Здесь осуществляется попытка выбора такой строки $i_0 \in S^0$, что $x_{i_0j} > 0$ и $b'_j < 0$ при некотором j . Наличие такой строки позволяет

произвести нужное (т. е. уменьшающее дефект и сохраняющее условие (5)) преобразование частично допустимого решения x .

Блок 6 (обработка строк). Как следует из описания крупноблочной схемы, этот блок вступает в работу, когда $b'_j \geq 0$ при любых $i \in S^0$ и $j \in \Pi_i$, где $\Pi_i = \{j \mid x_{ij} > 0\}$.

Сначала последовательно просматриваются все строки из списка S^0 и для каждой такой строки i_0 все столбцы $j \in \Pi_{i_0}$. Если очередной просматриваемый столбец не входит в текущее множество R , то производится его пометка. (В этом и состоит обработка строки i_0). Сама процедура пометки столбца j_0 заключается в следующем:

- 1) номер j_0 вносится в R ;
- 2) метка $\nu(j_0)$ полагается равной i_0 ;
- 3) для каждого номера $i \notin Q \cup S^0$ такого, что $x_{ij_0} < d_{ij_0}$, выполняется либо а), либо в):

- а) если $i \in S$ и $f_{ij_0}(x_{ij_0} + 1) < f_{ij(i)}(x_{ij(i)} + 1)$, то положить $j(i) := j_0$;
- в) если $i \notin S$, то положить $j(i) := j_0$ и занести номер i в список S .

Далее из списка S удаляются все строки, принадлежащие списку S^0 .

Блок 7 (преобразование матрицы x). Работа блока происходит в условиях, когда предварительно (в блоке 5) уже выбраны строка $i_0 \in S^0$ и столбец j_0 такие, что $x_{i_0 j_0} > 0$ и $b'_{j_0} < 0$.

По номеру i_0 однозначно определяются последовательности $i_0, \dots, i_{k-1}$ и $j_1, \dots, j_k$ такие, что $b'_{j_k} > 0$ ($k \geq 1$), $j_s = j(i_{s-1})$, где $s = 1, 2, \dots, k$, а $i_s = \nu(j_s)$, $s = 1, 2, \dots, k-1$. Затем производится преобразование матрицы x и величин b'_j , $D(x)$:

$$\begin{aligned} x_{i_s j_s} &:= x_{i_s j_s} - 1; & x_{i_s j_{s+1}} &:= x_{i_s j_{s+1}} + 1; & s &= 0, 1, \dots, k-1, \\ b'_{j_0} &:= b'_{j_0} + 1; & b'_{j_k} &:= b'_{j_k} - 1; & D(x) &:= D(x) - 1. \end{aligned}$$

В результате получается новое частично допустимое решение с меньшим дефектом, удовлетворяющее условию (5).

Замечание 2. В описании блока 1 утверждалось, что получаемое в этом блоке частично допустимое решение x в случае разрешимости задачи удовлетворяет условию (5). В самом деле, пусть x^* — оптимальное решение задачи. Если $x_{ij} \leq x_{ij}^*$, то $f_{ij}(x_{ij}) \leq f_{ij}(x_{ij}^*) \leq F_0$. Если $x_{ij} > x_{ij}^*$, то в этом случае в силу ограничения (2) должен существовать номер l такой, что $x_{il} < x_{il}^*$. Тогда

$$\begin{aligned} f_{ij}(x_{ij}) &\leq \max\{f_{is}(x_{is}) \mid x_{is} > 0\} \leq \min\{f_{is}(x_{is} + 1) \mid x_{is} < d_{is}\} \leq \\ &\leq f_{il}(x_{il} + 1) \leq f_{il}(x_{il}^*) \leq F_0. \end{aligned}$$

Замечание 3. Преобразование частично допустимого решения x , производимое в блоке 7, затрагивает лишь некоторые элементы из x , расположенные в строках из $Q \cup S^0$. При этом среди элементов i -й строки может увеличиться на единицу лишь элемент $x_{ij(i)}$ и уменьшиться в этом случае на единицу один элемент этой строки. Учитывая также способы формирования множества Q и номеров $j(i)$, для доказательства того, что новое частично допустимое решение будет удовлетворять условию (5), для каждого $i \in S^0$ достаточно показать справедливость неравенства

$$f_{ij(i)}(x_{ij(i)} + 1) \leq F_0.$$

Далее используются обозначения $Z_k = \{1, 2, \dots, k\}$ и $\bar{Q}, \bar{R}$ — для дополнений множеств Q и R относительно множеств Z_n и Z_m соответственно.

Рассмотрим ситуацию, которая возникает сразу после срабатывания блока 4. Прежде всего заметим, что

$$\sum \{x_{ij} \mid (i, j) \in Q \times \bar{R}\} = 0, \quad \sum \{x_{ij} \mid (i, j) \in Z_n \times \bar{R}\} > \sum \{b_j \mid j \in \bar{R}\}.$$

Следовательно,

$$\sum \{x_{ij} \mid (i, j) \in Z_n \times \bar{R}\} = \sum \{x_{ij} \mid (i, j) \in \bar{Q} \times \bar{R}\} > \sum \{b_j \mid j \in \bar{R}\}.$$

Пусть x^* — оптимальное решение задачи (1)–(4). Тогда

$$\begin{aligned} \sum \{b_j \mid j \in \bar{R}\} &\geq \sum \{x_{ij}^* \mid (i, j) \in Z_n \times \bar{R}\} \geq \sum \{x_{ij}^* \mid (i, j) \in \bar{Q} \times \bar{R}\}, \\ \sum \{x_{ij} \mid (i, j) \in \bar{Q} \times \bar{R}\} &> \sum \{x_{ij}^* \mid (i, j) \in \bar{Q} \times \bar{R}\}, \\ \sum \{a_i \mid i \in \bar{Q}\} - \sum \{x_{ij} \mid (i, j) \in \bar{Q} \times R\} &> \sum \{a_i \mid i \in \bar{Q}\} - \sum \{x_{ij}^* \mid (i, j) \in \bar{Q} \times R\}, \\ \sum \{x_{ij} \mid (i, j) \in \bar{Q} \times R\} &< \sum \{x_{ij}^* \mid (i, j) \in \bar{Q} \times R\}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства непосредственно вытекает существование такой пары номеров $(i, j) \in \bar{Q} \times R$, что $x_{ij} + 1 \leq x_{ij}^*$. (Отсюда, в частности, следует, что $S \neq \emptyset$, так что в случае $S = \emptyset$ задача не имеет оптимального решения, т. е. неразрешима).

Пусть $x_{pq} + 1 \leq x_{pq}^*$, $(p, q) \in \bar{Q} \times R$. Тогда для $i \in S^0$ имеем

$$f_{ij(i)}(x_{ij(i)} + 1) = \min \{f_{kj}(x_{kj} + 1) \mid x_{kj} < d_{kj}, (k, j) \in \bar{Q} \times R\} \leq$$

$$\leq f_{pq}(x_{pq} + 1) \leq f_{pq}(x_{pq}^*) \leq F_0.$$

Замечание 4. Основным назначением блока 3 является приведение в надлежащий исходный вид информации, перечисленной в пунктах i3)–i5). Если в начале работы алгоритма естественным было считать множества обработанных строк и помеченных столбцов пустыми, то на последующих этапах столь же естественным (и целесообразным с точки зрения сокращения вычислений) было бы учитывать при формировании R и Q имеющуюся на текущий момент информацию и сохранить некоторые строки (столбцы) как обработанные (помеченные). С этой целью проведем необходимый анализ используемой информационной структуры.

Рассмотрим ориентированный граф $G = (V, E)$ с множеством вершин

$$V = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

и множеством дуг

$$E = \{((i, j), (i, j')) \mid x_{ij} > 0 \text{ и } j' = j(i) \neq j\} \\ \cup \{((i, j), (i', j)) \mid j = j(i) \text{ и } i' = \nu(j)\}.$$

Каждая компонента связности этого графа, отличная от одновершинной, представляет собой ориентированное (от листьев к корню) дерево. Любой максимальный путь в таком дереве имеет вид:

$$(i_0, j_0) \rightarrow (i_0, j_1) \rightarrow (i_1, j_1) \rightarrow (i_1, j_2) \rightarrow \dots \rightarrow (i_{k-1}, j_{k-1}) \rightarrow (i_{k-1}, j_k),$$

возможно, без вершины (i_0, j_0) . При этом все строки с номерами $i_1, \dots, i_{k-1}$ являются обработанными, все столбцы с номерами $j_1, \dots, j_{k-1}$ — помеченными и $b'_{j_k} > 0$. Если к тому же оказывается, что $i_0 \in S^0$ и $b'_{j_0} < 0$, то указанный путь может быть использован для преобразования матрицы x .

После выполнения преобразования матрицы x некоторые из этих путей могут перестать удовлетворять необходимым условиям. Но так будет обстоять дело, вообще говоря, не со всеми максимальными путями и это можно попытаться использовать для экономии вычислений, производя соответствующим образом корректировку множеств Q и R .

Пусть (i_{k-1}, j_k) — последняя вершина пути, использованного при выполнении преобразования x , а $T(i_{k-1}, j_k)$ — дерево с корнем (i_{k-1}, j_k) , являющееся компонентой связности графа G . Будем говорить, что дерево T *накрывает* строку i (соответственно столбец j), если в нем имеется вершина вида (i, j') (соответственно (i', j)).

В том случае, когда $b'_{j_k} > 0$ (после преобразования x), из множеств R и Q удаляются все помеченные столбцы и обработанные строки, накрытые деревом $T(i_{k-1}, j_k)$. В случае $b'_{j_k} = 0$ при корректировке Q и R необходимо переводить в разряд необработанных (непомеченных) все строки (столбцы), накрытые не только деревом $T(i_{k-1}, j_k)$, но и всеми другими деревьями с корневыми вершинами, расположенными в столбце j_k . Кроме того, из R следует удалить столбец j_k , поскольку он перестает быть свободным.

Выполненная указанным способом корректировка множества R может привести к нарушению условия " $\Pi_i \subset R$ " для обработанных строк. Поэтому заново производится пометка всех удаленных из R столбцов j таких, что $x_{ij} > 0$ и $i \in Q$.

После того, как уточнены множества R и Q , определяются номера $j(i)$ для всех строк i , попавших в список S .

Замечание 5. В общем случае предложенный алгоритм псевдополиномиален (при полиномиальной вычислимости функций f_{ij} .) В случае $a_i = 1$ и $f_{ij}(x_{ij}) = c_{ij}x_{ij}$ алгоритм является полиномиальным и имеет оценку трудоемкости $O(n^3 + nm)$, которая может быть обоснована тем же способом, что и аналогичная оценка из [1]. Таким образом, при $n = O(\sqrt{m})$ трудоемкость алгоритма сравнима по порядку с числом элементов матрицы (c_{ij}) размера $n \times m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Диниц Е. А. О решении двух задач о назначении // Исследования по дискретной оптимизации. М.: Наука, 1976. С. 333–348.
2. Burkard R. E. Selected topics on assignment problems // Discrete Appl. Math. 2002. V. 123, N 1–3. P. 257–302.
3. Pferschy U. Solution methods and computational investigations for the linear bottleneck assignment problem // Computing. 1997. V. 59, N 3. P. 237–258.

Адрес автора:
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.

Статья поступила
15 июня 2004 г.

УДК 519.854

ЗАДАЧА ОТЫСКАНИЯ ПОДМНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ С МАКСИМАЛЬНЫМ СУММАРНЫМ ВЕСОМ^{*)}

А. Е. Бабурин, Э. Х. Гимади, Н. И. Глебов, А. В. Пяткин

Доказана NP-трудность дискретных оптимизационных задач, связанных с выбором из конечного семейства векторов в евклидовом пространстве подмножества векторов с максимальной нормой суммы. Предложены приближённые алгоритмы и получены оценки для относительной погрешности и временной сложности. В случае фиксированной размерности пространства построена полиномиальная аппроксимационная схема. Выделен подкласс задач, для которых за псевдополиномиальное время отыскивается точное решение. Полученные результаты могут быть использованы для решения задачи выбора фиксированного числа фрагментов в числовой последовательности квазипериодически повторяющегося фрагмента при заданном числе повторов.

Введение

В статье приводится обоснование NP-трудности и построение приближённых алгоритмов решения дискретных оптимизационных задач, связанных с выбором из конечного семейства векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ подмножества векторов с максимальной нормой суммы. Под нормой понимается евклидова норма, т. е. $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}$. В качестве основных задач в настоящей статье рассматриваются следующие две.

Задача 1. *Задано конечное семейство векторов $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ и натуральное число $m < n$. Требуется из V выбрать m векторов, норма суммы которых максимальна.*

Вторая основная задача связана с целесообразным поиском сигналов в зашумлённой аддитивным шумом последовательности импульсов. Согласно [2, 4] эта задача поиска сводится к следующей.

^{*)}Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05-01-00395 и 07-07-00022) и INTAS (проект 04-77-7173).

Задача 2. Задано конечное семейство векторов $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ и натуральные числа m и l , удовлетворяющие условию $l(m-1) < n$. Требуется выделить в V подсемейство векторов $X = \{v_{a_1}, v_{a_2}, \dots, v_{a_m}\}$, обладающее максимальной нормой суммы при условии $a_{i+1} - a_i \geq l$, $i = 1, 2, \dots, m-1$.

Для решения указанных задач предложены приближённые алгоритмы и оценены относительная погрешность и временная сложность. В случае фиксированной размерности пространства построена полиномиальная аппроксимационная схема. Выделен подкласс задач, для которых точное решение отыскивается за псевдополиномиальное время.

Полученные результаты могут быть использованы для решения задачи выбора фиксированного числа фрагментов в числовой последовательности квазипериодически повторяющегося фрагмента при заданном числе повторов. Как указывается в [2, 4], эта задача типична для таких приложений как электронная разведка, радиолокация, телекоммуникация, геофизика, обработка речевых сигналов, медицинская и техническая диагностика и др.

Для доказательства NP-трудности основных задач рассматриваются также некоторые вспомогательные задачи.

В первом разделе статьи доказывается, что NP-полна следующая

Задача П'. Дано N' булевых k -мерных векторов $u^1, u^2, \dots, u^{N'}$ и натуральные константы $K' > 0, m < N'$. Можно ли среди этих векторов выбрать такие m векторов, что квадрат евклидовой нормы их суммы не меньше K' ?

При доказательстве этого факта используется сводимость к этой задаче известной NP-полной задачи КЛИКА [3].

NP-трудность задачи 1 следует из NP-полноты задачи П' и сводимости последней к задаче 1.

Во втором разделе доказывается NP-полнота следующей вспомогательной задачи.

Задача П. Даны слово длины $N > qM$ над алфавитом $\{0, 1\}$ и натуральная константа $K > 0$. Можно ли в этом слове выбрать M таких непесекающихся отрезков длины q , что квадрат евклидовой нормы суммы выбранных q -мерных векторов не меньше K ?

Для этого доказывается сводимость к ней задачи П'. А из NP-полноты вспомогательной задачи П и её сводимости к задаче 2 вытекает NP-трудность задачи 2.

В разделе 3 приводится алгоритм приближённого решения задачи 1. При фиксированной размерности пространства построена полиномиаль-

ная аппроксимационная схема. Кроме того, обосновываются условия, при которых точное решение задачи 1 отыскивается за псевдополиномиальное время.

В разделе 4 описывается алгоритм приближённого решения задачи 2, временная сложность которого несущественно увеличивается по сравнению с алгоритмом решения задачи 1 при той же точности.

1. NP-полнота задачи Π' и её сводимость к задаче 1

Для доказательства NP-полноты вспомогательной задачи Π' воспользуемся известной [3] NP-полной задачей КЛИКА. Дан n -вершинный граф G и натуральное число r . Есть ли в графе G r взаимно смежных вершин?

Нам потребуется следующее очевидное

Утверждение. Если $a \leq b$, то $(a - 1)^2 + (b + 1)^2 > a^2 + b^2$.

Теорема 1. Задача Π' является NP-полной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сведём задачу КЛИКА к задаче Π' . Выберем числа p и s такими, чтобы выполнялись неравенства

$$(s + r - 1)^2 > (s + r - 2)^2 + (n - r)r^2; \quad p > n(s + n - 1)^2 + 1.$$

Положим $N' = sn$, $k = pn$, $m = sr$ и $K' = r(s + r - 1)^2 + (p - 1)rs^2$.

Каждой вершине v_i в графе G поставим в соответствие s векторов $u^{(i-1)s+1}, u^{(i-1)s+2}, \dots, u^{is}$ размерности k . Положим $u_{(i-1)p+l}^{(i-1)s+t} = 1$ для всех $t = 1, 2, \dots, s$ и $l = 1, 2, \dots, p$. Кроме того, для каждой пары смежных вершин v_i и v_j будем полагать, что $u_{(j-1)p+1}^{(i-1)s+1} = u_{(i-1)p+1}^{(j-1)s+1} = 1$. Остальные координаты всех векторов положим равными 0.

Назовем j -ю координату вектора *значимой*, если $j \equiv 1 \pmod{p}$, и *незначимой* в противном случае.

Покажем, что клика размера r в графе G существует тогда и только тогда, когда среди данных N' векторов можно выбрать m таких векторов $a_1, a_2, \dots, a_m$, что $\|a_1 + a_2 + \dots + a_m\|^2 \geq K'$.

Если в графе G есть клика размера r , то в качестве $a_1, a_2, \dots, a_m$ выберем векторы, соответствующие вершинам этой клики. Тогда в векторе $a = a_1 + a_2 + \dots + a_m$ окажется $(p - 1)r$ незначимых координат, равных s , и r значимых координат, равных $(s + r - 1)$. Следовательно, $\|a\|^2 \geq K'$.

Для доказательства обратного утверждения придётся оценить квадрат нормы суммы произвольных m векторов $a_1, a_2, \dots, a_m$ из рассматриваемого семейства. Среди выбранных m векторов обозначим через x_i число векторов, соответствующих вершине v_i . Тогда вектор $a = a_1 +$

$a_2 + \dots + a_m$ имеет по $p - 1$ незначимых координат, равных x_i для каждого $i = 1, 2, \dots, n$, и n значимых координат, каждая из которых не превосходит $s + n - 1$. Ясно, что $0 \leq x_i \leq s$ и $x_1 + x_2 + \dots + x_n = sr$. Можно считать, что $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. Из утверждения следует, что $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq rs^2$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_r = s$, а $x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = x_n = 0$.

Допустим, что $x_r < s$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \|a\|^2 &\leq (p-1) \sum_{j=1}^n x_j^2 + n(s+n-1)^2 \\ &\leq (p-1)rs^2 - (p-1) + n(s+n-1)^2 < (p-1)rs^2 < K'. \end{aligned}$$

Теперь предположим, что $x_1 = x_2 = \dots = x_r = s$ и $x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = x_n = 0$. Тогда ровно $(p-1)r$ незначимых координат вектора a равны s , а остальные незначимые координаты равны 0. Кроме того, среди значимых координат лишь $a_1, a_{p+1}, \dots, a_{(r-1)p+1}$ могут быть больше r . Если вершины $v_1, v_2, \dots, v_r$ не образуют клику, то не более $r-1$ из этих координат могут быть равны $s+r-1$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \|a\|^2 &\leq (p-1)rs^2 + (r-1)(s+r-1)^2 + (s+r-2)^2 + (n-r)r^2 \\ &< (p-1)rs^2 + r(s+r-1)^2 = K'. \end{aligned}$$

Значит, $\|a\|^2 \geq K'$ тогда и только тогда, когда вершины $v_1, v_2, \dots, v_r$ образуют клику. Теорема 1 доказана.

Таким образом, вспомогательная задача Π' является NP-полной.

Из NP-полноты задачи Π' и её сводимости к задаче 1 следует

Теорема 2. Задача 1 является NP-трудной.

