МАТРОИДЫ

Матроидом будем называть произвольную пару $M = [E, \mathfrak{I}]$, где E — конечное множество, а $\mathfrak{I}$ — непустое семейство подмножеств множества E, удовлетворяющее условиям:

(*M*1) из $(A \in \mathfrak{I}, B \subset A)$ следует, что $B \in \mathfrak{I}$;

(*M*2) $\forall\, A, B \in \mathfrak{I}$, таких, что $|A| < |B|$, всегда найдется $e \in B \setminus A : A \cup \{e\} \in \mathfrak{I}$.

Множества семейства $\mathfrak{I}$ назовем *независимыми множествами*, а все другие подмножества E — *зависимыми множествами* матроида M.

Из (*M*1) и непустоты $\mathfrak{I}$ следует, что $\varnothing \in \mathfrak{I}$ в любом матроиде.

База матроида — это любое максимальное по включению независимое множество. Из аксиомы (*M*2) следует, что все базы матроида имеют одну и ту же мощность.

Цикл матроида — это любое минимальное по включению зависимое множество.

Примеры.

1. Матричный матроид. Элементами множества E являются столбцы некоторой матрицы A. Подмножество столбцов считается независимым, если оно линейно независимо (в обычном смысле).

2. Графический матроид. Элементами множества E являются ребра некоторого графа G, и подмножество множества ребер G считается независимым, если оно не содержит цикла графа G.

3. Матроид разбиений. Элементами множества E являются дуги некоторого орграфа G, и подмножество множества дуг G считается независимым, если никакие две дуги из этого подмножества не заходят в одну и ту же вершину.

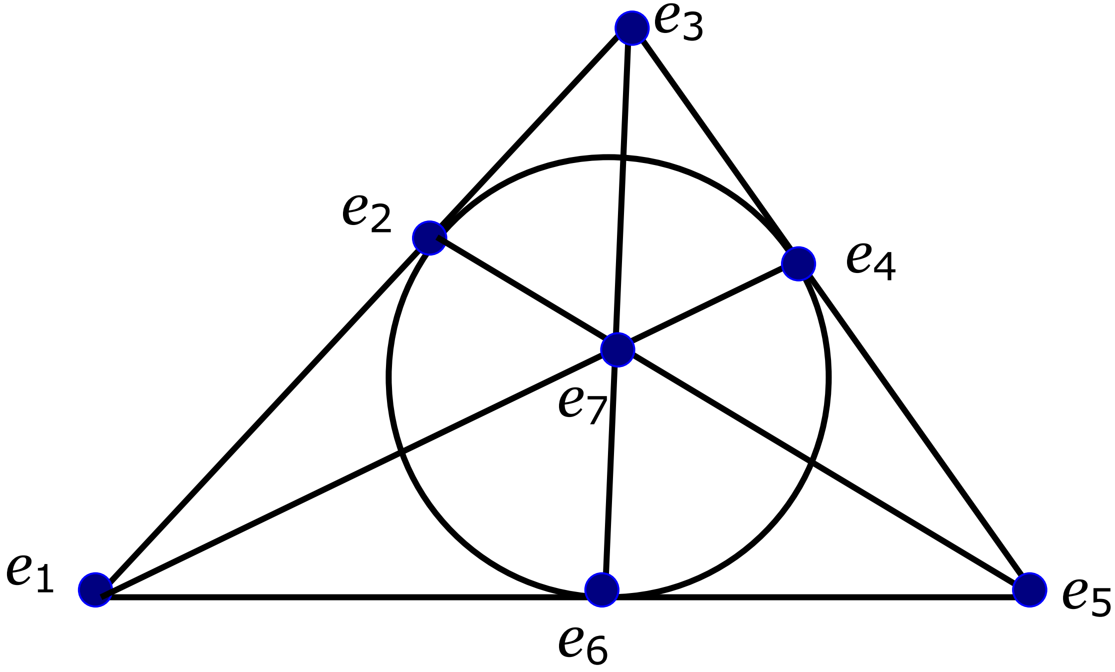
4. Матроид Фано. Пусть $E = \{e_1, \ldots, e_7\}$ — множество элементов проективной плоскости порядка 2.

