ДИСКРЕТНЫЕ ЗАДАЧИ КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ[1]

В. Л. Береснев

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
e-mail: beresnev@math.nsc.ru

Аннотация. Изучаются задачи размещения предприятий (средств обслуживания) в условиях конкуренции, когда две фирмы последовательно открывают свои предприятия, а каждый потребитель выбирает открытое предприятие, исходя из своих собственных предпочтений, и приносит доход фирме–лидеру или фирме–последователю. Вопрос состоит в том, чтобы выбрать размещение предприятий фирмы–лидера так, чтобы с учетом реакции фирмы–последователя и известных предпочтений потребителей получить максимальный доход (прибыль). Даются формулировки рассматриваемых задач в виде задач целочисленного линейного двухуровневого программирования и эквивалентные формулировки в виде задач псевдобулева двухуровневого программирования. Предлагается способ построения верхних оценок значений целевых функций рассматриваемых задач конкурентного размещения. Соответствующий алгоритм состоит в построении и нахождения минимального значения вспомогательной псевдобулевой функции . Вектор дающий наименьшее значение оценочной функции, порождает приближенное решение исследуемых задач. Предлагается алгоритм последовательного улучшения начального приближенного решения.

Ключевые слова: конкурентное размещение предприятий, двухуровневое программирование, верхняя оценка, приближенные решения.

1. Введение

Задача размещения предприятий (средств обслуживания) с неограниченными мощностями — хорошо известная задача дискретной оптимизации [1, 3]. В задаче размещения (на максимум) производитель решает вопрос о том, в каких местах из множества возможных открыть предприятия, производящие некоторый продукт, и к какому открытому предприятию прикрепить каждого из заданных потребителей данного продукта, чтобы получить максимальную прибыль (доход).

В настоящей работе изучается более общая ситуация — размещение предприятий в условиях конкуренции. Предполагается, что две конкурирующие фирмы — производители некоторого продукта, последовательно принимают решения об открытии своих предприятий на заданном множестве возможных мест их размещения. Кроме того, в данной ситуации каждый потребитель рассматривается как сторона, принимающая решения, которая, исходя из своих собственных предпочтений, среди открытых предприятий выбирает для себя наилучшее и приносит тем самым доход одной из фирм. Процесс принятия решений при конкурентном размещении предприятий по аналогии с моделью Штакельберга [4] представляется состоящим из трех этапов. На первом этапе одна из фирм (фирма–лидер), учитывая возможную реакцию второй фирмы (фирмы–последователя), размещает свои предприятия. На втором этапе фирма–последователь, имея информацию

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ грантов 06–01–00075, 08-07-00037)

о расположении предприятий фирмы–лидера, открывает свои предприятия. Наконец, на третьем этапе каждый потребитель, исходя из своих собственных предпочтений, выбирает лучшее для себя предприятие. Получаемые в результате задачи представляют собой задачи математического двухуровневого программирования [2].

2. Формулировка задач конкурентного размещения предприятий

Сформулируем задачи, которые обобщают классическую задачу размещения предприятий на максимум и которые, как отмечено выше, описывают ситуацию, когда две конкурирующие фирмы (фирма–лидер и фирма–последователь) последовательно открывают свои предприятия, производящие некоторую продукцию для удовлетворения спроса в этой продукции заданного множества потребителей.

Задача, формулируемая от лица фирмы–лидера, состоит в выборе такого размещения предприятий, чтобы получить максимальную прибыль с учетом того, что фирма–последователь, разместив свои предприятия в соответствии со своей целевой функцией, «захватит» часть потребителей. При этом предполагается, что цель фирмы – последователя известна и что обе фирмы знают правила выбора потребителями предприятий для своего обслуживания.

Рассмотри две постановки сформулированной задачи, отличающиеся целевыми функциями фирмы–последователя. В первой считаем, что целью фирмы–последователя, также как и фирмы–лидера, является получение максимальной прибыли, а во второй получение максимального дохода, то есть «захват» максимально возможного количества потребителей.

