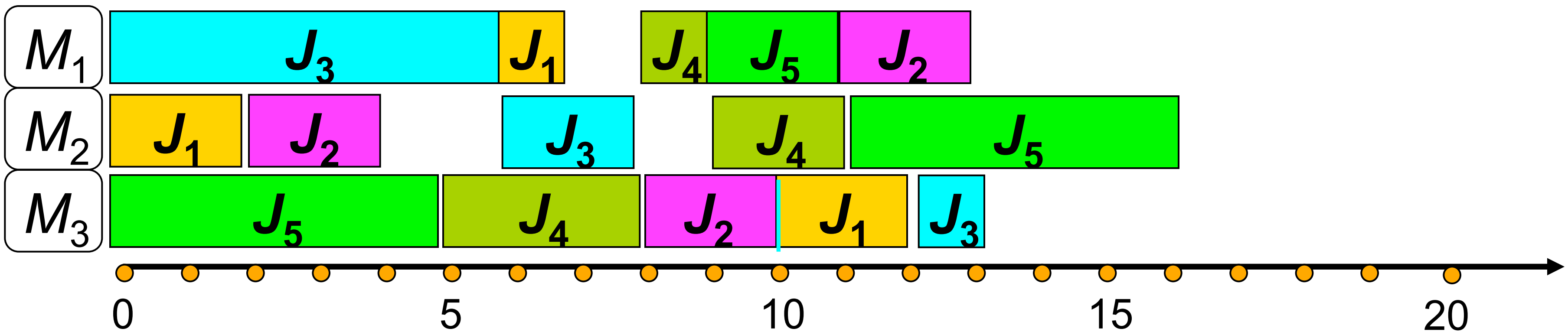
Приближенные схемы

Цеховая задача с нефиксированными маршрутами

$O||C_{\max}$ и $Om||C_{\max}$

- $\{J_1,\ldots, J_n\}$ – работы.
- $\{M_1,\ldots, M_m\}$ – машины.
- $J_i : \{O_{i1},\ldots, O_{im}\}$,
- O_{ik} выполняется на машине M_k,
- $O_{ik} : p_{ik} \geq 0$ $(i=1,\ldots, n;\ k=1,\ldots, m)$,

Пример и расписание: $C_{\max} = 16$



J_1	$p_{11} = 1$	$p_{12} = 2$	$p_{13} = 2$
J_2	$p_{21} = 2$	$p_{22} = 2$	$p_{23} = 2$
J_3	$p_{31} = 6$	$p_{32} = 2$	$p_{33} = 1$
J_4	$p_{41} = 1$	$p_{42} = 2$	$p_{43} = 3$
J_5	$p_{51} = 2$	$p_{52} = 5$	$p_{53} = 5$

Нижние оценки для $O||C_{\max}$

- P_j – длина работы J_j.
- $P_{\max} = \max_j P_j$
- L_k – нагрузка машины M_k.
- $L_{\max} = \max_i L_i$

$$\mathrm{OPT} \geq \max\{P_{\max}, L_{\max}\}$$

Жадный алгоритм для $O||C_{\max}$.

- Пусть какая-нибудь машина свободна в момент t. Если для нее есть «доступная» невыполненная операция, то она назначается на эту машину.
- Операция называется доступной, если в момент t не выполняется никакая другая операция той же работы.

2-приближенный алгоритм

Теорема 8.1 (Racsmany [1982])

Жадный алгоритм является 2-приближенным алгоритмом для $O||C_{\max}$.

