

Комбинаторные алгоритмы

Задачи с метрикой

Задача о минимальном остовном дереве

- *Дано:* Граф G , веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.
- *Найти* остовное дерево в G наименьшего веса или определить, что G — несвязный.

Условия оптимальности

Теорема 3.1

Пусть (G, c) — пример задачи «Минимальное остовное дерево», и пусть T — остовное дерево в G . Тогда следующие условия эквивалентны:

- a) T — оптимум.
- b) Для любого $e = \{x, y\} \in E(G) \setminus E(T)$, все ребра из x - y -пути в T не дороже чем e .
- c) Для любого $e \in E(T)$, e — ребро наименьшей стоимости из $\delta(V(C))$, где C — связная компонента на $T - e$.

$$(c) \Rightarrow (a)$$

- (с) Пусть T такое, что для любого $e \in E(T)$, e — ребро наименьшей стоимости из $\delta(V(C))$, где C — связная компонента на $T - e$.
- Пусть T^* оптимальное решение, такое что $E(T) \cap E(T^*)$ максимально возможное. Покажем, что $T = T^*$.
- Пусть $e = \{x, y\} \in E(T) \setminus E(T^*)$.
- Пусть C — связная компонента на $T - e$.
- $T^* + e$ содержит цикл D . Так как $e \in E(D) \cap \delta(C)$, то существует $f \neq e, f \in E(D) \cap \delta(C)$.
- Тогда $(T^* + e) - f$ является остовным деревом.
- T^* оптимум $\Rightarrow c(e) \geq c(f)$ и $(c) \Rightarrow c(f) \geq c(e)$.
- $c(f) = c(e)$ и $(T^* + e) - f$ является оптимальным остовным деревом.
- Противоречие, так как в $(T^* + e) - f$ больше на одно общее ребро с T , чем в T^* .

Алгоритм Прима (1957)

Input: Связный граф G , веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.

Output: Остовное дерево T минимального веса.

- 1) Выбрать $v \in V(G)$. $T := (\{v\}, \emptyset)$.
- 2) **While** $V(T) \neq V(G)$ **do**:
 Выбрать ребро $e \in \delta_G(V(T))$ минимальной стоимости. $T := T + e$.

Задача Штейнера

- *Дано:* Граф $G = (V, E)$, веса (стоимости) ребер $cost: E \rightarrow \mathbf{Q}^+$, подмножество $R \subseteq V$.
- *Найти* дерево T наименьшей стоимости, такое что $R \subseteq T$, то есть содержит все вершины из R .
- Множество R будем называть **множеством требований**.
- Множество V/R называют **множеством Штейнера**.

Метрическая задача Штейнера

- *Дано:* Полный граф $G = (V, E)$, стоимости ребер $cost: E \rightarrow \mathbf{Q}^+$ такие, что для любых трех вершин u, v и w : $cost(u, v) \leq cost(u, w) + cost(w, v)$, подмножество $R \subseteq V$.
- *Найти* дерево T наименьшей стоимости, которое содержит все вершины из R .

Сводимость задачи Штейнера

Теорема 3.2

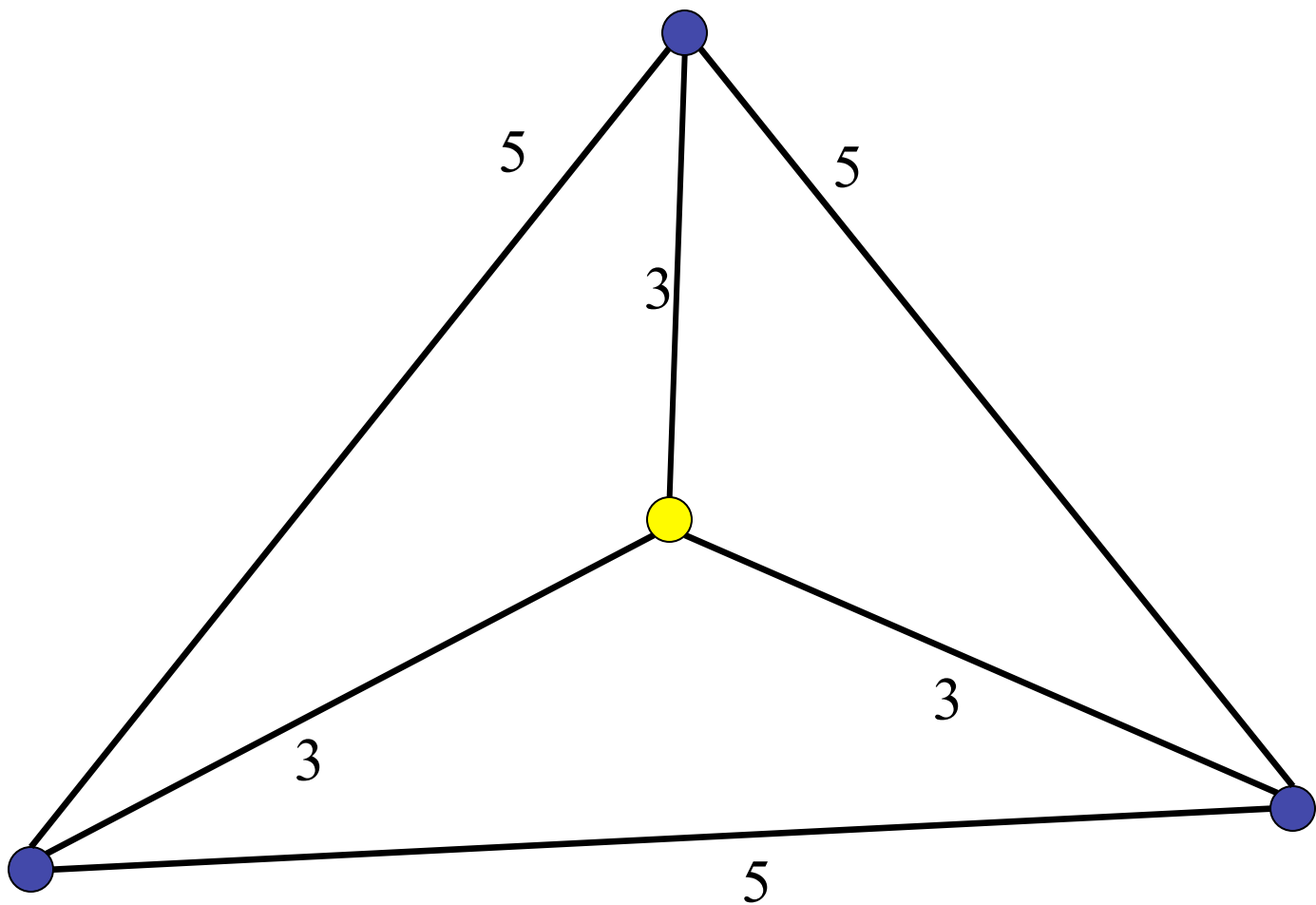
Существование ρ -приближенного алгоритма для метрической задачи Штейнера влечет существование ρ -приближенного алгоритма для задачи Штейнера.

Доказательство.

Пусть I пример задачи Штейнера с графом $G = (V, E)$. По графу G построим полный граф G' для примера I' метрической задачи Штейнера. Определим стоимость ребра (u, v) в G' , как стоимость кратчайшего u - v -пути в G .