Для формальной записи сформулированных задач введем следующие обозначения:

$I = \{1, \ldots, m\}$ — множество предприятий (возможных мест размещения предприятий).

$J = \{1, \ldots, n\}$ — множество потребителей.

p_{ij} — величина дохода, получаемого предприятием $i \in I$, открытым фирмой–лидером, при обслуживании потребителя $j \in J$.

q_{ij} — величина дохода, получаемого предприятием i, открытым фирмой–последователем, при обслуживании потребителя $j \in J$.

$\prec_j$ — линейный порядок на множестве I, реализующий предпочтения потребителя $j \in J$. Отношение $i \prec_j k$ означает, что из двух открытых предприятий $i \in I$ и $k \in I$ потребитель j выберет предприятие i. Отношение $i \preccurlyeq_j k$ означает, что либо $i \prec_j k$, либо $i = k$.

f_i — величина фиксированных затрат фирмы–лидера на открытие предприятия $i \in I$.

g_i — величина фиксированных затрат фирмы–последователя на открытие предприятия $i \in I$.

Для формальной записи задач используем переменные классической задачи размещения предприятий с неограниченными мощностями:

x_i — переменная, показывающая, открывает или нет фирма–лидер предприятие $i \in I$; $x_i = 1$, если открывает, и $x_i = 0$, если нет.

x_{ij} — переменная, указывающая выбрано ли потребителем $j \in J$ для своего обслуживания предприятие $i \in I$, открытое фирмой–лидером; $x_{ij} = 1$, если выбрано, и $x_{ij} = 0$, если нет.

z_i — переменная, показывающая открывает или нет фирма–последователь предприятие $i \in I$; $z_i = 1$, если открывает, и $z_i = 0$, если нет.

z_{ij} — переменная, указывающая выбрано ли потребителем $j \in J$ для своего обслуживания предприятие $i \in I$, открытое фирмой–последователем; $z_{ij} = 1$, если выбрано, и $z_{ij} = 0$, если нет.

С использованием указанных переменных задача конкурентного размещения предприятий в случае, когда целью фирмы–последователя является получение максимальной прибыли, записывается следующим образом:

$$\max_{(x_i),(x_{ij})} \Big\{ -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} \big(\sum_{i\in I} p_{ij} x_{ij}\big)\big(1 - \sum_{i\in I} \widetilde{z}_{ij}\big)\Big\}; \tag{1}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J; \tag{2}$$

$$x_i \geq x_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \tag{3}$$

$$x_i + \sum_{i \prec_j l} x_{lj} \leq 1, \quad i \in I, j \in J; \tag{4}$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J; \tag{5}$$

$$((\widetilde{z}_i), (\widetilde{z}_{ij})) \text{ — оптимальное решение задачи (7)–(11);} \tag{6}$$

$$\max_{(z_i),(z_{ij})} \Big\{ -\sum_{i\in I} g_i z_i + \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} q_{ij} z_{ij}\Big\}; \tag{7}$$

$$\sum_{i\in I} z_{ij} \leq 1, \quad j \in J; \tag{8}$$

$$z_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \tag{9}$$

$$x_i + z_i + \sum_{i \prec_j l} z_{lj} \leq 1, \quad i \in I, j \in J; \tag{10}$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J. \tag{11}$$

Представленная задача, как и всякая задача двухуровневого программирования, включает *внутреннюю* оптимизационную задачу (7)–(11), которую будем называть *задачей фирмы–последователя*.

В случае, когда целью фирмы–последователя является получение максимального дохода при дополнительном условии неубыточности каждого открытого предприятия, задача конкурентного размещения предприятий отличается только ограничениями, связанными с задачей фирмы–последователя. Эти ограничения записываются следующим образом:

$$((\widetilde{z}_i), (\widetilde{z}_{ij})) \text{ — оптимальное решение задачи (13)–(18);} \tag{12}$$

$$\max_{(z_i),(z_{ij})} \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} q_{ij} z_{ij}; \tag{13}$$

$$\sum_{i\in I} z_{ij} \leq 1, \quad j \in J; \tag{14}$$

$$z_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \tag{15}$$

$$x_i + z_i + \sum_{i \prec_j l} z_{lj} \leq 1, \quad i \in I, j \in J; \tag{16}$$

$$\sum_{j\in J} q_{ij} z_{ij} \geq g_i z_i, \quad i \in I; \tag{17}$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J. \tag{18}$$

Уточним понятие оптимального решения рассматриваемых задач конкурентного размещения предприятий (1)–(11) и (1)–(5), (12)–(18) с учетом того, что оптимальные решения внутренних задач могут определяться неоднозначно.