Доказательство теоремы 8.1

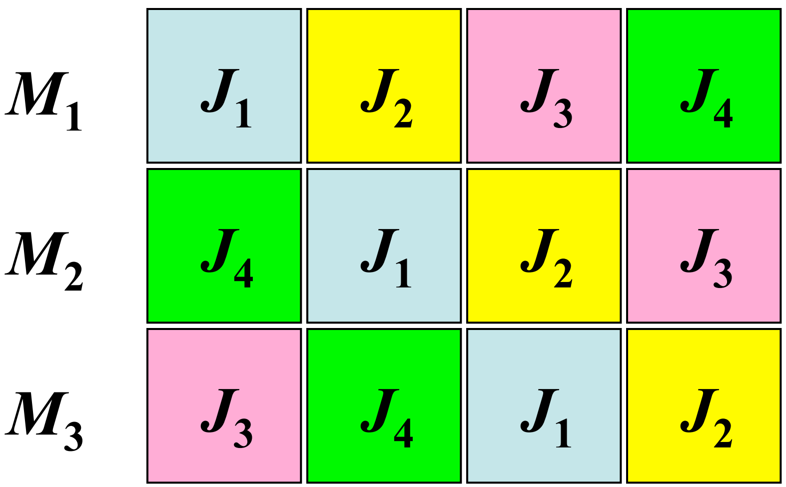
- Пусть операция O_k на машине M_i работы J_j заканчивается в расписании, построенном жадным алгоритмом, последней.
- Тогда в любой момент времени t до старта операции O_k либо выполняется одна из операций работы J_j, либо машина M_i занята выполнением другой операции.
- В противном случае, жадный алгоритм назначил бы операцию O_k во время t.
- Таким образом, длина расписания меньше чем

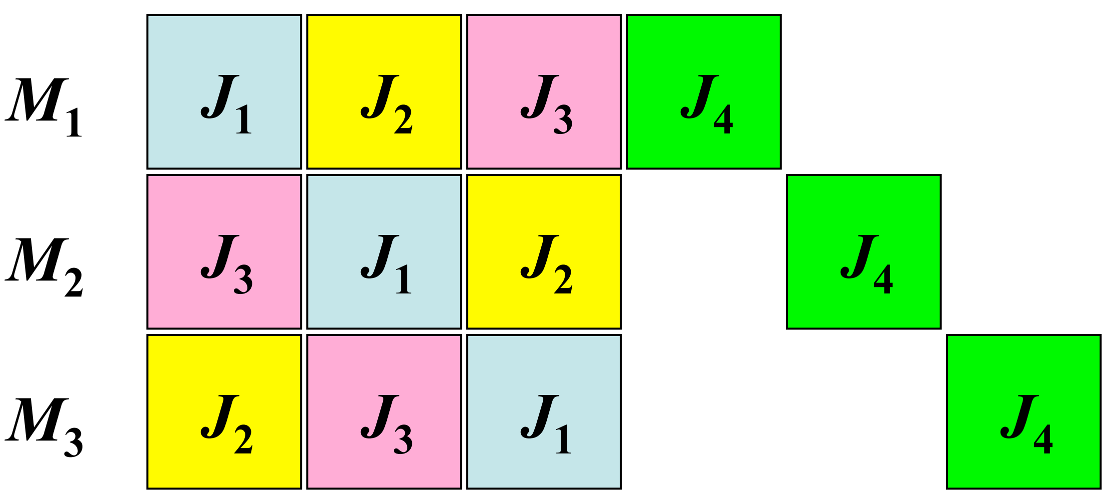
$$P_{\max} + L_{\max}.$$

Плохой пример

- Простой пример показывает, что жадный алгоритм в худшем случае может получить расписание в 2 – 1/m раза хуже оптимального.
- Дано: m машин и $m + 1$ работа и каждая работа имеет одну единичную операцию на каждой машине.
- Оптимальное расписание имеет длину $m + 1$.
- Жадный алгоритм может получить расписание длины $2m$, назначив m работ на выполнение в интервале $(0, m]$ и работу J_{m+1} в интервале $(m +1, 2m]$.

Пример


M_1 J_1 J_2 J_3 J_4
M_2 J_4 J_1 J_2 J_3
M_3 J_3 J_4 J_1 J_2


M_1 J_1 J_2 J_3 J_4
M_2 J_3 J_1 J_2 J_4
M_3 J_2 J_3 J_1 J_4

Неаппроксимируемость $O||C_{\max}$

- **Теорема 8.2 (Williamson и др.)**

  Проверка существования расписания длины 4 в задаче $O||C_{\max}$ является NP-полной задачей.