2. NP-полнота задачи Π и её сводимость к задаче 2

Теорема 3. Задача Π является NP-полной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сведём задачу Π' к задаче Π . По данному входу задачи Π' строим вход задачи Π следующим образом. Положим $q = 2k + 4$. Каждому вектору u^i задачи Π' ставим в соответствие подслово A^i длины q следующего вида. Положим $A_1^i = A_2^i = \dots = A_{k+2}^i = 0$, $A_{k+3}^i = A_q^i = 1$ и $A_{k+3+j}^i = u_j^i$ при $j = 1, 2, \dots, k$. Эти подслова назовём *основными*. Пусть $B_1 = B_{k+3} = B_q = 1$ и $B_j = 0$ при $j \in \{2, 3, \dots, k+2, k+4, k+5, \dots, q-1\}$. Выберем число $p > (N'(k+2))^2$ и возьмём p копий подслова B (эти подслова назовём *вспомогательными*). Полученные $p + N'$ подслов запишем в произвольном порядке, отделяя

соседние подслова друг от друга группами из q нулей. Получим слово длины $N = q(2N' + 2p - 1)$. Пусть $M = p + m$ и $K = 2(p + m)^2 + p^2 + K'$.

Будем говорить, что отрезок b_j в решении задачи П *порождён* данным подсловом (B или A^i), если b_j с ним пересекается, и *правильно порождён* данным подсловом, если он с ним совпадает (т. е. $b_j = B$ или $b_j = A^i$). Ясно, что каждый отрезок порождён ровно одним словом и никакое решение задачи П не может содержать более двух отрезков, порождённых одним подсловом. Для удобства будем отождествлять понятия «отрезок b_j длины q » и « q -мерный вектор b_j ».

Покажем, что в задаче П можно выбрать M непересекающихся отрезков $b_1, b_2, \dots, b_M$ таких, что $\|b_1 + b_2 + \dots + b_M\|^2 \geq K$ тогда и только тогда, когда в задаче П' можно выбрать m векторов, квадрат евклидовой нормы суммы которых не меньше K' .

Пусть $u^{i_1}, u^{i_2}, \dots, u^{i_m}$ — решение задачи П', причём $\|u^{i_1} + u^{i_2} + \dots + u^{i_m}\|^2 \geq K'$, $b_j = A^{i_j}$ при $j = 1, 2, \dots, m$ и $b_j = B$ при $j = m + 1, m + 2, \dots, m + p$. Нетрудно убедиться, что

$$\|b_1 + b_2 + \dots + b_M\|^2 = 2(p + m)^2 + p^2 + \|u^{i_1} + u^{i_2} + \dots + u^{i_m}\|^2 \geq K.$$

Теперь докажем обратное утверждение. Для этого рассмотрим некоторое оптимальное решение задачи П. Обозначим через $X = (x_1, x_2, \dots, x_q)$ сумму векторов b_j , соответствующих выбранным отрезкам. По предположению имеем $\|X\|^2 \geq K \geq 2(p + m)^2 + p^2$.

Назовём j -ю координату вектора X *большой*, если $x_j \geq p$. Сначала покажем, что X содержит ровно три больших координаты.

Действительно, общее число единиц в слове не превосходит $3p + N'(q + 2) < 3p + \sqrt{p}$ при выбранном p . Следовательно, X содержит не более трёх больших координат. Предположим, что число таких координат меньше трёх. Пусть вектор Y получается из X переобозначением координат в порядке невозрастания, т. е. $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_q$. Тогда справедливы

$$\text{неравенства } y_2 \leq y_1 \leq p + m, \quad y_3 \leq p - 1, \quad \sum_{i=1}^q y_i < 3p + \sqrt{p}. \text{ Чему}$$

может быть равен максимальный квадрат евклидовой нормы вектора с такими условиями? Из утверждения следует, что максимум достигается для вектора с координатами $y_2 = y_1 = p + m, y_3 = p - 1, y_4 = y < \sqrt{p}$ и $y_j = 0$ при $j = 5, 6, \dots, q$. Но квадрат нормы такого вектора не превосходит

$$2(p + m)^2 + (p - 1)^2 + p = 2(p + m)^2 + p^2 - p + 1 < 2(p + m)^2 + p^2,$$

т. е. имеем противоречие.

Итак, X содержит ровно три большие координаты. Заметим также, что отрезок, порождённый вспомогательным подсловом B , имеет три ненулевые координаты тогда и только тогда, когда он порождён правильно.

Если каждый отрезок, порождённый вспомогательным подсловом, имеет не более двух единиц в больших координатах, то в этом случае может быть не более N' отрезков, имеющих три единицы в больших координатах. Тогда

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 2(p + m - N') + 3N' = 2p + N' + 2m < 3p + 2m.$$

Если же найдётся отрезок, порождённый вспомогательным подсловом, в котором имеются три единицы в больших координатах, то он правильно порождён, и номерами больших координат являются $1, k + 3, q$. Учитывая также то, что число отрезков, правильно порождённых вспомогательными словами, не превосходит p , имеем $y_1 + y_2 + y_3 \leq 3p + 2m$, так как в каждом отрезке, порождённом основными подсловами, содержится не более двух единиц в координатах $1, k + 3, q$. При этом две единицы в указанных координатах будут лишь в случае, когда отрезок порождён правильно (и единицы содержатся в координатах $k + 3$ и q).

Следовательно, в любом случае $y_1 + y_2 + y_3 \leq 3p + 2m$ и равенство достигается в том и только том случае, когда решение содержит p отрезков, правильно порождённых вспомогательными подсловами, и m отрезков, правильно порождённых основными подсловами.

Если $y_1 + y_2 + y_3 \leq 3p + 2m - 1$, то из утверждения следует, что при имеющихся условиях максимум квадрата нормы достигается при $y_1 = p + m, y_2 = p + m - 1$ и $y_3 = p$. При этом сумма квадратов остальных координат не превосходит p . Тогда

$$\begin{aligned} \|X\|^2 &\leq (p + m)^2 + (p + m - 1)^2 + p^2 + p = 2(p + m)^2 + p^2 - p - 2m + 1 \\ &< 2(p + m)^2 + p^2 \end{aligned}$$

— противоречие.

Таким образом, $y_1 + y_2 + y_3 = 3p + 2m$ и вектор X порождён некоторыми отрезками $b_j = A^{i_j}$ при $j = 1, 2, \dots, m$ и $b_j = B$ при $j = m + 1, m + 2, \dots, m + p$. Тогда из неравенства

$$2(p + m)^2 + p^2 + K' = K \leq \|X\|^2 = 2(p + m)^2 + p^2 + \|u^{i_1} + u^{i_2} + \dots + u^{i_m}\|^2$$

следует, что $\|u^{i_1} + u^{i_2} + \dots + u^{i_m}\|^2 \geq K'$. Теорема 3 доказана.

Заметим, что задача П сводится к задаче 2. Достаточно положить $l = k = q$, $m = M$ и $n = N - q + 1$, а в качестве векторов v_i рассмотреть векторы, порождённые отрезками $[i, i + q - 1]$, $1 \leq i \leq N - q + 1$, данного слова. Тогда условия $a_{i+1} - a_i \geq l$, $1 \leq i < m$, гарантируют, что отрезки данного слова в задаче П, соответствующие выбранным векторам v_i , не пересекаются.

Из NP-полноты вспомогательной задачи П и её сводимости к задаче 2 следует

Теорема 4. *Задача 2 является NP-трудной.*

3. Алгоритм A_1 приближённого решения задачи 1

Для произвольного конечного множества векторов X определим функцию

$$S(X) = \sum_{v \in X} v.$$

Следующий алгоритм A_1 находит приближённое решение задачи 1 в пространстве $\mathbb{R}^k$.

Описание алгоритма

На входе алгоритма A_1 задаётся множество векторов $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ из пространства $\mathbb{R}^k$ и натуральный параметр L . Алгоритм A_1 строит семейство решений. Далее из этих решений выбирается наилучшее. Перейдём к формальному описанию алгоритма A_1 .

Положим $W(L) = \{x \in \mathbb{Z}^k \mid \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_k|\} = L\}$ (через $\mathbb{Z}$ обозначено множество целых чисел). Пусть множество $W(L)$ упорядочено, например, лексикографически. Обозначим i -й вектор в этом порядке через $W_i(L)$.

Шаг 1. Полагается $i = 1$.

Шаг 2. Выбирается решение — подмножество входных векторов $X^i = \{x_1^i, x_2^i, \dots, x_m^i\}$, обладающих максимальными значениями скалярного произведения $(x_j^i, W_i(L))$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Шаг 3. Если $i < |W(L)|$, то полагается $i = i + 1$ и выполняется шаг 2. Иначе выполняется шаг 4.

Шаг 4. Из полученных на шаге 2 решений выбирается такое X , что

$$\|S(X)\| = \max_{i=1, \dots, |W(L)|} \|S(X^i)\|.$$

Множество векторов X является результатом работы алгоритма A_1 . Описание алгоритма A_1 закончено.

Теорема 5. *Алгоритм A_1 имеет временную сложность $O(nk^2(2L +$*

$1)^{k-1})$ и находит решение задачи 1 с гарантированной относительной погрешностью, не превышающей $\frac{1}{8}(k-1)/L^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определяющий временную сложность алгоритма шаг 2 выполняется $|W(L)|$ раз, а $|W(L)| \leq 2k(2L+1)^{k-1}$. Эта оценка следует из неравенства $|W(L)| \leq \sum_{l=1}^k |W(L;l)|$, где $W(L;l) = \{x \in \mathbb{Z}^k \mid |x_l| = L; |x_r| \leq L \text{ при всех } r \neq l, 1 \leq r \leq k\}$.

Сложность выполнения скалярных произведений n входных векторов на вектор $W_i(L)$ равна $O(nk)$. Выбор m максимальных значений из n скаляров можно произвести за линейное по n время. Следовательно, шаг 2 алгоритма выполняется за $O(nk)$ операций и временная сложность всего алгоритма не превосходит $O(nk^2(2L+1)^{k-1})$.

Обозначим через X^* оптимальное решение задачи. Пусть $W_i(L)$ — вектор, максимально близкий по углу к вектору $S(X^*)$ среди $W(L)$, а φ — угол между $S(X^*)$ и $W_i(L)$. Пусть $s = \frac{S(X^*)L}{\max\{|S_1(X^*)|, |S_2(X^*)|, \dots, |S_k(X^*)|\}}$.

Рассмотрим вектор $w = (\lfloor s_1 \rfloor, \lfloor s_2 \rfloor, \dots, \lfloor s_k \rfloor)$, где через $\lfloor x \rfloor$ обозначается ближайшее к x целое число. Очевидно, что $w \in W(L)$.

Обозначим через φ угол между $W_i(L)$ и $S(X^*)$, а через ψ угол между w и $S(X^*)$ (между w и s). Ясно, что $\varphi \leq \psi$.

Применяя теорему косинусов к треугольнику, образованному векторами w и s , получаем

$$\begin{aligned} \cos \psi &= -\frac{|w-s|^2 - |s|^2 - |w|^2}{2|s||w|} = 1 - \frac{|w-s|^2 - (|s| - |w|)^2}{2|s||w|} \\ &\geq 1 - \frac{k-1}{8(\min\{|w|, |s|\})^2} \geq 1 - \frac{k-1}{8L^2}, \end{aligned}$$

поскольку каждая координата вектора $w-s$ по абсолютной величине не превосходит $1/2$, и хотя бы одна из них равна 0.

Далее для найденного приближённого решения X имеем

$$\begin{aligned} \|S(X)\| &\geq \|S(X^i)\| \geq \frac{(S(X^i), W_i(L))}{\|W_i(L)\|} = \frac{\sum_{j=1}^m (X_j^i, W_i(L))}{\|W_i(L)\|} \\ &\geq \frac{\sum_{j=1}^m (X_j^*, W_i(L))}{\|W_i(L)\|} = \|S(X^*)\| \cos \varphi. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка относительной погрешности алгоритма A_1 :

$$\frac{\|S(X^*)\| - \|S(X)\|}{\|S(X^*)\|} \leq 1 - \cos \varphi \leq 1 - \cos \psi \leq \frac{k-1}{8L^2}.$$

Теорема 5 доказана.

Из теоремы 5 непосредственно вытекает справедливость следующего утверждения об условиях полиномиальности и асимптотической точности предложенного алгоритма.

Теорема 6. При фиксированной размерности k пространства $\mathbb{R}^k$ алгоритм A_1 решения задачи 1 является асимптотически точным при таком выборе параметра L , что $L(n)$ является произвольной неограниченно растущей функцией от n .

Тем самым для случая фиксированной размерности k пространства $\mathbb{R}^k$ установлено построение полиномиальной аппроксимационной схемы. Действительно, пусть относительная погрешность равна $\varepsilon = \frac{k-1}{8L^2}$. Тогда $L = \sqrt{\frac{k-1}{8\varepsilon}}$ и для временной сложности алгоритма A_1 получим величину

$$O\left(k(kn + m \log n) \left(\sqrt{\frac{k-1}{2\varepsilon}} + 1\right)^{k-1}\right).$$

Теорема 7. Если размерность k пространства $\mathbb{R}^k$ фиксирована, то алгоритм A_1 с параметром $L = 0,5kmb$, где

$$b = \max_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,k} |v_{ij}|,$$

является псевдополиномиальным точным алгоритмом решения задачи 1 с целочисленными координатами входных векторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В введённых обозначениях для точного решения задачи X^* имеем $\|S(X^*)\|^2 \leq km^2b^2$. Для приближённого решения X получается

$$\begin{aligned} \frac{\|S(X)\|^2}{\|S(X^*)\|^2} &\geq (1 - \varepsilon)^2 = \left(1 - \frac{k-1}{8L^2}\right)^2 > 1 - \frac{k-1}{4L^2} > 1 - \frac{k-1}{(kmb)^2} \\ &> 1 - \frac{1}{km^2b^2} \geq 1 - \frac{1}{\|S(X^*)\|^2}, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\|S(X)\|^2 > \|S(X^*)\|^2 - 1$.

Учитывая целочисленность $\|S(X)\|^2$ и $\|S(X^*)\|^2$ при целочисленности координат входных векторов, заключаем, что

$$\|S(X)\| = \|S(X^*)\|.$$

Тем самым при описанных в условии теоремы допущениях алгоритм A_1 находит точное решение задачи. При этом алгоритм использует $O(nk^2(mb^k)^{k-1})$ операций, а множитель b^{k-1} определяет псевдополиномиальность предложенного алгоритма. Теорема 7 доказана.

4. Алгоритм A_2 приближённого решения задачи 2

Алгоритм A_2 находит приближённое решение задачи 2 в пространстве $\mathbb{R}^k$. Приведём описание только второго шага этого алгоритма, поскольку именно этим шагом отличаются оба алгоритма.

Шаг 2. Обозначим скалярное произведение векторов v_j и $W_i(L)$ через w_j , т. е. $w_j = (v_j, W_i(L))$, $j = 1, \dots, n$. Рассматривается ориентированный граф $G_i(V, E)$ со взвешенными вершинами. Вес вершины v_j определяется как w_j для всех $j = 1, 2, \dots, n$. Положим $E = \{(v_i, v_j) | j - i \geq l\}$. Методом динамического программирования в графе G_i находится цепь длины $m - 1$ с максимальным суммарным весом входящих в неё вершин. Множество вершин этой цепи обозначается через X^i .

Теорема 8. Алгоритм A_2 за время $O\left(nk(k+m)(2L+1)^{k-1}\right)$ находит решение задачи 2 с относительной погрешностью, не превышающей величины $\frac{1}{8}(k-1)/L^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство погрешности алгоритма A_2 аналогично доказательству в теореме 5. Множество вершин цепи, найденной на шаге 2 алгоритма, образует оптимальное решение задачи выбора m скаляров максимального веса при ограничениях, заданных в условии задачи 2. Шаг 2, определяющий временную сложность алгоритма, выполняется $|W(L)|$ раз, причём $|W(L)| \leq k(2L+1)^{k-1}$. Сложность расчёта скалярных произведений n входных векторов на вектор $W_i(L)$ не превосходит $O(nk)$. Построение цепи на шаге 2 выполняется за $O(nm)$ операций. Поэтому временная сложность шага 2 алгоритма не превосходит $O(nk+nm)$, а всего алгоритма — $O\left(nk(k+m)(2L+1)^{k-1}\right)$. Теорема 8 доказана.

Остаётся открытым вопрос о сложностном статусе задач 1 и 2 при фиксированной размерности k пространства $\mathbb{R}^k$.

Выражаем признательность А. А. Кельманову, привлекая к нашему вниманию к рассмотрению данного класса задач дискретной оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979.
2. Гимади Э. Х., Кельманов А. В., Кельманова М. А., Хамидуллин С. А. Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодически повторяющегося фрагмента при заданном числе повторов // Сиб. журн. индустриальной математики. 2006. Т. IX, № 1(25). С. 55–74.
3. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
4. Кельманов А. В., Хамидуллин С. А., Окольников Л. В. Апостериорное обнаружение одинаковых подпоследовательностей-фрагментов в квазипериодической последовательности // Сиб. журн. индустриальной математики. 2002. Т. 5, № 2(10). С. 94–108.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия.
E-mail: gimadi@math.nsc.ru

Статья поступила

7 декабря 2006 г.

Переработанный вариант —

16 мая 2007 г.

Воспоминания о Н. И. Глебова



*О моем старшем наставнике и товарище
Николае Ивановиче Глебове*

Эдуард Хайрутдинович Гимади

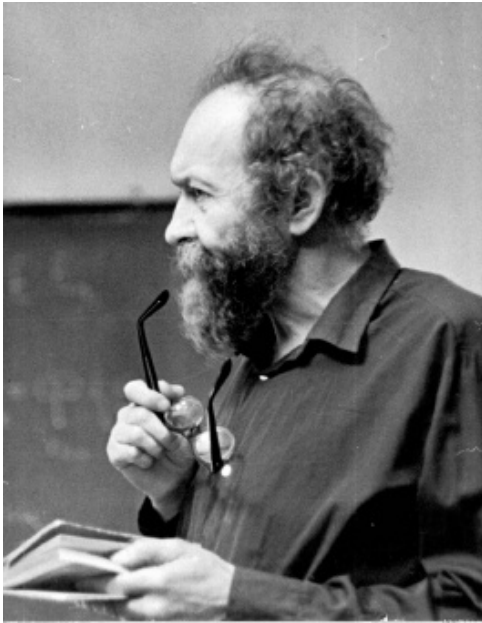


Волею судеб я и Николай Иванович закончили один и тот же физико-математический факультет Казанского госуниверситета, только он двумя годами раньше. А после окончания университета наши дальнейшие судьбы оказались тесно связанными с жизнью в Новосибирском академгородке и работой в одном и том же Отделе кибернетики, состоявшем из нескольких лабораторий Института математики Сибирского отделения Академии наук.

Отцами-основателями Отдела кибернетики были Алексей Андреевич Ляпунов³¹ и Юрий Иванович Журавлев³². Кстати, и у Юрия Ивановича, и у Николая Ивановича научным руководителем аспирантуры был именно А. А. Ляпунов. Юрию Ивановичу мы обязаны тем, что на все последующее время превалирующим в нашем отделе стало направление 010109 — дискретная математика и математическая кибернетика. А лично мою судьбу предопределила случайная встреча с Юрием Ивановичем в вагоне поезда

³¹А. А. Ляпунов (1911–1973) — член-корреспондент АН СССР (с 1964), один из основоположников школы теоретической кибернетики в СССР, с 1961 г. жил и работал в Новосибирском академгородке.

³²Ю. И. Журавлев — д-р физ.-мат. наук (1965), член-корреспондент АН СССР (1984), академик РАН (1992).



Алексей Андреевич Ляпунов (1911–1973)



Юрий Иванович Журавлев (род. 1935)

Новосибирск–Москва (в 1963 г.), когда он пригласил меня на работу в свой отдел в Институте математики. Наша совместная с Николаем Ивановичем работа в Отделе кибернетики тесно связана также с именем Владимира Тихоновича Дементьева³³.

Большую часть нашей трудовой жизни мы проработали в одной и той же лаборатории Дискретных экстремальных задач, заведующим которой Николай Иванович был с 1975 г. до конца своей жизни.

Несмотря на небольшую возрастную разницу, я с самого начала относился к Николаю Ивановичу как к мудрому старшему наставнику, внимательно прислушивался к его советам, замечаниям и рекомендациям, которые, как правило, оказывались существенными, уместными и продуктивными.

Между собой мы называли друг друга по именам, дружили семьями. Николай Иванович часто привлекал меня к вопросам, которые он должен был решать как заведующий лабораторией.

