

Комбинаторные алгоритмы

Локальный поиск

Простейшая задача о размещении

- *Дано:* Полный граф $G = (F \cup D, E)$, стоимости вершин $f: F \rightarrow \mathbf{Q}^+$ и ребер $c: E \rightarrow \mathbf{Q}^+$ такие, что для любых трех вершин $i, j, k \in F \cup D$ выполнено $c_{i,k} \leq c_{i,j} + c_{j,k}$.
- *Найти* множество $H \subseteq F$ и назначение $\varphi: D \rightarrow H$ такое, что общая стоимость открытых предприятий и стоимость назначения минимальна.

$$\sum_{i \in H} f_i + \sum_{j \in D} c_{j\varphi(j)} \rightarrow \min$$

Как назначать клиентов

- F – множество предприятий
- D – множество клиентов
- Если множество открытых предприятий H задано, то оптимальным будет назначить каждого клиента к ближайшему предприятию.

$$X_H = \sum_{i \in H} f_i \quad X^* = X_{H^*}$$

$$Y_H = \sum_{j \in D} c_{j\varphi(j)} \quad Y^* = Y_{H^*}$$

Окрестность $N(H)$

H, φ_H :

1. Открыть новое предприятие $H := H \cup \{i\}, i \in F \setminus H$.
2. Заккрыть одно предприятие $H := H \setminus \{i\}, i \in H$.
3. Открыть одно новое предприятие и закрыть одно старое предприятие

$$H := H \cup \{i\} \setminus \{j\}, i \in F \setminus H, j \in H.$$

В каждом из трех случаев перераспределить клиентов к ближайшим предприятиям.

Алгоритм локального поиска

Input $(G, f: F \rightarrow \mathbf{Q}^+, c: E \rightarrow \mathbf{Q}^+)$

- 1) Выбрать произвольное текущее решение H .
- 2) **While** существует решение $H' \in N(H)$ такое, что $X_H + Y_H > X_{H'} + Y_{H'}$ **do** $H := H'$.

Output (H, φ_H)

Идея анализа

- Алгоритм локального поиска находит локальный оптимум в окрестности $N(H)$.
- Оценим как сильно произвольный локальный оптимум в окрестности $N(H)$ может отличаться от глобального.

Оценка на стоимость назначения

Лемма 5.1

Рассмотрим произвольный локальный оптимум H и φ_H . Тогда $Y_H \leq X^* + Y^* = \text{ОРТ}$.

.

Доказательство леммы 5.1(1)

Сравним решение H с некоторым оптимальным решением H^* .

- $i^* \in H^* - H$. Добавим i^* к H и переназначим всех клиентов таких, что $\varphi^*(j) = i^*$ к предприятию i^* . Так как H – локальный оптимум, то стоимость нового решения должна быть больше чем стоимость решения H , φ_H .

$$f_{i^*} \geq \sum_{j: \varphi^*(j)=i^*} (c_{j\varphi(j)} - c_{j\varphi^*(j)})$$

добавили
предприятие

переназначили
клиентов

Доказательство леммы 5.1(2)

- $i^* \in H^* \cap H$. Поскольку в решении H каждый клиент назначен к ближайшему предприятию, то

$$\sum_{j: \varphi^*(j)=i^*} (c_{j\varphi(j)} - c_{j\varphi^*(j)}) \leq 0 \leq f_{i^*}.$$

- Суммируя по всем предприятиям в оптимальном решении, получим

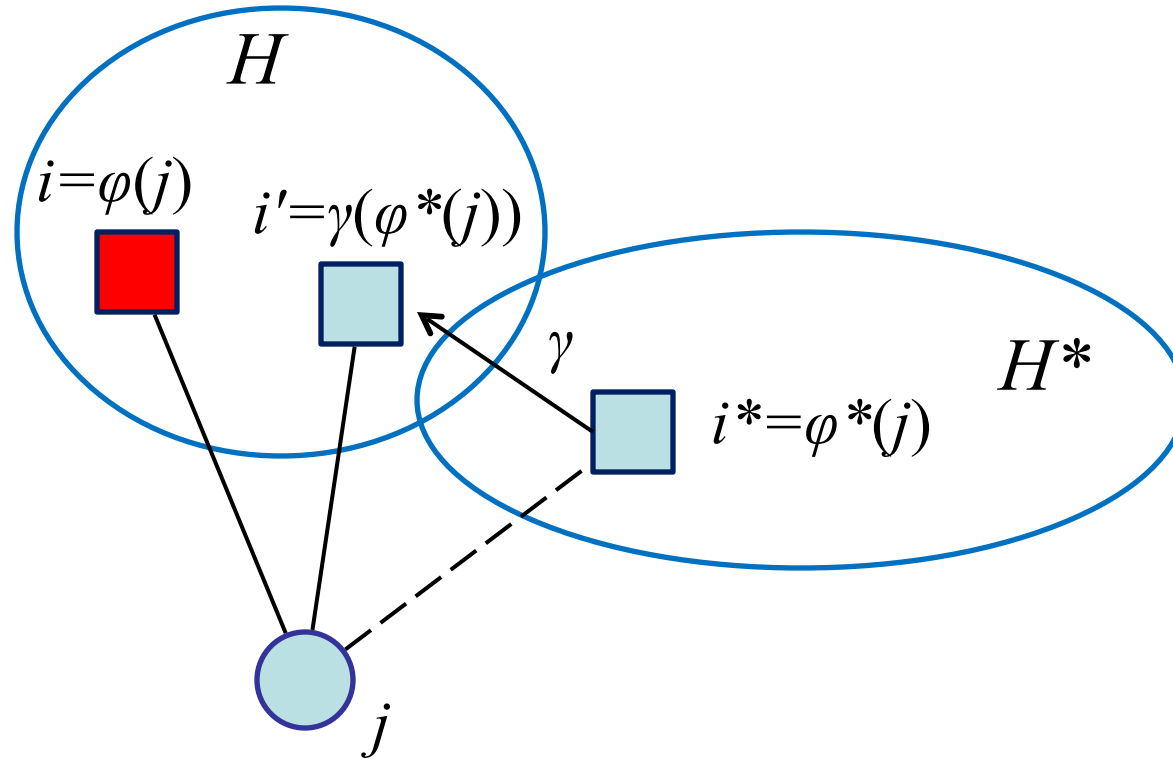
$$\sum_{i^* \in H^*} f_{i^*} \geq \sum_{i^* \in H^*} \sum_{j: \varphi^*(j)=i^*} (c_{j\varphi(j)} - c_{j\varphi^*(j)}) = \sum_{j \in D} (c_{j\varphi(j)} - c_{j\varphi^*(j)})$$