- **Следствие 8.3 (Williamson и др.)**

  Для любого $\rho < 5/4$ существование ρ -приближенного алгоритма для задачи $O||C_{\max}$ влечет $P = NP$.

Задача о немонотонных тройках

- **Условие.** Задано множество булевых переменных U и набор Z троек (дизъюнкций), каждая из которых содержит ровно 3 переменных.
- **Вопрос.** Существует ли набор значений переменных из U такой, что каждая тройка содержит хотя бы одну переменную со значением 0 и одну переменную со значением 1?

Сведение

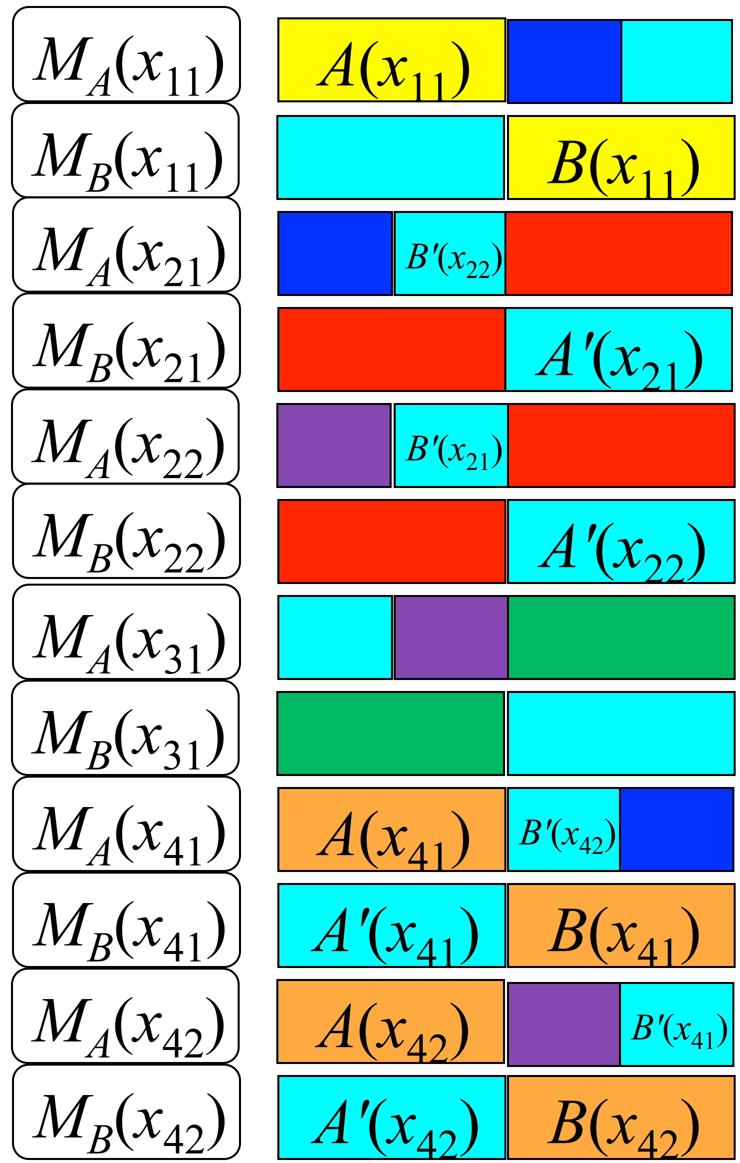
- $U = \{x_1, \ldots, x_u\}$, $Z = \{z_1, \ldots, z_v\}$
- Пусть переменная x_i появляется t_i раз в Z.
- Для удобства обозначим k-е появление x_i как x_{ik}.
- Пусть $\sigma(x_{ik})$ следующее появление x_i (по циклу).
- По примеру I задачи о немонотонных тройках построим пример I_O задачи $O||C_{\max}$.