На становление меня как ученого он оказал самое непосредственное влияние. Тема моей кандидатской диссертации была посвящена построению алгоритмов решения задач, связанных с обоснованием параметрических рядов технических изделий специального назначения. В 1965 г. в статье “О выпуклых последовательностях” Николаем Ивановичем было сформулиро-

³³В. Т. Дементьев (1935–2011) — д-р физ.-мат. наук (1975), зав. Отделом кибернетики ИМ (с 1974 г.), зав. кафедрой теоретической кибернетики ММФ НГУ (1984–2010).



Владимир Тихонович Дементьев (1935–2011)

вано красивое свойство, известное сейчас под именем “Условия Глебова”:

$$f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) \geq f(x_1, y_2) + f(y_1, x_2), \quad (x_1 \leq y_1 \leq y_2 \leq x_2).$$

Наглядно это условие изображено на обложке нашего совместного учебного пособия³⁴.

Николай Иванович предложил мне исследовать возможности использования этого условия для разработки алгоритмов с улучшенными оценками качества решения специальных задач размещения и стандартизации. И, действительно, время работы алгоритма отыскания оптимального параметрического ряда удалось сократить в $n/\log n$ раз при требуемой памяти в m раз меньше, где n — число возможных элементов ряда, m — число выбираемых элементов ряда³⁵.

В 1969–1974 гг. мне с В. А. Перепелицей³⁶ для решения задачи коммивояжера на полном взвешенном случайном графе удалось обосновать достаточ-

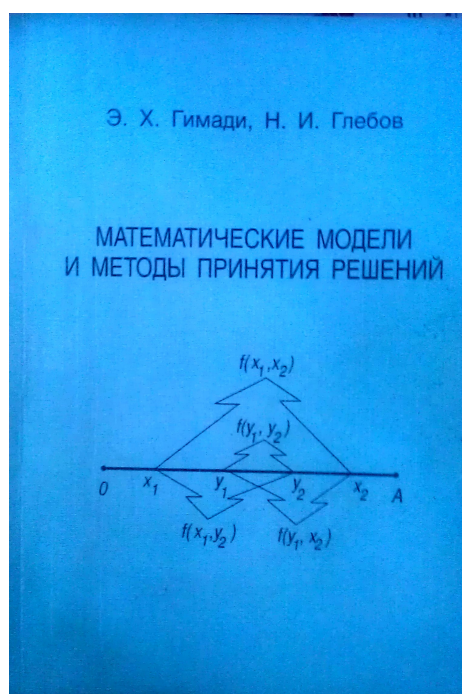
³⁴Гимади Э. Х., Глебов Н. И. Математические модели и методы принятия решений: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2008. 163 с.

³⁵Гимади Э. Х. Выбор оптимальных шкал в одном классе задач типа размещения, унификации и стандартизации. Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск, 1970. Вып. 6. С. 57–70.

³⁶В. А. Перепелица — до 1974 г. старший научный сотрудник лаборатории Дискретных экстремальных задач, ныне д-р физ.-мат. наук, профессор Запорожского ун-та.



Виталий Афанасьевич Перепелица (род. 1937)



Обложка учебного пособия “Математические модели и методы принятия решений”

но элегантные (по словам рецензента В. В. Глаголева³⁷) условия асимптотической точности малотрудоемкого приближенного алгоритма, действующего согласно жадной эвристике “Иди в ближайший непройденный город”³⁸.



Сергей Всеволодович Яблонский (1924–1998)

Яблонскому⁴⁰, считавшемся в то время своего рода ханом Золотой орды, к которому обязаны являться русские князья, чтобы получить добро на княжение. В результате нашей с Николаем Ивановичем поездки такое добро

Николай Иванович горячо поддержал идеи построения эффективных приближенных алгоритмов решения трудных задач дискретной оптимизации, что в результате вылилось в целостную концепцию построения приближенных алгоритмов с гарантированными оценками точности³⁹. В дальнейшем этот подход стал одним из краеугольных камней в основании тематики исследований нашей лаборатории Дискретных экстремальных задач.

Я до сих пор благодарен Николаю Ивановичу, который в определенный момент (1987 г.) дал мне добро на выход к защите докторской диссертации. Более того, он организовал нашу совместную поездку к Сергею Всеволодовичу

³⁷Валерий Владимирович Глаголев — канд. физ.-мат. наук, до 1975 г. был заведующим лабораторией Дискретного анализа ИМ СО АН СССР.

³⁸[1] Перепелица В. А., Гимади Э. Х. К задаче нахождения минимального гамильтонова контура на графе со взвешенными дугами // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1969. Вып. 15. С. 57–65; [2] Гимади Э. Х., Перепелица В. А. Асимптотически точный подход к решению задачи коммивояжера // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1974. Вып. 12. С. 35–45.

³⁹[1] Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Перепелица В. А. Исследования по теории расписаний // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1974. Вып. 12. С. 3–10; [2] Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Перепелица В. А. Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1975. Вып. 31. С. 35–42.

⁴⁰С. В. Яблонский (1924–1998) — член-корреспондент АН СССР (с 1968), один из основателей отечественной школы математической кибернетики.

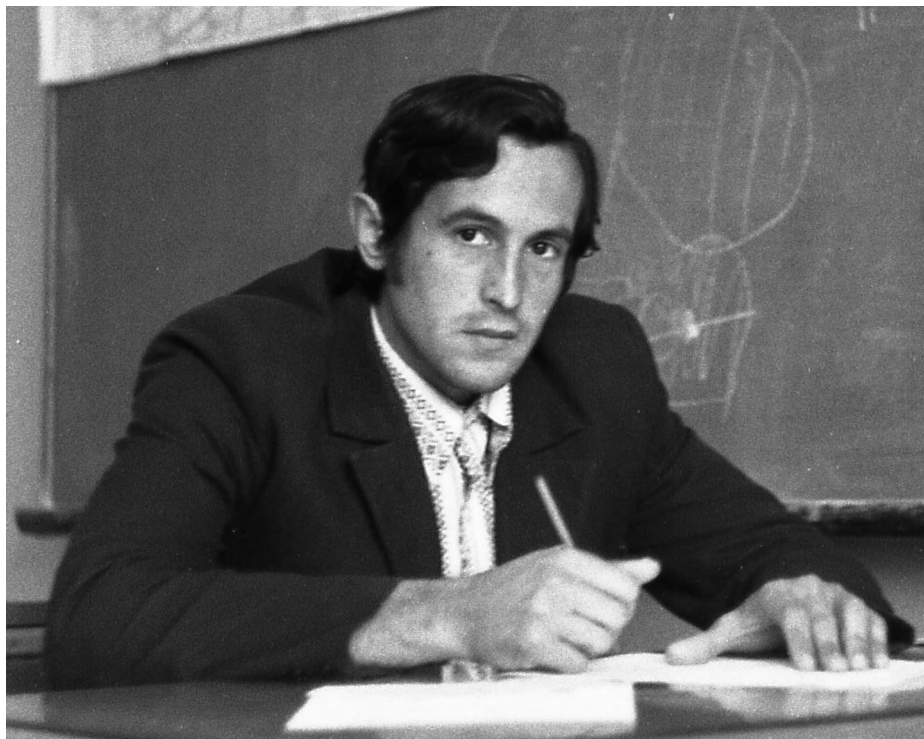
на выход к защите было получено, и в 1988 г. моя докторская диссертация “Алгоритмы с оценками для задач планирования крупномасштабных проектов” была успешно защищена на совете по защитам Института математики. Надо признаться, что до этого сама мысль о выходе на защиту диссертации вызывала у меня определенную степень дискомфорта ввиду того, что я тем самым как бы перешагивал через своего начальника, который будучи кандидатом наук, конечно же уже давно фактически преодолел этот самый докторский уровень. Однако был все же здесь и положительный момент, связанный с тем, что следующие за мной сотрудники нашей



Лаборатория Дискретных экстремальных задач. Слева направо сидят:

*С. Е. Гвоздев, О. В. Бородин, Л. С. Мельников, Е. Н. Гончаров,
А. И. Сердюков; стоят: А. В. Косточка, Э. Х. Гимади, Н. И. Глебов,
С. В. Севастьянов, В. В. Залюбовский*

лаборатории — А. В. Косточка, О. В. Бородин, С. В. Севастьянов — свои докторские амбиции реализовывали без особого ощущения дискомфорта, подобного моему. Да, я не оговорился: и А. В. Косточка, и О. В. Бородин (а также Л. С. Мельников, Д. Г. Фон-дер-Флаасс, С. В. Августинович) входили в состав нашей лаборатории. На фото представлен практически весь боевой состав лаборатории конца XX века.



Анатолий Иванович Сердюков (1952-2001)

С самого начала из молодых сотрудников лаборатории Николай Иванович особенно выделял Анатолия Ивановича Сердюкова, которого отличала неординарность математического мышления и значимость получаемых им результатов построения приближенных алгоритмов с гарантированными оценками точности. В частности, он, будучи дипломником, построил $3/2$ -приближенный полиномиальный алгоритм решения метрической задачи коммивояжера до того, как появилась публикация Н. Кристофидеса (пожалуй, одна из наиболее цитируемых в мире по задачам коммивояжера). И у нас сейчас принято упоминать этот алгоритм под именем Кристофидеса–Сердюкова.

Несколько работ нами было выполнено совместно. Как правило, в работах по вероятностному анализу приближенных алгоритмов решения задач дискретной оптимизации рассматривались случайные входные данные с независимыми случайными равномерно распределенными величинами. В нашей совместной работе по вероятностному анализу и обоснованию условий асимптотической точности приближенного полиномиального алгоритма решения задачи коммивояжера Николай Иванович предложил существенно расширить класс распределений случайных входных данных

(расстояний между городами) до симметрично зависимых распределений⁴¹. Ранний уход (до 50 лет) из жизни Анатолия был для всей нашей лаборатории и особенно для Николая Ивановича невосполнимой утратой.

Тематика построения полиномиальных приближенных алгоритмов с гарантированными оценками качества была в дальнейшем реализована также в грантах, до настоящего времени выполняемых сотрудниками лаборатории в рамках проектов Российского Фонда фундаментальных исследований. Николай Иванович, начиная с 1993 г., был неперенным участником более десятка грантов РФФИ, РГНФ и INTAS.

Когда в лихие 1990-е годы среди многочисленных предприятий нашей страны возникли злободневные проблемы с взаимозачетами и неплатежами, Николай Иванович одним из первых усмотрел, что математическую сердцевину проблемы составляет известная задача о циркуляции минимального веса в сети. Тогда же было опубликовано несколько статей на эту тему и разработано программное обеспечение, показавшее хорошее быстродействие и эффективность на ряде конкретных производственно-финансовых структур⁴². Эта же задача сыграла ключевую роль и в другом приложении, связанном с оптимизацией потока межбанковских платежей⁴³.

Николай Иванович был заместителем заведующего кафедрой теоретической кибернетики мехмата НГУ. Его веское слово всегда было определяющим при принятии кафедральных решений, а также при оценке достижений как сотрудников кафедры, так и молодых учеников — студентов, дипломников, магистрантов и аспирантов. Здесь нельзя не упомянуть Ольгу Заблоцкую, Анатолия Сердюкова, Сергея Севастьянова, Виктора Ильева, Владимира Шенмайера, в свое время блестяще защитивших кандидатские диссертации под научным руководством самого Николая Ивановича. Двое из них стали докторами наук (С. В. Севастьянов и В. П. Ильев). Не сомне-

⁴¹[1] Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Сердюков А. И. Алгоритм для приближенного решения задачи коммивояжера и его вероятностный анализ // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1. № 2. С. 8–17; [2] Gimadi E. Kh., Glebov N. I. and Serdjukov A. I. An approximation algorithm for the Traveling Salesman Problem and its probabilistic analysis // Operations Research and Discrete Analysis. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. Vol. 355. P. 35–43.

⁴²[1] Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Залюбовский В. В. О некоторых задачах погашения взаимных долгов предприятий // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1997. Т. 4. № 1. С. 30–39; [2] Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Залюбовский В. В. О задачах целесообразного товарообмена // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1998. Т. 5. № 1. С. 3–11.

⁴³Гимади Э. Х., Глебов Н. И. Задача максимизации суммарного потока межбанковских платежей // Материалы Российской конференции “Дискретный анализ и исследование операций”. Новосибирск, 24–28 июня 2002 г. С. 17–21.

ваюсь, что на очереди в ближайшем будущем и последний ученик Николая Ивановича — В. В. Шенмайер.

Одному из трех потоков мехмата Николай Иванович читал обязательный курс “Методы оптимизации” (см. учебное пособие⁴⁴). Одним из основных специальных курсов по кафедре считался курс “Дискретные экстремальные задачи”, который традиционно читал именно Николай Иванович. Кроме того, Николай Иванович был бессменным соруководителем (совместно со мной) специального семинара Института математики и кафедры теоретической кибернетики ММФ НГУ под тем же названием. К его мнению о результатах выступающих на семинаре всегда внимательно прислушивались. Аналогичную роль он выполнял и как заместитель главного редактора нашего научного журнала “Дискретный анализ и исследование операций”.

Мне кажется, что ничто не предвещало столь скоропостижного ухода Николая Ивановича из жизни. Еще вечером он был на рабочем месте в своем кабинете, уходил из Института математики домой. А на следующий день его уже не стало. Вот так, совершенно неожиданно для нас, мы лишились своего строгого и мудрого наставника и близкого друга. Говоря словами Владимира Высоцкого, “он вчера не вернулся из боя”. Но его образ останется для нас светлым примером ученого и человека.

Близкий друг Николая Ивановича — Н. Б. Ильинский в память о ректоре Казанского университета Михаиле Тихоновиче Нужине, у которого оба Николая начинали учебу в аспирантуре, на сайте⁴⁵ привел стихотворение Бориса Пастернака:

Быть знаменитым некрасиво.
Не это поднимает ввысь.
Не надо заводить архива,
Над рукописями трястись.
Цель творчества — самоотдача,
А не шумиха, не успех.
Позорно, ничего не знача,
Быть притчей на устах у всех.
Но надо жить без самозванства,
Так жить, чтобы в конце концов
Привлечь к себе любовь пространства,
Услышать будущего зов.
И надо оставлять пробелы
В судьбе, а не среди бумаг,

⁴⁴Глебов Н. И., Кочетов Ю. А., Плясунов А. В. Методы оптимизации: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2000. 105 с.

⁴⁵<http://kpfu.ru/news/39neizvestnyj39-nuzhin-97143.html.VEXxIEokehx.vk>

Места и главы жизни целой
Отчёркивая на полях...

Думается, что по такому же принципу жил и Николай Иванович.

В заключение добавлю, что в 2008 г. после ухода из жизни Николая Ивановича по рекомендации коллектива лаборатории и по решению Ученого совета Института математики я стал его преемником по заведованию лабораторией Дискретных экстремальных задач. Напомню также, что незадолго до этого (в 2006 г.) в результате соответствующих структурных преобразований в институте в нашу лабораторию были переведены несколько бывших сотрудников лаборатории Исследования операций (В. Т. Дементьев, Ю. В. Шамардин, А. И. Ерзин и др.). В связи с этим позже (в 2014 г.), по моему предложению Ученый совет Института математики принял решение переименовать нашу лабораторию Дискретных экстремальных задач в лабораторию Дискретной оптимизации в исследовании операций.

Близкий друг Н. И. Глебова и его сподвижник
по лаборатории, д-р физ.-мат. наук,
гл. науч. сотр. ИМ СО РАН, профессор НГУ,
заслуженный работник высшей школы РФ

Э. Х. Гимади

Воспоминания о самом близком друге

Николай Борисович Ильинский



Мы познакомились и подружились, будучи студентами Казанского государственного университета, учились на физмате, отделение аэрогидромеханики. Я на три года старше Николая Ивановича Глебова, и он называл меня Борисыч, а я его Колей. Интересно, что оба мы — Николаи — были Молотовскими стипендиатами (до Сталинской обоим не хватало общественной работы), оба поступили в аспирантуру (естественно, с разницей в три года), у обоих научным руководителем был Михаил Тихонович Нужин, талантливый ученый, выдающийся ректор КГУ в течении 25 лет! Но вскоре Коля увлекся кибернетикой, и Михаил Тихонович не только не обиделся, а поспособствовал Коле поступить в аспирантуру МГУ к Алексею Андреевичу Ляпунову, а затем и переехать с ним в Институт математики СО АН СССР.

Первыми математическую одаренность Коли поняли его одноклассники, потом, конечно, преподаватели, и особенно Михаил Тихонович! Но я хочу начать с другого.

Как-то мы гуляли с Колей по городу (это было в Казани) и рассуждали о жизни вообще. И я, будучи старше (повторяюсь), стал говорить, что как-то не логично устроена жизнь на Земле. Люди рождаются, живут и должны умирать, не желая этого (надо принять во внимание, что воспитаны мы были в духе атеизма). И Коля рассудил так, что если жизнь проходит относительно нормально, то человек к старости устает жить, особенно если его одолевают болезни, и тогда он уже сам начинает желать смерти. Получается, что всё естественно. Конечно, об этом разговоре я написал очень



Ректор КГУ Михаил Тихонович Нужин (1914–1983)

кратко и поверхностно, а Коля тогда так проникновенно, так убедительно, вдумчиво изложил свои соображения, что произвел на меня неизгладимое впечатление. Сейчас, когда Коли не стало, вспоминаю то далекое время и думаю: откуда у него были такие глубокие суждения? Конечно, ныне можно подумать, что в суждениях Коли нет ничего особенного. Но вспомните, что разговор состоялся более пятидесяти лет тому назад, когда Коле не было и 20 лет.

Как Коля решал сложные математические задачи, когда, в каких условиях — для меня остается тайной. Например, работая над диссертацией, я обнаружил в монографии крупного ученого несоответствие математического результата решения задачи физике явления. Математические выкладки перепроверил — показалось все верным. И рассказал об этом Коле, хотя он уже отошел от задач гидромеханики и занимался теоретической кибернетикой. И вот, спустя примерно три месяца, будучи с ним в Москве в зале Чайковского на симфоническом концерте, я заметил, как он вдруг на входном билете что-то записал. Возвращаясь с концерта в гостиницу, он спокойно так говорит: “А знаешь, Борисыч, я, кажется, нашел, в чем несо-

ответствие. . .” Сначала я не понял, о чем речь. Уточнил. А он продолжает: “Помнишь, ты в Казани говорил о задаче? . . .” Я вспомнил. “Дело в том, что ошибка скрыта во втором многочлене, где также содержится вычет в особой точке, что, конечно, далеко не очевидно!” Коля оказался прав! Во втором издании этой монографии все было исправлено (я написал автору об этом), правда, без упоминания наших фамилий. . . Но не в этом суть, а в том, что Коля никогда не оставлял без внимания задаваемых ему вопросов (однорупники всегда это знали), и думал над ответами в любых условиях и в любое время.

Мне кажется, что решения приходили Коле в голову так же, как Арно Бабаджаняну мелодии. Когда его спросили, как он сочиняет музыку, он ответил: “Я ее просто слышу!” Вот и Коля, похоже, решения просто видел!

А вот еще блестящий пример почти мгновенного опровержения “большой” теоремы. Идет семинар в НИИММ КГУ. Видный ученый доказывает новую важную теорему, почти час. Далее вопросы, дифирамбы. И вот ближе к концу Коля поднимает руку и просит дать ему слово. Выходит к доске и в уголке мелом приводит пример, удовлетворяющий всем условиям теоремы, но противоречащий ей! Дальше заключительная сцена из “Ревизора”. А Коля, как бы извиняясь, тихо садится на место. Всё!

Вспоминая о встречах с Колей, опишу такой случай.

Приехали мы с ним в Ленинград на 4-й Всесоюзный съезд математиков, это было в июле 1961 года. А бумаги на бронирование мест даже в общежитие ЛГУ у нас не оказалось. Потолкавшись в оргкомитете и даже в приемной ректора, получив от всех отказ, вышли в университетский двор (да, а нам сказали, что наш вопрос может решить только ректор, но его нет на месте). И вдруг я вижу, что навстречу идет Александр Данилович Александров⁴⁶. Набравшись смелости, преграждаем с Колей ему путь и говорим, что мы, сотрудники КГУ, приехали на съезд математиков, а поселиться нам негде, мест нет даже в общежитии. Александр Данилович нехотя спросил, чем мы занимаемся и кто у нас научные руководители? И когда услышал, что у обоих — М. Т. Нужин, сразу преобразился, раззулыбался, расспросил о здоровье Михаила Тихоновича, достал блокнот, написал пару слов, и велел идти в его приемную к секретарше. . . Дальше как в сказке: через 20 минут мы уже сидели в двухместном номере и свысока любовались Ленинградом, Невой, Морским музеем.

