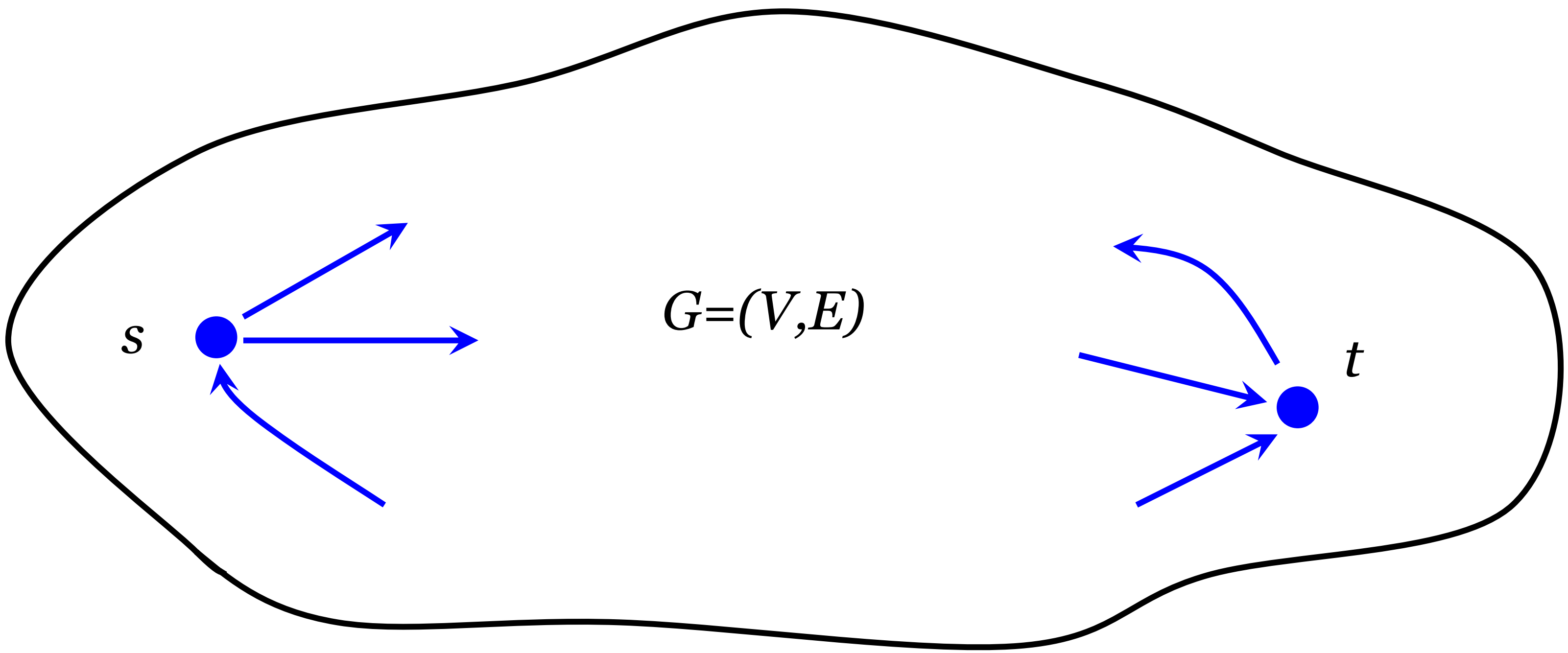
# Потоки в сетях

*Сетью* будем называть орграф $G$, некоторые вершины которого отмечены. Отмеченные вершины назовем *полюсами*, а остальные вершины — *внутренними*. Мы будем рассматривать классические сети с двумя полюсами: источником $s$ и стоком $t$.



# Поток в сети

Функция $f: E(G) \to R$ называется *потоком*, если для любой внутренней вершины $v$ в $G$ справедливо равенство

$$\mathrm{div}_f(v) = \sum_{e \in E^-(v)} f(e) - \sum_{e \in E^+(v)} f(e) = 0,$$

где $E^+(v)$ — множество дуг сети $G$, заходящих в $v$,

$E^-(v)$ — множество дуг сети $G$, выходящих из $v$.

# Мощность потока

Рассмотрим сумму всех дивергенций

$$\sum_{v \in V(G)} \operatorname{div}_f(v).$$

Так как $\operatorname{div}_f(v) = 0$ для всех для всех внутренних вершин, то в сумме только два ненулевых слагаемых: $\operatorname{div}_f(s)$ и $\operatorname{div}_f(t)$.