$|E| = n^2 + n + 1$, где n — простое число или степень простого числа.

- Каждые две прямые имеют ровно одну точку пересечения.
- Через любые две точки проходит ровно одна прямая.

Матроид Фанно: $A \subset E$ — независимое множество, если $|A| \leq 2$ или $|A|=3$ и A не является прямой.

Прямые: $\{e_1, e_2, e_3\}$,
$\{e_3, e_4, e_5\}$, $\{e_5, e_6, e_1\}$,
$\{e_1, e_7, e_4\}$, $\{e_3, e_7, e_6\}$,
$\{e_2, e_7, e_5\}$, $\{e_2, e_4, e_6\}$



5. k-матроид. E — произвольное конечное множество, и подмножество A множества E считается независимым, если и только если $|A| \le k$.

Упражнение.

Доказать, что каждый из перечисленных примеров является матроидом. Описать базы и циклы этих матроидов.

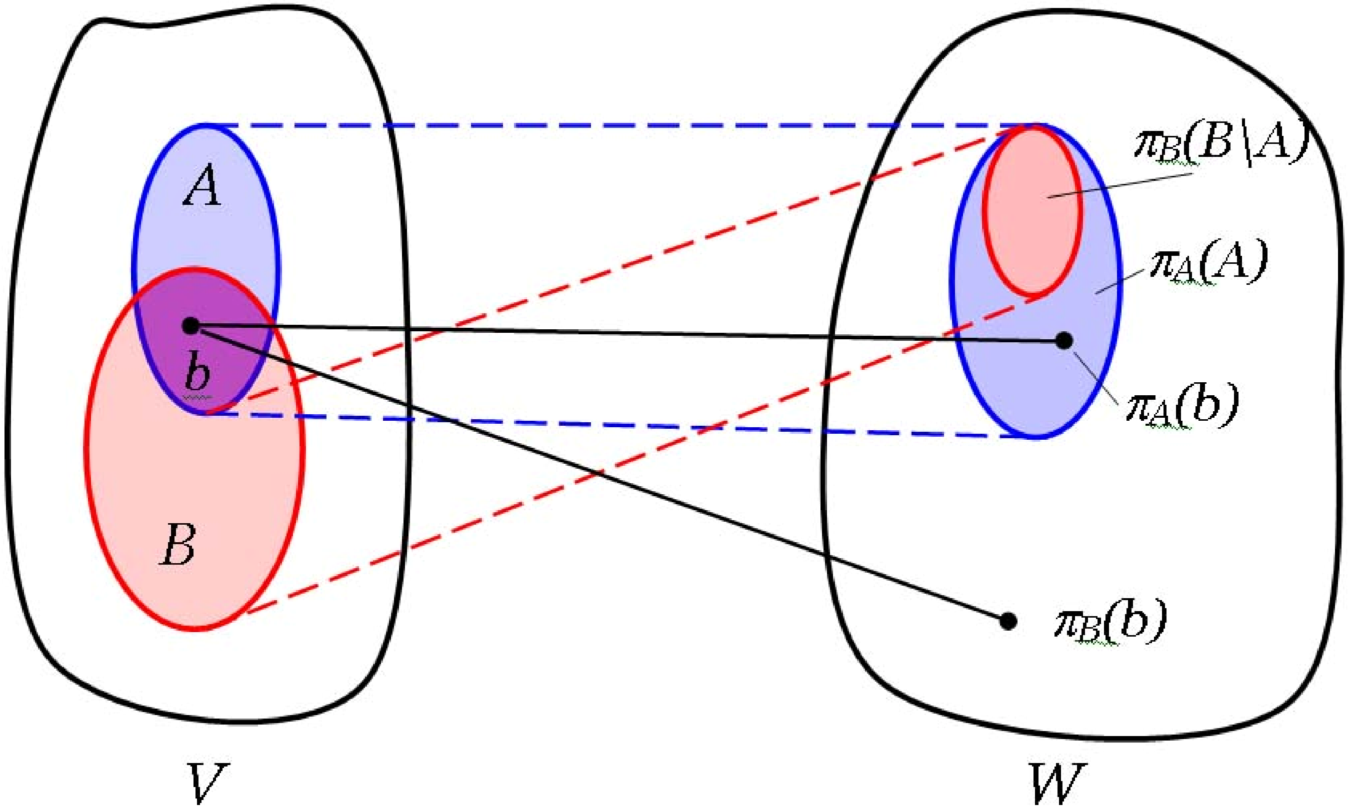
6. Матроид трансверсалей. Пусть $G = (V,W;R)$ — двудольный граф с долями V и W. Подмножество A множества V назовем (частичной) трансверсалью, если в G существует паросочетание, покрывающее все вершины множества A. По теореме Кенига-Оре множество A является трансверсалью, если и только если