Обозначим через X решение $((x_i),(x_{ij}))$, удовлетворяющее условиям (2)–(5), которое будем называть *допустимым решением* задачи конкурентного размещения предприятий (1)–(11) и (1)–(5), (12)–(18). При фиксированном решении X обозначим через Z допустимое решение $((z_i),(z_{ij}))$ задачи (7)–(11) или (13)–(18). Обозначим через $O(X)$ множество оптимальных решений $\widetilde{Z}$ внутренней задачи. Значение целевой функции (1) на допустимых решениях X и Z обозначим через $L(X,Z)$. Тогда сформулированные выше задачи конкурентного размещения предприятий в компактной форме записываются следующим образом:

$$\max_X L(X,\widetilde{Z});$$

$$\widetilde{Z} \in O(X).$$

Допустимое решение X^* задачи конкурентного размещения предприятий назовем *оптимальным*, если имеется оптимальное решение $\widetilde{Z}^* \in O(X)$ внутренней задачи такое, что выполняются следующие два условия:

1. $L(X^*,\widetilde{Z}^*) \leq L(X^*,\widetilde{Z})$ для любого $\widetilde{Z} \in O(X^*)$.

2. Для любого допустимого решения X существует оптимальное решение $\widetilde{Z} \in O(X)$ такое, что $L(X^*,\widetilde{Z}^*) \geq L(X,\widetilde{Z})$.

Легко видеть, что если при любом решении X значения функции $L(X,\widetilde{Z})$ одинаковые для всякого $\widetilde{Z} \in O(X)$, то первое условие оптимальности решения выполняется автоматически. В общем случае при таком определении оптимального решения получаем, что задачи конкурентного размещения предприятий (1)–(11) и (1)–(5), (12)–(18) переписываются эквивалентным образом в виде следующей задачи

$$\max_X \min_{\widetilde{Z}\in O(X)} L(X,\widetilde{Z}).$$

Это есть максиминная задачи математического двухуровневого программирования, в которой множество допустимых решений $\widetilde{Z}$ задано неявным образом, как множество оптимальных решений внутренней оптимизационной задачи.

Представленные задачи конкурентного размещения предприятий (1)–(11) и (1)–(5), (12)–(18) будем исследовать при следующем дополнительном условии, позволяющим переформулировать их, как задачи линейного целочисленного двухуровневого программирования. Будем считать, что доход получаемый фирмой–лидером и фирмой–последователем от потребителя $j \in J$ одинаковый для любого предприятия, обслуживающего данного потребителя, и равняется b_j. То есть будем считать, что для всякого $j \in J$ имеют место равенства $p_{ij} = q_{ij} = b_j$ при любом $i \in I$.

В этом случае функция $L(X,Z)$ принимает вид

$$L(X,Z) = -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} b_j \big(1 - \sum_{i\in I} \widetilde{z}_{ij}\big)$$

