УДК 519.658

НОВЫЕ НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С ПРЕДПОЧТЕНИЯМИ КЛИЕНТОВ [1]

© 2009 г. И. Л. Васильев, К. Б. Климентова, Ю. А. Кочетов

(664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 134, Ин-т динамики систем и теор. управления СО РАН
630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга 4, Ин-т матем. СО РАН)
e-mail: vil@icc.ru, Xenia.Klimentova@icc.ru, jkochet@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 12.03.2008 г.
Переработанный вариант 11.08.2008 г.

Аннотация

Исследуется двухуровневая задача размещения производства, в которой клиенты выбирают поставщиков исходя из собственных предпочтений. Показано, что кооперативная и антикооперативная постановки могут быть сведены к частному случаю, когда каждый клиент имеет линейный порядок предпочтений на множестве открываемых предприятий. Для этого частного случая рассматриваются различные сведения двухуровневой задачи к целочисленному линейному программированию. Предложена новая формулировка задачи, основанная на семействе правильных неравенств, связанных с задачами о паре матриц и упаковки множеств. Показано, что эта формулировка доминирует уже известные с точки зрения линейной релаксации и разрыва целочисленности. Библ. 21.

Ключевые слова: задачи размещения, двухуровневое программирование, правильные неравенства.

ВВЕДЕНИЕ

В задачах размещения с предпочтениями клиентов (см. [1], [2]) имеются два уровня принятия решений. На верхнем уровне выбирается подмножество открываемых предприятий. Затем на нижнем уровне происходит прикрепление клиентов к этим предприятиям согласно известным предпочтениям. Задача состоит в том, чтобы на верхнем уровне так выбрать открываемые предприятия, чтобы обслужить всех клиентов с минимальными суммарными затратами.

Впервые задачи размещения с предпочтениями клиентов рассматривались в [3]. Позже аналогичные модели независимо были предложены в [2] ,[4]. Если предпочтения клиентов на нижнем уровне согласуются с матрицей транспортных затрат на верхнем уровне, то получаем классическую задачу размещения (см. [1]). Следовательно, задачи с предпочтениями клиентов (задача о p-медиане, простейшая задача размещения и их обобщения) являются NP-трудными в сильном смысле и не принадлежат классу APX (см. [5]). В [1], [2] установлена их тесная связь с псевдобулевыми функциями. Показано, что эти задачи эквивалентны, то есть по исходным данным задачи размещения с предпочтениями клиентов можно за полиномиальное время построить эквивалентную задачу минимизации псевдобулевой функции и наоборот. В [6], [7] показано, как, используя данное свойство задачи размещения, можно сократить ее размерность.

В [8] исследуется задача с фиксированным числом открываемых предприятий. Для поиска приближенного решения предложен генетический алгоритм, использующий в качестве популяции локальные оптимумы по окрестности Лина-Кернигана. Предложенный подход тестировался на примерах с большим разрывом целочисленности и показал хорошие результаты.

Для поиска точного решения используются сведения к задачам целочисленного линейного программирования (ЦЛП). В [9] рассматриваются известные и предлагается ряд новых правильных неравенств. С их помощью удается улучшить нижние оценки оптимума и повысить эффективность метода ветвей и отсечений. В [6], [8] рассмотрены различные формулировки задачи в терминах ЦЛП, предложена формулировка, основанная на сведении к задаче о паре матриц. С помощью такой формулировки удается получить лучшую нижнюю оценку за счет увеличения числа переменных.

[1] [illegible]06-01-00075).

В настоящей работе предложена новая формулировка, основанная на анализе сведения к задаче о паре матриц (см. [6], [8]). Она обеспечивает нижнюю оценку не хуже, чем в [6], но улучшение достигается не за счет увеличения числа переменных, а с помощью нового семейства правильных неравенств. Исследована связь с задачей упаковки множеств. Правильные неравенства для этой задачи можно использовать для решения задачи размещения с предпочтениями клиентов. Показано, что неравенства из [9] являются их частным случаем.