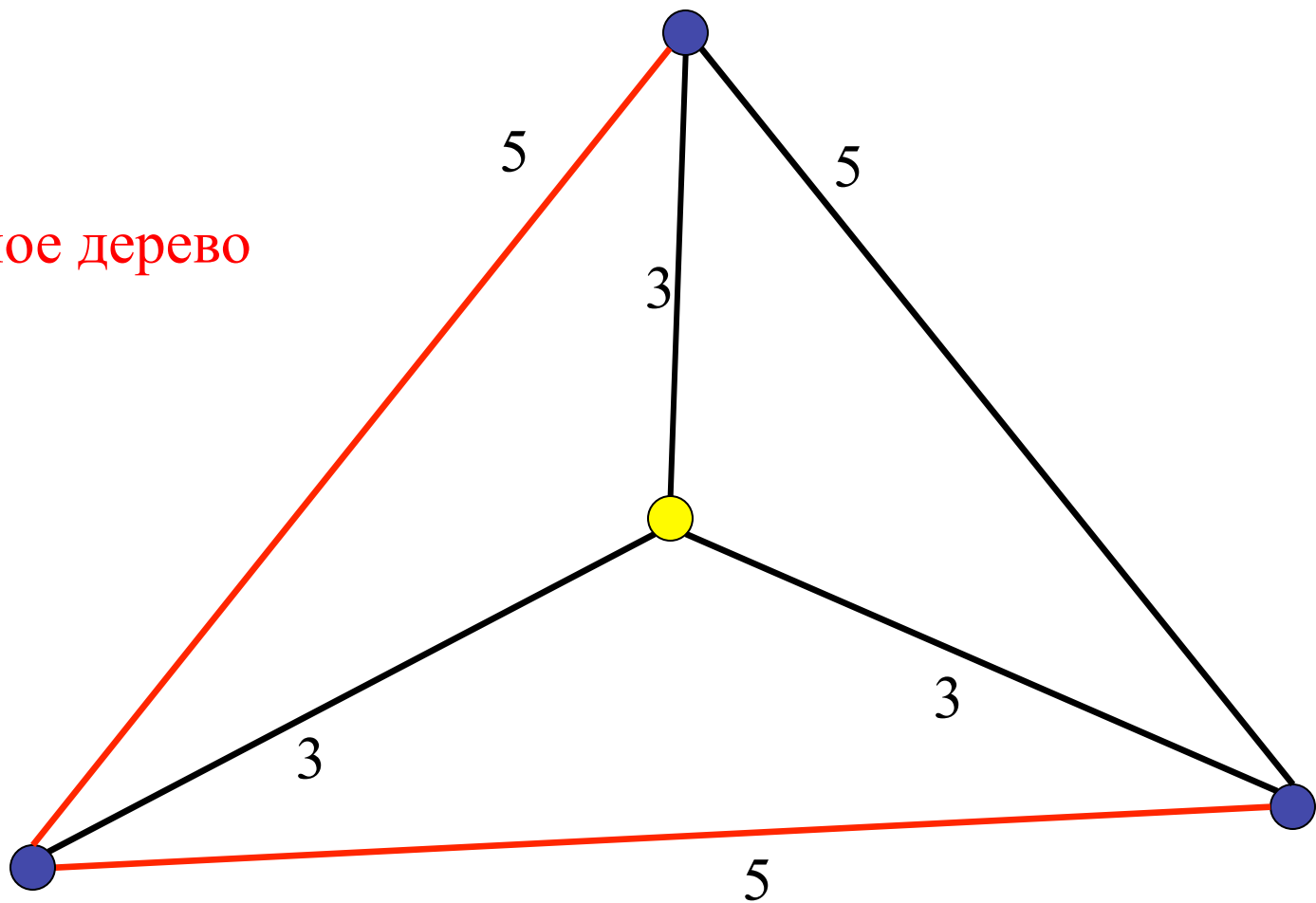
- $\text{OPT}(I') \leq \text{OPT}(I)$.
- По любому решению I' можно построить решение I с не большей стоимостью.

Деревья Штейнера и остовные деревья (MST)



Деревья Штейнера и остовные деревья (MST)

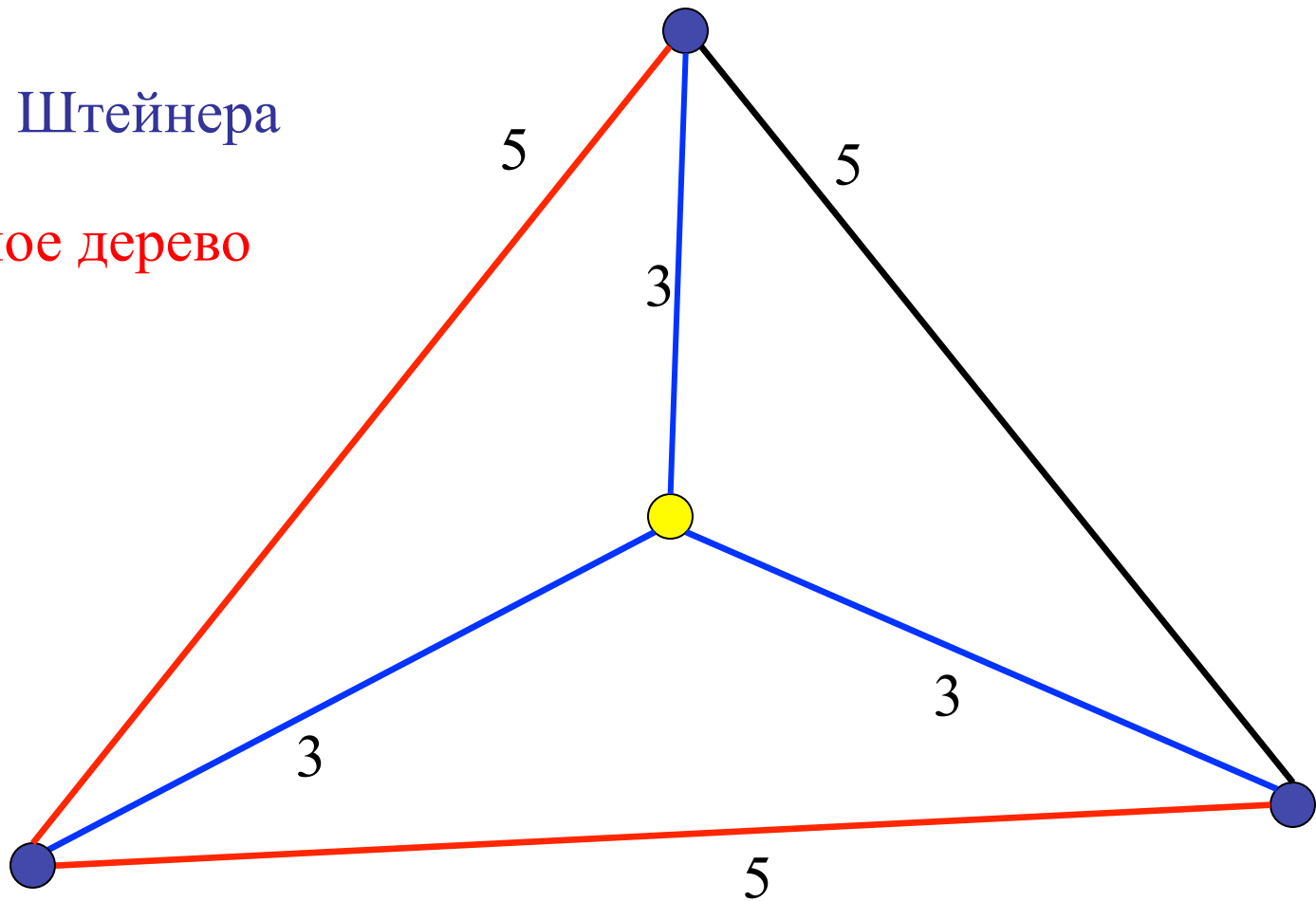
Остовное дерево



Деревья Штейнера и остовные деревья (MST)