С другой стороны, для любой дуги $e = (v, u)$ величина $f(e)$ входит в сумму дважды: с плюсом для $v$ и с минусом для $u$. Следовательно,

$$\operatorname{div}_f(s) + \operatorname{div}_f(t) = 0.$$

Величина $M(f) = \operatorname{div}_f(s) = -\operatorname{div}_f(t)$ называется *мощностью потока*. Поток нулевой мощности называется *циркуляцией*.

# Примеры потоков

1) $f(e) = 0,\ e \in E$ нулевой поток

2) Пусть $L$ — ориентированный путь в $G$ из $s$ в $t$ или из $t$ в $s$. Поток $\rho$ вдоль пути:

$$\varphi_L(\rho) = \begin{cases} \rho & \text{для дуг из } L \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

3) Пусть $C$ — ориентированный контур в $G$. Поток $\rho$ вдоль контура:

$$\varphi_C(\rho) = \begin{cases} \rho & \text{для дуг из } C \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Такие потоки будем называть элементарными. Мощность — линейный функционал на потоках: $\forall\ \alpha, \beta$ и потоков $f, g$ верно

$$M(\alpha f + \beta g) = \alpha M(f) + \beta M(g).$$

# Разложение потоков

Скажем, что поток $f$ в сети $G$ *положителен*, если

а) $f(e) \geq 0, \forall e \in E(G)$

б) $\exists e \in E(G){:}\ f(e) > 0$

**Теорема 1.** Произвольную положительную циркуляцию $f$ в сети $G$ можно представить в виде суммы не более чем $|E(G)|-1$ положительных потоков вдоль контуров.

**Доказательство.** Допустим, что утверждение леммы неверно, $G$ — наименьшая по числу дуг сеть, для которой утверждение леммы неверно, а $f$ — некоторая циркуляция в $G$.

1. Если $f(e_0) = 0$ для некоторого $e_0 \in E(G)$, то рассмотрим $G_0 = G \backslash e_0$ и $f_0 = f|_{G_0}$. Ввиду минимальности $G$, поток $f_0$ можно представить в виде суммы не более чем $|E(G_0)|-1$ положительных потоков вдоль контуров. Но это представление и будет требуемым представлением для $f$. Поэтому в дальнейшем считаем, что

$$f(e) > 0 \quad \forall\, e \in E(G)$$

2. Рассмотрим произвольную дугу $e_1 \in E(G)$, $e_1 = (v_0, v_1)$. Поскольку $f$ — циркуляция, то существует дуга $e_2 \in E(G)$, выходящая из $v_1$, $e_2 = (v_1, v_2)$. Аналогично, существует дуга $e_3 \in E(G)$, выходящая из $v_2$, $e_3 = (v_2, v_3)$ и т.д. Предположим, что $v_k$ — первая из вершин, встретившаяся в последовательности $v_0, v_1, v_2, \ldots$ второй раз (такая вершина найдется, так как сеть конечна). Пусть $v_k = v_m$, $m < k$. Тогда в $G$ имеется контур $C = (v_m, v_{m+1}, \ldots, v_k = v_m)$. Обозначим $\rho = \min\{f(e) | e \in E(C)\}$, $\varphi_C(\rho)$ — поток вдоль контура $C$ величины $\rho$, $\tilde{f} = f - \varphi_C$. Если $\tilde{f} \equiv 0$, то теорема доказана.

3. Если $\tilde{f}$ не является тождественно нулевой функцией, то

а) поток $\tilde{f}$ положителен, и

б) $\exists\, e_0 \in E(C) : \tilde{f}\,(e_0) = 0$.

Для орграфа $G_0 = G \setminus e_0$ из-за минимальности $G$, поток $\tilde{f}_0 = \tilde{f}\,|_{G_0}$ можно представить в виде суммы не более чем $|E(G_0)| - 1$ ( $= |E(G)| - 2$) положительных потоков вдоль контуров. Но тогда утверждение леммы справедливо для орграфа $G$, что противоречит его выбору. ■

**Теорема 2.** Произвольный положительный поток $f$ в сети $G$ можно представить в виде суммы не более чем $|E(G)|$ положительных элементарных потоков.

**Доказательство.** Случай 1. $M(f) \geq 0$. Добавим к $G$ новую дугу $e_0$, ведущую из $t$ в $s$, и в получившейся сети $G_0$ положим

$$f_0(e) = \begin{cases} f(e), & \text{если } e \in E(G) \\ M(f), & \text{если } e = e_0 \end{cases}$$

Поток $f_0$ будет циркуляцией в $G_0$, и по теореме1 $f_0$ можно представить в виде суммы не более чем $|E(G_0)|$ – 1 ( = $|E(G)|$ ) положительных потоков вдоль контуров. Контурам сети $G_0$, содержащим дугу $e_0$, в $G$ соответствуют пути из $s$ в $t$. Отсюда получаем требуемое представление для $f$.