$$X^* \geq Y_H - Y^*$$

Замечание

- В доказательстве Леммы 5.1 мы использовали только один тип окрестности, а именно, открытие нового предприятия.
- Для оценки величины X_H мы будем использовать все типы окрестностей, следовательно, будем закрывать предприятия из решения H .
- При закрытии предприятия из H необходимо назначить его клиентов новым предприятиям.

Переназначение клиента j к предприятию $i' = \gamma(\varphi^*(j))$ при закрытии предприятия i .



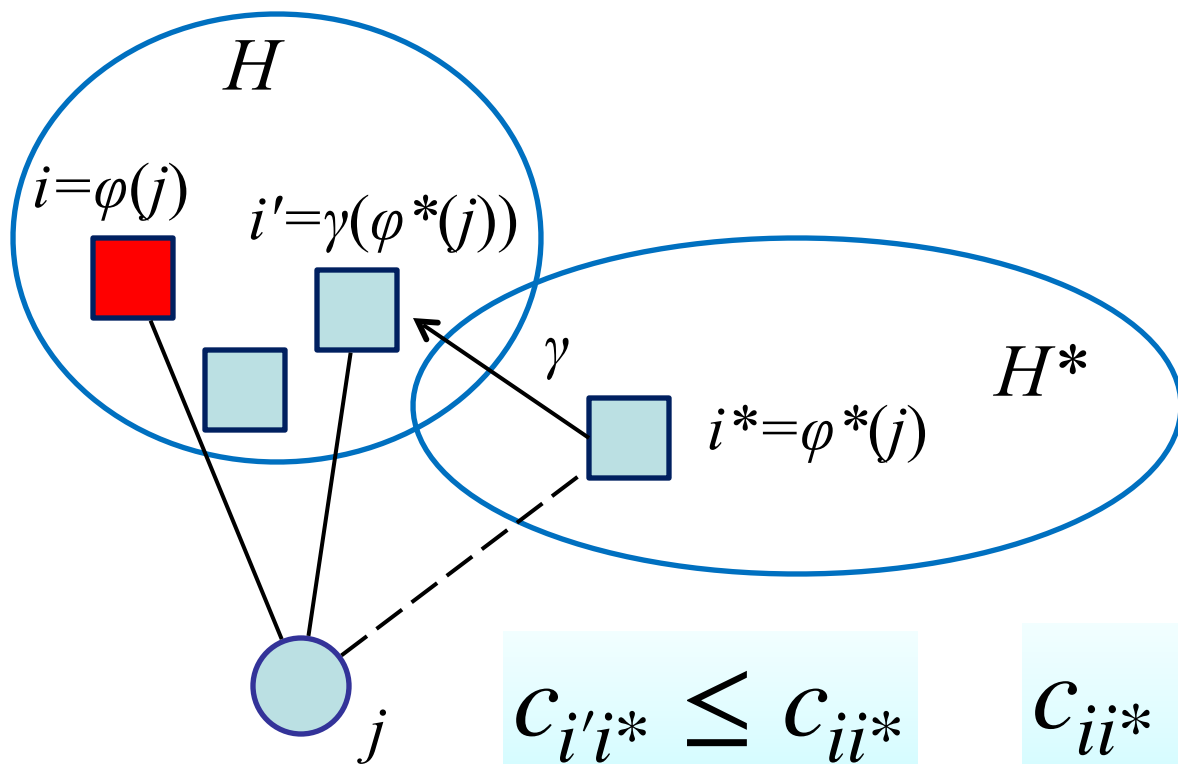
$\gamma(i^*)$ – ближайшее в H предприятие к i^* .

Стоимость переназначения

Лемма 5.2

Рассмотрим произвольного клиента j , для которого $\varphi(j) = i$, и $i \neq i' = \gamma(\varphi^*(j))$. Тогда стоимость переназначения клиента j от предприятия i к предприятию i' не превышает $2c_{j,\varphi^*(j)}$.