Дерево Штейнера

Остовное дерево



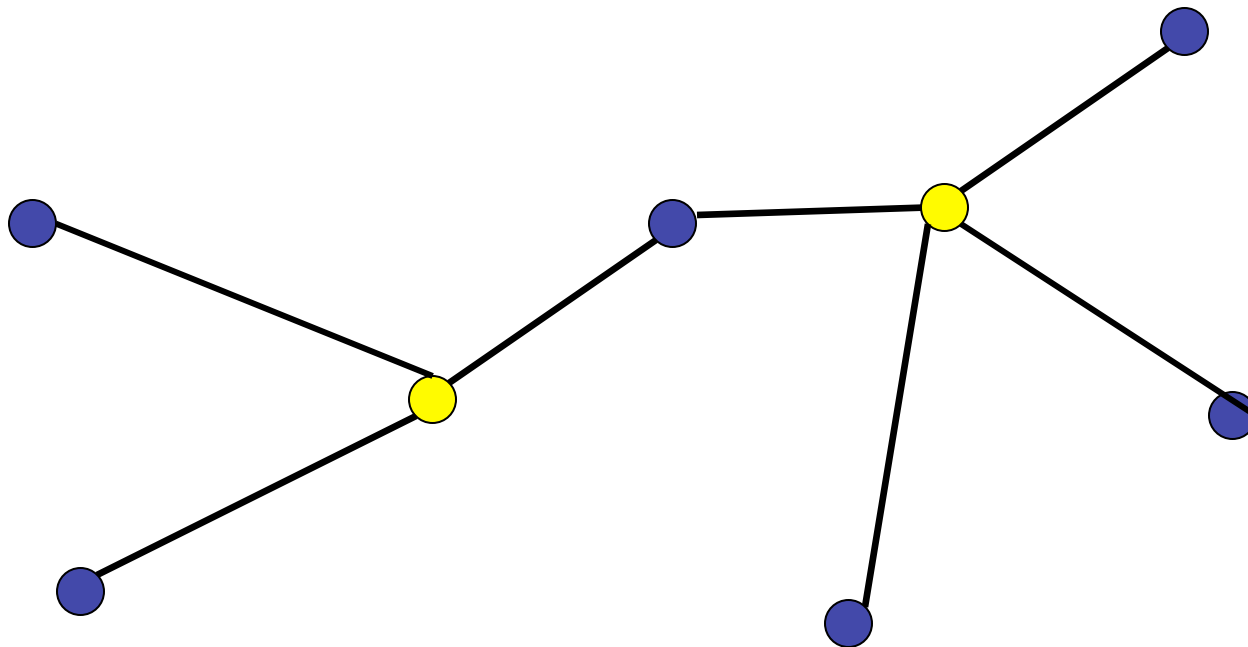
Оценка

Теорема 3.3

Пусть $R \subseteq V$ множество требований в задаче Штейнера. Тогда стоимость минимального остовного дерева на R не превосходит двух стоимостей оптимального дерева Штейнера в G .