Случай 2. $M(f) < 0$. Добавим к $G$ новую дугу $\tilde{e}$, ведущую из $s$ в $t$, и в получившейся сети $\tilde{G}$ положим $\tilde{f}(\tilde{e}) = -M(f)$. Далее действуем аналогично случаю 1. ■

# Задача о максимальном потоке

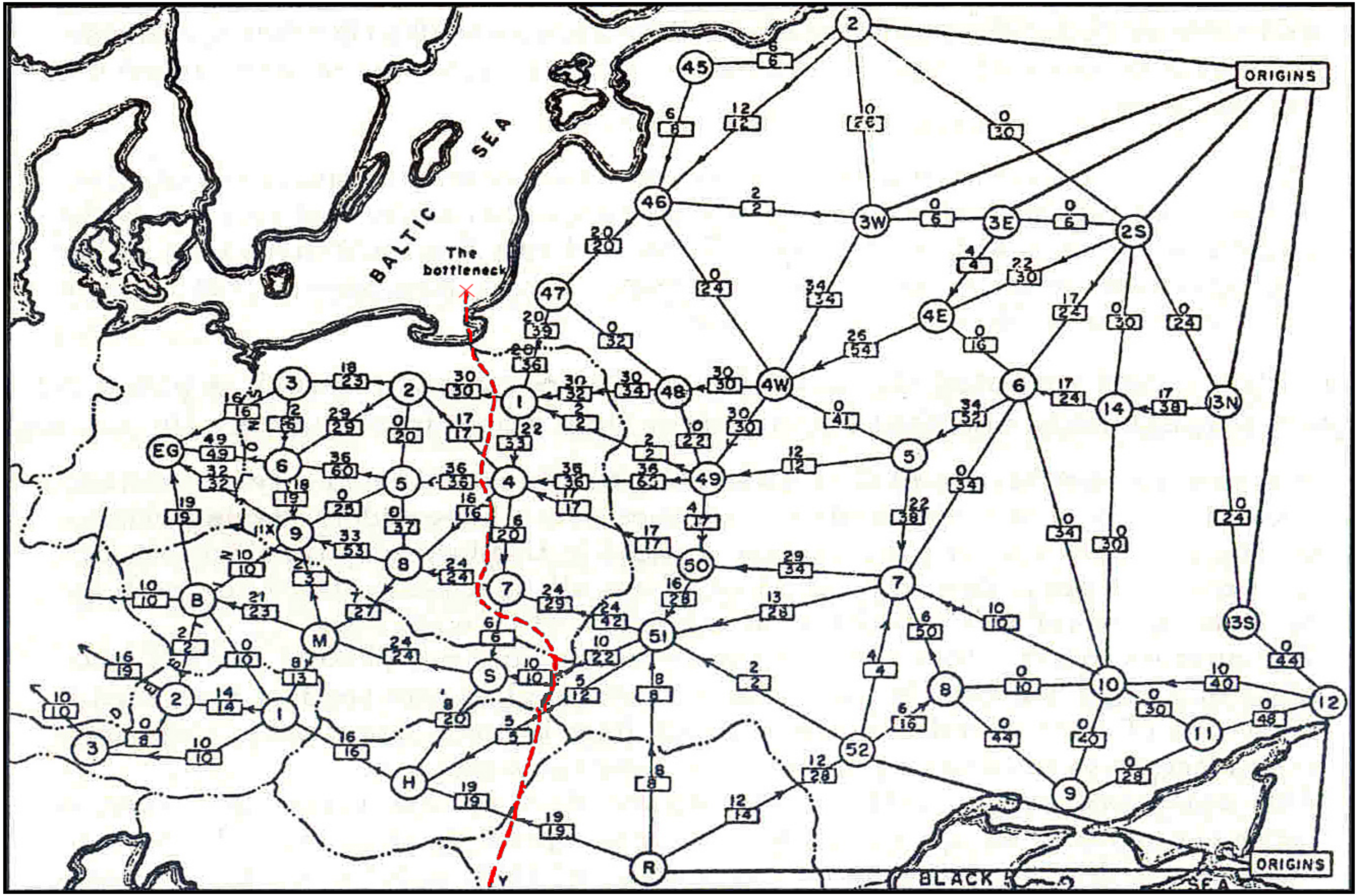
Дана сеть $G$ с полюсами $s$, $t$. Каждой дуге $e \in E$ приписана пропускная способность $c(e) \geq 0$. Найти поток, удовлетворяющий ограничениям на пропускные способности дуг и имеющий максимальную мощность:

$$\max M(f)$$

при ограничениях: $$0 \leq f(e) \leq c(e),\ \ e \in E,$$

$$\mathrm{div}_f(v) = 0,\ \ v \in V \setminus \{s, t\}.$$

Корректность задачи. В $|E|$-мерном евклидовом пространстве переменных $f(e)$, $e \in E$, ограничение $0 \leq f(e) \leq c(e)$ определяет ограниченную замкнутую область. Мощность $M(f)$ — непрерывный линейный функционал, следовательно, он достигает своего максимального (и минимального) значения.


BALTIC SEA
The bottleneck
ORIGINS
ORIGINS
BLACK SEA

# Перестройка сети

Кратные дуги $e_1$, …, $e_k$ заменим одной дугой $e$ и припишем ей суммарную пропускную способность

$$c(e) = c(e_1) + \ldots + c(e_k).$$

Обозначим через $\overline{e}$ обратную к $e$ дугу. $\overline{E} = E \cup \{\overline{e} \mid e \in E\}$ — все дуги, включая обратные.

Положим $c(e) = 0$, $e \in \overline{E} \setminus E$

Пусть $g$ — поток в $G(V, E, s, t, c(e))$. Построим новую сеть $G_g$ по правилу:

1) Добавим к $G$ все дуги из $\overline{E} \setminus E$.

2) $\forall\ e \in \overline{E}$ положим $c_g(e) = c(e) - g(e) + g(\overline{e})$.

3) Удалим все дуги, у которых $c_g(e) = 0$.

## Вычитание потоков

Пусть $f$, $g$ — потоки в $G$. Определим функцию $f \ominus g$ на $\overline{E}$ следующим образом:

$$(f \ominus g)(e) = \max\{0, f(e) - f(\overline{e}) - g(e) + g(\overline{e})\}.$$

Покажем, что $(f \ominus g)$ удовлетворяет ограничениям по пропускным способностям в сети $G_g$, то есть

$$(f \ominus g)(e) \leq c_g(e),\ e \in \overline{E}.$$

Действительно,

$$f(e) - f(\overline{e}) - g(e) + g(\overline{e}) = f(e) - f(\overline{e}) - (c(e) - c_g(e)) =$$

$$(f(e) - c(e)) - f(\overline{e}) + c_g(e) \leq c_g(e).$$

## Сложение потоков

Пусть $h$ — поток в сети $G_g$. Определим функцию $h\oplus g$:

$$(h\oplus g)(e) = \max\{0,\ h(e) - h(\bar{e}) + g(e) - g(\bar{e})\}.$$

Легко проверить, что $(h\oplus g)$ удовлетворяет ограничениям по пропускным способностям в $G$.

**Теорема 3.**

1) $\operatorname{div}_{(f\ominus g)}(v) = \operatorname{div}_f(v) - \operatorname{div}_g(v),\ v\in V.$

2) $\operatorname{div}_{(h\oplus g)}(v) = \operatorname{div}_h(v) + \operatorname{div}_g(v),\ v\in V.$

**Доказательство.** По определению функции $(f \ominus g)$ поток по прямой дуге или обратной всегда равен нулю.

Тогда $(f \ominus g)(e) - (f \ominus g)(\overline{e}) = f(e) - f(\overline{e}) - g(e) + g(\overline{e})$.

Следовательно,

$$\mathrm{div}_{(f \ominus g)}(v) = \sum_{(v,u)\in \overline{E}} [(f \ominus g)(v, u) - (f \ominus g)(u, v)] =$$

$$\sum_{(v,u)\in \overline{E}} [f(v, u) - f(u, v) - g(v, u) + g(u, v)] = \mathrm{div}_f(v) - \mathrm{div}_g(v).$$

Утверждение 2) доказывается аналогично. ■

**Следствие 1.** Функции $f \ominus g$, $h \oplus g$ являются потоками и

$$M(f \ominus g) = M(f) - M(g);$$

$$M(h \oplus g) = M(h) + M(g).$$

**Следствие 2.**

1) Если $f \ominus g$ — максимальный поток в сети $G_g$, то $f$ — максимальный поток в сети $G$.
2) Если $h \oplus g$ — максимальный поток в сети $G$, то $h$ — максимальный поток в сети $G_g$.