и, следовательно, переменные $x_{ij}, i \in I, j \in J$, могут быть исключены из рассматриваемых задач. В результате задача (1)–(11) переписывается следующим образом:

$$\max_{(x_i)} \min_{(\widetilde{z}_i),(\widetilde{z}_{ij})} \Big\{ -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} b_j \big(1 - \sum_{i\in I} \widetilde{z}_{ij}\big) \Big\}; \tag{19}$$

$$\sum_{i\in I} x_i \geq 1; \tag{20}$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i \in I; \tag{21}$$

$$\big((\widetilde{z}_i), (\widetilde{z}_{ij})\big) \text{ — оптимальное решение задачи (23)–(27);} \tag{22}$$

$$\max_{(z_i),(z_{ij})} \Big\{ -\sum_{i\in I} g_i z_i + \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} b_j z_{ij} \Big\}; \tag{23}$$

$$\sum_{i\in I} z_{ij} \leq 1, \quad j \in J; \tag{24}$$

$$z_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \tag{25}$$

$$x_i + z_i + \sum_{i \prec_j l} z_{lj} \leq 1, \quad i \in I, j \in J; \tag{26}$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J. \tag{27}$$

Аналогичная запись задачи (1)–(5), (12)–(18) отличается от задачи (19)–(27) только ограничениями, связанными с задачей фирмы–последователя, которые принимают следующий вид:

$$\big((\widetilde{z}_i), (\widetilde{z}_{ij})\big) \text{ — оптимальное решение задачи (29)–(34);} \tag{28}$$

$$\max_{(z_i),(z_{ij})} \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} b_j z_{ij}; \tag{29}$$

$$\sum_{i\in I} z_{ij} \leq 1, \quad j \in J; \tag{30}$$

$$z_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \tag{31}$$

$$x_i + z_i + \sum_{i \prec_j l} z_{lj} \leq 1, \quad i \in I, j \in J; \tag{32}$$

$$\sum_{j\in J} b_j z_{ij} \geq g_i z_i, \quad i \in I; \tag{33}$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J. \tag{34}$$

Представленные формулировки (19)–(27) и (19)–(21), (28)–(34) задач конкурентного размещения предприятий являются задачами линейного целочисленного двухуровневого программирования. Однако это замечание не в одинаковой степени относится к обеим рассматриваемым задачам.

При фиксированном решении X задач (19)–(27) и (19)–(21), (28)–(34) обозначим через $O_1(X)$ множество оптимальных решений задачи (23)–(27), а через $O_2(X)$ и $D_2(X)$ соответственно множество оптимальных и допустимых решений задачи (29)–(34). Значение функции $L(X, Z)$ будет одинаковым для всех оптимальных решений $\widetilde{Z} \in O_2(X)$. Отсюда получаем, что задача (19)–(21), (28)–(34) эквивалентна следующей максиминной задаче линейного целочисленного программирования

$$\max_{(x_i)} \min_{(z_i),(z_{ij})} \Big\{ -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J} b_j \big(1 - \sum_{i\in I} z_{ij}\big)\Big\};$$

$$\sum_{i\in I} x_i \geq 1;$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i \in I;$$

$$\big((z_i),(z_{ij})\big) \text{ — допустимое решение задачи (29)–(34).}$$

В этой задаче множество решений $\big((z_i),(z_{ij})\big)$, среди которых выбирается наилучшее, задается явным образом посредством ограничений (30)–(34).

С учетом данного представления задачи (19)–(21), (28)–(34) для любого решения X задач (19)–(27) и (19)–(21), (28)–(34) можем написать

$$\min_{\widetilde{Z}\in O_2(X)} L(X,\widetilde{Z}) = \min_{Z\in D_2(X)} L(X,Z) \leq \min_{\widetilde{Z}\in O_1(X)} L(X,\widetilde{Z}).$$

Отсюда получаем, что верхняя оценка значений целевой функции (19) задачи (19)–(27) будет одновременно и верхней границей для значений целевой функции (19) задачи (19)–(21), (28)–(34).

3. Эквивалентные формулировки задач конкурентного размещения предприятий

Заметим, что поскольку при фиксированном решении (x_i) задач (19)–(27) и (19)–(21), (28)–(34) значения переменных $z_{ij}, i\in I, j\in J$, в допустимом решении $\big((z_i),(z_{ij})\big)$ внутренних задач (23)–(27) и (29)–(34) определяются однозначно по векторам (x_i) и (z_i), то эти переменные так же как и ранее переменные $x_{ij}, i\in I, j \in J$, могут быть исключены из рассмотрения. Для получения соответствующих эквивалентных формулировок исследуемых задач введем следующие обозначения.