Пример I_O

- $2u$ машин и $2u + v$ работ
- Машины: $x_{ik} \to M_A(x_{ik})$ и $M_B(x_{ik})$
- Работы «назначения»: $x_{ik} \to J_{ik}$ состоит из двух операций $A(x_{ik})$ и $B(x_{ik})$ длины 2 на машинах $M_A(x_{ik})$ и $M_B(x_{ik})$.
- Работы «согласования»: $x_{ik} \to J'_{ik}$ состоит из двух операций $A'(x_{ik})$ и $B'(x_{ik})$ длины 2 и 1 на машинах $M_B(x_{ik})$ и $M_A(\sigma(x_{ik}))$.
- Работы «дизъюнкций»: $c = (x \vee y \vee z)$: J_c состоит из трех единичных операций $T(x)$, $T(y)$ и $T(z)$ на машинах $M_A(x)$, $M_A(y)$ и $M_A(z)$.

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_4)$$

- операции назначения x_1
- операции назначения x_2
- операции назначения x_3
- операции назначения x_4
- операции $x_1 \vee x_2 \vee x_4$
- операции $x_2 \vee x_3 \vee x_4$
- операции согласования

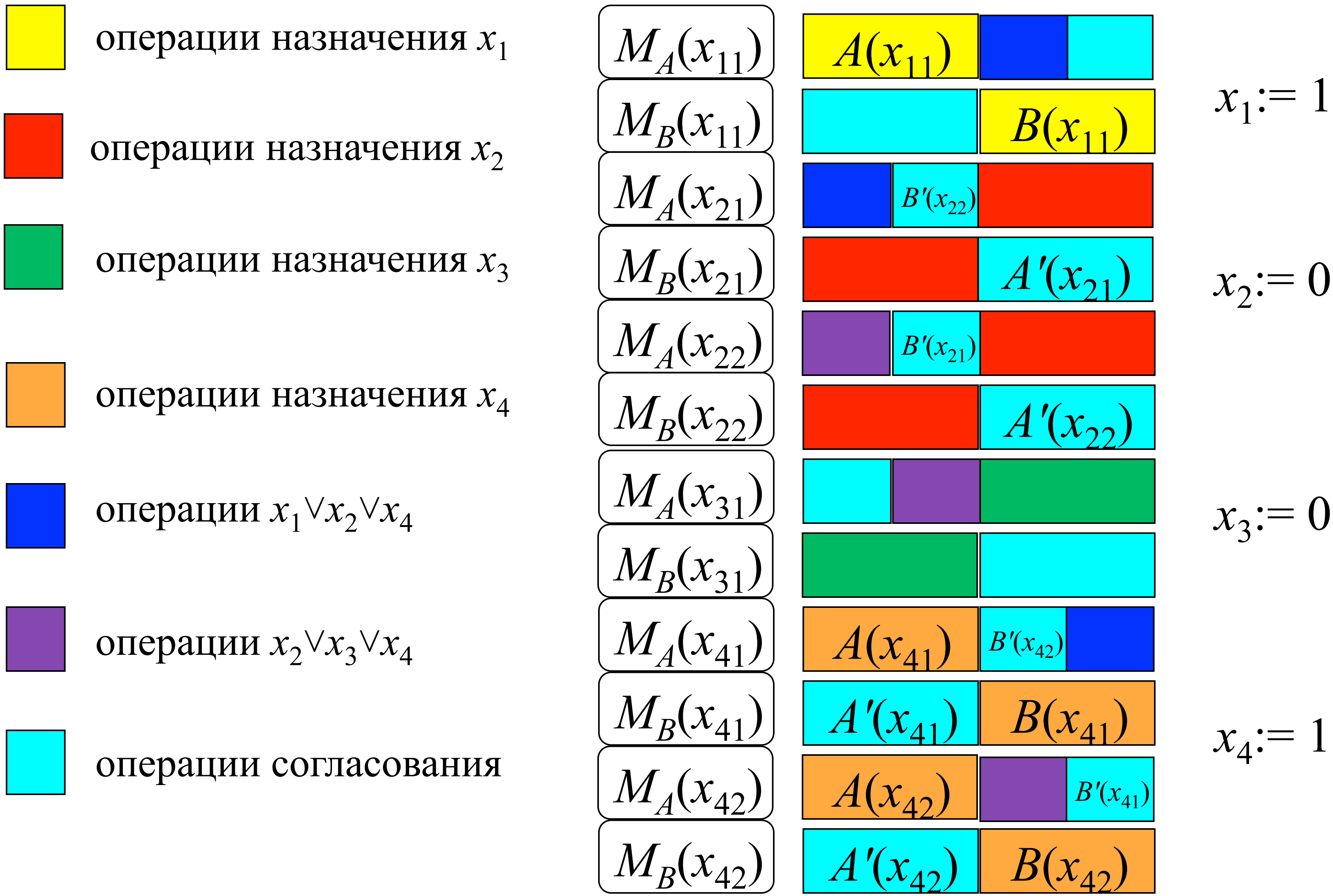


Свойства примера I_O

Пусть существует расписание длины 4.

- Операции назначения выполняются либо в течение всего интервала [0,2], либо в течение всего интервала [2,4].
- Все операции выполняются либо в интервале [0,2], либо в [2,4].
- x_i: Все операции вида $A(x_{ik})$ либо одновременно выполняются в течение всего интервала [0,2], либо одновременно выполняются в течение всего интервала [2,4].
- x_i: Все операции вида $B(x_{ik})$ либо одновременно выполняются в течение всего интервала [0,2], либо одновременно выполняются в течение всего интервала [2,4].