# Разрезы сети

Любое разбиение множества $V$ на два подмножества $X$, $\overline{X}$ такие, что $s \in X$, $t \in \overline{X}$ называют *разрезом* $R=(X, \overline{X})$ сети $G(V, E)$.

Дуги с началом в $X$ и концом в $\overline{X}$ называют ***выходящими*** из $X$. Их множество обозначается $E^{-}(R)$.

Дуги с началом в $\overline{X}$ и концом в $X$ называют ***входящими*** в $X$. Их множество обозначается $E^{+}(R)$.

*Пропускной способностью* разреза $R$ называют величину

$$c(R) = \sum_{e \in E^{-}(R)} c(e).$$

Свойство разреза: для любого разреза $R$ и любого потока $f$

$$M(f) = \mathrm{div}_f(s) = \sum_{v \in X} \mathrm{div}_f(v) = \sum_{e \in E^{-}(R)} f(e) - \sum_{e \in E^{+}(R)} f(e) \leq \sum_{e \in E^{-}(R)} f(e) \leq \sum_{e \in E^{-}(R)} c(e) = c(R)$$

**Лемма.** Если $f$ — максимальный поток в сети $G$, то в сети $G_f$ сток $t$ недостижим из источника $s$.

**Доказательство.** Допустим, что в $G_f$ есть путь $L$ из $s$ в $t$. Поскольку пропускные способности всех дуг сети $G_f$ положительны, то число $\rho = \min\{c_f(e) \mid e \in E(L)\}$ положительно. Пусть $\varphi_L$ — элементарный поток вдоль пути $L$ мощности $\rho$. Тогда, согласно следствию 2,

$$M(\varphi_L \oplus f) = M(\varphi_L) + M(f) > M(f),$$

что противоречит выбору $f$. ■

**Теорема 4** (*о максимальном потоке и минимальном разрезе*). Величина максимального потока в сети $G$ равна минимальной из пропускных способностей всех разрезов в $G$.

**Доказательство.** Достаточно построить разрез $R = (X, \overline{X})$ с $c(R) = M(f)$, где $f$ — максимальный поток в сети $G$. Обозначим через $X$ множество вершин, достижимых из $s$ в сети $G_f$, $\overline{X} = V \setminus X$. По определению, $s \in X$. По лемме, $t \in \overline{X}$. Значит, разбиение $R = (X, \overline{X})$ является разрезом.

Если бы в $G_f$ нашлась дуга $(v, u)$ с $v \in X$, $u \in \overline{X}$, то $u$ тоже была бы достижима из $s$ в сети $G_f$, что противоречит определению $\overline{X}$.

Следовательно, для каждой дуги $e \in \overline{E}$, ведущей из $X$ в $\overline{X}$,

$$c_f(e) = c(e) - f(e) + f(\overline{e}) = 0.$$

Но $c(e) - f(e) \geq 0$. Значит, $f(e) = c(e)$, $f(\overline{e}) = 0$.

Таким образом,

$$c(R) = \sum_{e \in E^-(R)} c(e) = \sum_{e \in E^-(R)} f(e) - \sum_{e \in E^+(R)} f(e) = \sum_{v \in X} \mathrm{div}_f(v) = M(f). \blacksquare$$

## Алгоритмы для нахождения максимального потока

**Теорема 5.** Пусть поток $f$ не максимален в $G$. Тогда в сети $G_f$ существует путь из источника $s$ в сток $t$.

**Доказательство.** Пусть поток $f$ не максимален в $G$ и $g$ — максимальный поток в $G_f$. По следствию 2, $M(g) > 0$. По теореме 2 поток $g$ можно представить в виде суммы положительных элементарных потоков. Хотя бы один из этих потоков должен быть потоком вдоль пути. ■

# Алгоритм Форда-Фалкерсона (АФФ)

ВХОД. Сеть $G = (V, E, s, t, c(e))$.

ВЫХОД. Поток $f$ наибольшей мощности в сети $G$.

**Begin** $f = (0,\dots, 0)$; $H = G$;

**While** в $H$ есть путь $L$ из $s$ в $t$ **do**

**begin** $\rho := \min\{c(e) \mid e \in E(L)\}$;

получить поток $\varphi_L(\rho)$ мощности $\rho$ вдоль $L$;

перестроить сеть $H := H_{\varphi_L(\rho)}$;

пересчитать поток $f := \varphi_L(\rho) \oplus f$

**end;**

**End;**