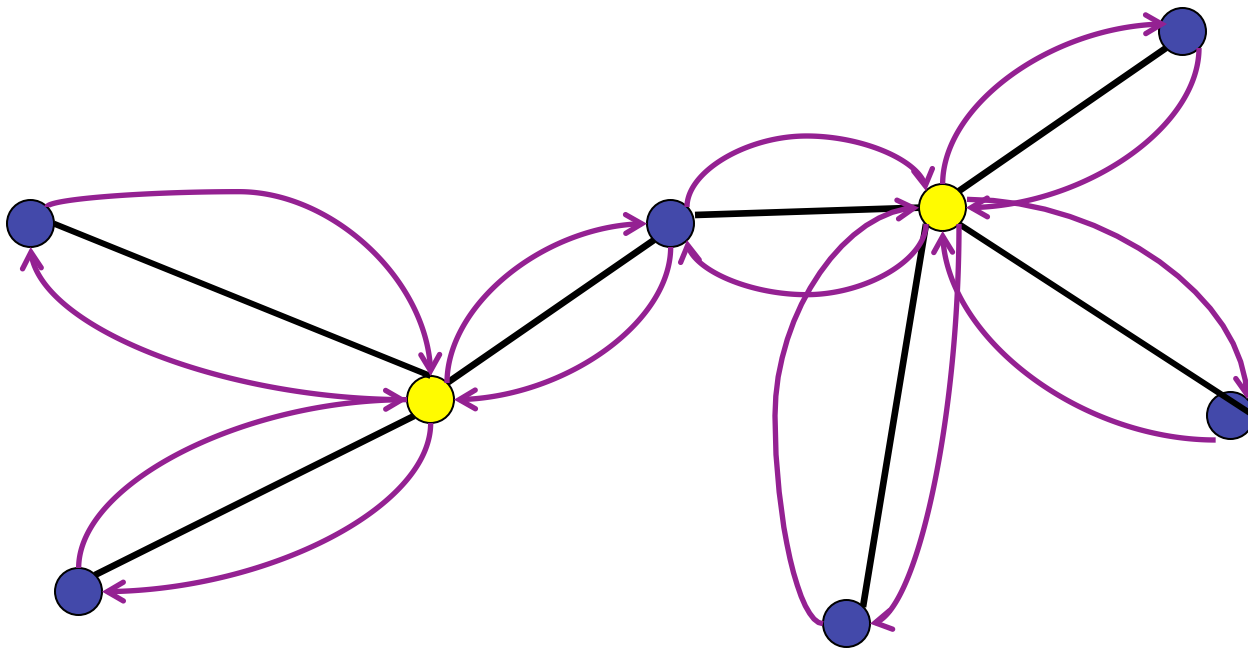
Доказательство

Дерево Штейнера



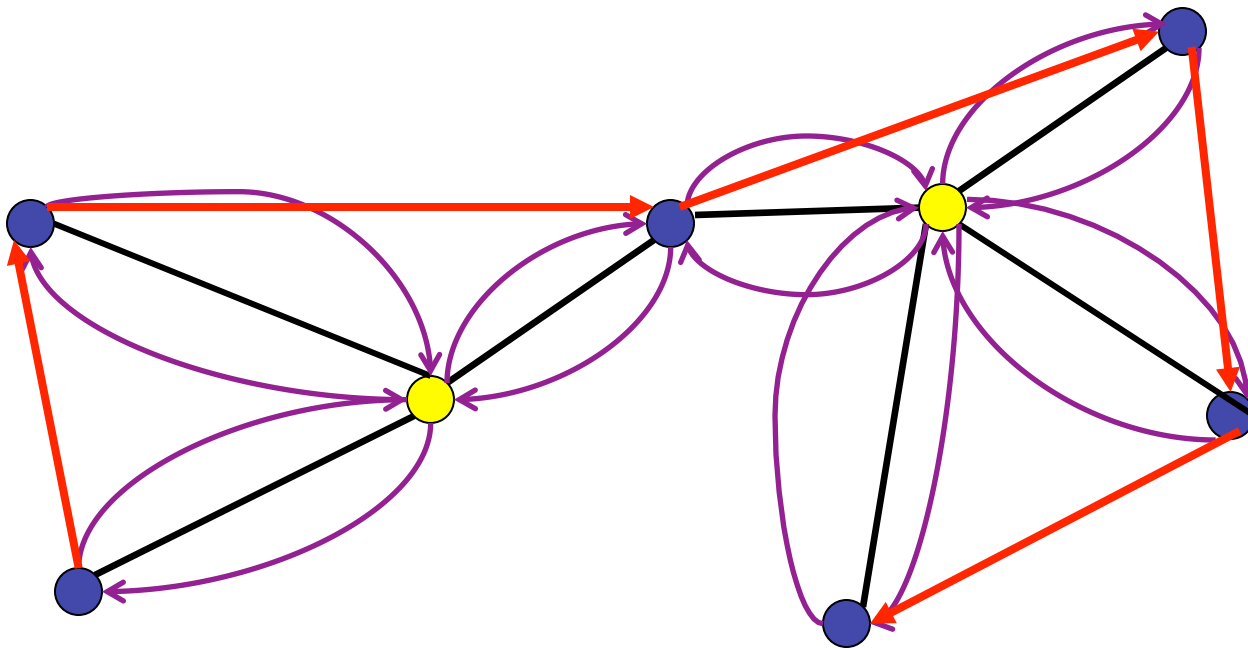
Доказательство

Дерево Штейнера $\Rightarrow$ Эйлеров обход



Доказательство

Дерево Штейнера $\Rightarrow$ Эйлеров обход $\Rightarrow$ Остовное дерево



Алгоритм MST

Input ($G, R, cost: E \rightarrow \mathbf{Q}^+$)

1) Найти минимальное остовное дерево T
на множестве вершин R .

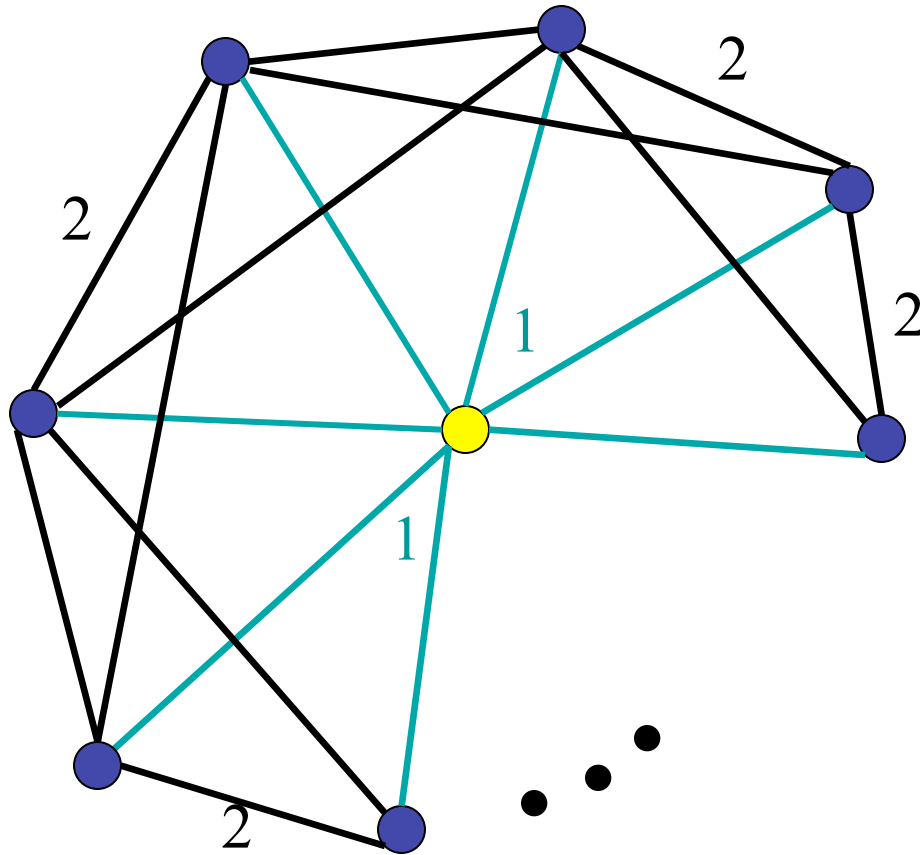
Output (T)

Оценка качества алгоритма MST

Следствие 3.4

Алгоритм MST является 2-приближенным алгоритмом для задачи Штейнера.

Точность оценки



$$\frac{OPT_{MST}}{OPT} = \frac{2(n-1)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$$

Задача Коммивояжера

- *Дано:* Полный граф $G = (V, E)$, веса (длины) ребер $cost: E \rightarrow \mathbf{Q}^+$.
- *Найти* гамильтонов цикл C минимальной стоимости.
- Цикл, который содержит все вершины, называется гамильтоновым.

Неаппроксимируемость

Теорема 3.5

Для любой полиномиально вычислимой функции $\alpha(n)$, для задачи коммивояжера не существует ρ -приближенного алгоритма с $\rho = \alpha(n)$, если $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

Идея доказательства

- Предположим, что существует ρ -приближенный алгоритм A с $\rho = \alpha(n)$ для задачи коммивояжера.
- Покажем что с помощью A можно решать задачу «Гамильтонов цикл».
- По примеру задачи «Гамильтонов цикл» построить пример задачи коммивояжера:
 - G имеет гамильтонов цикл $\Rightarrow$ стоимость оптимального цикла равна n .
 - G не имеет гамильтонов цикла $\Rightarrow$ стоимость оптимального цикла больше $n\alpha(n)$.

Метрическая задача Коммивояжера

- *Дано:* Полный граф $G = (V, E)$, веса (стоимости) ребер $cost: E \rightarrow \mathbf{Q}^+$ такие, что для любых трех вершин u, v и w : $cost(u, v) \leq cost(u, w) + cost(w, v)$.
- *Найти* гамильтонов цикл C минимальной стоимости.