Доказательство леммы 5.2



$$c_{i'i^*} \leq c_{ii^*}$$

$$c_{ii^*} \leq c_{ji} + c_{ji^*}$$

$$c_{ji'} \leq c_{i'i^*} + c_{ji^*} \leq c_{ii^*} + c_{ji^*} \leq c_{ji} + 2c_{ji^*}$$

$$c_{ji'} - c_{ji} \leq 2c_{ji^*}$$

Оценка на стоимость предприятий

Лемма 5.3

Рассмотрим произвольный локальный оптимум H и φ_H . Тогда $X_H \leq X^* + 2Y^*$.

.

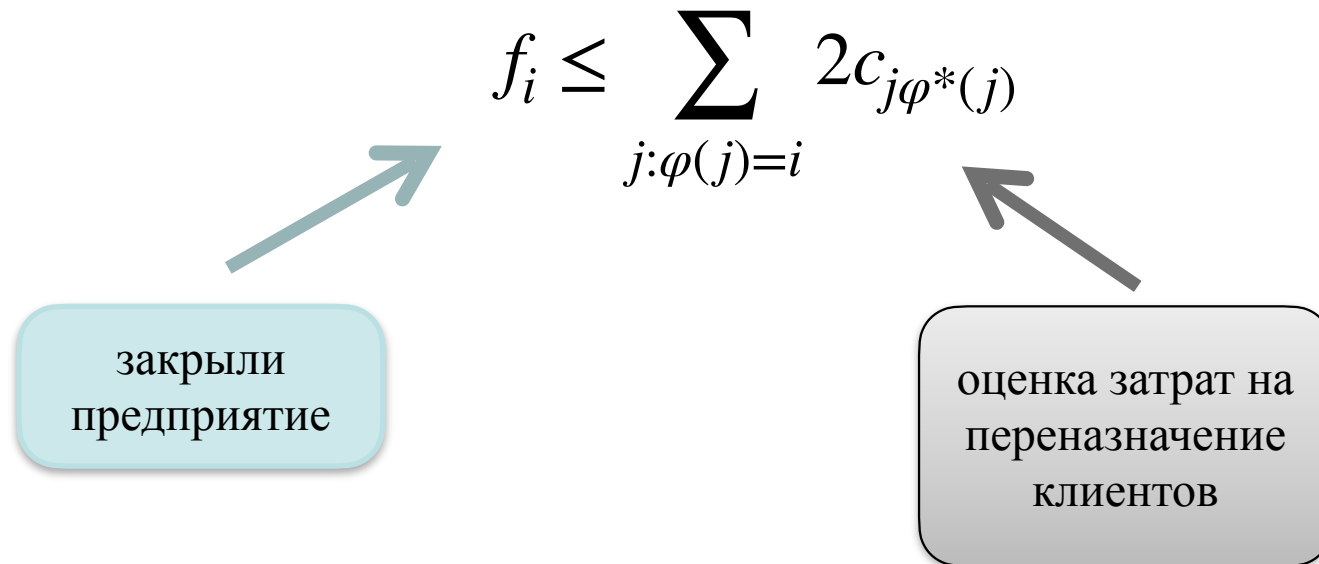
Доказательство леммы 5.3(1)

Сравним решение H с некоторым оптимальным решением H^* .

- Предположим, что мы хотим закрыть предприятие $i \in H$. Тогда каждый клиент j , обслуживавшийся в i должен быть назначен к другому предприятию в $H - \{i\}$.
- Назовем предприятие i **безопасным**, если для любого предприятия $i^* \in H^*$ предприятие $\gamma(i^*)$ ближайшее к i^* в H не совпадает с i .
- Тогда при закрытии предприятия i , каждого его клиента j можно переназначить к предприятию $\gamma(\varphi^*(j))$, а стоимость переназначения по лемме 5.2 оценить величиной $2c_{j, \varphi^*(j)}$.

Оценка на стоимость безопасных предприятий

- Так как H – локальный оптимум, то стоимость нового решения при закрытии предприятия должна быть больше чем стоимость решения H , φ_H .



Оценка на стоимость безопасных предприятий

- Так как H – локальный оптимум, то стоимость нового решения при закрытии предприятия должна быть больше чем стоимость решения H , φ_H .