- Положим $x_i := 1$, если все операции вида $A(x_{ik})$ одновременно выполняются в течение всего интервала [0,2], и $x_i := 0$ в противном случае.

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_4)$$



Существование решения в задаче о немонотонных тройках

Пусть существует расписание длины 4.

- Положим x_i := 1, если все операции вида $A(x_{ik})$ одновременно выполняются в течение всего интервала [0,2], и x_i := 0 в противном случае.
- $c = (x \vee y \vee z)$: Операция дизъюнкции $T(x)$ выполняется на $M_A(x)$ внутри интервала [0,2], если x_i := 0, и внутри интервала [2,4], если x_i := 1.
- Внутри интервала длины 2 может выполняться не более двух единичных операций одной работы.
- Следовательно, в расписании длины 4 для каждой дизъюнкции $(x \vee y \vee z)$ по крайней мере одна ее операция выполняется внутри интервала [0,2] и одна ее операция внутри интервала [2,4].
- Следовательно, каждая тройка содержит хотя бы одну переменную со значением 0 и одну переменную со значением 1.

Задача $Om||C_{\max}$

Пусть m, $0 < \varepsilon < 1$ фиксированные числа.
P_j – длина работы J_j, и $P_{\max} = \max_{1 \leq j \leq n} P_j$.
$LB = \max\{P_{\max},\ L_{\max}\}$
$LB \leq OPT(C_{\max}) \leq 2LB$

Важный предварительный шаг $(0 < \varepsilon' < \varepsilon/(m^2+1) < 1)$

Все работы разобьем в три множества.