Алгоритм MST-2

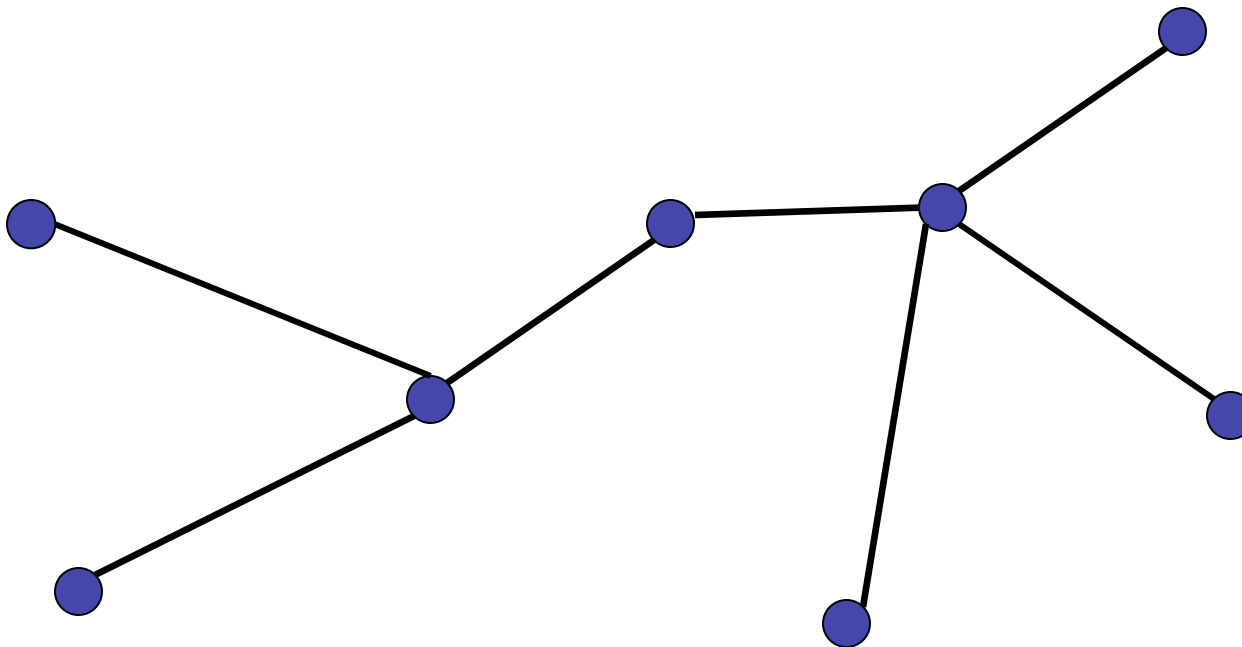
Input ($G, cost: E \rightarrow \mathbf{Q}^+$)

- 1) Найти минимальное остовное дерево T в G .
- 2) Удвоить каждое ребро в T и получить Эйлеров граф H .
- 3) Найти Эйлеров обход R в H .
- 4) Построить Гамильтонов цикл C , посещая вершины графа G в порядке, в котором они встречаются в R .

Output (C)

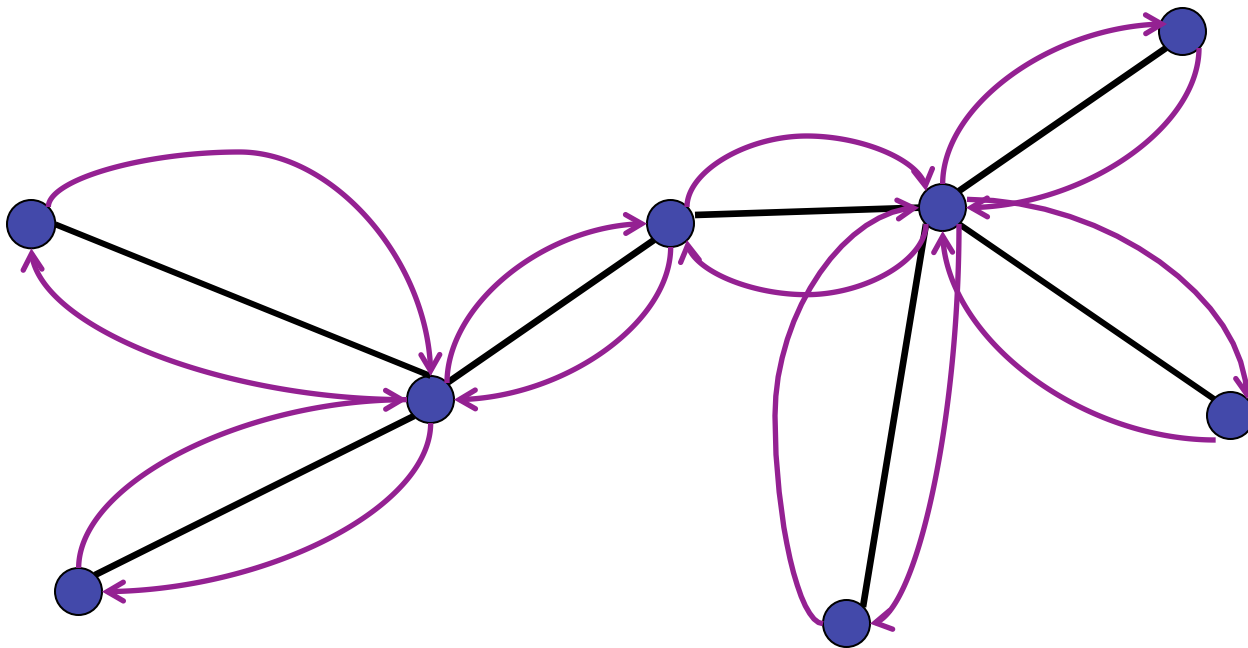
Пример

Остовное дерево



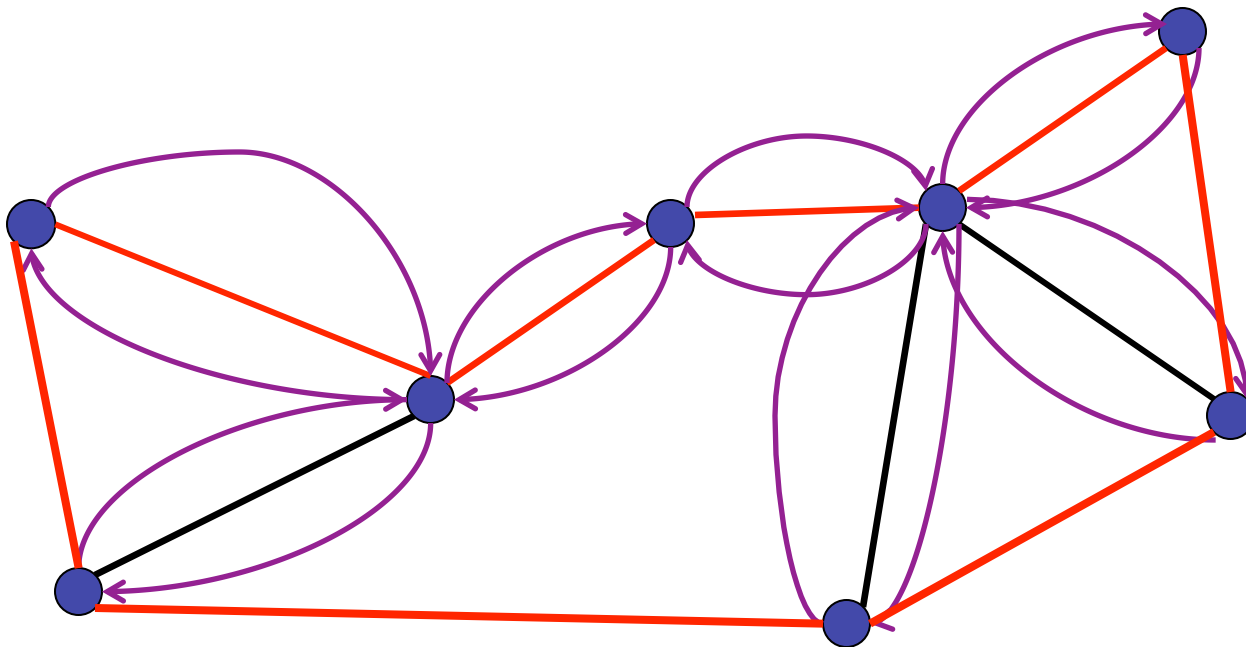
Пример

Остовное дерево $\Rightarrow$ Эйлеров обход



Пример

Остовное дерево $\Rightarrow$ Эйлеров обход $\Rightarrow$ Гамильтонов цикл



Оценка качества алгоритма MST-2

Теорема 3.6

Алгоритм MST-2 является 2-приближенным алгоритмом для метрической задачи Коммивояжера.