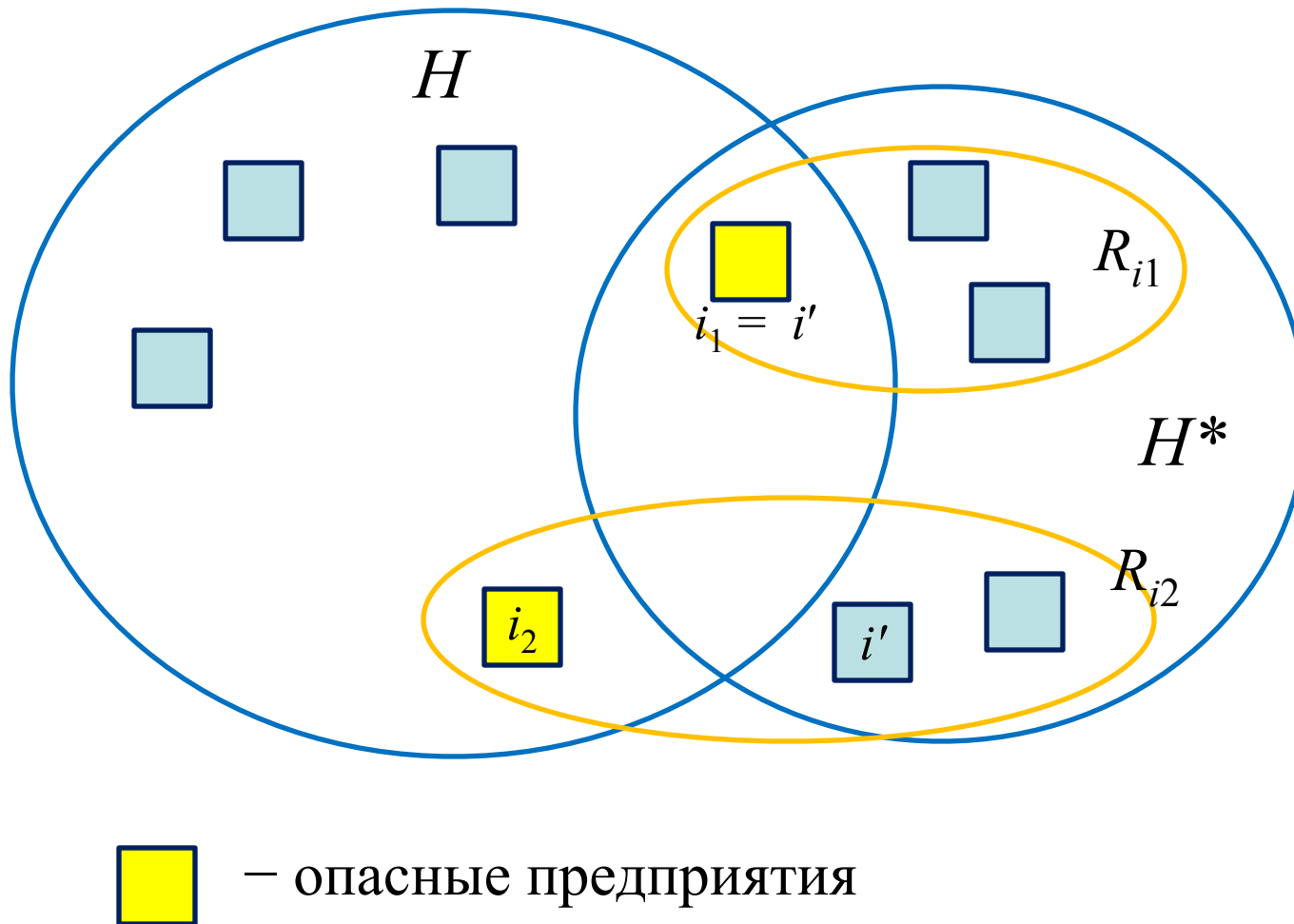
$$f_i \leq \sum_{j:\varphi(j)=i} 2c_{j\varphi^*(j)}$$

$$-f_i + \sum_{j:\varphi(j)=i} 2c_{j\varphi^*(j)} \geq 0$$

Опасные предприятия

- Пусть $i \in H$ — опасное предприятие.
- Существует $R_i = \{i^* \in H^* \mid \gamma(i^*) = i\}$, $R_i \neq \emptyset$.