Для произвольного $(0,1)$-вектора $w=(w_i), i\in I$, при заданном $j\in J$ обозначим через $i_j(w)$ элемент i_0 из множества $I_0=\{i\in I | w_i = 0\}$ такой, что $i_0 \preccurlyeq_j i$ для всякого $i\in I_0$. Если $I_0=\emptyset$, то через $i_j(w)$ обозначим элемент $i_0\in I$ такой, что $i \preccurlyeq_j i_0$ для любого $i\in I$. Для $(0,1)$-векторов (x_i) и (z_i) обозначим через $y=(y_i)$ и $u=(u_i)$ такие $(0,1)$-вектора, что $y_i = 1-x_i$, $u_i=1-z_i$, $i\in I$.

С использованием введенных обозначений получаем, что при любых решениях (x_i) и $\big((z_i),(z_{ij})\big)$ для всякого $j\in J$ выполняются равенства

$$\sum_{i\in I} z_{ij} = 1 - \prod_{i\prec i_j(y)} u_i = \prod_{i\preccurlyeq i_j(u)} y_i.$$

Используя это равенства, получаем следующую эквивалентную формулировку задачи (19)–(27) в виде минимаксной задачи псевдобулева двухуровневого программирования:

$$\min_{(y_i)} \max_{(\widetilde{u}_i)} \Big\{ -\sum_{i\in I} f_i y_i + \sum_{j\in J} b_j \prod_{i\preccurlyeq i_j(\widetilde{u})} y_i\Big\}; \tag{35}$$

$$\prod_{i\in I} y_i = 0; \tag{36}$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad i \in I; \tag{37}$$

$$(\widetilde{u}_i)\text{— оптимальное решение задачи (39)–(40);} \tag{38}$$

$$\min_{(u_i)} \Big\{ -\sum_{i\in I} g_i u_i + \sum_{j\in J} b_j \prod_{i\prec i_j(y)} u_i \Big\}; \tag{39}$$

$$u_i \in \{0,1\}, \quad i \in I. \tag{40}$$

Аналогичным образом получаем, что задача (19)–(21), (28)–(34) имеет эквивалентную формулировку в виде минимаксной задачи псевдобулева программирования.

4. Верхняя граница для целевой функции задач конкурентного размещения предприятий

Рассмотрим задачу (19)–(27) и ее эквивалентное представление в виде задачи псевдобулева двухуровневого программирования (35)–(40). Построим псевдобулеву функцию $f(y_i,\dots,y_m)$ такую, что на любом $(0,1)$-векторе $y=(y_i)$ значение этой функции не превосходит значения целевой функции (35). Такую псевдобулеву функцию $f(y_i,\dots,y_m)$ назовем *оценочной*.

Чтобы построить оценочную всевдобулеву функцию, для любого $j_0 \in J$ определим множество $I_{j_0} \subset I$ следующим образом. Пусть $i_0 \in I$. Рассмотрим множество

$$N(i_0,j_0) = \{i \in I | i \prec_{j_0} i_0\}$$

и множество

$$J(i_0) = \{j \in J | i_0 \preccurlyeq_j i \text{ для всякого } i \notin N(i_0,j_0)\},$$

задающее множество точек $j \in J$, для которых элемент i_0 предпочтительнее любого элемента $i \notin N(i_0,j_0)$. Это множество не пусто, поскольку $j_0 \in J(i_0)$. Для всякого $k \in N(i_0,j_0)$ построим множество

$$J(k,i_0) = \{j \in J(i_0) | k \prec_j i_0\},$$

задающее множество точек $j \in J(i_0)$, для которых элемент k предпочтительнее элемента i_0. Считаем по определению, что $i_0 \notin I_{j_0}$, если существует элемент $k \in N(i_0,j_0)$ такой, что

$$g_k \le \sum_{j\in J(k,i_0)} b_j.$$

В противном случае считаем, что $i_0 \in I_{j_0}$. Заметим, что при любом $j_0 \in J$ множество I_{j_0} не пусто, поскольку если $i_0 \preccurlyeq_{j_0} i$ для всякого $i \in I$, то $i_0 \in I_{j_0}$.