Для некоторого рационального α: $\varepsilon^{m/\varepsilon} \leq \alpha \leq \varepsilon$ определим

Big $= \{J_j \in J \mid P_j \geq \alpha LB\}$,

Small $= \{J_j \in J \mid \alpha\varepsilon' LB < P_j < \alpha LB\}$,

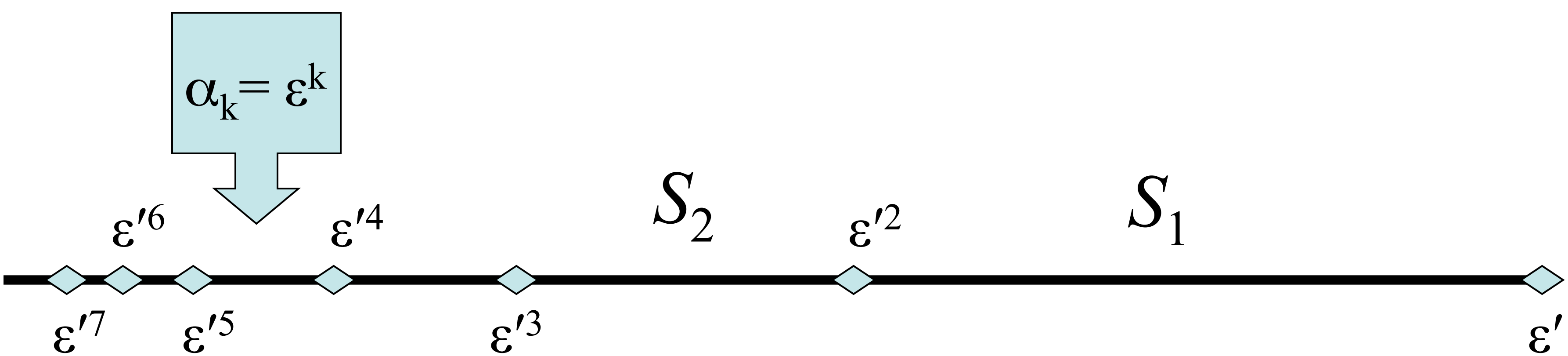
Tiny $= \{J_j \in J \mid P_j \leq \alpha\varepsilon' LB\}$.

- Число больших работ ограничено константой $m/\alpha \leq m\varepsilon'^{-m/\varepsilon'}$.
- Общая длина маленьких работ очень мала, точнее меньше чем $\varepsilon' LB$.

Как выбрать такое α

- Хотим $P(\mathbf{Small}) \leq \varepsilon' LB$,
- Имеем $P(J) \leq m\ LB$.

Существует $k \leq m/\varepsilon'$ для которого S_k удовлетворяет $P(S_k) \leq \varepsilon' LB$.

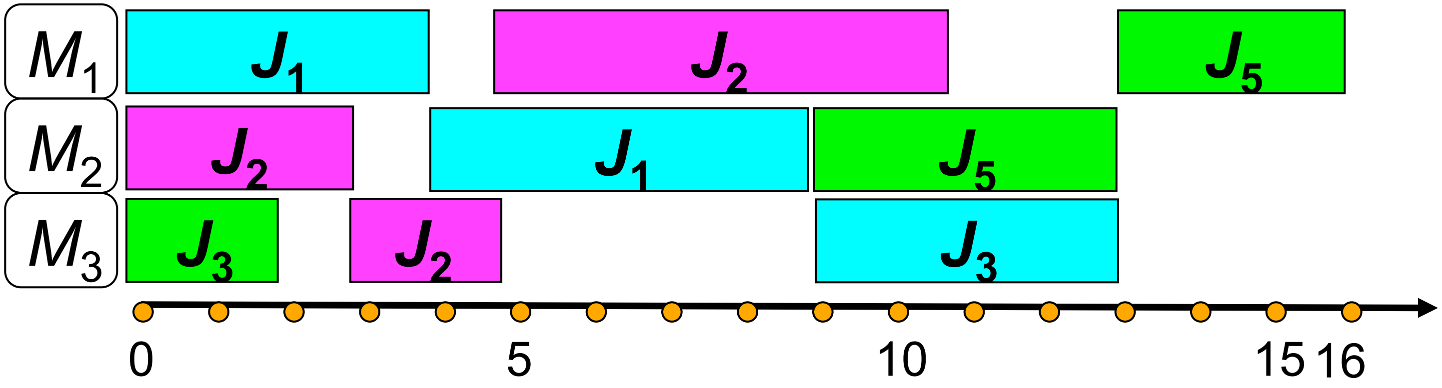


Общая схема алгоритма OpenShop

1. Найти оптимальное расписание σ_1 для больших работ.
   – На каждой машине расписание больших работ индуцирует последовательность дырок (максимальный интервал, когда машина простаивает).
2. Жадной процедурой вставить крохотные работы в дырки в расписании σ_1. Обозначим полученное расписание через σ_2.
3. Добавить все маленькие работы в конец расписания σ_2, то есть сразу после больших и крохотных работ.