Опасные предприятия

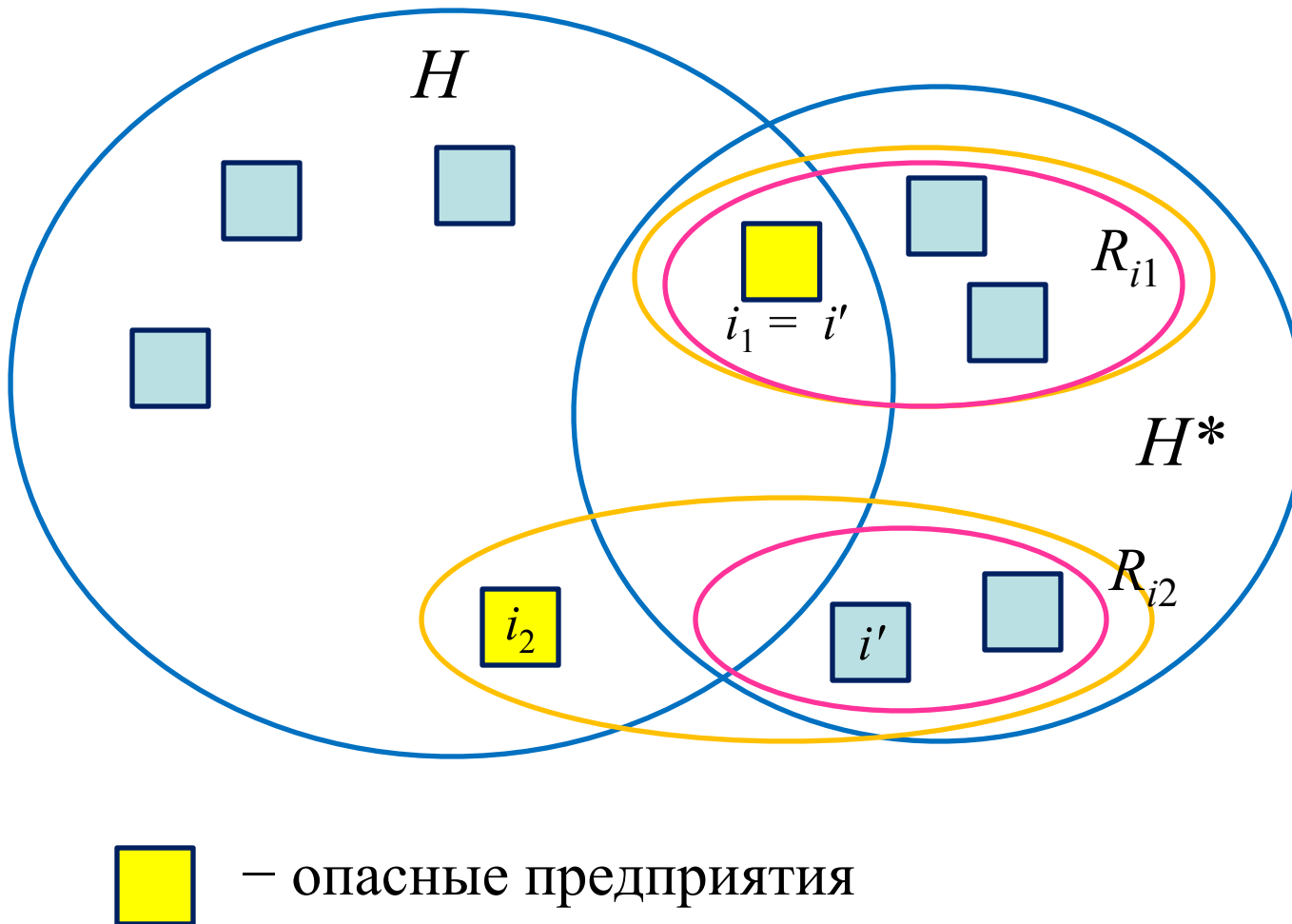


Каждое предприятие из H^* попадает ровно в одно множество R_i .

Опасные предприятия

- Пусть $i \in H$ – опасное предприятие.
- Существует $R_i = \{i^* \in H^* \mid \gamma(i^*) = i\}$, $R_i \neq \emptyset$.
- Пусть i' – ближайшее к i в R_i .
- Рассмотрим решения в окрестности $N(H)$, возникающие при
 - добавлении к H предприятия $i^* \in R_i - \{i'\}$,
 - замене предприятия i на предприятие i' .

Опасные предприятия



Каждое предприятие из H^* попадает ровно в одно множество R_i .

Добавление к H предприятия $i^* \in R_i - \{i'\}$

- Добавим к H предприятие i^* и назначим всех клиентов j таких, что $\varphi(j) = i$ и $\varphi^*(j) = i^*$ к предприятию i^* .
- Так как H – локальный оптимум, то стоимость нового решения должна быть больше чем стоимость решения H , φ_H .

$$f_{i^*} + \sum_{j: \varphi(j)=i \& \varphi^*(j)=i^*} (c_{j, \varphi^*(j)} - c_{j, \varphi(j)}) \geq 0$$