$$|N(C)| \ge |C| \quad \forall\, C \subseteq A,$$

где $N(C) = \{w \in W : (v, w) \in R\}$.

Теорема 1 (Эдмондс и Фалкерсон). Пусть $G=(V,W;\ R)$ — двудольный граф с долями V и W. Тогда пара $M=[V,\mathfrak{I}]$, где $\mathfrak{I}=\{A\subseteq V \mid A$ — трансверсаль в $G\}$, является матроидом.

Доказательство. Выполнение ($M1$) очевидно. Пусть $A, B \in \mathfrak{I}$ и $|A|<|B|$. Выберем содержащее $|A|$ ребер паросочетание π_A, покрывающее A и содержащее $|B|$ ребер паросочетание π_B, покрывающее B, так, чтобы они имели максимально возможное число общих ребер. Для каждого $x \in A \cup B$ обозначим через $\pi_A(x)$ (соответственно через $\pi_B(x)$) вершину, соединенную с x ребром, принадлежащим π_A (соответственно, π_B). Для $C \subseteq A \cup B$ определим $\pi_A(C)=\{\pi_A(x) \mid x\in C\}$ и $\pi_B(C)=\{\pi_B(x) \mid x\in C\}$. Если $\pi_A(b')\notin \pi_A(A)$ хотя бы для одного $b'\in B\setminus A$, то $A\cup\{b'\}\in \mathfrak{I}$ и теорема доказана.



Пусть $\pi_B(\{B \setminus A\}) \subseteq \pi_A(A)$. Поскольку $|B| > |A|$, найдется $b \in B$ с $\pi_B(b) \notin \pi_A(A)$. Согласно доказанному выше $b \in A \cap B$. Пусть $c = \pi_A(b)$. Тогда паросочетание $\pi'_A = (\pi_A \setminus (b, c)) \cup (b, \pi_B(b))$ имеет больше общих ребер с π_B чем π_A в противоречие с выбором π_A. ■

Теорема 2. Пусть E — конечное множество, а $\mathfrak{I}$ — непустое подсемейство подмножеств множества E, удовлетворяющее условию ($M1$). При этих предположениях $M = [E, \mathfrak{I}]$ является матроидом, если и только если выполняется условие

($M3$) Для каждого $C \subset E$ любые два максимальных (по включению) независимых подмножества множества C имеют одну и ту же мощность.

Доказательство. Допустим сначала, что не выполняется ($M3$). Это значит, что для некоторого $C \subset E$ найдутся максимальные (по включению) независимые $A, B \subset E$ с $|A|<|B|$. Согласно ($M2$), $\exists\ e \in B \setminus A : A \cup \{e\} \in \mathfrak{I}$. Это противоречит максимальности A.

Допустим теперь, что не выполняется ($M2$). Тогда найдутся такие $A, B \in \mathfrak{I}$ с $|A|<|B|$, что $A \cup \{e\} \notin \mathfrak{I}$ для любого $e \in B \setminus A$. Значит, для $C = A \cup B$ не выполняется ($M3$): A — максимальное по включению независимое подмножество множества C, но $|A| < |B|$. ■

Следствие. В любом матроиде все базы имеют одну и ту же мощность.

Ввиду теоремы 2 на подмножествах множества E матроида M определена *ранговая функция*, сопоставляющая каждому $C \subset E$ мощность максимальных (по включению) независимых подмножеств C.