⁴⁶А. Д. Александров (1912–1999) — выдающийся советский, российский математик, академик АН СССР (с 1964), с 1952 по 1964 гг. ректор Ленинградского государственного университета, с 1964 по 1986 г. жил и работал в Новосибирском академгородке, возглавлял один из отделов ИМ СО АН СССР, профессор НГУ (подробнее см. <http://math.nsc.ru/persons/alek.html>).

Вообще Коля был человеком доброжелательным, начитанным, чудесным собеседником, умеющим не только логично излагать свои мысли, но и (что немаловажно) слушать собеседника, не перебивая! А ведь это тоже Дар свыше, характеризующий культуру. И потому Колю очень любили и мои родители, и моя жена, и особенно дочь. Со всеми он красиво разговаривал и вообще считался почти членом нашей семьи. Бывал у нас не только дома, в Казани, но и на даче в Обсерватории — это под Казанью. Вспоминаю такой случай.

Мы с Колей любили ездить на пароходе в Ташевку (это на противоположном от Казани берегу Волги) и там с берега ловить щук. Ловили просто: леска 0,4 мм, блесна тяжелая желтая и тройник. Почти как у Райкина: палочка, веревочка, крючок, червячок. Размахивались и на 15–20 м кидали в Волгу, а затем тянули. Ну и в среднем на каждые 10–15 бросков — одна щука, примерно на 1–1,5 кг. Но вот Коля уехал в Новосибирск. Я приобрел спиннинг, деревянную старую лодку и мотор ЛМ — 1 в 3 л.с. Стал ездить и ловить щук в протоках под Обсерваторией на 2–3 кг! Спустя несколько лет приехал Коля, ну и я повез его на рыбалку. Заехали в Голочью протоку, глубина 8–9 м, на дне — коряги и щуки! Я кидаю спиннингом блесну, леска 1 мм (!), мощный тройник. Если зацепы, то надеваю рукавицы и тяну за леску, ломая тройник. Коля с сачком сидит на корме, ждет улова. Не клюет! А уже 6 часов утра, тихо, пригревает солнце, рыба не плещет. И вдруг — очередной зацеп! Но чувствую, тянет. Короче, спустя минут 20, подвел к корме “рыбку”, стою и вижу зеленую большую щучью голову, выпученные глаза! Держу. Коля, с дрожащим в руках сачком, шепотом спрашивает: “Борисыч, что с ней делать?” Я бойко говорю: “Подцепляй снизу сачком, старайся завалить ее поглубже, и в лодку”. Коля все сделал точно, но в сачок влезла лишь голова щуки, и когда он стал затаскивать ее в лодку, ей это не понравилось, она “дернулась” (долго терпела) и, оборвав леску, выбив сачок



*Александр Данилович Александров
(1912–1999)*

и обдав нас фонтаном воды, плюхнулась в родную стихию! Мы замерли, потом на всю Волгу “поговорили”, потом выловили около 10 щук, называя их мальками (позже выяснилось, что были они рекордными — по 6–7 кг), и вернулись на дачу. Да, несли щук обычно привязанными на веслах, а весла — на плечах. На перроне железной дороги, который нам приходилось переходить, пассажиры ворчали вслед: вот браконьеры, сколько сетью натаскали! А у нас лишь один спиннинг и чемоданчик с блеснами, а одеты в брюки, майки, панамки и сандалии... После отъезда Коли я сделал в мастерской огромный сачок, багор, дрын... но ту щуку так и не поймал! А была она в длину чуть меньше весла (кто не знает, напомним, что весло около 2 м)!

И в заключение еще об одном событии. Коля был человеком интеллектуальным, любил красивое, но чувства свои выражал скромно, без излишних эмоций. В свободный от заседаний съезда математиков день в Ленинграде мы поехали в Павловское, просто побродить, полюбоваться природой, красотами. Был теплый ясный июльский день, безветренный. При входе в Павловское приобрели схему, и по ней находили достопримечательные места. Но вот на схеме кружком было обведено и написано: “Самое красивое место”! Но сколько мы ни ходили, найти таковое не могли. Все нам казалось, что нет, “это” не самое красивое место. И когда уже совсем выдохлись, вышли на небольшое открытое пространство, и в один голос воскликнули: “Вот оно!” Да, это было действительно поразительное место: цветы разные, кустарник, березки, солнце, голубое небо, и всё-всё так красиво, так тихо, так удивительно! Долго мы сидели с Колей на травке. Долго молчали. И обратно поехали умиротворенные, счастливые. Только сейчас начинаю понимать, какое большое влияние на меня оказывал Коля своим поведением, словами и просто молчанием. Удивительный был дорогой Николай Иванович, и хочется верить и надеяться, что и в Институте математики СО РАН его также любили, ценили и уважали.

Светлая память Коле.

P.S.: А у меня растёт правнук Коленька, ему сегодня 6 лет!

29.01.2011

Лучший друг Н. И. Глебова
по Казанскому университету,
заслуженный профессор КГУ,
заслуж. деятель науки ТАССР и РФ,
д-р физ.-мат. наук

Н. Б. Ильинский

Слово о друге

Валентин Иванович Жегалов



С Николаем Глебовым мы были с 1952 г. однокурсниками на физмате Казанского университета, только я был в группе математиков, а он — механиков. Но практически в течение всего срока обучения мы как-то не пересекались, и зарождение дружеских взаимоотношений произошло только летом 1957 г. во время поездки на Северный Кавказ, где ребята нашего курса в связи с завершением занятий на военной кафедре должны были проходить стажировку в лагере одной из располагавшихся там частей. Это время совпало с Московским международным фестивалем молодежи, поэтому нам пришлось ехать на эту стажировку с пересадками. Обычно ехали ночью, а днем гуляли по городам пересадок: Сталинград, Астрахань, Ростов. Нам это очень понравилось: великолепная погода, после Сталинграда на станциях продавались всевозможные ягоды и фрукты, мы купались в Волге и Дону. По прибытии на место (вблизи станицы Самашкинской) нас поприветствовали словами “черт вас принес”, а когда тут же выяснилось, что у одного из нас расстройство желудка, немедленно заподозрили дизентерию. Палатки поставили нам несколько в стороне от расположения основного контингента, объявили двухнедельный карантин и нашу “боевую задачу”: как можно реже появляться кому-либо на глаза, а уж если это произойдет — не вступать ни в какие разговоры. “Диагноз” потом не подтвердился, но это уже не имело никакого значения: пришлось нам побыть на карантине

до конца назначенного срока. Потом из нас отобрали команду и отправили за Сунжанский хребет на стрельбище, где мы должны были обслуживать ночные стрельбы, то есть сидеть в окопчиках около мишеней (макетов пушек, танков и т. п.) и сообщать по телефону о степени их поражения. Для снайперов мишенями были маленькие лампочки (как в карманном фонарике). Мы удивлялись, насколько часто в них попадали с первого выстрела. Еще оказалось, что здесь можно наслаждаться совершенно замечательным зрелищем: восходом Солнца, когда дали становились прозрачными, был виден Казбек и окружающие его вершины. Днем все это пропадало в дымке, тогда как утром сначала в виде белой точки возникала вершина Казбека, потом постепенно во власти Солнца оказывалась вся гора и ее окрестности. Все выглядело очень красиво и величественно. Днем же все, кто не был занят приготовлением пищи, были предоставлены самим себе. Часто мы с Николаем бродили по ближайшим окрестностям нашего маленького лагеря, обсуждая различные темы. Нам было интересно: наши суждения об одном и том же как бы переключались, проливая дополнительный свет на наши представления.

После возвращения (по тому же маршруту) в Казань и вручения дипломов получившие распределение в аспирантуру стали готовиться к вступительным экзаменам. Как тогда было принято, первый экзамен был по истории партии. Мы готовились “по месту жительства”, то есть в общежитии. Николай провозгласил лозунг: “Клячу истории загоним!”... Благополучно загнав всех предусмотренных программой кляч, были зачислены в аспирантуру. К началу занятий поселились в четырехместной комнате общежития: два математика, механик и метеоролог. Жили дружно. Между аспирантскими делами находили время почитать книжные новинки. Правда, некоторые книги можно было назвать новыми только потому, что они очень долго до этого не переиздавались. Например, по подписке вышел пятитомник В. О. Ключевского по русской истории. Читая эти тома, мы впервые обнаружили, насколько интересной может быть история. Поминали недобрым словом учебники, по которым эту историю нам довелось изучать в школе. Было еще одно занятие, появившееся из-за нашего метеоролога Геннадия. Он сочинял стихи и иногда читал их нам. Эти стихи обычно появлялись у него в связи с каким-либо конкретным моментом из нашей жизни, были как бы “поэтическим осмыслением” происходящего. Иногда они носили частушечный, или эпиграммный характер. Например, однажды мы занимались в порядке подготовки к экзамену по иностранному языку переводом на русский язык статьи, посвященной первому искусственному спутнику Земли. В связи с этим Геннадий “выдал” нам четверостишие:

Расшалился наш Никита:
Кинул спутник на орбиту.
Спутник в космосе летает,
И Америку пугает: бип! бип! бип!

Но в основном стихи у Геннадия были достаточно длинные, а иногда он привлекал нас к сотворчеству: просил помочь подобрать рифму. Были случаи, когда нам удавалось (и даже неплохо) выполнить его просьбу.

Вследствие подобных эпизодов мы все начали вслед за Геннадием что-то рифмовать, но довольно скоро эти попытки иссякли. Дольше всех держался Николай, но и он в конце концов забастовал. Помню только конец его самокритичного стиха:

...И устремился я к Парнасу,
Плетя из рифм столбцы стихов.
Дал волю хилому Пегасу,
И думал, что поэт готов.
Но мой Пегас издох на полпути к Парнасу.
И, подавив тяжелый вздох,
Я проклял долю нашу.

Надо сказать, что начало аспирантуры у Николая было вполне успешным: тема относилась к недавно возникшему в Казани и интенсивно развивавшемуся научному направлению — обратные краевые задачи, еще в дипломной работе он получил интересные результаты, научный руководитель был надежный — один из основоположников направления М. Т. Нужин, в то время ректор университета.

В то же время появилась книга И. А. Полетаева⁴⁷ “Что такое кибернетика”, в которой автор с энтузиазмом занимался пропагандой и популяризацией идей этой науки, рассматривающей с единых позиций вопросы, относящиеся и к математике, и к технике, и к биологии. Это было необычно: ведь совсем незадолго до этого в нашей стране кибернетику трактовали как “реакционную лженауку, прислужницу буржуазии”. Содержание книги произвело на Николая столь сильное впечатление, что он буквально загорелся идеей переориентировать себя на новую для него науку. Сказал мне о своем намерении поговорить на эту тему с научным руководителем. Я не стал его отговаривать. Просто понял, что стремление идти по пути наибольшего сопротивления является чертой его характера.

Он сумел добиться поддержки идеи своего творческого перевоплощения со стороны научного руководителя: Михаил Тихонович свел его с А. А. Ля-

⁴⁷Игорь Андреевич Полетаев (1915–1983) — один из основоположников отечественной кибернетики, с 1961 г. жил и работал в Новосибирском академгородке.



Игорь Андреевич Полетаев (1915–1983)

пуновым, уже известным тогда московским математиком, переключившимся некоторое время назад на занятия кибернетикой. В Москве Николаю было предложено в течение двух недель подумать над некоторыми задачами. Через три дня он их все решил, что открыло ему путь в аспирантуру уже по кибернетике. Так он оказался в Москве.

Как-то летом он заехал в Казань, и мы решили провести некоторое время у моих родителей в г. Сengelее: это на правом берегу Волги в 60 км от Ульяновска вниз по течению. Местность там имеет гористый характер, как бы начиная подготовку к переходу в Жигулевские горы. В один из дней мы поднялись на самую высокую горку в окрестностях городка. С одной стороны перед нами расстиралось лесное море с огромными застывшими темно-зелеными волнами, образованными растущими на склонах глубоких оврагов деревьями. Это море немного продолжалось и в другую сторону, где за кромкой леса виднелось поле, за которым следовали отблески водной глади Волги, ее противоположный берег и бескрайняя даль Заволжья. От этого зрелища у Николая проснулось желание сочинить стихотворение. Он хотел его назвать “Ода восхождению”. Не знаю, написал ли он эту оду (скорее всего, не дошли руки), но задумка о содержании заключалась в следующем. Каждый человек в своей жизни должен покорить хотя бы

одну вершину, потому что только оттуда можно увидеть незабываемые дали, только там человека могут посетить необыкновенные мысли. И оттуда он может увидеть следующую вершину, которую захочется покорить. При этом понятию вершины предполагалось придать обобщенный смысл: например, научная или спортивная вершина.

А в Москве дела шли хорошо. После окончания аспирантуры Николай вернулся в Казань, где вскоре занялся оформлением диссертации. Сделал он это очень быстро: сложил вместе свои статьи, опубликованные в “Проблемах кибернетики”, написал к ним введение, произвел некоторую редакционную доработку и отдал машинистке печатать. Он ненамного отстал от нас по сроку защиты диссертации: может быть, года на два.

Как раз в это время около Новосибирска развернулось строительство нового научного центра, куда вскоре за своим научным руководителем А. А. Ляпуновым переехал и Николай. Некоторое время спустя и я уехал из Казани: сначала был направлен в Москву для изучения французского языка, а потом оказался в Африке, в Гвинейской республике. Читал студентам Высшей нормальной школы лекции по математическому анализу и дифференциальным уравнениям. А лет через десять после возвращения в Казань начал часто приезжать в Новосибирский академгородок — то для участия в научных конференциях, то для докладов на различных семинарах, тематика которых была связана с уравнениями в частных производных. В 1989 г. защитил в ИМ СО АН СССР докторскую диссертацию по задачам со смещениями в граничных условиях для уравнений смешанного типа. Как правило, мы с Николаем во время этих моих командировок находили время, чтобы пообщаться: размышляли о том, что осталось позади, о том, что есть, и о том, что может быть в будущем...

В одном из своих стихотворений Б. Пастернак сказал, что наша жизнь есть “...растворенье нас самих во всех других...”. Написание этих воспоминаний стало для меня как бы еще одной встречей со старым другом. И вот теперь приходится констатировать, что наше с Николаем взаимное растворение закончилось. Грустно.

Друг Н. И. Глебова по Казанскому университету,
ныне профессор кафедры дифференциальных
уравнений КФУ, д-р физ.-мат. наук

В. И. Жегалов

Мой одноклассник Коля Глебов

Евгения Борисовна Фелькер

Пять лет мы учились в одной группе. Каким я запомнила Колю Глебова? Симпатичный, весь какой-то светлый, со светлыми волосами, легко краснеющий, скромно одетый, улыбчивый и добродушный. Он был самым младшим в нашей группе и самым умным и способным. Коля никогда не давал нам это почувствовать, но мы знали это. Коля не был красноречивым, шутником, но я знаю, что многим девочкам из группы он очень нравился.

Мы с моей подругой Риммой Бадрутдиновой вместе готовились к экзаменам. Прорабатывая конспекты лекций, мы прилежно ставили вопросы в непонятных местах, зная, что есть Коля. Затем на консультации мы “загоняли его в угол”, и, вопрос за вопросом, задавали Коле, не сомневаясь, что он знает ответы на них. И он всегда безотказно, спокойно и терпеливо объяснял нам всё, что было непонятно. И мы сдавали экзамены на пятёрки, прекрасно понимая, что наши пятёрки и колины — это совсем разные оценки. Мы знали, что он самый талантливый парень в группе, и не сомневались, что его ждёт будущее учёного.

Одноклассница Н. И. Глебова
по Казанскому университету

Е. Б. Фелькер

Мой Учитель Николай Иванович Глебов

Виктор Петрович Ильев



1. Мои университеты

Учеником Николая Ивановича Глебова я стал, в общем-то, случайно. В 1979 году окончил Омский университет, дипломную работу писал под руководством Геннадия Шмерельевича Фридмана, выпускника ФМШ и НГУ, ученика Алексея Андреевича Ляпунова.

Своей аспирантуры в ОмГУ тогда не было (как, впрочем, и военной кафедры). Геннадий Шмерельевич решил направить меня в Новосибирский университет на стажировку. Была в то время в НГУ такая форма обучения, что-то вроде нынешней магистратуры, только годичная. Фридман договорился с Эдуардом Хайрутдиновичем Гимади, который согласился быть моим руководителем. И в сентябре 1979 года я сел в поезд и отправился в Академгородок.

2. Академгородок

Мне повезло, я застал еще тот дивный советский Городок — неспешный, погруженный в себя, задумчивый, точнее было бы, пожалуй, сказать — вдумчивый. “Служенье муз не терпит суеты”. Кругом лес, в лесу таблички “Лес на отдыхе”.

Местным жителям, наверное, все это было привычно, но у меня, приехавшего в Академгородок впервые, было ощущение, что я попал в другой мир. Велосипедные дорожки — при том, что автотранспорта было совсем немного, даже светофоров на перекрестках не было. В фойе главного корпуса



Геннадий Шмерельевич Фридман

НГУ газетный киоск — просто открытый прилавок, на котором разложены газеты, журналы и т. д. Женщина-киоскер уходит на обед, все оставляет как есть. Люди подходят, листают журналы, берут газеты, оставляют на прилавке деньги. . . Другой мир, другие люди.

А сегодня Академгородок все больше напоминает обычный элитный микрорайон в большом городе. Суeta, пробки. . . Только природа все та же, хотя ее и стало меньше. И лес уже не отдыхает.

3. Неожиданный поворот

Приехал я в Академгородок, звоню Гимади. Мне отвечают: “Эдуард Хайрутдинович в командировке за границей.” “А когда вернется?” “Через две недели.” Вот так “сюрприз”! А прием документов на стажировку заканчивается через несколько дней, и на заявлении нужно согласие научного руководителя. Что делать?

И тут я вспомнил, что предусмотрительный Геннадий Шмерельевич, провожая, снабдил меня телефоном Сергея Андреевича Трескова⁴⁸. “Это мой старый друг (в смысле — еще с юности). Если что, звоните ему, он поможет.” Позвонил Трескову. “Так и так, — говорю, — привет Вам от Геннадия Шмерельевича, я его ученик, и у меня проблема.” Он сразу сказал:

⁴⁸С. А. Тресков — научный сотрудник Института математики СО РАН, специалист по функциональному анализу, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики НГУ.

“Давайте встретимся у “Золотой долины”. Я приеду на велосипеде, буду в синем преимущественно свитере.” Стою, жду. Подъезжает Сергей Андреевич, длинноволосый, спортивный, в наполовину синем свитере, как и обещал. И сразу говорит, видно, думал, пока ехал: “Знаете что? В Отделе кибернетики есть Николай Иванович Глебов. Попробуйте для начала позвонить ему.”

А я уже знал тогда, что есть Глебов. Читал в “Проблемах кибернетики” статью Э. Х. Гимади, Н. И. Глебова и В. А. Перепелицы “Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации”. Фридман велел.



Сергей Андреевич Тресков

4. Алгоритмы с оценками

Сейчас как раз готовлю спецкурс по приближенным алгоритмам для студентов ОмГУ. Читаю в книге Ausiello G., Crescenzi P., Gambosi G. et al. “Complexity and Approximation”: “Among the papers that are considered to have laid down the first basic concepts relative to approximation algorithms, we may refer the reader to [Garey, Graham, and Ullman, 1972, Sahni, 1973, Johnson, 1974, Nigmatullin, 1976]”.

И до сих пор, похоже, не знают на Западе, что в 1969–74 гг. Гимади, Глебов и Перепелица независимо предложили наиболее общий подход к исследованию приближенных алгоритмов. Введенное ими понятие алгоритмов с оценками включает в себя как частные случаи практически все известные сегодня понятия, относящиеся к приближенным алгоритмам: асимптотически точные алгоритмы, полиномиальные приближенные схемы, алгоритмы с гарантированными оценками точности, алгоритмы, точные в типичном случае (т. е. для почти всех задач) и т. д. Мне кажется, их вклад в теорию сложности приближенных вычислений еще предстоит осмыслить и оценить.