Реализация шага 1

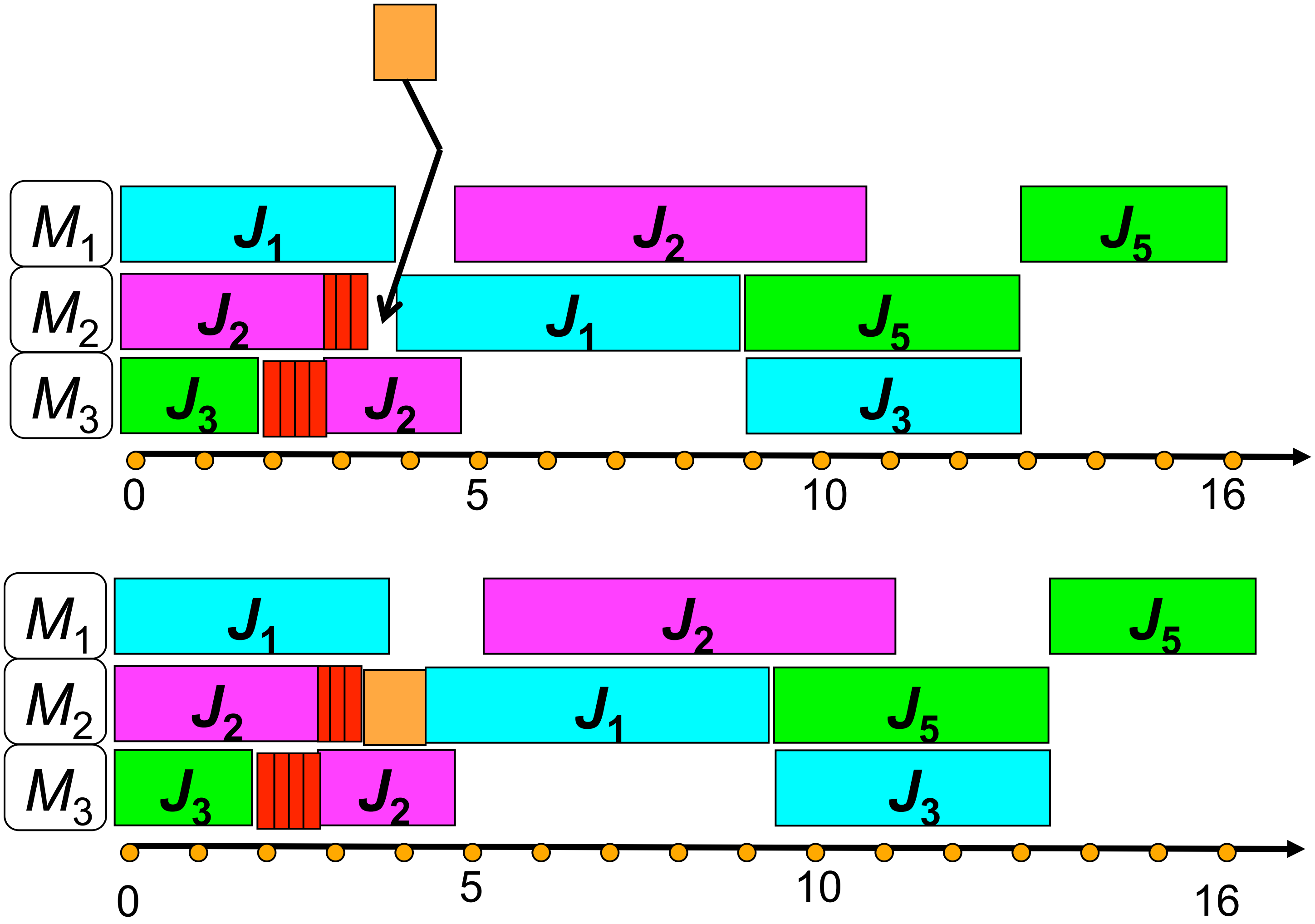
- Оценим число больших работ. $|\mathrm{Big}| \le \frac{\mathrm{m}}{\alpha} \le \frac{\mathrm{m}}{\varepsilon'^{\left(\mathrm{m}/\varepsilon'\right)}}$
- Число больших работ = const(m,ε).
- Переберем все расписания и выберем оптимальное. Заметим, что OPT(Big) ≤ OPT.
- Число простоев (дырок) в оптимальном расписании не больше чем m^2/α.