Теорема 3. Пусть $M = [E, \mathfrak{I}]$ является матроидом, а ρ — ранговая функция на 2^E. Тогда

(*R*1) $0 \le \rho(A) \le |A|$;

(*R*2) $A \subset B \Rightarrow \rho(A) \le \rho(B)$;

(*R*3) $\rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \le \rho(A) + \rho(B)$;

(*R*4) $\rho(\varnothing) = 0$;

(*R*5) $\rho(A) \le \rho(A \cup \{e\}) \le \rho(A) + 1$;

(*R*6) если $\rho(A \cup \{e\}) = \rho(A \cup \{f\}) = \rho(A)$, то $\rho(A \cup \{e, f\}) = \rho(A)$.

Доказательство. Выполнение ($R1$), ($R2$), ($R4$) и ($R5$) очевидно. Допустим, что $\rho(A \cup \{e\}) = \rho(A \cup \{f\}) = \rho(A)$, но $\rho(A \cup \{e, f\}) \neq \rho(A)$. Пусть $I \subset A, I \in \mathfrak{I}, \quad |I| = \rho(A)$.

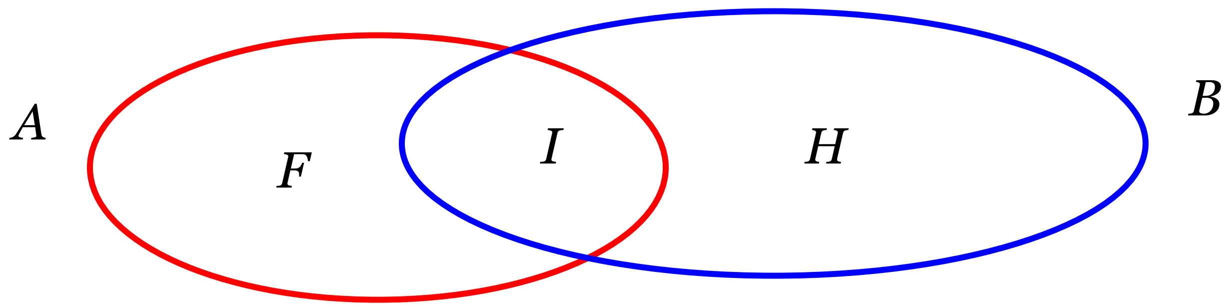
По теореме 2 существует $F \subseteq A \cup \{e, f\}$, $F \in \mathfrak{I}$ такое, что $|F| > |I|$, $F \supset I$. Но это противоречит ($M2$).

Значит, ($R6$) верно.

Докажем ($R3$). Пусть $I \subseteq A \cap B, I \in \mathfrak{I}, \ |I| = \rho(A \cap B)$.

По теореме 2 существуют $F \subseteq A \setminus B$ и $H \subseteq B \setminus A$ такие, что $F \cup I \in \mathfrak{I}$, $F \cup I \cup H \in \mathfrak{I}, \quad |F \cup I| = \rho(A), \quad |F \cup I \cup H| = \rho(A \cup B)$.

Но тогда $|H \cup I| \leq \rho(B)$ и $\rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) = |F| + |H| + 2|I| \leq$
$\leq \rho(A) + \rho(B)$. ■



Теорема 4. Функция ρ: $2^E \to Z$ является ранговой функцией некоторого матроида на E тогда и только тогда, когда она удовлетворяет ($R4$), ($R5$) и ($R6$).

Доказательство. Ввиду теоремы 3 достаточно доказать импликацию «только тогда». Положим $\mathfrak{I} = \{A \subseteq E : \rho(A) = |A|\}$. Из-за ($R4$) имеем $\mathfrak{I} \neq \varnothing$. Допустим, что $A \subset B$, $\rho(A) < |A|$, $B \setminus A = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Согласно ($R5$), $\rho(B) \le 1 + \rho(B \setminus \{x_1\}) \le 2 + \rho(B \setminus \{x_1, x_2\}) \le \ldots \le k + \rho(B \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}) = k + \rho(A) < |B|$. Таким образом, ($M1$) верно.