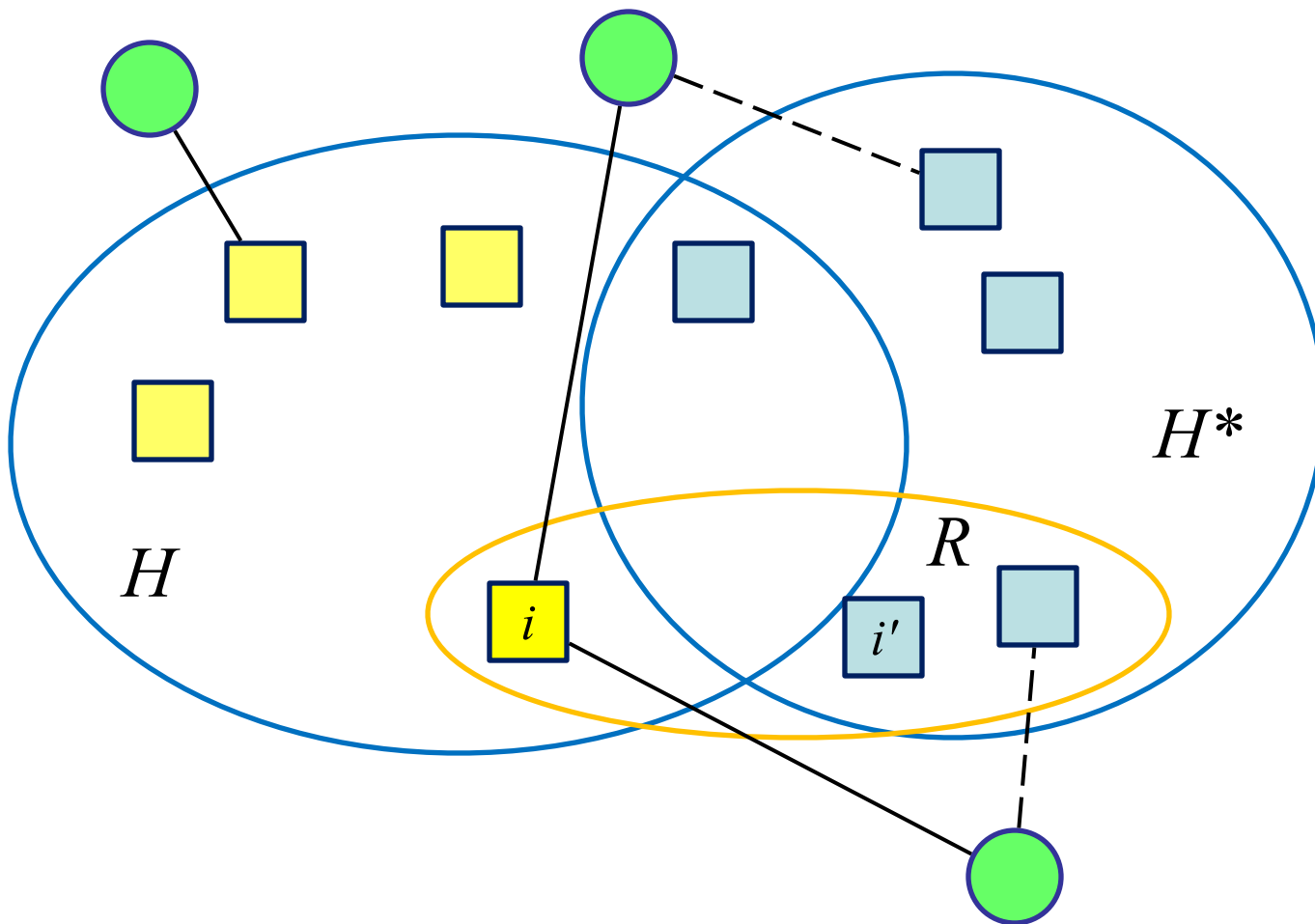
добавили
предприятие

переназначили
клиентов

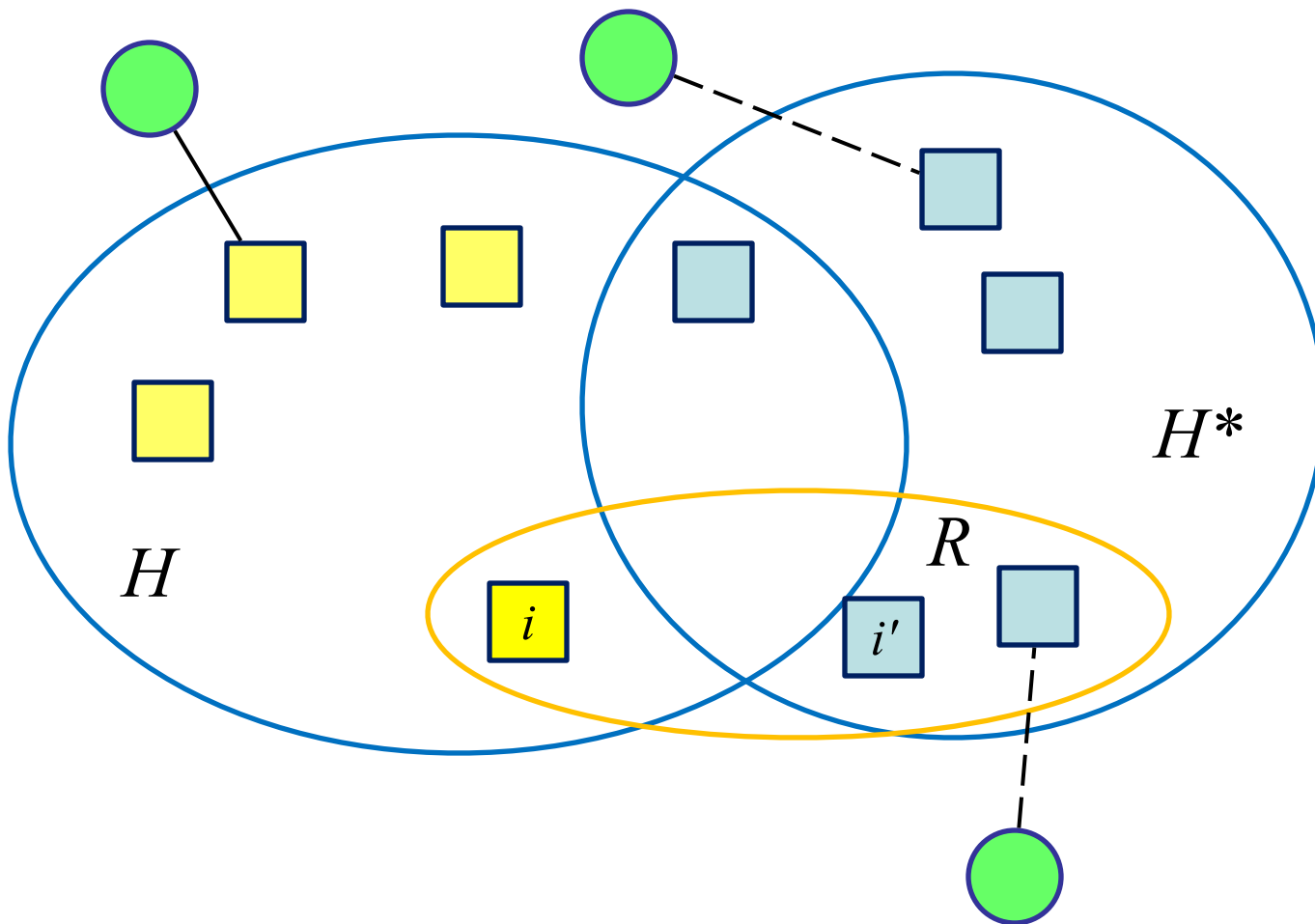
Замена предприятия i на предприятие i' .