Статья организована следующим образом. В разд. 1. изложена постановка задачи и исследуются ее свойства. В разд. 2 представлен обзор известных формулировок ЦЛП и предложено новое семейство правильных неравенств. Связь с задачей упаковки множеств исследуется в разд. 3. В последнем разделе обсуждаются полученные результаты и перспективы дальнейших исследований.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем следующие обозначения:

$I = \{1, 2, \dots, m\}$ — множество предприятий;

$J = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество клиентов;

$f_i \geq 0,\ i \in I$ — затраты на открытие предприятия i;

$c_{ij} \geq 0,\ i \in I, j \in J$ — матрица производственно-транспортных затрат на обслуживание клиентов;

$g_{ij} \geq 0,\ i \in I, j \in J$ — матрица предпочтений клиентов, если $g_{i_1 j} < g_{i_2 j}$, то j-й клиент из открытых предприятий i_1, i_2 выберет предприятие i_1.

Переменные задачи:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если открывается } i\text{-е предприятие,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й клиент обслуживается из } i\text{-го предприятия,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

С использованием введенных обозначений получаем следующую задачу двухуровневого программирования (см.[4], [10]): найти

$$\min_y \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x^*_{ij}(y) + \sum_{i \in I} f_i y_i \tag{1}$$

$$y_i \in \{0, 1\}, i \in I, \tag{2}$$

где $x^*_{ij}(y)$ – оптимальное решение задачи клиентов:

$$\min_x \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} g_{ij} x_{ij} \tag{3}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J, \tag{4}$$

$$x_{ij} \leq y_i, \quad i \in I, \quad j \in J, \tag{5}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J. \tag{6}$$

Целевая функция (1) задачи верхнего уровня задает затраты на обслуживание клиентов и открытие предприятий. Целевая функция (3) задачи нижнего уровня гарантирует обслуживание клиентов согласно их предпочтениям. Ограничения (4) обеспечивают обслуживание каждого клиента в точности одним предприятием. Неравенства (5) позволяют обслуживать клиентов только из открытых предприятий.

Сформулированную задачу (1)–(6) обозначим через BLP, а ее целевую функцию (1) — через $F(y, x^*(y))$. Эта функция задает суммарные затраты ЛПР$_1$ — лица, принимающего решение на верхнем уровне. При заданном векторе y, решение $x^*(y)$ указывает оптимальный выбор поставщиков согласно предпочтениям клиентов. В общем случае этот выбор может быть не единственным. Тогда задача BLP требует дополнительных уточнений, что именно является ее оптимальным решением. В частности, можно рассматривать кооперативные и антикооперативные стратегии для ЛПР$_1$ и ЛПР$_2$ — лица, принимающего решение на нижнем уровне. Если ЛПР$_2$ на множестве своих оптимальных решений старается минимизировать (максимизировать) суммарные затраты ЛПР$_1$, то получаем кооперативную (антикооперативную) постановку задачи. Ниже будет рассматриваться более простой случай, когда для любого решения ЛПР$_1$ существует единственное оптимальное решение ЛПР$_2$. Гарантировать это свойство задачи можно в случае, когда все элементы матрицы g_{ij} различны для каждого $j \in J$. Другими словами, каждый клиент для любой пары предприятий может сказать, какое из них для него предпочтительнее. В этом случае целевая функция $F(y, x^*(y))$ однозначно определяется вектором y, и вместо $F(y, x^*(y))$ можно использовать обозначение $F(y)$. Таким образом, под оптимальным решением задачи понимается вектор y^*, удовлетворяющий условиям (2) и доставляющий минимум функции $F(y)$.

Покажем, что кооперативная и антикооперативная постановки задачи сводятся к указанному частному случаю. Обозначим через $\mathrm{Opt}(y)$ множество оптимальных решений задачи (3)–(6) при заданном векторе y. Тогда задачу BLP в кооперативной постановке можно записать в виде:

$$\min_{y, x \in \mathrm{Opt}(y)} \Big\{ F(y,x) \mid y_i \in \{0,1\},\ i \in I \Big\}. \tag{7}$$

Задача в антикооперативной постановке записывается следующим образом:

$$\min_{y} \max_{x \in \mathrm{Opt}(y)} \Big\{ F(y,x) \mid y_i \in \{0,1\},\ i \in I \Big\}. \tag{8}$$

Теорема 1. *Задачи (7) и (8) сводятся к задаче BLP с условием единственности оптимального выбора клиентов.*

Доказательство. Рассмотрим задачу (7). По ее исходным данным построим новую эквивалентную задачу вида BLP, у которой матрица предпочтений g'_{ij} в каждом столбце не будет иметь одинаковых элементов. Новая задача будет отличаться от старой только этой матрицей.