Допустим теперь, что ($M2$) неверно. Тогда для некоторых $A, B \in \mathfrak{I}$, $A = \{x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_k\}$, $B = \{x_1, \ldots, x_m, b_1, \ldots, b_p\}$, $p > k$ имеем $\rho(A \cup \{b_i\}) = \rho(A)$ при любом $1 \le i \le p$. Из ($R6$) получаем $\rho(A \cup \{b_1, b_i\}) = \rho(A \cup \{b_1\}) = \rho(A)$ при любом $2 \le i \le p$. Снова по ($R6$) $\rho(A \cup \{b_1, b_2, b_i\}) = \rho(A)$ при любом $3 \le i \le p$ и т.д.

Через p шагов получаем $\rho(A \cup B) = \rho(A \cup \{b_1, b_2, \ldots b_p\}) = \rho(A)$. Противоречие. ■

Теорема 5. Функция ρ: $2^E \to Z$ является ранговой функцией некоторого матроида на E тогда и только тогда, когда она удовлетворяет ($R1$), ($R2$) и ($R3$).

Доказательство. Ввиду теорем 3 и 4 достаточно доказать, что выполнение ($R1$), ($R2$) и ($R3$) влечет выполнение ($R4$), ($R5$) и ($R6$).

Очевидно, ($R4$) следует из ($R1$), а левое неравенство в ($R5$) следует из ($R2$). Правое неравенство в ($R5$) и свойство ($R6$) следуют из ($R3$). ■

Следствие из ($M2$). Для множества $\mathcal{B}$ баз произвольного матроида $M = [E, \mathfrak{I}]$ верно:

($B1$) Для любых $B_1 \neq B_2$ и любого $x \in B_1 \setminus B_2$ найдется такой $y \in B_2 \setminus B_1$, что

$$(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}.$$

Теорема 6. Пусть E — конечное множество, $\mathcal{B}$ — непустое подсемейство подмножеств множества E, удовлетворяющее условию ($B1$). Тогда множество $\mathfrak{I} = \{A \subset E \mid \exists\, B \in \mathcal{B} : A \subset B\}$ удовлетворяет аксиомам ($M1$) и ($M2$).

Доказательство. Выполнение ($M1$) очевидно.

Покажем, что все члены $\mathcal{B}$ равномощны. Допустим, что это не так. Выберем множества $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ разной мощности так, чтобы максимизировать мощность пересечения. Можно считать, что $|B_1| > |B_2|$. Выберем произвольно $x \in B_1 \setminus B_2$.

Согласно ($B1$), найдется такой $y \in B_2 \setminus B_1$, что $B = (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$. Но $|B \cap B_2| > |B_2 \cap B_1|$, $|B| = |B_1|$. Это противоречит выбору B_1 и B_2.

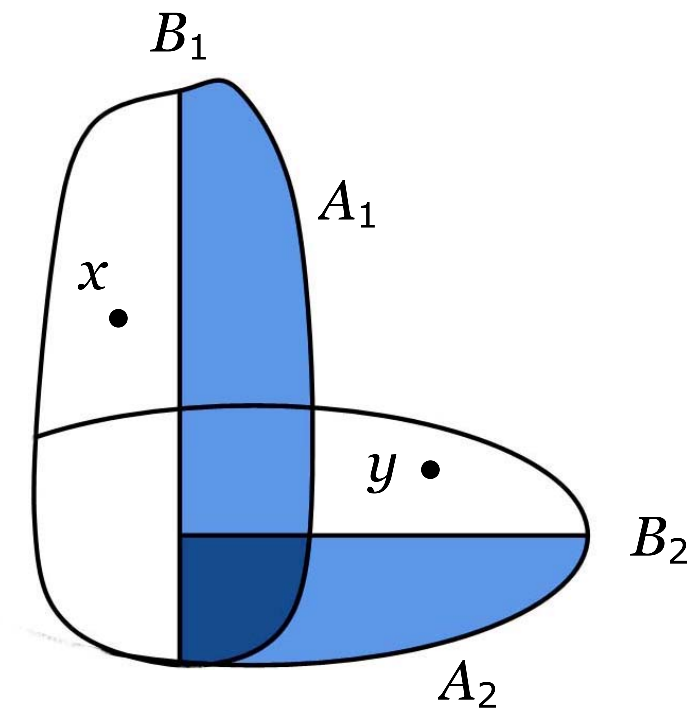
Итак, предположим, что (M2) неверно. Это значит, что для некоторых $A_1, A_2 \in \mathfrak{I}$ с $|A_1| < |A_2|$,

$$A_1 \cup \{e\} \notin \mathfrak{I} \quad \forall\, e \in A_2 \setminus A_1. \qquad (1)$$

