

Контрольная работа 1

1. Трудность задачи Штейнера состоит в поиске оптимального подмножества вершин Штейнера, которые необходимо включить в дерево. Показать, что если это множество известно, то задача Штейнера решается за полиномиальное время.

2. Рассмотрим следующую задачу теории расписаний. Множество работ должно быть выполнено на пяти параллельных машинах. Для каждой работы задана ее длительность, и на множестве работ задан частичный порядок. Если работа i предшествует работе j , $(i, j) \in A$, то работа j может начаться только после завершения работы i . Прерывания в обслуживании работ запрещены.

Построим расписание по следующему правилу. В каждый момент времени t , когда есть свободная машина M и доступная работа j , назначим работу j на машину M в момент t .

Машина свободна в момент t , если она в этот момент не выполняет никакую работу. Работа доступна в момент t , если все ее предшественники уже выполнены.

Обозначим длину, полученного расписания через L . Покажите, что $L \leq 2OPT$, где OPT – длина оптимального расписания.

- Постройте нижние оценки.
- Рассмотрите работу, которая закончила выполняться последней, и проанализируйте, почему алгоритм не поставил ее на выполнение раньше.

3. При построении PTAS-1 (лекция 6) маленькие работы склеивались в одну и разрезались на одинаковые кусочки. Рассмотрим другой способ построения упрощенного примера. Рассмотрим множество маленьких работ. Если в нем есть две работы длины меньше чем εL , то склеим их, то есть, две работы с длительностями $p_i, p_j < \varepsilon L$ заменим одной работой с длительностью $p_i + p_j$. Продолжим склеивание до тех пор, пока в примере останется не больше одной работы с $p < \varepsilon L$.

Докажите, что $OPT(I^\#) \leq (1 + \varepsilon)OPT(I)$, где $OPT(I^\#)$ – оптимальное расписание в новом примере и $OPT(I)$ – оптимальное расписание в исходном примере. Для этого покажите, как используя оптимальное расписание исходной задачи, построить допустимое расписание новой задачи, длина которого не более чем в $(1 + \varepsilon)$ раз отличается от длины оптимального расписания исходной задачи.