5. Как я стал учеником Н. И. Глебова

Я послушал совета С. А. Трескова. Звоню Н. И. Глебову, правда, без особой надежды, объясняю ситуацию. К моей радости он говорит: “Да-да, Эдуард Хайрутдинович перед отъездом говорил мне, что Вы приедете. Что ж, подходите, я подпишу согласие быть руководителем Вашей стажировки.”

Вот так с легкой руки Э. Х. Гимади я и попал на стажировку к Николаю Ивановичу. Правда, продолжалась эта стажировка недолго, всего месяц с небольшим. В октябре 1979 года я был призван в Советскую армию. Я уже упоминал, что в Омском университете не было военной кафедры, ее и сейчас нет. А в те годы даже аспирантура не давала права на отсрочку от службы, не то что стажировка. Только и успел посетить две лекции спецкурса Николая Ивановича.

Отслужив, как положено, полтора года, в июне 1981 года снова приехал к Николаю Ивановичу. И он опять согласился взять меня на стажировку.

6. Научный руководитель

Мне кажется, Николай Иванович не очень нуждался в учениках. Да и было их у него — по пальцам перечесть.

Когда в конце стажировки я сказал Николаю Ивановичу, что хотел бы поступить к нему в аспирантуру, он реагировал, как мне показалось, довольно малорадостно: “Вы хотите поступать в аспирантуру?” Подумал, тяжело вздохнул: “Ну, хорошо.” Все-таки не отказал, хотя и видно было, что возиться со мной ему не очень хотелось. Да он и не возился.

Научным руководителем он был своеобразным. Никогда не ругал, особо не хвалил. Ставил задачу и ждал ответа. Руководил по принципу “Бросить в воду, и пусть барахтается, выплывет — молодец.” Никогда не назначал времени консультаций, но никогда и не отказывал в просьбе о встрече. Обычно прихожу к нему, спрашиваю: “Может быть, мне стоит подумать над тем-то?” “Ну, да... Хорошо... Попробуйте...” Иногда давал советы, но чаще слушал, что я расскажу.

И странное дело, вроде Николай Иванович и не посоветует ничего, просто выслушает, а в голове что-то проясняется, какие-то мысли новые появляются. И идешь с новыми силами думать дальше.

Такой стиль руководства сильно развивает в ученике самостоятельность. В результате две задачи в моей кандидатской диссертации поставил Николай Иванович, из них получились первые две главы. А третью сформулировал уже я сам, а Николай Иванович одобрил: “Ну, хорошо... Попробуйте...”

Теперь, оглядываясь назад, я понимаю, какое сильное влияние оказал на меня Николай Иванович. Можно сказать, что я вижу математику его глазами.

7. Имя в науке

Николай Иванович так и не защитил докторскую диссертацию. Почему? Анатолий Иванович Сердюков, первый ученик Николая Ивановича, рассказывал: “Я ему не раз говорил: надо писать докторскую! Не хочет.”

Что-то помешало (или кто-то?) Николаю Ивановичу защитить докторскую диссертацию вовремя. А потом уже действительно не хотел. Прин-

ципиально. Защита докторской — такая суета, трата времени и сил. Да и здоровье уже не то... Он и статей-то написал не очень много. Брал не количеством, а качеством.

А кроме того, я думаю, Николай Иванович понимал, что у него есть ИМЯ, и имя это в научных кругах хорошо известно. Ну, станет он доктором наук — что это добавит к его имени? Докторов много, а Глебов один! Сейчас, правда, все большую известность приобретает другой Глебов — Алексей Николаевич. Сын.



Владимир Константинович Леонтьев



Регина Иосифовна Тышкевич

То, что Глебов — это ИМЯ, я понял, когда искал себе ведущую организацию и первого оппонента по кандидатской диссертации. Николай Иванович только сказал: “В Москве обратитесь к Владимиру Константиновичу Леонтьеву⁴⁹, а в Минске поговорите с Региной Иосифовной Тышкевич⁵⁰, у нее есть работы по матроидам.” И я отправился в турне по маршруту Новосибирск — Москва — Минск.

В. К. Леонтьев согласился написать отзыв ведущей организации сразу: “Николаю Ивановичу я не могу отказать.” А когда я приехал в Минск, выяснилось, что Р. И. Тышкевич и Н. И. Глебов не знакомы, только знают о существовании друг друга по публикациям. Я думаю: “Ну, Николай

⁴⁹В. К. Леонтьев — заведующий сектором комбинаторного анализа ВЦ РАН, специалист по дискретной математике, кибернетике и теории информации, д-р физ.-мат. наук, профессор МГУ и МФТИ.

⁵⁰Р. И. Тышкевич — всемирно известный специалист в области дискретной математики, комбинаторного анализа и теории графов, д-р физ.-мат. наук, профессор БГУ, автор более 100 научных работ, в том числе 14 учебников и монографий.

Иванович!.. Предупреждать надо!” Тем не менее, диссертация моя Регине Иосифовне понравилась. Послушав меня вне очереди на своем семинаре, она согласилась быть первым оппонентом. Потом приехала на защиту в Академгородок. Я познакомил их с Николаем Ивановичем в день защиты, за 15 минут до начала заседания диссертационного совета.

8. Штрихи к портрету

Когда, отслужив в армии, спустя полтора года, я снова явился к Николаю Ивановичу, он поинтересовался, почему я так быстро вернулся. Я удивился: “Почему быстро? Как положено.” “Но Вас же в армию всего полгода как призвали.” Тут я понял, что у Николая Ивановича время течет как-то по-своему, не так, как во всем остальном мире, медленнее. И потом не раз убеждался, что Николай Иванович живет так же неспешно, размеренно, без суеты. Каждый день в одно и то же время приходит в институт, всегда в одном и том же коричневом костюме. Потом,



Анатолий Евгеньевич Карпов

правда, сменил его на серый. Всегда спокоен, невозмутим. Ни разу не видел Николая Ивановича взволнованным, возбужденным. Недовольным — да, возмущенным — нет. Даже не знаю, ругался он когда-нибудь с кем-нибудь или нет. Однажды я был свидетелем, как он порицал за достаточно серьезное нарушение своего подчиненного. Именно порицал — не ругал, не отчитывал, скорее уговаривал.

* * *

Было, мне кажется, что-то неуловимо общее у Николая Ивановича Глебова и Анатолия Евгеньевича Карпова, нашего замечательного в прошлом чемпиона мира по шахматам. Что-то такое во взгляде, в выражении лица... Что?

Свет разума?

Профессор ОмГУ, д-р физ.-мат. наук

В. П. Ильев

*О моем научном руководителе Николае Ивановиче,
строгом, но справедливом*

Владимир Владимирович Шенмайер



Я был, по всей видимости, последним учеником Николая Ивановича. По крайней мере, из тех, кто потом пошел в науку. Мой взгляд на него — это прежде всего взгляд с позиции студента, снизу вверх. Многим, как я недавно узнал, он представлялся мягким и “пушистым”, но лично у меня в голове сложился немного другой образ. С моей точки зрения, Николай Иванович был немногословным серым кардиналом, который не занимал каких-то особых постов, редко “светился”, выглядел очень скромно, но уже после непродолжительного знакомства с жизнью нашей кафедры становилось ясно, что все нити здесь ведут к нему. Для студентов и, как вскоре оказалось, не только — он был страшным авторитетом. Просто приведу пару примеров.

На последних курсах НГУ он читал на нашем потоке курс по оптимизации. Обычно к этому времени, как мы говорили, не студент работает на зачетку, а наоборот — зачетка на студента. Так что отношение “оценка/прилагаемые усилия” к концу универа приятно росло, четверка на экзамене считалась неудачей, тройка обычно объяснялась лишь откровенной безалаберностью. Увы, Николай Иванович ничего про это не знал. У

всего потока пятерку получил только один человек, да и то — скорее авансом (это был я), половина ушла с тройкой, и при этом никто не жаловался: все понимали, что самодурства здесь нет, все по-честному, просто высокие, но справедливые, требования. На спецкурсе по дискретным экстремальным задачам пятерок уже было побольше: иллюзий к этому времени ни у кого не было. Если кому-то сказать, что магистранты 5-6 курса могут не спать ночью — и не по причине распития благородных напитков, игры в преферанс или же “иных удовольствий”, а по причине подготовки к экзамену по какому-то там спецкурсу — это может показаться научной фантастикой. И тем не менее это надо было видеть: глубокая ночь, горит настольная лампа, стол завален разными версиями лекций Николая Ивановича (в книгах этот материал было тогда не найти), и группа весьма к тому времени “взрослых” парней с выпученными глазами пытается продраться сквозь ветви венгерских деревьев и визуализирует процесс сворачивания цветков в алгоритме Эдмондса...

Авторитет Николая Ивановича основывался на его глубине и требовательности. Он не боялся идти против течения и давать объективную, как положительную, так и отрицательную оценку любому результату, будь ты хоть сват, хоть брат. Как сейчас модно говорить, у него не было “двойных стандартов”: для всех планка науки была одинакова, и одинаково высока. У этого было два следствия: с одной стороны, Николай Иванович становился носителем того иголочного ушка, в которое может пролезть только то, что действительно является шагом вперед. Признание и одобрение Николая Ивановича де-факто становилось знаком качества, снимало все бюрократические вопросы. С другой стороны, это неизбежно отдаляло Николая Ивановича от окружающих: не всем было по душе его четкое понимание того, что такое научный результат, а что — переливание из пустого в порожнее. Как мне казалось, Николай Иванович и был в итоге как бы в стороне от всех, на дистанции даже от близких коллег. Сейчас я понимаю, что такова была цена его научной позиции, его научной чистоты и беспристрастности. Конечно же, такой человек не вписывался в условия современной научной системы, в которой все меряется не качеством и значимостью результата, а тупым количеством статей, что приводит к их “экспоненциальному” росту, обмельчанию, деланию из мухи слонов и прочей халтуре (т. н. “мусорная наука”). То и дело смотришь на это и думаешь: эх, ребята, не хватает на вас Глебова.

Как однажды кто-то сказал: “Николай Иванович — он глубокий”. Помоему, очень точно. Опять приведу пример. Идет спецсеминар, доклад откровенно мутный и сложный, тема далека от аудитории, Николай Иванович, кажется, спит. Доклад заканчивается, никто почти ничего не понял,

неловкое, тяжелое молчание, Эдуард Хайрутдинович (Гимади. — *прим. составителей*) — как один из ведущих семинара — пытается подобрать слова, чтобы хоть как-то сгладить пилюлю. Тут Николай Иванович открывает глаз и задает технический вопрос, относящийся к середине доклада, и по которому становится ясно, что он не только не спал, а каким-то непонятным образом продрался сквозь все дебри изложенной теории, причем до самого корня. А разбирался он, кажется, во всем — от расписаний до матроидов, от графов до унимодулярных матриц. При этом собственных статей у него было относительно немного, но на столе постоянно лежали тонны чужих. Ему всегда было важно “то, благодаря чему”, самая суть явлений. А улавливал ее он быстро. В сочетании с его кругозором это делало его идеальным носителем того самого игольного ушка.

К Николаю Ивановичу я попал практически случайно. К третьему курсу, когда надо было выбирать себе шефа, среди студентов ходил слух о том, что если ты попадешь к многовековому другу Николая Ивановича, профессору Гимади, то всё у тебя в жизни научной сложится хорошо. В результате к моменту, когда я “проснулся” и начал думать, в какую дверь постучать, на бедном Эдуарде Хайрутдиновиче уже висело штук 10 наших. Недолго думая, я решил постучаться в соседнюю дверь: все-таки Глебов и Гимади — это, судя по библиографии, почти один человек, да и сидят рядом, так что может и здесь в обиду не дадут. После моего лепета о том, что “я почитал Гэри-Джонсона, и мне понравилось”, я был принят в кандидаты в ученики. Вскоре (по меркам Николая Ивановича, а на самом деле — спустя полгода) мне была поручена проверка гипотезы, обобщающей теорему Радó-Эдмондса. Несмотря на то, что тема эта мне поначалу показалась слишком мудреной и мало-актуальной, я взялся за нее с энтузиазмом. В тот же день мне удалось опровергнуть предложенную мне гипотезу, и я уже представлял, как “обрадую” Николая Ивановича и, может быть, даже попрошу другую задачу, как возник форс-мажор: на тренировке сломал ногу и на целый месяц оказался в гипсовой изоляции от мира: интернета и даже мобильных телефонов у нас, обитателей студенческой общаги, тогда еще не было. “Чем бы ответил на это Николай Иванович? Какую бы придумал новую гипотезу?” — это было похоже на игру в шахматы с самим собой: и за себя, и за соперника — начал сам ставить себе гипотезы, сам же их опровергать. В общем, втянулся. Сейчас все чаще склоняюсь к мысли: а ведь вполне возможно, что знал Николай Иванович о том, что гипотеза не верна, и просто вроде как проверял меня на вшивость. А когда проверил, дал мне полный карт-бланш и пустил в свободное плаванье. По спартанской схеме: если сам выплывет, значит, что-то получится.

Встречались мы с Николаем Ивановичем практически до самой его смерти, последний раз — всего за несколько дней до нее, поздней снежной осенью 2008 года. Пятого ноября пришло письмо от Эдуарда Хайрутдиновича, в заголовке какие-то непонятные слова. “От нас ушел Н. И. Глебов”. . . Куда ушел? Зачем ушел? Полное онемение и недоумение. Николай Иванович казался вечным, константным. Только недавно виделись, он был бодрым, в хорошем настроении. Но все же, где-то в глубине души я, кажется, был готов к этому известию: чувствовал, что что-то назревает. Дело в том, что персонально ко мне Николай Иванович был всегда очень строг, и держался со мной очень субординированно (что, впрочем, не мешало ему заступаться за меня на всех советах и аттестациях). Но в последние мои приходы к нему он вел себя неожиданно мягко, тепло, “не по-научному”. Вначале я даже слегка смущался, еще думал, что, может, внуки к нему приехали или еще какая радость у старика. Но потом все встало на свои места. Прощался?

Теперь уже никто не ответит.

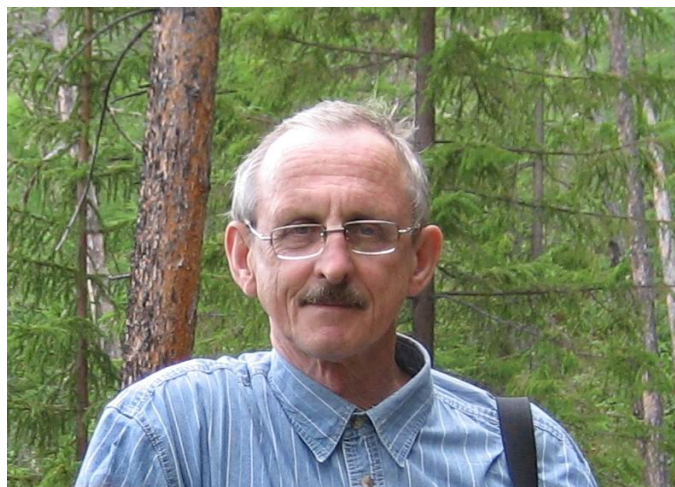
Светлая Вам память, Николай Иванович.

Ст. науч. сотр. ИМ СО РАН,
канд. физ.-мат. наук

В. В. Шенмайер

*Суровое, но поучительное решение
Николая Ивановича*

Олег Вениаминович Бородин



В последние 30 лет жизни, когда я мог его повседневно наблюдать, Николай Иванович Глебов был одним из наиболее уважаемых людей в Отделении теоретической кибернетики ИМ СО РАН. Все политические нити сводились к нему, и его мнение было неизменно мудрым и в большинстве случаев решающим.

На “малых совнаркомах”, сначала под председательством В. Т. Дементьева, а затем В. Л. Береснева, много раз наблюдалась одна и та же картина. Страсти кипят, мнения не сходятся, потом Владимир Тихонович или Владимир Леонидович вдруг спохватывается: “А что же наш Николай Иванович?” И вот тут Н. И. Глебов впервые берет слово и выносит взвешенное суждение, которое и оказывается окончательным.

Мне кажется, что по части науки Николай Иванович давно взял на себя миссию оценки чужих результатов и не очень стремился к получению собственных резонансных результатов. Об этом можно только сожалеть, так как в нем чувствовался научный потенциал, но уж такова участь многих наших ученых. Нам свойственно задумываться о вечном, довольствоваться самооценками и мнением начальства и не заботиться о том, какой след остается и останется после нас в мировых базах статей и ссылок. Для большинства из нас получить приличный результат и написать статью, даже в местном журнале, — уже непосильное бремя, так как мы любим витать в облаках либо подрабатывать на стороне, иметь хобби, созерцать и т. п., а за конкретную творческую работу с нас никогда не спрашивали. Пора-

ботавших за рубежом не нужно убеждать, насколько энергичнее работают люди там, чем в наших тепличных условиях.

Наверняка в своих размышлениях Николай Иванович уделял внимание и этой проблеме выхода конкурентоспособной научной продукции с 1 м² площади ИМ СО РАН. Приведу лишь один пример, но зато из первых рук.

В начале 1980-х НГУ попросил ИМ написать программу для составления расписания занятий в НГУ. Сергей Васильевич Севастьянов, наш лучший специалист по теории расписаний, создал проект, который, к сожалению, оказался слишком трудным для реализации. Потом подключили меня, я вспомнил свое короткое программистское прошлое, увлекся и придумал эвристический алгоритм, который начал давать гладкие, сразу по нескольким параметрам, решения на условных тестовых примерах, обладавших средними характеристиками, отвечавшими реальному на тот момент расписанию НГУ. Гордый, в сентябре 1986 г. пришел к Николаю Ивановичу, чтобы получить благословение на ввод реальной информации. Но Николай Иванович огорошил меня донельзя: “Это инженерная работа, а в ИМ СО РАН желательно получать фундаментальные результаты.” При этом он снял с меня 1/4 ставки в НГУ, которую я получал полтора года за эту деятельность. Так что Дарья Михайловна и дальше составляла расписание вручную.

Немного попереживал, но уже в октябре впервые съездил за границу. Мои прежние результаты оказались востребованными за рубежом. А еще через месяц у меня случился прорыв: удалось решить сразу несколько давно стоявших проблем в теории плоских графов. Потом три года провел за рубежом в длительных поездках и примерно год — в коротких, поработал с интересными людьми. Сейчас мой индекс цитирования в AMS MathSciNet — второй после А. В. Косточки среди всех сотрудников УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН. В той же базе моя статья — 4-я по цитируемости среди сотрудников ИМ, а наша статья с А. В. Косточкой — 8-я. Лаборатория Теории графов все 15 лет своего существования занимала первые места в ИМ по числу статей на одного сотрудника. Мы имеем грант Президента РФ по поддержке ведущих научных школ РФ НШ-1939.2014.1 “Теория графов и ее приложения”.

Вот к таким последствиям привело то суровое, но поучительное решение Н. И. Глебова. Наверное найдется немало людей, которые благодарны ему за советы и подсказки в какие-то переломные или даже обыденные моменты их жизни. Я уверен, что, доживи Н. И. Глебов до наших дней, он бы еще больше нацеливал младших коллег на получение значимых научных результатов, хотя бы немного поднимающих престиж российской математики.

Светлая память о Николае Ивановиче навсегда сохранится у друзей и коллег.

Зав. лабораторией Теории графов
ИМ СО РАН, д-р физ.-мат. наук

О. В. Бородин

*Его работы отличались нетривиальностью
и изяществом*

Александр Васильевич Косточка



Насколько я помню, Николай Иванович всегда считался одним из самых умных и сильных математиков в Отделе Теоретической Кибернетики (и многие считали его самым умным). Если появлялся громкий результат и надо было проверить его доказательство (как было с работой “Пути, деревья и цветы” Эдмондса и статьей Кармаркара), Николай Иванович всегда был в команде экспертов. Его работы отличались нетривиальностью и изяществом. И он умел рассказывать трудные вещи понятно. Мы с ним работали вместе над тремя статьями, и всегда было приятно и интересно работать с ним. У него были неожиданные для меня идеи, и он думал о читателе гораздо больше, чем я в то время. Думается, что после его школы я пишу немного лучше.