Важное свойство множества I_{j_0} устанавливает следующая

Лемма 1. Если (x_i) — решение задачи (19)–(27) такое, что $x_i = 0$ для всякого $i \in I_{j_0}$, то для оптимального решения $\big((\widetilde{z}_i),(\widetilde{z}_{ij})\big)$ задачи (23)–(27), на котором значение целевой функции (19) наименьшее, выполняется равенство

$$\sum_{i\in I} \widetilde{z}_{ij_0} = 1.$$

Лемма 2. Для любого решения $y = (y_i)$ задачи (35)–(40) и оптимального решения $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_i)$ задачи (39), (40), на котором значение целевой функции (35) наибольшее, при любом $j \in J$ выполняется неравенство

$$\prod_{i \preccurlyeq i_{j_0}(\widetilde{u})} y_i \geq \prod_{i \in I_{j_0}} y_i.$$

Рассмотрим псевдобулеву функцию вида

$$f^0(y_1, \ldots, y_m) = -\sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{j \in J} b_j \prod_{i \in I_j} y_i.$$

По лемме 2 для любого вектора $y = (y_i)$ выполняется неравенство

$$\max_{(\widetilde{u}_i)} \Big\{ -\sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{j \in J} b_j \prod_{i \preccurlyeq i_j(\widetilde{u})} y_i \Big\} \geq f^0(y_1, \ldots, y_m).$$

Следовательно, псевдобулева функция $f^0(y_1, \ldots, y_m)$ является оценочной, а величина

$$f^0 = \min_{(y_i)} \Big\{ f^0(y_1, \ldots, y_m) + F \prod_{i \in I} y_i \Big\},$$

где $F > \min\limits_{i \in I} f_i$, есть оценка снизу для значений целевой функции (35) задачи (35)–(40). Таким образом, получаем следующее.

Теорема. Величина

$$UB = \sum_{j \in J} b_j - \sum_{i \in I} f_i - f^0$$

является верхней границей для оптимального значения целевой функции (19) задачи (19)–(27).

Приведенная верхняя граница, как отмечалось ранее, является также верхней границей для оптимального значения целевой функции (19) задачи (19)–(21), (28)–(34).

Алгоритм вычисления предложенной верхней границы для целевой функции задач (19)–(27) и (19)–(21), (28)–(34) включает в себя два этапа. На первом строится оценочная псевдобулева функция, а на втором вычисляется ее наименьшее значение. Построение оценочной функции сводится к отысканию для всякого $j \in J$ множества I_j. Из самого определения этого множества следует, что оно может быть построено за время $O(m^2 n^2)$. Для решения задачи минимизации псевдобулевой функции, которая эквивалентна задаче размещения предприятий с неограниченными мощностями [1], может быть использован целый ряд алгоритмов [1], построенных на идеях методов неявного перебора и локального поиска.

5. Алгоритмы построения приближенных решений задач конкурентного размещения предприятий

Допустимое решение X^0 задачи конкурентного размещения предприятий назовем *приближенным решением*, если имеется оптимальное решение $\widetilde{Z}^0 \in O(X^0)$ внутренней задачи такое, что

$$L(X^0, \widetilde{Z}^0) \leq L(X^0, \widetilde{Z}) \text{ для любого } \widetilde{Z} \in O(X^0)$$

Таким образом, для приближенного решения требуется выполнение только первого условия в определении оптимального решения задачи конкурентного размещения предприятий. Заметим, что как приближенное решение может рассматриваться любое допустимое решение X, для которого найдено некоторое оптимальное решение $\widetilde{Z} \in O(X)$ внутренней задачи, поскольку оптимальное решение $\widetilde{Z}^0 \in O(X)$ с требуемым свойством может быть получено как оптимальное решение соответствующей вспомогательной задачи целочисленного линейного программирования.