Выберем B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \supset A_1$, $B_2 \supset A_2$ так, чтобы максимизировать $|B_2 \cap B_1|$. В силу (1),

$$B_1 \cap (A_2 \setminus A_1) = \varnothing. \qquad (2)$$

Если $B_1 \setminus A_1 \subset B_2$, то в силу (2) имеем $|B_2| \geq |B_1 \setminus A_1| + |A_2| > |B_1 \setminus A_1| + |A_1| = |B_1|$. Значит, найдется $x \in B_1 \setminus (A_1 \cup B_2)$. Согласно (*B*1), найдется такой $y \in B_2 \setminus B_1$, что $B = (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$. Но $|B \cap B_2| > |B_2 \cap B_1|$ и $B \supset A_1$. Это противоречит выбору B_1 и B_2. ■



Теорема 7. Пусть $\mathrm{M} = [\mathrm{E}, \mathfrak{I}\,]$ — матроид. Тогда для любых членов C и D семейства $\mathfrak{C}$ циклов в M выполняются условия:

(C1) если $C \subset D$, то $C = D$;

(C2) если $C \neq D$ и $e \in C \cap D$, то найдется цикл $F \subset (C \cup D) \backslash \{e\}$.

И наоборот, если для любых множеств C и D из некоторого семейства $\mathfrak{C}$ подмножеств E выполнены условия (C1) и (C2), то $\mathfrak{C}$ является семейством циклов некоторого матроида на E.

Доказательство. "$\Rightarrow$" Выполнение (C1) очевидно.

Докажем выполнение (C2). Пусть $C \neq D$ и $e \in C \cap D$. Обозначим $A = C \cap D$. По условию, $A \in \mathfrak{I}$. Допустим, что $(C \cup D) \setminus \{e\}$ независимо. Тогда по теореме 2 найдется независимое множество $B \subset C \cup D$ с $|B| = |C \cup D| - 1$ такое, что $B \supset A$. Но в этом случае $B \supset C$ или $B \supset D$.

"$\Leftarrow$" Пусть для любых множеств C и D из некоторого семейства $\mathfrak{C}$ подмножеств E выполнены условия ($C1$) и ($C2$).

Обозначим $\mathfrak{I} = \{A \subseteq E : \exists\, C \in \mathfrak{C} : C \setminus A \neq \varnothing\}$. Выполнение ($M1$) очевидно.

Предположим, что условие ($M2$) не выполняется.

Выберем пару (A, B) множеств из $\mathfrak{I}$, противоречащих ($M2$), с максимальной мощностью пересечения, а среди таких — пару с минимальной мощностью A.

Пусть $A = \{x_1,\ldots, x_m, a_1, \ldots, a_k\}$, $B = \{x_1, \ldots, x_m, b_1,\ldots, b_p\}$, $p > k$, $A \cup \{b_i\} \notin \mathfrak{I}$ при любом $1 \leq i \leq p$. Это означает, что

$$\forall\, i,\ 1 \leq i \leq p\ \ \exists\, C_i \in \mathfrak{C}:\ C_i \subseteq A \cup \{b_i\}.$$

По выбору (A, B), для пары $(A\setminus\{a_1\}, B)$ найдется b_1 с $F = (A\setminus\{a_1\}) \cup \{b_1\} \in \mathfrak{I}$. Снова по выбору (A,B) существует b_2 с $D = F \cup \{b_2\} \in \mathfrak{I}$. Но по ($C2$) найдется $C \in \mathfrak{C}$, $C \subseteq (C_1 \cup C_2)\setminus \{a_1\} = D \setminus \{a_1\}$, что противоречит $D \in \mathfrak{I}$.■

Укажем на связь матроидов со структурами, на которых хорошо работают *"жадные"* алгоритмы.