- Заменим предприятие i на предприятие i' .
Переназначим клиентов j таких, что $\varphi(j) = i$ и
 - $\varphi^*(j) \notin R_i$ на предприятие $\gamma(\varphi^*(j))$,
 - $\varphi^*(j) \in R_i$ на предприятие i' .

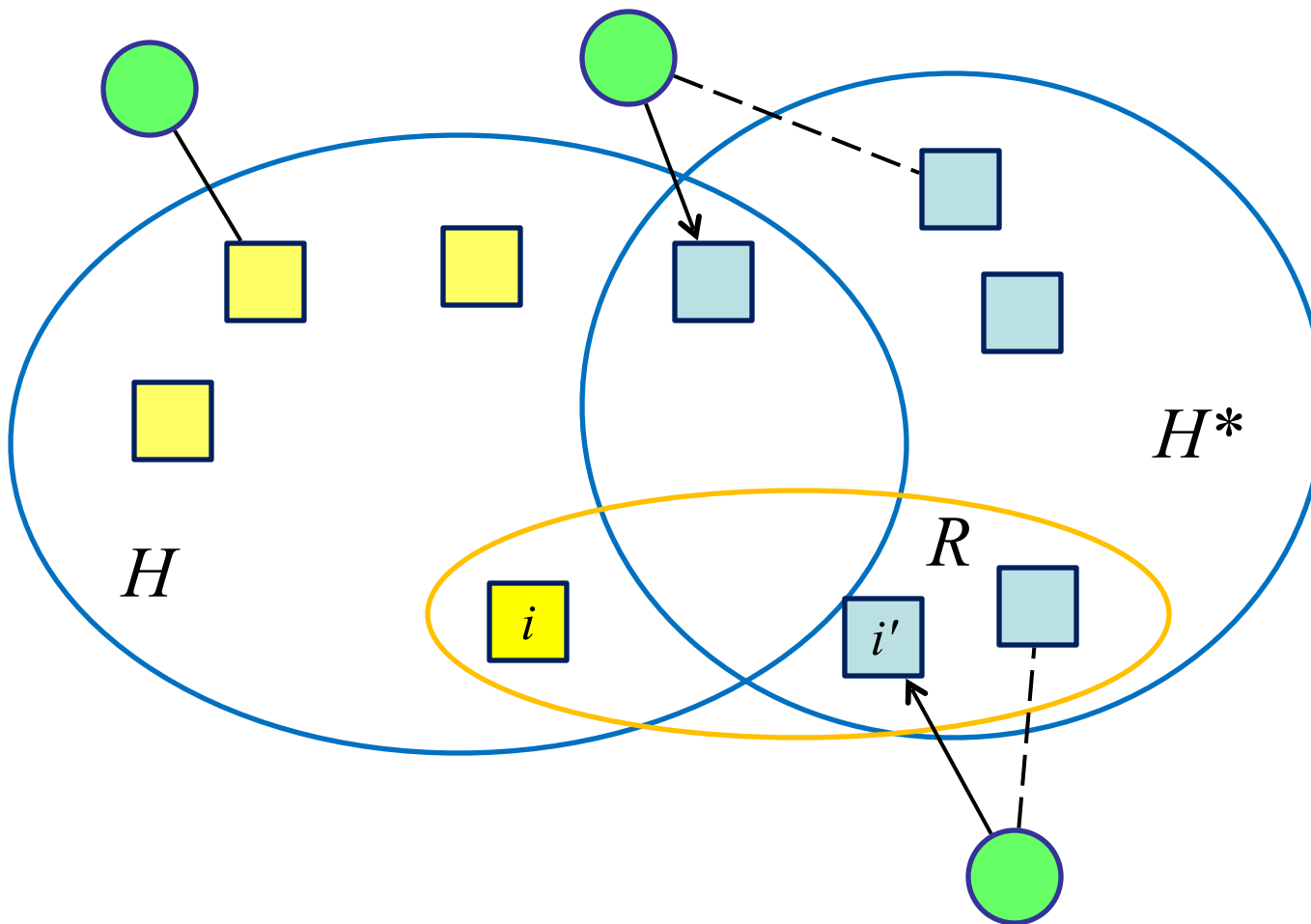
Замена i на i' .



Замена i на i' .



Замена i на i' .



Оценка стоимости замены i на i'

- Заменим предприятие i на предприятие i' : $f'_i - f_i$.
- Переназначим клиентов j таких, что $\varphi(j) = i$ и $\varphi^*(j) \notin R_i$ на предприятие $\gamma(\varphi^*(j))$:

$$\text{Лемма 5.2} \Rightarrow \leq 2c_{j, \varphi^*(j)}.$$

Стоимость переназначения

Лемма 5.2

Рассмотрим произвольного клиента j , для которого $\varphi(j) = i$, и $i \neq i' = \gamma(\varphi^*(j))$. Тогда стоимость переназначения клиента j от предприятия i к предприятию i' не превышает $2c_{j,\varphi^*(j)}$.