Для каждого столбца $j \in J$ матрицы (g_{ij}) задачи (7) определим такую перестановку $\pi(j) = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$ элементов множества I, что

$$g_{\pi_1 j} \le g_{\pi_2 j} \le \cdots \le g_{\pi_m j}.$$

Если $g_{\pi_i j} = g_{\pi_{i+1} j}$, то будем считать, что $c_{\pi_i j} \le c_{\pi_{i+1} j}$. Положим $g'_{\pi_i j} = i$ для всех $i \in I$. По построению все элементы матрицы (g'_{ij}) в каждом столбце различны. Следовательно, при любом y множество $\mathrm{Opt}(y)$ будет состоять из одного элемента. Легко проверить, что оптимальное решение таким образом построенной задачи является оптимальным и для задачи (7). Случай антикооперативной постановки рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Предположим, что стратегия ЛПР$_2$ неизвестна. Например, на множестве $\mathrm{Opt}(y)$ он выбирает один элемент в зависимости от y. В этом случае задачи (7), (8) дают нижнюю и верхнюю оценки оптимума в такой трудно формализуемой задаче.

Известно (см. [2], [8]), что задачу BLP с условием единственности оптимального выбора клиентов можно свести к задаче ЦЛП. Существует несколько таких сведений, различающихся числом переменных, ограничений и, как следствие, разным разрывом целочисленности. Определим множества $S_{ij} = \{k \in I \mid g_{kj} < g_{ij}\}$, $T_{ij} = \{k \in I \mid g_{kj} > g_{ij}\}$, $i \in I, j \in J$. Заметим, что для оптимального решения задачи клиентов имеет место следующая импликация:

$$(x_{ij} = 1) \Longrightarrow (y_k = 0), \quad k \in S_{ij}. \tag{9}$$

Используя это свойство, задачу BLP можно переписать следующим образом (см. [2],[6]): найти

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i y_i \tag{10}$$

при ограничениях:

$$y_k + x_{ij} \le 1, k \in S_{ij}, i \in I, j \in J, \tag{11}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, j \in J, \tag{12}$$

$$0 \le x_{ij} \le y_i, i \in I, j \in J, \tag{13}$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J. \tag{14}$$

Действительно, для оптимального решения задачи (10)–(14) все ограничения исходной задачи будут выполнены, а ограничения (11) гарантируют, что x_{ij} будет оптимальным решением задачи клиентов. Можно рассматривать и двухуровневую задачу с фиксированным числом открываемых предприятий, так называемую задачу о p-медиане (см. [8]). В этом случае на верхнем уровне кроме условий целочисленности переменных присутствует следующее ограничение:

$$\sum_{i \in I} y_i = p, \tag{15}$$

где $p \in Z_+$ — число открываемых предприятий. Для такой задачи справедливы утверждения, представленные выше для задачи BLP, и аналогичное сведение к задаче ЦЛП с дополнительным ограничением (15). В следующем разделе будут предложены способы усиления формулировки (10)—(14).

2. УСИЛЕНИЕ ФОРМУЛИРОВКИ

Для многих задач ЦЛП можно предложить несколько эквивалентных формулировок. Качество формулировки принято оценивать разрывом целочисленности: $gap = (Opt - LP)/Opt$, где Opt — оптимальное значение, LP — значение линейной релаксации. Чем меньше величина gap, тем сильнее формулировка. Идеальным случаем является формулировка, в точности описывающая выпуклую оболочку допустимых целочисленных точек. Однако построение такой формулировки эквивалентно решению исходной задачи [11]. Во многих случаях получение такой формулировки практически невыполнимо. Для формулировки (10)–(14) разрыв целочисленности достигает значительной величины, 20%–30% [7, 9]. Даже в частном случае, когда $f_i = 0, i \in I$, эта величина может оказаться сколь угодно близкой к 100% [6, 7]. Поэтому ниже предлагается способ усиления исходной формулировки задачи для сокращения разрыва целочисленности. Заметим, что такой подход не исключает при решении задачи использование отсечений Гомори или любых других отсечений (см. например, [11, 12, 13]).