Реализация шагов 2 и 3

- Начиная с момента 0, в каждый момент t когда какая-либо машина простаивает, назначаем на нее одну из доступных невыполненных операций. Операция доступна, если другая операция этой работы не выполняется в момент t.
- Если крохотная операция O_{ik}, доступная в момент t, не входит в дырку, то есть некоторая операция большой работы начинается в момент τ, и $p_{ik} > \tau - t$, то сдвинем все операции больших работ, стартующих после момента t на величину $p_{ik} - \tau + t$.
- Пусть $C_{\max}(\sigma_2)$ − длина полученного расписания.
- Начиная с момента $C_{\max}(\sigma_2)$ жадным алгоритмом построим расписание для маленьких работ.

Иллюстрация шага 2



Анализ качества

- Пусть $C_{\max}(\sigma)$ – длина расписания, полученного алгоритмом OpenShop. Так как общая длина маленьких работ меньше чем $\varepsilon' LB$, то $C_{\max}(\sigma) \le C_{\max}(\sigma_2) + \varepsilon' LB$.
- Оценим величину $C_{\max}(\sigma_2)$.
- Пусть O_{jk} будет операция, которая завершается последней в расписании σ_2, то есть $C_{jk} = C_{\max}(\sigma_2)$.
- Пусть λ – сумма длин всех сдвигов, произведенных алгоритмом при построении расписания σ_2.
- Пусть μ – суммарный простой машины M_k.

O_{jk} – операция большой работы

- $C_{\max}(\sigma_2) \le C_{\max}(\sigma_1) + \lambda$
- $\lambda \le (m^2/\alpha)\cdot\alpha\varepsilon' LB = m^2\varepsilon' LB$
- $C_{\max}(\sigma_2) \le C_{\max}(\sigma_1) + m^2\varepsilon' LB$

O_{jk}– операция крохотной работы

- $C_{\max}(\sigma_2) \le L_k + \mu$
- $\mu \le p_k \le \alpha\varepsilon' LB$
- $C_{\max}(\sigma_2) \le C_{\max}(\sigma_1) + \alpha\varepsilon' LB \le$

$$\le C_{\max}(\sigma_1) + m^2\varepsilon' LB$$

$$C_{\max}(\sigma) \le C_{\max}(\sigma_2) + \varepsilon' LB \le$$

$$\le C_{\max}(\sigma_1) + (m^2+1)\varepsilon' LB \le (1 + \varepsilon)\ OPT.$$

PTAS

Теорема 8.4 (Севастьянов, Вёгингер 1996)

Для задачи $Om||C_{\max}$ существует полиномиальная приближенная схема.

Упражнение

1. Пусть λ_{max} – длина максимальной операции. Докажите, что жадный алгоритм находит расписании длины не больше чем OPT + $m\lambda_{max}$, где m – число машин.
2. Докажите, что в любом расписании, построенным жадным алгоритмом, не может быть больше чем $m - 1$ простой (дырка) на одной машине.