Николай Иванович пользовался большим моральным авторитетом, так как всегда вел себя достойно и показал себя в обсуждениях мудрым и уравновешенным человеком. Отдел Теоретической Кибернетики прошел через много сложных ситуаций, и во многих спорах наш зав. отделом Владимир Тихонович Дементьев апеллировал ко мнению Николая Ивановича, чтобы убедить других. Я не раз обращался за советом к Николаю Ивановичу. Один из случаев был такой. Я представил в “Дискретный анализ” статью о числе Хадвигера графов с данной средней степенью. Уважаемый Рецензент сказал мне, что результаты неплохие, но статья написана плохо и слишком длинная (сейчас я согласен), и показал, как можно укоротить ста-

тью, и предложил, что он перепишет статью, и мы опубликуем эту новую совместную статью. Я сейчас точно не помню, но мне кажется, Главный Редактор поддержал эту идею. Я пошел за советом к Николаю Ивановичу, ожидая, что он тоже поддержит это ради читателя. Но он неожиданно резко запротестовал (обычно он был невозмутимым) и сказал, что если Уважаемый Рецензент считает, что его вклад такой большой, то он может публиковать отдельную статью после моей. Николай Иванович поговорил с редакторами, и моя работа была опубликована, как я ее писал. Теперь это моя самая цитируемая работа, она переведена в “AMS Translations” и в “Combinatorica”. Общее число ее цитирований (вместе версии в ДА и “Combinatorica”) в MathSciNet составляет 119, а в Google Scholar 305.

Когда в 1975 году Валера Аксёнов и я готовили стенгазету к 40-летию Николая Ивановича, нам казалось, что 40 лет — это очень почтенный возраст, близкий к пенсии. А сейчас уже сыну Николая Ивановича 40 лет (и моему сыну тоже 40 лет), и мне уже так не кажется.

Вед. науч. сотр. ИМ СО РАН, д-р физ.-мат. наук,
проф. университета University of Illinois
at Urbana-Champaign

А. В. Косточка

Он руководил мягко, ненавязчиво и интеллигентно

Сергей Васильевич Севастьянов



Мои воспоминания о Николае Ивановиче Глебове тесно связаны с воспоминаниями о том прежнем Отделении Кибернетики, сердцевиной которого и был Николай Иванович. В то время все наиболее серьезные дела, касающиеся Отделения, решались на “расширенном” *Совете Завлабов*, в котором главенствующее место занимал “триумвират” Глебов–Дементьев–Яковлев. Этот же триумвират решал текущие вопросы в промежутках между советами завлабов. В этой тройке (коллег-завлабов, ровесников — все были с одного 1935 года — и просто хороших товарищей) Дементьев выполнял всю организаторскую работу, Яковлев хорошо разбирался в технических вопросах, а главным “мозгом”, специалистом по науке и неоспоримым научным авторитетом был Николай Иванович.

Эх, весёлое то было время — 70-е – 80-е годы XX столетия! В коридорах Отделения было многолюдно. (В то время в ОК насчитывалось, по моим очень грубым прикидкам, не менее 70 сотрудников. Из них докторскую степень имел лишь один — сам Владимир Тихонович.) Общественная жизнь просто кипела! Мужчины отделения устраивали шахматные и хоккейные турниры. (Не были “в загоне” и футбол с волейболом.) Для женщин тут и там в режиме “онлайн” организовывались курсы “садоводства на дому”, а также “кройки и шитья”. Коллективное отмечание дней рождения было общественной нормой. Коллектив был крепко спаян многочисленными общественными мероприятиями — типа Первомайской и Октябрь-



*Заседание Совета Завлабов: Н. И. Глебов, В. М. Александров, Ю. Л. Васильев,
В. М. Яковлев, А. А. Евдокимов, конец 1970-х*



Н. И. Глебов наблюдает за шахматной игрой В. Носоченко и Р. Ларина, 1977 г.



*Толя Сердюков, играющий в бильярд,
середина 1970-х*

докимов, Тимка Коспанов, Алёша Косточка. Пожалуй, лишь из одного Димы Коршунова, мирно нагружавшего детской лопаткой снег в детские ведёрки и не пытавшегося “завладеть шайбой” (подобно своему отцу — бессменному вратарю кибернетиков, Алексею Дмитриевичу Коршунову), хоккеиста так и не вышло. Он стал заурядным доктором наук, прозябающим сейчас где-то на “украине” Европы, в университетах г. Эдинбурга.

Совершенно понятно и очевидно, что в такой обстановке заниматься настоящей наукой могли только фанатики, — это уже становилось чем-то вроде “хобби”. Статей “на душу в год” писалось крайне мало. Тогда считалась дурным тоном “скоропалительность”, — когда молодой человек, не успев ещё толком философски осмыслить только что полученный им результат, быстро “шлёпает” статью и пытается её тут же опубликовать. (В то время статьи сотрудников ОК преимущественно публиковались в двух сборниках, издававшихся силами и средствами Института математики: в “Управляемых системах” и “Дискретном анализе”.) В авторитетных кру-

ской демонстраций, встречи Нового года, выездов на сельхозработы в подшефный Искитимский совхоз (либо ещё куда подальше — в деревню Дресвянка, на границе с Алтайским краем), регулярных выездов в полном составе на уборку сгнивающих овощей и фруктов на овощной базе УРСа, и т. д. и т. п.

С особой теплотой вспоминаю наши воскресные зарубоны в “хоккей на валенках”. Сколько клюшек переломали! (О сломанных лодыжках и синяках от шайбы я уж и не говорю.) Это была Школа Жизни, куда отцы-кибернетики приводили своих совсем ещё неоперившихся сыновей, из которых потом вырастали настоящие бойцы: Шурик Ев-

гах считалось, что статья должна “хорошо отлежаться” (год, а то и два). Если за это время результат никто не переоткроет (или не “перекроет”), то, по всей видимости, результат стоящий, и его можно публиковать. Больше ценилось не число статей (как сейчас), а их качество. И здесь Николай Иванович преуспел как никто другой. Писал статьи он хотя и редко, но очень “метко”, выдавая результаты в максимально общей форме (что характеризует их принадлежность фундаментальной науке).

Свои результаты он излагал, как может показаться современному читателю, излишне сухо и формально, не прибегая к “иносказательным выражениям” или “поэтическим сравнениям”. Но всегда — абсолютно математически корректно и притом — довольно ясно и чётко. (А в рукописном виде — ещё и каллиграфическим почерком.)

Так же чётко и ясно он “озвучивал” свои мысли в общих дискуссиях и совещаниях, но только если его попросят. Чаще всего мне представляется картина, как Николай Иванович незаметно и тихо присутствует в гомоне общей дискуссии, глядя куда-то в пол и слегка чему-то улыбаясь (так, будто его всё происходящее никак не касается). А когда, наконец, кто-нибудь поинтересуется его мнением, Николай Иванович (слегка вначале, как бы “для разгону”, поотдувавшись) неспешно начинал излагать свои мысли. И заканчивал, как правило, словами типа: “Вот, собственно, и всё, что я хотел сказать”. Всё это — очень мягко, ненавязчиво и интеллигентно. Но, как правило, — вполне убедительно.

Так же мягко и “ненавязчиво” руководил он своей лабораторией на протяжении четырёх десятков лет (а по сути — **никак**). Каждый занимался, чем хотел. И лишь в конце года со всех собирались годовые отчёты, по которым Николай Иванович писал сводный отчёт. При этом, как ни странно, лаборатория занимала одно из первых мест в Институте по числу статей “на душу”. Видимо, здесь в чистом виде работал авторитет Николая Ивановича как учёного. (Правда, положение лаборатории резко изменилось в худшую сторону, когда ударная группа “графистов” во главе с Косточкой и Бородиным вышла из состава лаборатории и организовалась как самостоятельная лаборатория “Теории Графов”.)

Ещё несколько штрихов к портрету Николая Ивановича:

— его твёрдое следование своим убеждениям и принципам (пожалуй, не менее твёрдое, чем у Николая Коперника);

— скромность, интеллигентность, корректность в отношениях с людьми (особенно — с подчинёнными); с другой стороны — никакого панибратства;

— высокая требовательность к себе (чем, видимо, и объясняется его отказ от защиты фактически готовой докторской диссертации).

В жизни, однако, ничего не бывает окрашенным одним цветом. При всей

очевидной доброжелательности и приветливости по отношению к людям, Николай Иванович был довольно закрыт для своих коллег и подчинённых (в отличие от своих товарищей и коллег — Владимира Михайловича и Владимира Тихоновича). Коллективное творчество было ему отнюдь не свойственно. Совместные статьи появлялись не “как правило”, а скорее как редкие исключения. За те 34 года, что я провёл в лаборатории под руководством Николая Ивановича, я не помню случаев, чтобы мы обсуждали с ним какие-то задачки по теории расписаний. А ведь он был (судя по статьям, опубликованным в 1960-е – 70-е годы) отличным “расписальщиком”! Сейчас я очень сожалею об этой навсегда для меня потерянной возможности — поработать с умным человеком, талантливым математиком, коим, несомненно, был мой завлаб Николай Иванович. Впрочем, об этом же могут теперь сожалеть и многие другие коллеги Николая Ивановича (за редким исключением).

Судя по списку трудов, приведенному в конце этой книги, в 2000-е годы статей у Николая Ивановича стало выходить очень мало. Видимо, что-то давило на него, не давало работать, получать новые блестящие результаты. Он вообще стал очень незаметен и ненавязчив. Тихо приходил на работу и запирался в своём кабинете. Поздним вечером уходил домой. Таким же вечером он однажды ушёл от нас навсегда...

Вед. науч. сотр. ИМ СО РАН,
д-р физ.-мат. наук

С. В. Севастьянов

*Стараюсь продолжать традиции
Николая Ивановича*

Адиль Ильясович Ерзин



Я познакомился с Николаем Ивановичем Глебовым в 1976 году, когда, будучи студентом 4-го курса ММФ НГУ, пришёл специализироваться на кафедру теоретической кибернетики, заведующим которой был Владимир Тихонович Дементьев, а его заместителем — Николай Иванович. Моим научным руководителем был Владимир Тихонович, который при принятии важных решений часто консультировался с Николаем Ивановичем. Так делал не он один, а также многие другие коллеги. В частности, без “одобрения” Николая Ивановича соискателей не допускали к защите. Когда мой аспирант получил первые результаты, я тоже пошёл их рассказывать Николаю Ивановичу, который сначала отнёсся к тематике со скепсисом. Однако через некоторое время поменял своё мнение, и мой аспирант получил “добро”, что лишний раз показало, что Николай Иванович не только имел своё мнение, но и не считал зазорным его поменять.

Волею случая в настоящий момент я занимаю в ИМ СО РАН кабинет, в котором много лет работал Николай Иванович, и, кроме того, руковожу кафедрой теоретической кибернетики, пытаюсь в меру своих сил продолжать традиции Николая Ивановича и Владимира Тихоновича.

Зав. кафедрой теоретической кибернетики НГУ,
д-р физ.-мат. наук, проф. НГУ

А. И. Ерзин

По следам Кармаркара
(из книги “И ещё треть века”)

Владимир Вениаминович Брыскин



В начале 80-х годов, в процессе постепенного разрушения “железного занавеса”, у нас стали издавать больше переведённых на русский язык западных научных изданий. Одним из первых в приятном пополнении нашего информационного мира стал популярный американский журнал “Scientific American”. И вот в книжке этого журнала появляется статья об американском математике индийского происхождения — Кармаркаре, который предложил сверхэффективный алгоритм решения линейно-программных задач. Сообщение, естественно, заинтересовало наших специалистов.

Безусловный авторитет в линейном программировании — Владимир Александрович Булавский, который работал в математико-экономическом подразделении нашего института, добыл экземпляр научной статьи с описанием результатов Кармаркара и предложил желающим исследовать эти материалы. В числе охотников на такую работу оказались два сотрудника нашего отдела: уже знакомый читателю В. М. Яковлев и другой, не менее учёный и уважаемый мною приятель — Николай Иванович Глебов. Я при них взялся быть подсобником для проведения численных экспериментов на ЭВМ. Наблюдения за этой работой двух моих товарищей навсегда остались в памяти как один из самых впечатляющих примеров квалифицированной исследовательской деятельности. Оба учёных, имеющие за плечами опыт разных научных школ и собственных разработок, естественно, отличающиеся характерами и темпераментом, на моих глазах продирались сквозь

дебри иноземной публикации. Мне трудно передать это словами, но было видно, как инициатива нащупывания существа дела переходит от одного к другому. Я по своему невежеству только с трудом успевал хоть как-то осознавать эти переходы, а многое “доходило” до меня лишь в процессе изготовления практически под диктовку программ для проверочных расчётов.

После нескольких дней упорной работы выяснилось, что американский алгоритм, как и положено, тоже содержит внутренний источник накопления ошибок вычислений и никак не способен оправдать рекламные обещания популярного журнала. Уж не помню, удалось ли уговорить прекрасных “сыщиков” на публикацию их находок.

Заодно придётся рассказать, что сотрудник нашего института Илья Дикин, позднее перебравшийся в Иркутск, задолго до Кармаркара предложил подобный алгоритм и использовал его для решения практических задач. Кажется, позднее этот факт отечественного приоритета был публично установлен и обнародован на одной из научных конференций, но кого на Западе особенно интересуют такие сообщения из нашей страны...

Друг Н. И. Глебова, офицер подводного флота,
ст. науч. сотр. ИМ СО РАН, канд. техн. наук

В. В. Брыскин

Сергей Владимирович Августинovich

Николай Иванович всегда был спокоен. Раздражение проявлялось им столь редко и столь сдержанно, что становилось особенно весомым. Это и многое другое делало его человеком авторитетным, с его мнением не просто считались в нашем отделе, часто оно было решающим, окончательным. Воспоминания, теперь уже достаточно далекие, подсказывают, что Николаю Ивановичу чувство страха было не свойственно. Так ведут себя люди, жизнь которых не была легкой и беззаботной, которые знают цену многим нетривиальным вещам.

Наши научные интересы практически не пересекались, но из общих соображений я твердо уверен, что и в математической области Николай Иванович придерживался определенных принципов, не публиковал результаты легковесные, малопродуманные, какой бы ни складывалась конъюнктура.

Таким мне запомнился Николай Иванович — твердым, спокойным, имеющим свое мнение.

17.09.2015

Ст. науч. сотр. ИМ СО РАН,
канд. физ.-мат. наук

С. В. Августинovich

*Мы удивлялись широкой эрудиции
Николая Ивановича*

Ольга Александровна Заблоцкая



Николай Иванович был моим научным руководителем в аспирантуре и при подготовке кандидатской диссертации (1981–85 гг.). До поступления в аспирантуру я занималась дискретной оптимизацией под руководством А. А. Колоколова. Работа над диссертацией продолжала исследования, начатые в Омске. Поэтому с некоторой периодичностью в зале семинаров отделения кибернетики и в кабинете Николая Ивановича проходили наши микросеминары “на троих”: Николай Иванович, Александр Александрович и я. Обсуждения на них всегда были очень плодотворными. Мы с Александром Александровичем с большим вниманием относились к замечаниям и пожеланиям Николая Ивановича, удивляясь его широкой эрудиции и способности очень быстро понимать суть проблемы. Кроме того, Николай Иванович никогда не отказывал в помощи и в технических вопросах при организации контактов и поездок, необходимых при защите диссертации. В то же время он всегда был сдержан и очень корректен в общении. Я навсегда остаюсь от души благодарна ему.

Доцент Омского государственного
университета путей сообщения,
канд. физ.-мат. наук

О. А. Заблоцкая

О папе

Алексей Николаевич Глебов



Мне совсем не просто писать о своем отце. Папа был удивительно порядочным и принципиальным человеком, но при этом очень закрытым, всё держал внутри себя. Даже для нас, самых родных и близких людей, он во многом так и остался загадкой. Главное, что я знаю об отце и что с годами всё сильнее чувствую, — это то, что он всегда точно знал свое предназначение, свою цель в жизни. Никому и никогда об этом не говорил, но это знание всегда было с ним. Это не было результатом родительского воспитания, школы, влияния сверстников или старших наставников. Папа всегда был удивительно независимым от чужого мнения, от любого влияния среды. Его словно очень многое не касалось из того, что для других часто является определяющим в жизни: сложившиеся традиции, мода, мнения друзей, их примеры, конъюнктурные соображения. Ничто не могло сбить его собственный прицел. Как будто он нес внутри себя свою собственную программу, свою шкалу ценностей, жизненных ориентиров, которые никому никогда не навязывал, но сам им следовал неукоснительно, даже непоколебимо.

Начну с самого начала. Родился папа 28 апреля 1935 года в деревне Новая Чекаевка Мордовской АССР, что под Саранском. Деревня эта была построена в 1920-е годы крестьянами из окрестных сел, одним из которых был папин дед Семён. Папины родители — Иван Семёнович и Феодосья Осиповна (для родных — баба Феня) Глебовы тоже были крестьянами. Папин отец Иван в 1942 году ушел на фронт, и через некоторое время пропал



Дед Семён и его семья: жена Ульяна, дети Акулина, Мария, Татьяна, Василий и маленький Миша Глебов (папин старший брат), 1933 г.

без вести. Никто из нас, папиных родных, до сих пор не знает, где он похоронен. Семья осталась без кормильца, и папа поступил учиться в Чекаевскую начальную школу в тяжелые военные годы, а заканчивал учебу в Саранске в не менее тяжелые послевоенные. Учился он на отлично, и окончил 4-ю саранскую среднюю школу в 1952 году с золотой медалью.

Настало время определяться с выбором дальнейшего жизненного пути. И вот тут в полной мере проявилось папино никем не внушенное, проявленное внутри него понимание того, какому роду занятий посвятить себя, какому делу служить...

Позволю себе небольшое отступление. Когда в июне нынешнего (2015) года я приезжал в Саранск, к папиной родне, то специально спрашивал у его старшего брата Михаила и у папиной подруги школьных лет Татьяны Падукиной (им обоим сейчас уже за 80), не знают ли они, что привело папу к решению поступить в Казанский университет, на физико-математический факультет. Откуда вообще появилась эта идея? Может быть, были родственники, или учителя, или старшие товарищи, которые подсказали папе эту мысль, посоветовали ему поступать туда?

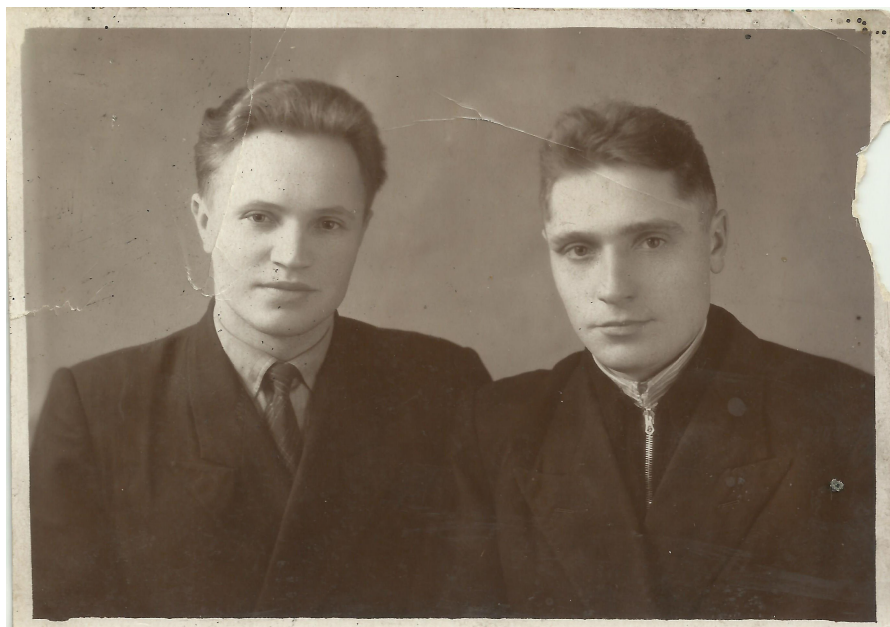
Мне ответили, что нет, ничего про такое не знают. Все жители папиной деревни были крестьянами, занимались сельским хозяйством. Молодежь его поколения, в том числе и папины двоюродные братья и сестры, либо вообще не поступали в вузы, либо поступали в учебные заведения в преде-



Папины родители — Иван Семёнович и Феодосья Осиповна, 1942 г.