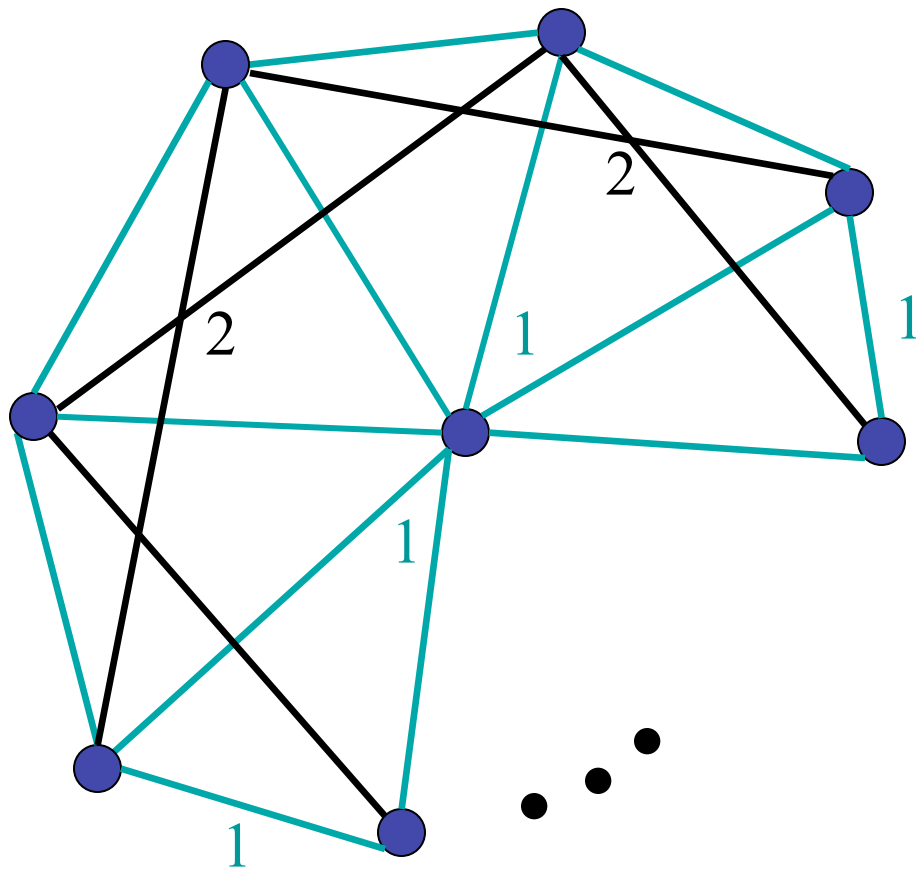
Алгоритм MST-2

Input ($G, cost: E \rightarrow \mathbf{Q}^+$)

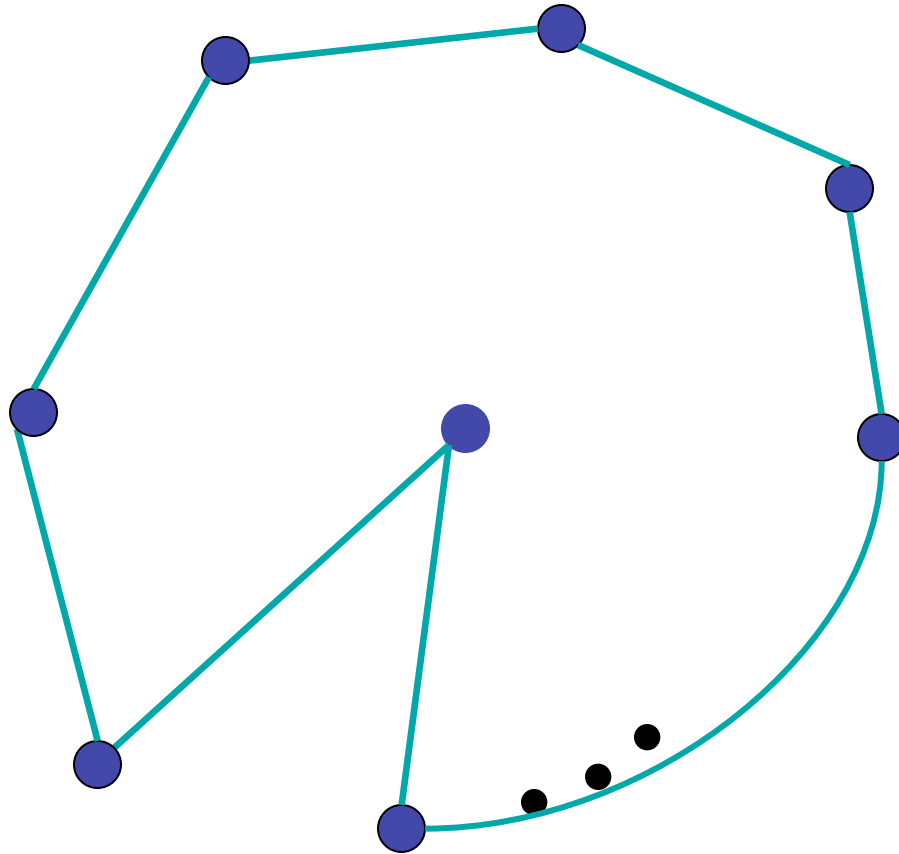
- 1) Найти минимальное остовное дерево T в G .
- 2) Удвоить каждое ребро в T и получить Эйлеров граф H .
- 3) Найти Эйлеров обход R в H .
- 4) Построить Гамильтонов цикл C , посещая вершины графа G в порядке, в котором они встречаются в R .