Рассмотрим алгоритм построения приближенного решения задачи (19)–(27,) по аналогии с которым может быть построен и алгоритм приближенного решения (19)–(21), (28)–(34).

Для этого заметим, прежде всего,что одновременно с вычислением верхней границы для целевой функции задачи (19)–(27) определяется оптимальное решение $y^0 = (y_i^0)$ задачи минимизации оценочной псевдобулевой функции $f^0(y_1, \ldots, y_m)$. Это решение и соответствующий ему вектор $x^0 = (x_i^0)$ могут рассматриваться как приближенные решения соответственно задач (35)–(40) и (19)–(27). Процедуры улучшения начального приближенного решения y^0 могут строиться на различной основе, например, с использованием различных схем локального поиска.

Приведем общую схему алгоритма улучшения начального приближенного решения $y^0 = (y_i^0)$ задачи (35)–(40). Идея алгоритма состоит в последовательном изменении текущего приближенного решения, используя накопленную информацию о множестве «вероятных» мест размещения предприятий фирмы–последователя.

Алгоритм состоит из предварительного шага и конечного числа основных шагов. На предварительном шаге имеется начальное приближенное y^0, для которого определяется соответствующее оптимальное решение $u^0 = (u_i^0)$ внутренней задачи. Кроме того задается начальное значение вектора $w = (w_i)$, $w_i = u_i^0, i \in I$, который указывает на «вероятные места» размещения предприятий фирмы–последователя. После этого начинается первый основной шаг.

На очередном основном шаге имеется наилучшее найденное приближенное решение $y^0 = (y_i^0)$ и $(0,1)$–вектор $w = (w_i)$. Решается следующая задача:

$$\min_{(y_i)} \Big\{ -\sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{j \in J} b_j \prod_{i \preccurlyeq i_j(w)} y_i \Big\};$$

$$y_i \in \{0, 1\}, i \in I.$$

Для оптимального решения $y = (y_i)$ этой задачи определяется соответствующее оптимальное решение $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_i)$ внутренней задачи. Если полученное приближенное решение $y = (y_i)$ лучше известного приближенного решения y^0, то решение y^0 заменяется на решение y. Далее строится новый вектор $w = (w_i)$ такой, что $w_i = \min\{w_i, \widetilde{u}_i\}$. Если в результате у вектора w появляются новые нулевые компоненты, то начинается следующий основной шаг, в противном случае алгоритм заканчивает работу.

Список литературы

[1] Береснев В. Л. Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. – Новосибирск. Изд-во Инст. математики, – 2005.

[2] Dempe S. Foundations of bilevel programming. Kluwer Ac. Pub. 2002.

[3] Mirchandani P. B., Francis R. L. Discrete location theory. New York: John Wiley and Sons, 1990.

[4] Stackelberg H. von. Grundlagender theorerischken Volkswirtschaftslahre (translated as The theory of the market Economy). W. Hodge&Co Ltd. London, 1943.

DISCRETE COMPETITIVE FACILITY LOCATION PROBLEMS

V. Beresnev

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk
e-mail: beresnev@math.nsc.ru

Abstract. We consider the facility location problems in the presence of competition, when two competitive firms open facilities sequentially and each client selects one of the open facilities according to his preferences and gives a corresponding profit to the first firm (Leader) or the second (Follower). The problem is to find a facility location for the Leader which maximizes its profit taking into account the optimal reaction of the Follower. We consider the formulations which differ in the Follower's objective function. We formulate models as bilevel linear integer programming problems and present equivalent formulations of these problems in the form of the bilevel pseudo-Boolean programming. We present a polynomial time algorithm for the problems in the case where facilities and clients are points of on a path. The way of construction of an upper bound for optimal values of the Leader's profit is proposed. The corresponding algorithm consists of the construction of auxiliary pseudo-Boolean function and computing an optimal solution yielding maximal values of this function. This optimal solution leads us to an approximate solution for the competitive facility location problems. We present algorithm for sequential improvement of the initial approximate solution.

Key words: competitive facility location, bilevel programming, upper bound, approximate solutions.