Коля Глебов с женой брата Марусей, племянником Васей и матерью, 1952 г.



Коля и Миша Глебовы, Казань, 1955 г.



Езда по-старинке: Коля Глебов и мальчик из его деревни, сер. 1950-х

лах Саранска, на специальности, которые помогали им успешно поступить на работу, давали преимущества в повседневной, практической жизни. Мой отец был единственным, кто, следуя неведомому зову, решился поехать в далекую Казань, чтобы учиться там непонятной для его односельчан абстрактной математике.

О годах папиной учебы в Казанском университете я подробно писать не буду. Во-первых, потому, что сам об этом мало знаю. А еще потому, что об этом периоде папиной жизни свои замечательные воспоминания, приведенные в этой книге, оставили его друзья по Казанскому университету Николай Борисович Ильинский (которого, увы, уже нет в живых) и Валентин Иванович Жегалов. Скажу только, что учился папа на отлично, был одним из лучших на своем потоке, постоянно получал молотовские и другие повышенные стипендии, что позволяло ему оказывать существенную помощь матери и родным в Саранске, которых он регулярно навещал.

Примечательно, что вскоре после своего поступления в аспирантуру Казанского университета папа радикальным образом поменял направление своей научной работы, отказался от первоначальной темы исследований, связанной с обратными краевыми задачами, где он к тому времени уже получил интересные, перспективные результаты, и обратился к совершенно новой для себя области — теоретической кибернетике, исследованию которой он посвятил всю свою дальнейшую жизнь. Отца не остановило даже то, что его научным руководителем в аспирантуре КГУ был Михаил Тихонович Нужин — замечательный математик, блестящий специалист по обратным краевым задачам и бессменный ректор Казанского университета на протяжении многих лет. Такой поворот в жизни отца я рассматриваю как еще один яркий пример его самобытности, интуитивного понимания того, каким должен быть его творческий путь как ученого. Понимания, которое подчас заставляло отца плыть против течения, идти наперекор всему, вопреки сложившимся обстоятельствам, если того требовало его внутреннее чутье, какое-то врожденное чувство правды. М. Т. Нужин, кстати, в сложившейся ситуации понял отца и поддержал его научные устремления, сам познакомив его с Алексеем Андреевичем Ляпуновым, который стал папиным научным руководителем по теоретической кибернетике.

Таким образом, папа был прикомандирован к аспирантуре Московского университета, которую проходил под началом А. А. Ляпунова, а после окончания аспирантуры в 1960 году остался работать над кандидатской диссертацией в НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева при Казанском университете. В мае 1963 года папа успешно защитил кандидатскую диссертацию по теме “О некоторых алгебраических вопросах, связанных с программированием”, а в конце того же года, следом за Ляпуновым,



Папа с женой Людмилой, Новосибирский академгородок, 1964 г.

переехал работать в Новосибирский академгородок, в недавно созданный институт математики СО АН СССР.

Надо сказать, что в Новосибирском академгородке папа появлялся и до этого, во время своей длительной научной командировки, продолжавшейся с сентября 1962 года по август 1963 года. Именно тогда в Академгородке он познакомился со своей будущей женой и моей мамой Людмилой Аркадьевной Внуковской. В то время мама завершала обучение в Новосибирском педагогическом институте на факультете иностранных языков. После его окончания она всю оставшуюся жизнь проработала в Академгородке преподавателем английского языка. Летом 1963 года мои родители поженились, а в апреле 1964 года у них родилась дочь, моя старшая сестра Алёнка. В октябре 1973 года появился на свет я.

Вообще, период 1960-х – 1970-х годов стал для моих родителей, для всей нашей семьи, да и для всего Академгородка самым плодотворным и счастливым. Именно на этот период жизни моего отца пришлось не только становление его семьи, но и интенсивная работа над самыми значительными, самыми главными его научными результатами, которые определили круг его научных интересов и создали ему имя в научном мире.



Дочь Алёнка, 1968 г.



Сын Алёша, 1974 г.

Жили родители вдохновенно и счастливо в двухкомнатной квартире, которую им дали на ул. Терешковой. И они сами, и все их знакомые без конца ходили друг к другу в гости, а в “красные дни календаря” 7 ноября и 1 мая все мы дружно с шариками, флагами и транспорантами выходили на праздничные демонстрации! Мама устраивала огромные застолья на 15-20 человек, и тогда в наш дом приходили вместе с женами и детьми папины



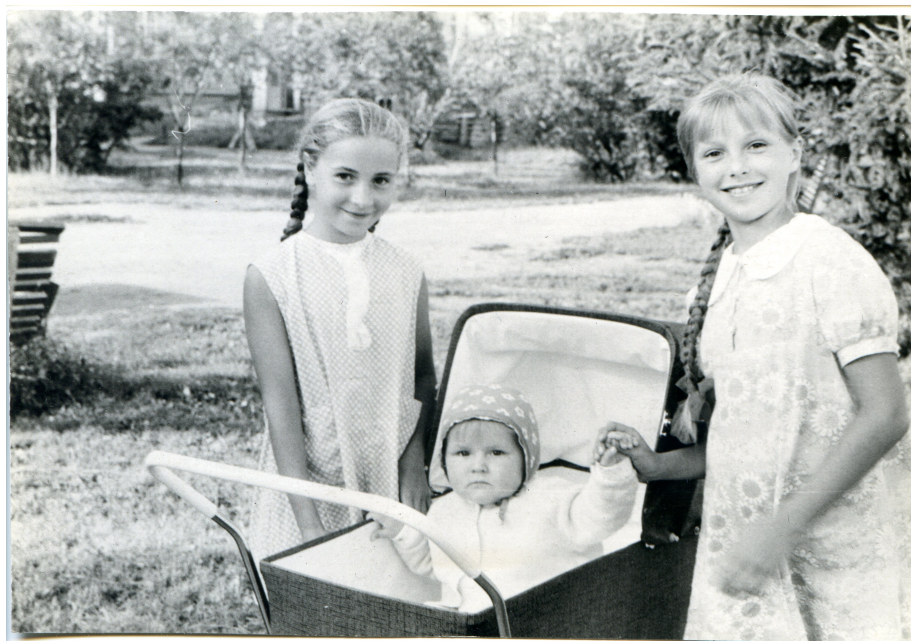
Танцующий папа, 1 мая 1970 г.

и мамины друзья, товарищи по Институту математики и Новосибирскому университету: Эдуард Хайрутдинович Гимади, Рудольф Михайлович Ларин, Владимир Михайлович Яковлев, Владимир Тихонович Дементьев, Андрей Николаевич Сычев, Владимир Вениаминович Брыскин, Виталий Афанасьевич Перепелица и многие другие. Бывал у нас в доме и сам Алексей Андреевич Ляпунов, у которого сложились очень добрые, доверительные отношения не только с моим папой, но и с мамой.

В конце 1970-х папа научился водить, и они с мамой купили машину — желтый Москвич 61-12 НББ, на котором папа возил нас летом в лес за грибами и на огород (огород был вотчиной мамы — папе никогда это не было интересно), а иногда мы просто катались всей семьей по бердскому шоссе. Папа всегда сам чинил свой Москвич, вечерами подолгу возился с ним в гараже. Вместе со своим коллегой и добрым другом Владимиром



С сыном Алёшей на руках, встречаем Новый 1974 год



*Во дворе нашего дома на ул. Терешковой, 38:
я с двоюродной сестрой Валечкой и Алёнкой, 1974 г.*



Выступление в конференц-зале ИМ, середина 1970-х



Рыбалка с моторки вместе с Э. Х. Гимади, середина 1970-х



На берегу Обского моря, середина 1970-х

бораторией Дискретных экстремальных задач в Институте математики (сначала исполняющим обязанности, а с июня 1977 года — полноправным завлабом). Коллективом этой лаборатории он руководил с тех пор до конца своей жизни. Руководил разумно и несуетливо, спокойно разрешая все возникающие споры и не доводя дело до серьезных конфликтов. Отличительными качествами отца как руководителя всегда были мудрость, взвешенность и справедливость. И все его коллеги знали это. И уважали отца.

В заграничные командировки папа ездил мало, всего трижды, и при этом последняя его поездка в Польшу обернулась тяжелой болезнью и последующей долгой реабилитацией. После этого случая отец больше за рубеж не ездил. Видимо, не “заграничный” он был человек. Все это — заграница, суета, тщеславие, “научные тусовки” — было не для него и не про него. Отец жил какой-то своей, особенной, отдельной жизнью. Он и докторскую диссертацию не защитил во многом потому, что обычное житейское тщеславие, амбиции, соблазны карьерного роста были ему чужды. И еще он считал себя недостойным. Считал, что еще не получил своих самых важных, глубин-

Михайловичем Яковлевым часто ездил рыбачить на берег Оби, чуть ниже ОБГЭС. Иногда они брали с собой на рыбалку меня.

В более дальние поездки — на Алтай — мы ездили вместе с еще одним замечательным другом нашей семьи — Владимиром Вениаминовичем Брыскиным и его супругой. Брыскин, кстати, помогал папе выбирать машину, когда мы ее покупали, и часто помогал ее чинить. Отец так и не поменял свой Москвич ни на какое другое авто, а продал его в 1990-х годах, когда ему уже стало тяжело водить, а главное, ремонтировать машину (а из меня водитель не получился).

В феврале 1974 года папа был назначен заведовать ла-



Семья Глебовых: Михаил, баба Феня, я, мама и папа, 1982 г.

ных результатов. Хотя многие его коллеги полагали (и справедливо), что научного материала у отца хватает уже не на одну, а на две докторские диссертации.

Что еще добавить об отце? Не хочется много говорить о последних годах его жизни, когда папу стали одолевать болезни, постоянно мучило давление, и даже обычные рутинные обязанности руководителя лаборатории давались ему с большим трудом. Но и в этом своем состоянии к каждому возложенному на него делу папа подходил с необычайной ответственностью, со всей тщательностью, вникал во все детали. Это отличало его и в молодом возрасте. Отец скорее мог пожертвовать количеством, а не качеством того, над чем работал. Такой папин подход сказался на числе опубликованных им статей, которых оказалось не так уж много. Но каждая папина работа несет в себе что-то значительное, содержит какую-то “изюминку”. Некото-



Ездили смотреть солнечное затмение вместе с Яковлевыми, 31 июля 1981 г.

рые папины статьи открыли новые направления исследований, а в других он предложил неожиданные и плодотворные подходы к уже известным задачам.

Мне кажется, только в этом мире научных идей и открытий, с их необычной удивительной красотой, подчас революционных и парадоксальных, смогла в полной мере раскрыться натура моего отца, вся его творческая неповторимость. Это было совершенно незаметно в повседневной жизни, где папа представал немногословным, замкнутым, и кому-то мог даже показаться



Папа с А. Н. Сычевым на о. Байкал, бухта Песчаная, 1987 г.



Перед поездкой в Сростки с Брыскиными, 1989 г.



Папа и В. Т. Дементьев у здания СУНЦ НГУ, 16 апреля 2005 г.



*Совместное празднование 70-летия с В. Т. Дементьевым,
в центре А. А. Колоколов*

нудным. Даже моя мама часто называла папу сухим, неэмоциональным, не способным на душевные порывы. И сильно переживала по этому поводу. А мне кажется, всё обстояло совершенно иначе...

С раннего детства я ощущал удивительный, огромный мир, полный красоты, гармонии, эмоций и необыкновенных идей, который папа носил внутри себя. Только почему-то он очень тщательно оберегал этот мир ото всех, прятал его где-то глубоко в себе, не открывая даже самым родным и близким людям. Это был как бы невидимый Град Китеж, который лишь раз в сто лет восстает со дна и предстает перед глазами изумленного путника. Отец всегда был молчаливым, но в его молчании заключено было для меня гораздо больше, чем в пламенных и разумных речах многих других. По-моему, папа так и ушел из этой жизни непостижимым, унеся вместе с собой свою Вселенную, тайну которой он так и не раскрыл всем нам, жившим рядом с ним.

Светлая тебе память, Папа!

Сын Николая Ивановича, выпускник ММФ НГУ,
ст. науч. сотр. ИМ СО РАН, канд. физ.-мат. наук

А. Н. Глебов

Папа, спасибо тебе за всё...

Елена Николаевна Глебова



Папа и Байкал

Каждый раз при упоминании озера Байкал мысленно переношусь в далекое детство... В то лето, когда папа взял меня с собой в командировку на Байкал, на остров Ольхон.

Это было лето 1975 года, традиционная Байкальская школа-семинар, которая, как обычно, проводилась в неформальной обстановке, на природе, в походных условиях. Двое папиных сотрудников тоже взяли с собой своих сыновей-школьников. Из троих ребят я была самая младшая (училась я тогда в пятом или шестом классе). Мы, дети, активно участвовали в жизни нашего палаточного лагеря: собирали дрова, приносили воду, мыли посуду, помогали взрослым варить еду, а иногда чистить и коптить рыбу — необычайно вкусного и нежного байкальского омуля. Нам довелось познакомиться с разными способами копчения рыбы — горячим и холодным. Думаю, мы действительно были полезны, и поэтому, наверное, в ту поездку я впервые в жизни почувствовала себя взрослой...

Как мне видится сейчас, это был как раз один из периодов отцовского воспитания, так необходимого взрослеющим детям. Мы были под присмотром, но в то же время нам был предоставлен широкий простор для про-



На острове Ольхон, 1975 г.

явления собственной инициативы. Никогда не забыть мне красоту суровой байкальской природы: хрустальные розовые рассветы, тревожные лилово-багряные закаты над исполинским холодным зеркалом озера, черные громады базальтовых скал, где прямо из плоской поверхности отполированных каменных плит росли кустики ярких желтых маков...

Мощные вековые лиственницы, раскинувшие над полянами причудливо изогнутые ветви, похожие на руки... Живописные гроты, заполненные водой, куда мы с папой заплывали на лодке во время вечерних прогулок...

А вкуснейшее деревенское масло, сливки и творог, за которыми мы ходили со взрослыми в близлежащий поселок Харанцы!.. Тогда, на Ольхоне, я впервые попробовала молочные продукты, изготовленные домашним способом. И их вкус тоже связан с Детством... Байкал, Ольхон, Хужир, Харанцы... Легенды о байкальских ветрах Култук и Баргузин, об Ангаре. Удивительные названия звучат как приглашение в далекую чудесную сказку.

Воспоминания эти не стираются и не тускнеют с годами. И нынешняя тяга к дальним странствиям, наверное, берет свои истоки как раз в той поездке, где папа открыл мне огромный удивительный мир.

Впоследствии во время моей учебы в старших классах и в Новосибирском государственном университете мама с папой не раз покупали мне ту-

ристические путевки и отпускали уже одну знакомиться с новыми местами большой страны. Благодаря им я побывала в Ташкенте, Бухаре, Самарканде, горах Чимгана (Узбекистан), в Киргизии, на озере Иссык-куль, в Алма-Ате. В то время все эти красивые края входили в состав Советского Союза.

Спасибо вам, дорогие мои родители! Благодаря вам у меня было настоящее беззаботное детство и счастливая юность!..

Молчание — золото

Правильно говорят: разговор — серебро, молчание — золото. Наш папа был молчаливым. Говорил он мало, но все высказывания его были очень меткими. Мне запомнился эпизод, когда мы с мамой обсуждали мои отношения с одноклассниками. Папа долго слушал, не вмешиваясь в разговор, а потом сказал только одну фразу: “Вы — не стратеги, а мелкие тактики!” Тогда я не способна еще была в полной мере оценить подоплёку его слов. Но теперь, имея за спиной свой жизненный опыт, думаю, что уже понимаю, в чем были тогда неправы мы с мамой.

Папина чуткость

Мама искренне считала, что папа не склонен к психологическому анализу поведения людей. Слушая её, я, похоже, тоже начинала так думать, но один случай из моей жизни заставил меня всерьёз пересмотреть такое мнение.

Это было во время сессии, поздно ночью, накануне экзамена по одному из математических предметов. Я очень волновалась. Помню, что это уже была чрезмерная степень волнения, мне было очень плохо. Папа предложил помочь — объяснить мне непонятные места теории. Хотя я и старалась скрыть свою наэлектризованность, папа, отвечая на мои вопросы, заметил моё состояние. Он посмотрел на меня очень пронизательно, и проникновенно сказал: “Алёнушка, ну что ж ты так волнуешься? Так, как будто завтра состоится не экзамен, а решение твоей судьбы: буквально, останешься ли ты в живых! Ведь это же не так, жизнь твоя завтра не окончится!”

Преодолевая нервность, я заставила себя вдуматься в смысл его слов и ухватилась с готовностью за эту позитивную мысль: “А ведь и правда, ведь не умру же я завтра — так что ж тогда я так переживаю?” И вот, благодаря папиной чуткости, мне стало существенно легче!

Не раз потом в тяжелые минуты жизни я вспоминала эти папины слова и мысленно проговаривала их, как волшебное заклинание: что бы там завтра ни выяснилось плохого, как бы там все ни сложилось, но мы завтра не умрем, а будем продолжать жить! И это значит, что не всё потеряно, и будет возможно бороться дальше. Бороться и надеяться. . .

Скромность во всём

Папа был удивительно непритязательным и скромным во всём, что касалось его личных потребностей. Он никогда не стремился ни к приобретению новых вещей, одежды для себя, ни к тому, чтобы вкуснее и разнообразнее поесть. Зависимость от материальных благ, свойственная большинству людей, совершенно не была ему присуща.

Распоряжение семейным бюджетом он полностью, раз и навсегда, доверил маме. И никогда — по её словам — не спросил у неё никакого отчета о произведенных ею тратах. Если же она советовалась с ним по поводу какой-нибудь дорогой покупки, он неизменно отвечал: “Лютик, решай сама. Я тебе полностью доверяю, знаю, что ты хочешь сделать так, как лучше для всех.” Надо отдать маме должное, что, в отличие от многих женщин, она тоже крайне мало тратила лично на себя, практически всё — на семью, на нас, детей. Благодаря экономности и трудолюбию родителей, у нас было всё, что нужно для счастливой безбедной жизни.

Так же, как и в отношении жизненных благ, папа, в отличие от многих людей, был совершенно не требователен по части внимания к себе окружающих. Даже когда он болел, он старался никого не затруднять дополнительными просьбами. Довольствовался тем, что мог сделать сам, и тем, что домашние делали для него по собственной инициативе. Удивительно, но при этом он прекрасно осознавал, что люди сильно отличаются друг от друга, и никогда не мерил других по себе. Не припомню, чтобы он когда-нибудь укорял меня за эгоизм и невнимание к нему самому. Однако, зная, что наша мама — в отличие от него — всегда очень нуждалась в доброжелательном общении, он частенько просил нас, меня и брата, больше заботиться о ней, чаще уделять ей время.

Мамин душевный комфорт был для него важнее, чем свой. Нужды и проблемы сотрудников руководимой им лаборатории значили для него больше, чем собственные нужды. За это очень многие в Институте математики моего отцу до сих пор благодарны.

Интересы дела — превыше всего

Папа был непритязателен почти до аскетизма. Единственное, что ему было необходимо, как воздух, это возможность беспрепятственно заниматься любимой работой: математикой. Мой отец был один из тех редких людей, что живут в соответствии со своим призванием. Не знаю наверняка, осознавал ли папа себя в связи с этим счастливым человеком, но хочется верить, что, по большому счету, это было так. . .

Бесспорно же то, что он очень многого достиг в науке, что его безмерно уважали и ценили все те, кто его знал по работе — и за его математический талант, и за его мудрый стиль руководства лабораторией, и за его за-

мечательные человеческие качества — принципиальность, справедливость, чуткость, готовность помочь, за его высочайшую порядочность...

Интересы дела папа ставил превыше всего — в том числе превыше признания собственных заслуг. Все его личные научные достижения, несомненно, пошли во благо его Лаборатории, его Отдела, его Института...