Пусть E — конечное множество, $\mathfrak{I}$ — подсемейство подмножеств множества E и $w : E \to R^{+}$ — функция, сопоставляющая каждому $e \in E$ его "вес" $w(e)$. Требуется найти

$$\max\{ \sum_{e \in S} w(e) \,|\, s \in \mathfrak{I}\} \qquad (3)$$

и множество S, на котором максимум достигается.

"Жадный" алгоритм

1. Упорядочить E так, чтобы $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \ldots \geq w(e_n)$;
2. $S := \varnothing$;
3. *for* $i := 1$ *to* n *do*

   if $S \cup \{e_i\} \in \mathfrak{I}$ *then* $S := S \cup \{e_i\}$;

Теорема Радо-Эдмондса. Если $M = [E, \mathfrak{I}\,]$ — матроид, то множество S, найденное "жадным" алгоритмом, является решением задачи (3). Напротив, если $M = [E, \mathfrak{I}\,]$ — не матроид, то найдется функция $w : E \to R^{+}$, для которой это S не будет оптимальным.

Доказательство. Пусть $M = [E, \mathfrak{I}\,]$ — матроид, $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ — множество, найденное "жадным" алгоритмом; причем $w(s_1) \geq w(s_2) \geq \ldots \geq w(s_k)$. Отметим сначала, что S — база матроида M, поскольку отбрасывались лишь элементы, зависимые от S. Пусть $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$ — другая база M и $w(t_1) \geq w(t_2) \geq \ldots \geq w(t_k)$. Предположим, что $w(t_i) > w(s_i)$ для некоторого i.

Рассмотрим независимые множества $A = \{s_1,\ldots, s_{i-1}\}$ и $B = \{t_1, \ldots, t_i\}$. Согласно ($M2$) найдется такое j, $1 \leq j \leq i$, что $A \cup \{t_j\} \in \mathfrak{I}$.

Но $w(t_j) \geq w(t_i) > w(s_i)$.

Значит, $w(t_i) \leq w(s_i)$ для каждого i, и S — решение (3).

Предположим теперь, что $M = [E, \Im]$ не является матроидом.

Случай 1. Найдутся $B \in \Im$ и $A \notin \Im$ такие, что $A \subset B$. Положим

$$w(e) = \begin{cases} 2, & e \in A, \\ 1, & e \in B \setminus A, \\ 0, & e \in E \setminus B. \end{cases}$$

Понятно, что искомым множеством в задаче (3) является B и

$\sum_{e \in B} w(e) = |B| + |A|$. Но при работе "жадного" алгоритма кандидатами в S вначале будут рассматриваться элементы множества A, и хотя бы один из них не будет включен в S.

Случай 2. Аксиома $(M1)$ выполняется для $\mathfrak{I}$, но найдутся $B \in \mathfrak{I}$ и $A \in \mathfrak{I}$ такие, что $|A| < |B|$ и $A \cup \{e\} \notin \mathfrak{I}$ для любого $e \in B \setminus A$.

Обозначим $m = |B|$. Положим

$$w(e) = \begin{cases} 1 + 1/m, & e \in A, \\ 1, & e \in B \setminus A, \\ 0, & e \in B \cup A. \end{cases}$$

Тогда "жадный" алгоритм сначала включит в S все элементы множества A, а затем ни один элемент множества $B \setminus A$ не добавится к S.

Следовательно, суммарный вес элементов множества S будет равен $|A|(m+1)/m \le (m-1)(m+1)/m < m$. Но оптимальное решение задачи (3) не меньше чем $|B| = m$. ■

Пример. Задан граф $G = (V, E)$ с весами $w_e \geq 0$, $e \in E$. Найти остовное дерево максимального веса.

Алгоритм Крускала

1. Упорядочить ребра $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \ldots \geq w(e_k)$;
2. $S := 0$;
3. *for* $i := 1$, *to* k *do*

   if $S \cup \{e_i\}$ — дерево, *then* $S := S \cup \{e_i\}$

Как найти остовное дерево минимального веса?