Определение 1. Пусть U — множество точек в Z^n. Неравенство $a^T u \le b$ называют *правильным* для U, если $a^T u \le b$ для всех $u \in U$.

Обозначим через P_c многогранник задачи (10)–(14), т.е выпуклую оболочку целочисленных точек, удовлетворяющих ограничениям (11)–(14). Через LB_1 обозначим оптимум задачи линейного программирования (10)–(13).

2.1. Известные правильные неравенства

Для многогранника P_c известен ряд правильных неравенств. Они порождают различные формулировки, отличающиеся числом переменных, ограничений и, как следствие, разрывом целочисленности.

1. Неравенства *предпочтения одного клиента* (см. [3]):

$$C1(i,j): \quad y_i + \sum_{k \in T_{ij}} x_{kj} \le 1, \quad i \in I, j \in J. \tag{16}$$

Если предприятие i открыто, то клиент j не будет обслуживаться из менее предпочтительных предприятий, т.е. предприятий множества T_{ij}. Данные неравенства доминируют неравенства (11). Оценку линейного программирования для задачи (10),(12)–(13) с ограничениями (16) обозначим через LB_2. Получаем $LB_1 \leq LB_2$.

2. В [9] предложено усиление неравенств (16). Пусть $j_1, j_2 \in J, i \in I$. Если предприятие i открыто, то клиент j_1 не будет пользоваться предприятиями из множества T_{ij_1}, а клиент j_2 — из множества T_{ij_2}, т. е.

$$C2(i, j_1, j_2): \quad \sum_{k \in T_{ij_1}} x_{kj_1} + \sum_{k \in T_{ij_2} \cap S_{ij_1}} x_{kj_2} + y_i \leq 1. \tag{17}$$

Назовем эти неравенства *предпочтениями пары клиентов.*

3. Неравенства (17) могут быть обобщены для произвольного числа клиентов. Пусть $j_1, ..., j_s \in J$ и $i \in I$. Тогда неравенства

$$Cs(i, j_1, \ldots, j_s): \sum_{k \in T_{ij_1}} x_{kj_1} + \sum_{t=2}^{s} \sum_{k \in T_{ij_t} \cap (\bigcap\limits_{q=1}^{t-1} S_{ij_q})} x_{kj_t} + y_i \leq 1, \tag{18}$$

являются правильными для P_c (см. [9]). Данные неравенства порождают экспоненциальное число дополнительных ограничений. Некоторые из них могут доминировать другие. Потому следует использовать только часть этих неравенств. В [9] предлагается выбирать такие элементы $j_1, \ldots, j_s \in J, i \in I$, для которых множества T_{ij_t} $t = 1, 2, \ldots, s$ попарно не пересекаются.

4. В [9] также предложены неравенства, доминирующие (13). Пусть $j_1, j_2 \in J$ и $i \in I$. Тогда

$$\text{если} \quad S_{ij_2} \subseteq S_{ij_1}, \text{ то } \ x_{ij_1} \leq x_{ij_2}. \tag{19}$$

При $S_{ij_1} = S_{ij_2}$ получаем $x_{ij_1} = x_{ij_2}$.

Обозначим через LB_4 оптимум в задаче линейного программирования (10), (12), (13), (19) со всеми неравенствами (18), а через LB_3 — оптимум в задаче (10), (12), (13), (19) с предложенным в [9] подмножеством неравенств (18). Тогда $LB_2 \leq LB_3 \leq LB_4$.

2.2. Сведение к задаче о паре матриц

Рассмотрим матрицы $A = (a_{ij}), i \in I, j \in J_1$, и $B = (b_{ij}), i \in I, j \in J_2$ с одинаковым числом строк. Задача о паре матриц (см. [1]) состоит в нахождении непустого множества $S \subseteq I$, на котором достигается минимум целевой функции

$$\sum_{j \in J_1} \max_{i \in S} a_{ij} + \sum_{j \in J_2} \min_{i \in S} b_{ij}.$$

Если A — диагональная матрица, то получаем простейшую задачу размещения. В [2], [4] предложено сведение задачи BLP к задаче о паре матриц. На основе этого сведения в [8], [6] получена новая формулировка исходной задачи в терминах ЦЛП.