Оценка стоимости замены i на i'

- Заменим предприятие i на предприятие i' : $f'_i - f_i$.
- Переназначим клиентов j таких, что $\varphi(j) = i$ и
 – $\varphi^*(j) \notin R_i$ на предприятие $\gamma(\varphi^*(j))$:

$$\text{Лемма 5.2} \Rightarrow \leq 2c_{j, \varphi^*(j)}.$$

$$\text{– } \varphi^*(j) \in R_i \text{ на предприятие } i': = c_{ji'} - c_{ji}.$$

Суммируя по всем клиентам и учитывая, что стоимость нового решения должна быть больше чем стоимость решения H , φ_H , получим:

$$f_{i'} - f_i + \sum_{j: \varphi(j)=i \& \varphi^*(j) \notin R_i} 2c_{j\varphi^*(j)} + \sum_{j: \varphi(j)=i \& \varphi^*(j) \in R_i} (c_{ji'} - c_{ji}) \geq 0$$

А что, если $i=i'$

$$f_{i'} - f_i + \sum_{j:\varphi(j)=i \& \varphi^*(j) \notin R_i} 2c_{j\varphi^*(j)} + \sum_{j:\varphi(j)=i \& \varphi^*(j) \in R_i} (c_{ji'} - c_{ji}) \geq 0$$



$$f_{i'} - f_i = 0 \quad \& \quad \sum_{j:\varphi(j)=i \& \varphi^*(j) \in R_i} (c_{ji'} - c_{ji}) = 0$$

$$\sum_{j:\varphi(j)=i \& \varphi^*(j) \notin R_i} 2c_{j\varphi^*(j)} \geq 0$$

Оценка на стоимость опасного предприятия

$$f_{i'} - f_i + \sum_{j:\varphi(j)=i \& \varphi^*(j) \notin R_i} 2c_{j\varphi^*(j)} + \sum_{j:\varphi(j)=i \& \varphi^*(j) \in R_i} (c_{ji'} - c_{ji}) \geq 0$$

$$f_{i^*} + \sum_{j:\varphi(j)=i \& \varphi^*(j)=i^*} (c_{j,\varphi^*(j)} - c_{j,\varphi(j)}) \geq 0 \quad i^* \in R_i - \{i'\}$$

$$-f_i + \sum_{i^* \in R_i} f_{i^*} + \sum_{j:\varphi(j)=i \& \varphi^*(j) \notin R_i} 2c_{j\varphi^*(j)} +$$

$$\sum_{j:\varphi(j)=i \& \varphi^*(j) \in R_i} (c_{ji'} - c_{ji}) + \sum_{j:\varphi(j)=i \& \varphi^*(j) \in R_i - \{i'\}} (c_{j,\varphi^*(j)} - c_{j,\varphi(j)}) \geq 0$$

Упрощение

$$-f_i + \sum_{i^* \in R_i} f_{i^*} + \sum_{j: \varphi(j)=i \& \varphi^*(j) \notin R_i} 2c_{j\varphi^*(j)} +$$

$$\sum_{j: \varphi(j)=i \& \varphi^*(j) \in R_i} (c_{ji'} - c_{ji}) + \sum_{j: \varphi(j)=i \& \varphi^*(j) \in R_i - \{i'\}} (c_{j, \varphi^*(j)} - c_{j, \varphi(j)}) \geq 0$$

- $\varphi(j)=i \& \varphi^*(j)=i'$: $c_{ji'} - c_{ji} \leq 2c_{ji'} = 2c_{j\varphi^*(j)}$.
- $\varphi(j)=i \& \varphi^*(j) \in R - \{i'\}$: $c_{ji'} + c_{j\varphi^*(j)} - 2c_{ji} \leq c_{ii'} + c_{j\varphi^*(j)} - c_{ji} \leq c_{i\varphi^*(j)} + c_{j\varphi^*(j)} - c_{ji} \leq 2c_{j\varphi^*(j)}$.

$$-f_i + \sum_{i^* \in R_i} f_{i^*} + \sum_{j: \varphi(j)=i} 2c_{j\varphi^*(j)} \geq 0$$

Доказательство леммы 5.3(2)

Безопасное предприятие i :
$$-f_i + \sum_{j:\varphi(j)=i} 2c_{j\varphi^*(j)} \geq 0$$

Опасное предприятие i :
$$-f_i + \sum_{i^* \in R_i} f_{i^*} + \sum_{j:\varphi(j)=i} 2c_{j\varphi^*(j)} \geq 0$$

$$\sum_{i^* \in H^*} f_{i^*} - \sum_{i \in H} f_i + \sum_{j \in D} 2c_{j\varphi^*(j)} \geq 0$$

$$X^* - X_H + 2Y^* \geq 0$$

Оценка на локальный оптимум

- Теорема 5.4

Рассмотрим произвольный локальный оптимум H и φ_H . Тогда $X_H + Y_H \leq 3\text{ОРТ}$.

- Доказательство.
- $Y_H \leq X^* + Y^*$ (Лемма 5.1)
- $X_H \leq X^* + 2Y^*$ (Лемма 5.3)
- $X_H + Y_H \leq 2X^* + 3Y^* \leq 3\text{ОРТ}$.

Практика

- Оценить трудоемкость алгоритма локального поиска.
Является ли алгоритм локального поиска полиномиальным?

- Рассмотрим следующий алгоритм.

Input ($G, f: F \rightarrow \mathbf{Q}^+, c: E \rightarrow \mathbf{Q}^+$)

- 1) Увеличить стоимость каждого предприятия в 2 раза, то есть положить $f_{new} := 2f_i$ для всех $i \in F$.
- 2) Решить пример с новыми стоимостями алгоритмом локального спуска.

Output (H, φ_H)

- Оценить стоимость полученного решения.