Output (C)

Точность оценки

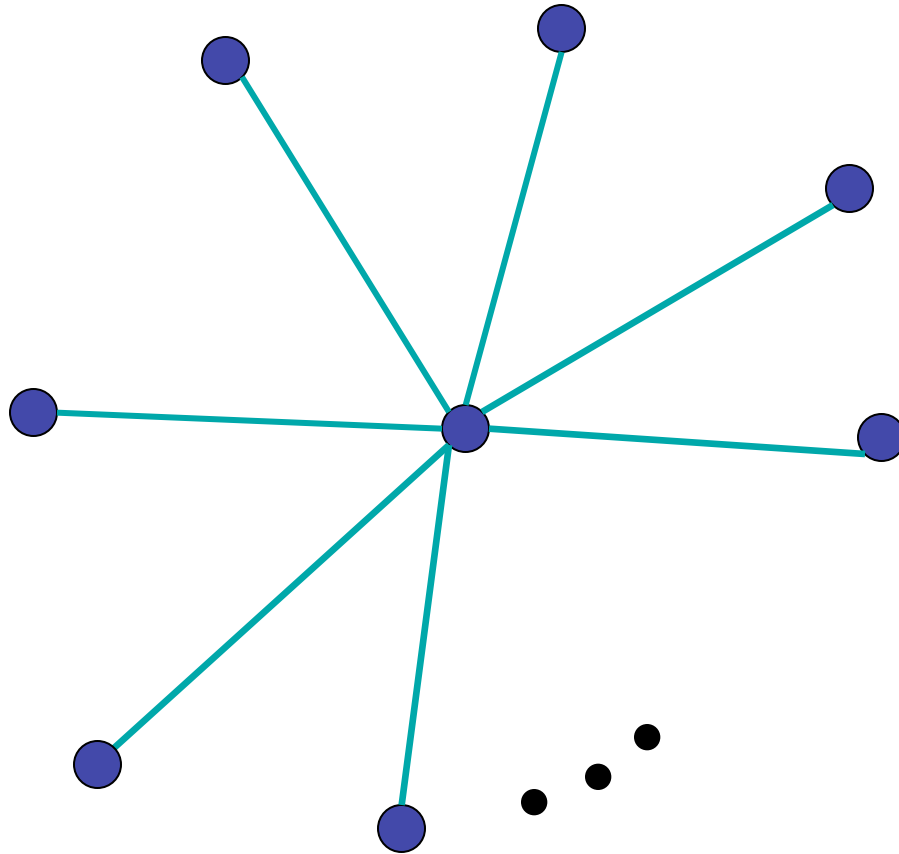


Точность оценки: оптимальный тур



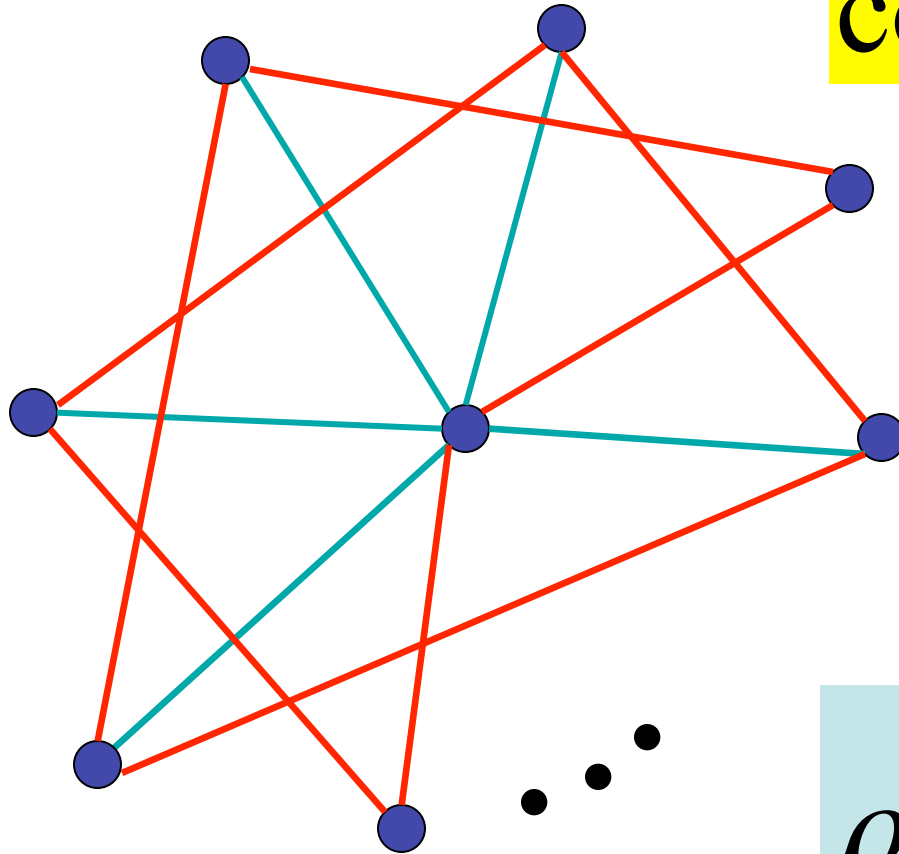
$$OPT = n$$

Точность оценки (MST)



Точность оценки: Гамильтонов цикл

$$\text{cost}(C) = 2n - 2$$



$$\rho = \frac{2n - 2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$$

Алгоритм Кристофидиса-Сердюкова

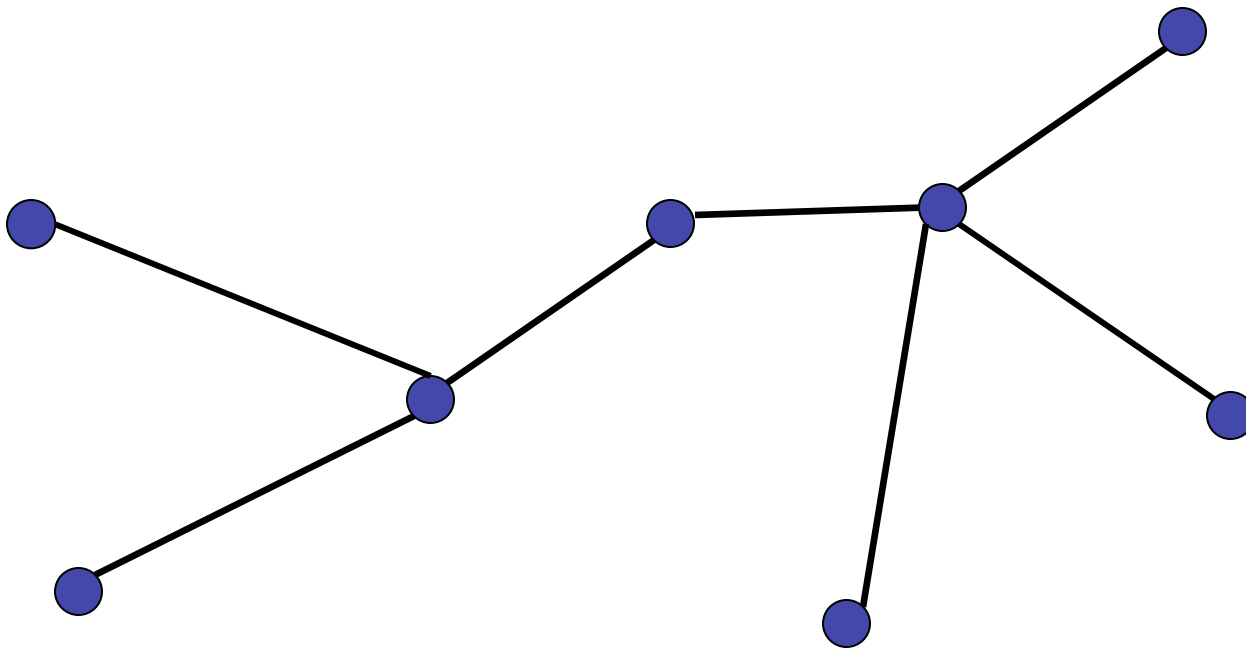
Input ($G, cost: E \rightarrow \mathbf{Q}^+$)

- 1) Найти минимальное остовное дерево T в G .
- 2) Найти паросочетание минимальной стоимости M на множестве вершин в T с нечетными степенями.
- 3) Добавить ребра M к T и получить Эйлерав граф H .
- 4) Найти Эйлерав обход R в H .
- 5) Построить Гамильтонов цикл C , посещая вершины графа G в порядке, в котором они встречаются в R .