Представим матрицу (c_{ij}) в виде суммы двух матриц $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Для каждого $j \in J$ найдем по матрице (g_{ij}) перестановку $\pi(j)$ и положим:

$$a_{\pi_1 j} = 0, \quad b_{\pi_1 j} = c_{\pi_1 j},$$

$$a_{\pi_k j} = \sum_{l=1}^{k-1} \min\{0, c_{\pi_{l+1} j} - c_{\pi_l j}\}, \quad k = 2, \ldots, m,$$

$$b_{\pi_k j} = c_{\pi_1 j} + \sum_{l=1}^{k-1} \max\{0, c_{\pi_{l+1} j} - c_{\pi_l j}\}, \quad k = 2, \ldots, m.$$

Пусть $\Delta_l^j = \min\{0; c_{\pi_{l+1} j} - c_{\pi_l j}\},\ l = 1, \ldots, m-1$ и $L_j = \{l \in \{1, \ldots, m-1\} | \Delta_l^j < 0\}$. Заметим, что при заданном $j \in J$ по номеру $l \in L_j$ однозначно восстанавливается номер $\pi_l \in I$. Для каждого $j \in J$ определим неотрицательную матрицу

$$\overline{a}_{il} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \in T_{\pi_l j} \\ -\Delta_l^j, & \text{если } i \notin T_{\pi_l j} \end{cases} \quad i \in I,\ l \in L_j.$$

По построению матрицы $(\overline{a}_{il})$ имеем:

$$a_{ij} = \sum_{l \in L_j} (\overline{a}_{il} + \Delta_l^j), i \in I, j \in J.$$

Теперь задачу BLP можно записать в виде:

$$\min_{y_i \in \{0,1\}} \{\sum_{j \in J} \sum_{l \in L_j} \max_{i | y_i = 1} \overline{a}_{il} + \sum_{j \in J} \min_{i | y_i = 1} b_{ij} + \sum_{i | y_i = 1} f_i\} + \sum_{j \in J} \sum_{l \in L_j} \Delta_l^j. \tag{20}$$

Введем дополнительные переменные $v_l^j \in \{0,1\},\ l \in L_j,\ j \in J$ и представим эту задачу следующим образом (см. [8]): найти

$$\min\{\sum_{j \in J} \sum_{l \in L_j} -\Delta_l^j v_l^j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} b_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i y_i\} + \sum_{j \in J} \sum_{l \in L_j} \Delta_l^j \tag{21}$$

при ограничениях:

$$y_i + \sum_{k \in T_{ij}} x_{kj} \le 1, i \in I, j \in J, \tag{22}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1,\ j \in J, \tag{23}$$

$$0 \le x_{ij} \le y_i,\ i \in I,\ j \in J, \tag{24}$$

$$v_l^{j_1} \ge \sum_{i \notin T_{\pi_l j_1}} x_{i j_2},\ l \in L_j,\ j_1 \in J,\ j_2 \in J, \tag{25}$$

$$v_l^j, y_i, x_{ij} \in \{0,1\},\ l \in L_j,\ j \in J,\ i \in I. \tag{26}$$

Обозначим через LB_5 оптимум в задаче линейного программирования (21)–(25). Можно показать (см. [8]), что $LB_5 \ge LB_2$.

По сути сведение к задаче о паре матриц представляет собой другой путь получения нижних оценок — конструирование расширенных формулировок. Действительно, полученная формулировка является задачей в более широком пространстве переменных $(x, y, v) \in \mathbb{B}^{m \cdot n} \times \mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^{|L_1| + \cdots + |L_n|}$. Исходная формулировка определялась в пространстве переменных $(x, y) \in \mathbb{B}^{m \cdot n} \times \mathbb{B}^m$. Очевидным недостатком расширенных формулировок является увеличение числа переменных, в то время как попытки усиления формулировки в исходном пространстве, как правило, приводят к большому числу дополнительных ограничений, например, неравенствам (18). Одним из путей преодоления чрезмерного разрастания расширенных формулировок может быть конструирование на их основе новых правильных неравенств и соответствующих алгоритмов отделения (см. [11] ,[13]).