За всё это его высоко ценили как руководителя. Чего стоит хотя бы тот факт, что папа продолжал возглавлять лабораторию еще долгое время после того, как достиг возрастного рубежа, после которого, с юридической точки зрения, научные сотрудники не могут занимать руководящие посты. Руководство института никого не могло назначить вместо него. Фактически он оказался незаменимым! Папа был человеком долга, обладал повышенным чувством ответственности, поэтому, несмотря на болезнь, преодолевая ежедневно и ежечасно свое плохое состояние, он — в буквальном смысле слова — до последнего часа своей жизни отдавал все силы работе и продолжал руководить вверенным ему коллективом!

В своих отношениях с людьми папа был очень деликатным. Будучи проныцательным, он хорошо видел чужие недостатки и особенности характера, но был очень снисходительным и терпимым, никого не осуждал. Вместо того, чтобы указывать людям на их недавние промахи и ошибки, он предпочитал быть конструктивным: в доверительном разговоре призывал собеседника к правильной линии поведения в будущем. В этом проявлялась его большая мудрость.

Считается, что родители скорее воспитывают своих детей своим личным примером, нежели словесными увещаниями и нотациями. Папа, думаю, мне, соответствовал как раз этому правилу: он никому не навязывал своего мнения, но был примером для своих детей и для окружающих, достойным подражания во всех жизненных ситуациях.

Папа, спасибо тебе за всё!

Дочь Николая Ивановича,
выпускница ЭФ НГУ

Е. Н. Глебова

Мой Дедушка

Олег Игоревич Пеньков



Чем старше я становился, тем всё реже бывал у Бабушки с Дедушкой в гостях. Но, сколько я себя помню, Дедушка всегда приходил домой с работы примерно в одно и тоже время, переодевался и приступал к просмотру вечерних новостей. Я любил играть с Дедушкой в домино и обычно, бывая у них в гостях, подходил с предложением поиграть. Дедушка зачастую откладывал просмотр новостей ради этого дела либо начинал игру со мной в домино, а новости только слушал.

Только после смерти Дедушки я начал узнавать о том, каким он был. Бабушка часто вспоминала о Дедушке, рассказывала о его порядочности, скромности. О том, что он никогда не приписывал свою фамилию к работам своих учеников, вне зависимости от величины внесённого им вклада. Несмотря на то что Дедушка был прирождённым математиком, он был ещё и “народным умельцем” — так часто о нём говорила моя Бабушка: “Вот сломается, например, швейная машина. Я позову его — Коля! Он придёт, тихо, спокойно, без ругани пообщается с машинкой, а потом просто подойдёт и тихо скажет, что всё готово и можно дальше использовать.”

Бабушка рассказывала, что Дедушка никогда с ней не ссорился. Даже когда она была чем-то недовольна и ругала Дедушку, он успокаивал её или просто тихо уходил в другую комнату, не давая конфликту разгореться. Хочется подметить, что слово “никогда” в повседневной жизни зачастую приукрашивает сказанное. В то время как гораздо честнее сказать “почти никогда”. Мой Дедушка — тот самый редкий случай, в котором это приукрашивание отсутствует или же сведено к минимуму.

Дедушка был и будет прекрасным примером того, как следует себя вести в повседневной жизни, как общаться с людьми, с какой ответственностью относиться к своей работе. Слушая и читая рассказы о нём, я чувствую огромное желание подражать ему, вести себя в жизни так, чтобы тоже быть примером для подражания.

Вечная память тебе, Дедушка.

Старший внук Николая Ивановича,
выпускник ФФ НГУ,

О. И. Пеньков

Список трудов Н. И. Глебова

1. Статьи в научных журналах и сборниках на русском языке

1. Глебов Н. И. Построение крылового профиля по заданной хордовой диаграмме распределения скорости или давления // Сб. студ. научн. работ, физико-матем. и хим. науки. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1961.
2. Глебов Н. И. Синтез операторов // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1962. Вып. 8. С. 191–200.
3. Глебов Н. И. Об алгебраической эквивалентности подмножеств категории // Там же. С. 201–209.
4. Глебов Н. И. О представлении операторов над памятью // Доклады АН СССР. 1962. Т. 144. № 3. С. 516–519.
5. Глебов Н. И. О строении класса R -критериев эквивалентности // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1963. Вып. 9. С. 103–122.
6. Глебов Н. И. О множествах значений некоторых вектор-функций, зависящих от систем множеств // Сиб. матем. журн. 1964. Т. 5. № 4. С. 778–782.
7. Глебов Н. И. О выпуклых последовательностях // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1965. Вып. 4. С. 10–22.
8. Глебов Н. И. О верхней оценке длины оптимального расписания для двух работ // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1968. Вып. 20. С. 225–229.
9. Глебов Н. И. Алгоритм составления оптимального расписания для двух работ // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1968. Вып. 1. С. 14–20.
10. Глебов Н. И. Об одном обобщении теоремы Какутани о неподвижной точке // Доклады АН СССР. 1969. Т. 185. № 5. С. 981–983.
11. Глебов Н. И., Перепелица В. А. О нижней и верхней оценках для одной задачи теории расписаний // Исследования по кибернетике: Сб. статей. М.: Сов. радио, 1970. С. 11–17.

12. Глебов Н. И., Дементьев В. Т., Сычев А. Н. *О динамике развития однородных технических систем* // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1971. Вып. 8. С. 51–67.
13. Глебов Н. И. *Об одном классе задач выпуклого целочисленного программирования* // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1973. Вып. 11. С. 38–42.
14. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Перепелица В. А. *Исследования по теории расписаний* // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1974. Вып. 12. С. 3–10.
15. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Дементьев В. Т. *Об одном методе построения нижней оценки и приближенного решения с апостериорной оценкой точности для задачи стандартизации* // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1974. Вып. 13. С. 26–31.
16. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Перепелица В. А. *Об одном приближенном алгоритме с апостериорной оценкой точности решения для задачи размещения* // Оптимальное перспективное планирование в отраслях промышленного производства: Сб. науч. тр. Ч. 1. Новосибирск, 1974. С. 53–61.
17. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Перепелица В. А. *Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации* // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1975. Вып. 31. С. 35–42.
18. Гимади Э. Х., Глебов Н. И. *Задача календарного планирования в условиях ограниченных ресурсов* // Исследование операций: Сб. науч. тр. Новосибирск, 1975. Вып. 5.
19. Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Дементьев В. Т. *Типовая методика оптимизации одномерного параметрического ряда* // М.: Изд-во стандартов, 1976. 64 с.
20. Глебов Н. И. *Некоторые случаи сводимости m -станочной задачи Джонсона к задаче с двумя станками* // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1978. Вып. 17. С. 46–51.
21. Глебов Н. И. *О применимости метода покоординатного спуска к некоторым задачам выпуклого целочисленного программирования* //

Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1978. Вып. 17. С. 52–59.

22. Глебов Н. И. *О минимизации выпуклой сепарабельной функции на пересечении полиматроидов* // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983. Вып. 23. С. 33–43.
23. Глебов Н. И. *Базисные системы и задача минимизации на пересечении базисных систем* // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. Вып. 25. С. 58–67.
24. Глебов Н. И., Косточка А. В. *Сложность вычисления некоторых функций от графов* // Методы дискретного анализа в синтезе реализаций булевых функций: Сб. науч. тр. Новосибирск, 1991. Вып. 51. С. 7–16.
25. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Сердюков А. И. *Алгоритм для приближенного решения задачи коммивояжера и его вероятностный анализ* // Сиб. журн. исследования операций. 1994. Т. 1. № 2. С. 8–17.
26. Гимади Э. Х., Глебов Н. И. *Задача оснащения иерархической системы управления и связи* // Труды ИМ СО РАН. Новосибирск, 1994. Т. 28. С. 52–62.
27. Глебов Н. И., Косточка А. В. *О наименьших независимых доминирующих множествах в графах* // Сиб. журн. исследования операций. 1994. Т. 1. № 4. С. 7–21.
28. Глебов Н. И., Щукин А. Г. *О сложности некоторых обобщений двухстаночной задачи Джонсона* // Дискретный анализ и исследование операций. 1996. Т. 3. № 1. С. 80–90.
29. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Залюбовский В. В. *О некоторых задачах погашения взаимных долгов предприятий* // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 1997. Т. 4. № 1. С. 30–39.
30. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Залюбовский В. В. *О задачах целесообразного товарообмена* // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 1998. Т. 5. № 1. С. 3–11.
31. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Сердюков А. И. *Об одной задаче выбора циклического маршрута и загрузки транспортного средства* // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 1998. Т. 5. № 1. С. 12–18.

32. Глебов Н. И., Шенмайер В. В. *О применимости алгоритма покоординатного подъема к задачам целочисленного программирования* // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2000. Т. 7. № 4. С. 38–47.
33. Глебов Н. И. *К описанию одного класса задач, разрешимых алгоритмом покоординатного подъема* // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2001. Т. 8. № 3. С. 15–25.
34. Глебов Н. И. *Об условиях разрешимости оптимизационных задач жадным алгоритмом* // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2002. Т. 9. № 2. С. 3–12.
35. Глебов Н. И. *Об одном обобщении минимаксной задачи о назначениях* // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2004. Т. 11. № 4. С. 36–43.
36. Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Пяткин А. В. *Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом* // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2007. Т. 14. № 1. С. 32–42.

2. Статьи на английском языке и переводы русских статей

37. Glebov N. I., Kostochka A. V. *Complexity of computing some functions on graphs* // Sib. Advances in Math. 1993. V. 3. No 1. 87–93.
38. Gimadi E. Kh., Glebov N. I., Serdyukov A. I. *An approximation algorithm for the traveling salesman problem and its probabilistic analysis* // Discrete Analysis and Operations Research (series: Mathematics and Its Applications). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. V. 355. P. 35–44.
39. Glebov N. I., Kostochka A. V. *On minimum independent dominating sets in graphs* // Discrete Analysis and Operations Research (series: Mathematics and Its Applications). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. V. 355. P. 45–58.
40. Glebov N. I., Kostochka A. V. *On independent domination number of graphs with given minimum degree* // Preprint 96-47 Dimacs. New Brunswick: Rutgers University, 1996. 5 p.

41. **Glebov N. I., Kostochka A. V.** *On the independent domination number of graphs with given minimum degree* // Discrete Mathematics. 1998. V. 188. No 1-3. 261–266.
42. **Gimadi E. Kh., Glebov N. I., Serdyukov A. I.** *On finding a cyclic tour and a vehicle loading plan yielding maximum profit* // Discrete Applied Mathematics. 2004. V. 135 No 1-3. 105–111.
43. **Baburin A. E., Gimadi E. Kh., Glebov N. I., Pyatkin A. V.** *The problem of finding a subset of vectors with the maximum total weight* // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2008. V. 2. No 1. 32–38.

3. Учебные пособия

44. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И.** *Экстремальные задачи принятия решений: Учеб. пособие.* Новосибирск: НГУ, 1982. 80 с.
45. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И.** *Дискретные экстремальные задачи принятия решений: Учеб. пособие.* Новосибирск: НГУ, 1991. 76 с.
46. **Глебов Н. И., Кочетов Ю. А., Плясунов А. В.** *Методы оптимизации: Учеб. пособие.* Новосибирск: НГУ, 2000. 105 с.
47. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И.** *Математические модели и методы принятия решений: Учеб. пособие.* Новосибирск: НГУ, 2008. 163 с.

4. Тезисы докладов

48. **Глебов Н. И.** *О критериях алгебраической эквивалентности подмножеств категории* // Итоговая науч. конф. Казан. ун-та за 1961 г. Краткое содержание докладов. Казань, 1962.
49. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И.** *Об одном классе задач типа стандартизации, унификации и размещения* // Тезисы II Всесоюзной конф. по проблемам теор. кибернетики. Новосибирск, 1971. С. 29–31.
50. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Дементьев В. Т.** *Некоторые задачи выбора оптимальных параметрических рядов и методы их решения* // II Симпозиум по приложениям математики в стандартизации. Варшава, 1972. С. 283–295.

51. Глебов Н. И. *О разрешимости некоторых задач выпуклого целочисленного программирования посредством алгоритма покоординатного спуска* // IV Всесоюзная конф. по проблемам теор. кибернетики: Тез. докл. Новосибирск, 1977. С. 98–99.
52. Глебов Н. И. *Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации* // Mathematischen Gesellschaft der DDR. Mitteilungen; Berlin, 1977. Н. 2–3. S. 35–39.
53. Глебов Н. И. *Обобщение задачи о потоке в сети* // Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях: Тез. докл. Всесоюз. совещ. Ч. 2. Теория и алгоритмы. Новосибирск, 1982. С. 30–32.
54. Глебов Н. И. *Аналог теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе для базисных сетей* // Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях: Тез. докл. Всесоюз. совещ. Ч. 2. Теория и алгоритмы. Новосибирск, 1984. С. 29–30.
55. Глебов Н. И. *Задача минимизации на пересечении базисных систем* // Тезисы VII Всесоюзной конф. по проблемам теор. кибернетики. Иркутск, 1985. С. 37.
56. Glebov N. I. *Optimization problems on discrete sets of polymatroidal structure* // Abstracts Second Int. conf. on Discrete Math. and Appl. Blagoevgrad, 1990. P. 34.
57. Гимади Э. Х., Глебов Н. И. *Разработка математических методов и программного обеспечения для решения большеразмерных задач дискретной оптимизации* // Семейство моделей многопроцессорных вычислительных комплексов "Эльбрус" — состояние и перспективы развития: Тез. докл. Всесоюзного науч.-техн. семинара. М., 1990. С. 84–86.
58. Глебов Н. И., Шукин А. Г. *Об одном обобщении двухстаночной задачи Джонсона* // Проблемы теоретической кибернетики: Материалы XI Междунар. конф. 10–14 июня 1996 г. М.: Рос. гос. гуманит. ун-т, 1996. С. 218–219.
59. Glebov N. I., Shchokin A. G. *One generalization of Johnson's two-machines flow-shop problem* // International Symposium on Operation Research. T. U. Braunshweig, 4–6 Sept. 1996. Braunshweig, 1996. P. 105.

60. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Залюбовский В. В. *О математическом решении проблемы погашения долгов с использованием кредитно-вексельных и ресурс-товар-обменных операций* // Второй Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-96): Тез. докл. Новосибирск, 25–30 июня 1996 г. Новосибирск, 1996. Ч. 2. С. 133.
61. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Сердюков А. И. *Об одной задаче выбора циклического маршрута и загрузки транспортного средства* // Второй Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-96): Тез. докл. Новосибирск, 25–30 июня 1996 г. Новосибирск, 1996. Ч. 2. С. 133–134.
62. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Залюбовский В. В. *Математические модели погашения долгов и оптимального управления ресурсами* // Проблемы оптимизации и экономические приложения: Тез. докл. междунар. конф. Омск, 1997. С. 47.
63. Глебов Н. И., Шенмайер В. В. *Жадный алгоритм в задаче о длиннейшем пути* // Проблемы оптимизации и экономические приложения: Тез. докл. междунар. конф. Омск, 1997. С. 48.
64. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Залюбовский В. В. *О задаче погашения долгов с использованием кредитных и товарообменных операций* // Математическое программирование и приложения: Тез. докл. конф. Екатеринбург, 1997. С. 62.
65. Глебов Н. И., Шенмайер В. В. *О применимости жадного алгоритма к некоторым задачам целочисленного программирования* // Дискретный анализ и исслед. операций: Материалы Междунар. конф. Новосибирск, 26 июня – 1 июля 2000 г. Новосибирск, 2000. С. 144.
66. Гимади Э. Х., Глебов Н. И. *Solving certain problems of cancelling mutual debts* // III Московская междунар. конф. по исследованию операций (ORM2001): Тез. докл. междунар. конф. Москва, 4–6 апреля 2001 г. М., 2001. С. 38–39.
67. Васильев Ю. Л., Глебов Н. И., Дементьев В. Т. *Алексей Андреевич Ляпунов и математическая кибернетика* // Конференция, посвящ. 90-летию со дня рожд. А. А. Ляпунова: Сб. докладов. Новосибирск, 8–11 октября 2001 г. Новосибирск, 2001. С. 110–112.

68. Гимади Э. Х., Глебов Н. И. Задача максимизации суммарного потока межбанковских платежей с неделимыми платежными поручениями // Дискретный анализ и исследование операций: Материалы Росс. конф. Новосибирск, 24–28 июня 2002 г. Новосибирск, 2002. С. 17–21.
69. Глебов Н. И. О разрешимости оптимизационных задач жадным алгоритмом // Дискретный анализ и исследование операций: Материалы Росс. конф. Новосибирск, 24–28 июня 2002 г. Новосибирск, 2002. С. 22–24.
70. Глебов Н. И. Об одном обобщении минимаксной задачи о назначениях // Дискретный анализ и исследование операций (DAOR-04): Материалы Росс. конф. Новосибирск, 28 июня – 2 июля 2004 г. Новосибирск, 2004. С. 152.
71. Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Пяткин А. В. Задача выбора подмножества векторов с максимальной суммой // Проблемы оптимизации и экономические приложения: Материалы 3-й Всеросс. конф. Омск, 11–15 июля 2006 г. Омск, 2006. С. 74.
72. Глебов Н. И. Минимаксная задача о циркуляции в сети // Проблемы оптимизации и экономические приложения: Материалы 3-й Всеросс. конф. Омск, 11–15 июля 2006 г. Омск, 2006. С. 82.
73. Глебов Н. И. Задача о циркуляции в сети с минимаксным критерием // Математическое программирование и приложения: Тез. докл. 13-й Всеросс. конф. Екатеринбург, 26 февраля – 2 марта 2007 г. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 168.

5. Прочие публикации

74. Глебов Н. И. О некоторых алгебраических вопросах, связанных с программированием: Дисс. канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1963. 77 с.
75. Глебов Н. И. Размещения задача // Дискретная математика: энциклопедия / Гл. ред. В. Я. Козлов. — М.: Большая Росс. энциклопедия, 2004. С. 221–222.
76. Глебов Н. И. Назначения задача // Дискретная математика: энциклопедия / Гл. ред. В. Я. Козлов. — М.: Большая Росс. энциклопедия, 2004. С. 319–320.

Научное издание

Гимади Эдуард Хайрутдинович,
Глебов Алексей Николаевич

НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ГЛЕБОВ:

его работы по теории и методам
дискретной оптимизации,
и о нем, как об ученом и человеке

К 80-летию со дня рождения

Редактор *С. В. Исакова*

Подписано в печать 28.12.2015 г.

Формат 70×100 1/16. Уч.-изд. л. 16,3. Усл. печ. л. 21,1

Тираж 100 экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр НГУ
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

$$P_k(x) - \text{интеграл}$$

$$P_k(x) \geq 0 \text{ при всех } x \in K$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in Q \\ +\infty, & \text{если } x \notin Q. \end{cases}$$



Новосибирский академгородок... Сосны, море, университет, научные институты, кафе "Под интегралом". История первооткрывателей науки в Сибири и дух великих научных свершений. А еще - люди, сотворившие это чудо в далеких 1960-х, те самые научные первопроходцы Сибири. Они, положившие начало всему, что нас сейчас окружает, постепенно уходят от нас... Об одном из таких людей - Николае Ивановиче Глебова - удивительно скромном и порядочном, талантливом ученом, мудром руководителе, преданном друге - повествует эта книга. Имя Николая Ивановича хорошо известно специалистам в области дискретной оптимизации и математической кибернетики. В нашей книге представлены избранные научные труды Н.И. Глебова, включая его ранее не публиковавшийся программный доклад, и воспоминания о Николае Ивановиче, оставленные его коллегами, учениками, родственниками и друзьями.

ISBN 978-5-4437-0471-5



9 785443 704715

$$(2) \quad \begin{aligned} & \varphi = \{x : x \in R^n, \varphi_i(x) \leq 0, i=1, \dots, s\} \\ & \text{при } g(x) \equiv \sum_{i=1}^s [\varphi_i(x)]_+ \text{, где } \varphi_+ = \max(0, \varphi) \\ & = \{x : x \in R^n, \varphi_i(x) \leq 0, i=1, \dots, s, \varphi_i(x) = 0, i=s+1, \dots, m\} \\ & \text{при } g(x) \equiv \sum_{i=1}^s [\varphi_i(x)]_+ + \sum_{i=s+1}^m \varphi_i^2(x) \end{aligned}$$