Output (C)

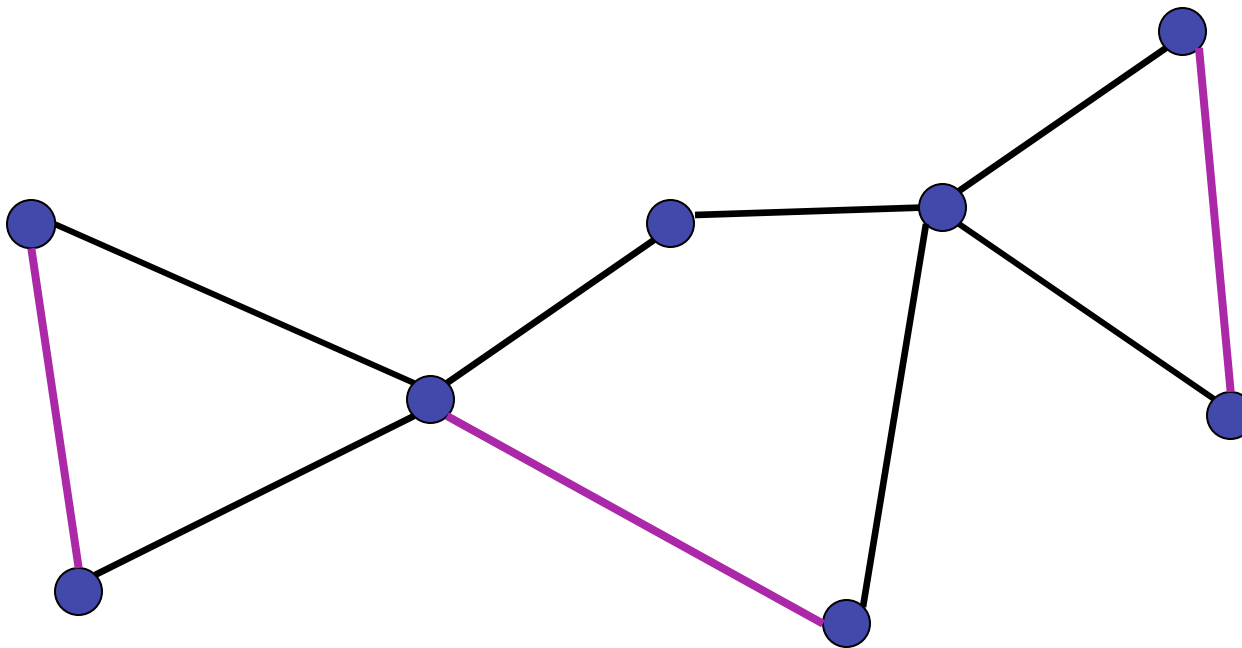
Пример

Остовное дерево



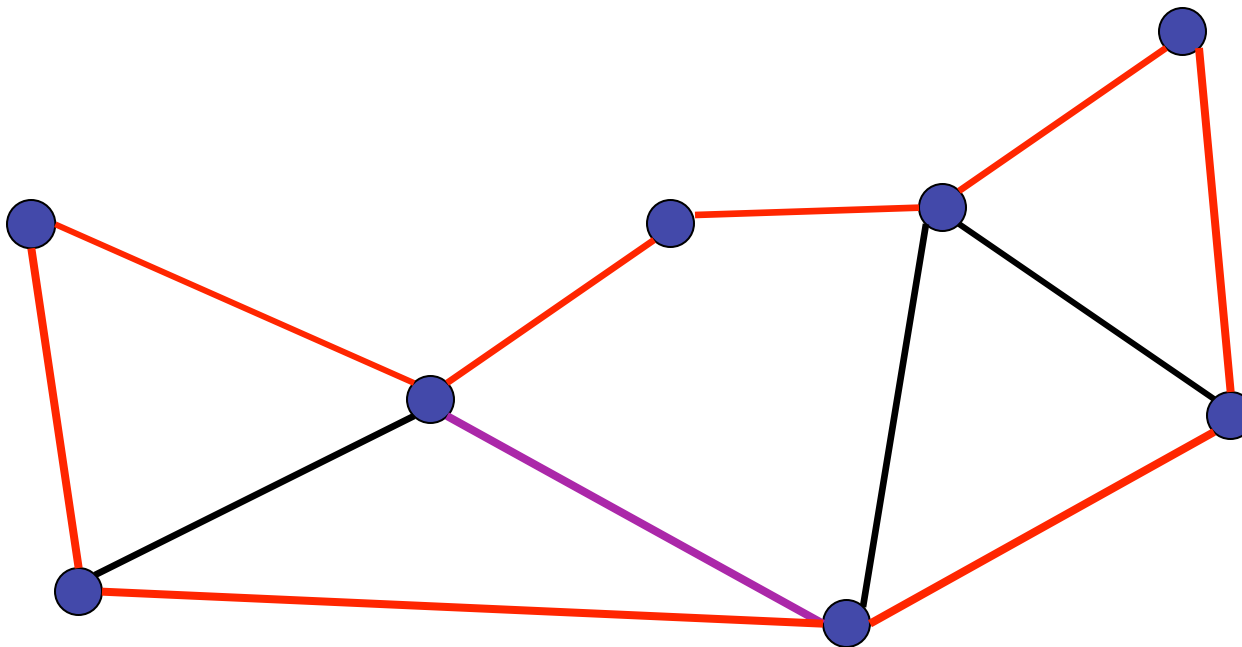
Пример

Остовное дерево $\Rightarrow$ Паросочетание



Пример

Остовное дерево $\Rightarrow$ Паросочетание $\Rightarrow$ Гамильтонов цикл



Нижняя оценка

Лемма 3.7

Пусть $V' \subseteq V$, такое что $|V'|$ чётно и пусть M совершенное паросочетание минимальной стоимости на V' . Тогда $\text{cost}(M) \leq \text{OPT}/2$.

Оценка качества алгоритма Кристофидиса-Сердюкова

Теорема 3.8

Алгоритм Кристофидиса-Сердюкова является $3/2$ -приближенным алгоритмом для метрической задачи Коммивояжера.

Доказательство:

$$\text{cost}(C) \leq \text{cost}(H) = \text{cost}(T) + \text{cost}(M) \leq OPT + \frac{OPT}{2} = \frac{3}{2}OPT$$

Практика

1. Пусть известно, что число вершин Штейнера в задаче Штейнера ограничено десятью, предложите для ее решения точный полиномиальный алгоритм.
2. Рассмотрим следующий жадный алгоритм для метрической задачи коммивояжера. Сначала найдем две самые близкие вершины, например v_i и v_j . Построим цикл S , проходящий через них: $v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_i$. На каждой следующей итерации найдем пару вершин $v_i \in S$ и $v_j \notin S$ с минимальным расстоянием c_{ij} . Добавим вершину v_j в цикл S сразу после вершины v_i . **Доказать**, что данный алгоритм является 2-приближенным.