Теорема 2. Неравенства

$$\sum_{i\in T_{\pi_l j_1}} x_{ij_1} + \sum_{i\notin T_{\pi_l j_1}} x_{ij_2} \le 1, \quad l\in L_j,\ i\in I,\ j_1,j_2\in J,\ \ j_1\ne j_2, \tag{27}$$

являются правильными для P_c.

Доказательство. Пусть $(\widehat{x},\widehat{y},\widehat{v})$ — оптимальное решение задачи (21)–(26).

1) Покажем, что на оптимальном решении неравенство (25) выполняется как равенство для $j_1=j_2$, т.е.

$$\widehat{v}_l^j = \sum_{i\notin T_{\pi_l j}} \widehat{x}_{ij},\ \ l\in L_j,\ j\in J. \tag{28}$$

Предположим противное и пусть $\widehat{v}_l^j = \sum\limits_{i\notin T_{\pi_l j}} \widehat{x}_{ij} + s_l^j,\ \ l\in L_j,\ j\in J$, где $s_l^j\ge 0\ l\in L_j$, причем $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{l\in L_j} s_l^j > 0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\widehat{x}_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i\widehat{y}_i = \sum_{j\in J}\sum_{l\in L_j}\Delta_l^j(1-\widehat{v}_l^j) + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} b_{ij}\widehat{x}_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i\widehat{y}_i =$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{l\in L_j}\Delta_l^j\Big(\sum_{i\in T_{\pi_l j}}\widehat{x}_{ij} - s_l^j\Big) + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} b_{ij}\widehat{x}_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i\widehat{y}_i =$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{k=2}^{m}\widehat{x}_{\pi_k j}\sum_{l=1}^{k-1}\Delta_l^j + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} b_{ij}\widehat{x}_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i\widehat{y}_i - \sum_{j\in J}\sum_{l\in L_j}\Delta_l^j s_l^j =$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}\widehat{x}_{ij} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} b_{ij}\widehat{x}_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i\widehat{y}_i - \sum_{j\in J}\sum_{l\in L_j}\Delta_l^j s_l^j =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\widehat{x}_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i\widehat{y}_i - \sum_{j\in J}\sum_{l\in L_j}\Delta_l^j s_l^j > \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\widehat{x}_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i\widehat{y}_i.$$

Получили противоречие.

2) Заменим (25) на следующие два выражения

$$v_l^{j_1} = \sum_{i\notin T_{\pi_l j_1}} x_{ij_1},\ \ l\in L_j,\ j_1\in J, \tag{29}$$

$$v_l^{j_1} \ge \sum_{i\notin T_{\pi_l j_1}} x_{ij_2},\ \ l\in L_j,\ j_1,j_2\in J, j_1\ne j_2. \tag{30}$$

Получим эквивалентную задачу. Подставив (29) в (30), получаем исходную задачу с дополнительными неравенствами

$$\sum_{i\notin T_{\pi_l j_1}} x_{ij_1} \ge \sum_{i\notin T_{\pi_l j_1}} x_{ij_2},\ \ l\in L_j,\ j_1,j_2\in J, j_1\ne j_2,$$

которая эквивалентна формулировке (21)–(26). В силу (23) получаем, что неравенства (27) являются правильными для P_c. Теорема доказана.

Обозначим через LB_6 оптимальное значение ЛП релаксации задачи (10), (16), (12)–(14) с дополнительными неравенствами (27).

Следствие 1. Справедливо неравенство $LB_5 \le LB_6$.

Итак, возвращаясь в пространство исходных переменных, удалось построить новые правильные неравенства. Полученная нижняя оценка LB_6 по крайней мере не хуже известной оценки LB_5. В следующем разделе будет представлен еще один способ конструирования правильных неравенств, на этот раз непосредственно на основе анализа исходной формулировки.

3. НЕРАВЕНСТВА КЛИК

Покажем связь задачи BLP с известной задачей упаковки множеств. Свойства многогранника этой задачи хорошо изучены (см. [12]). Они могут использоваться для получения семейств эффективно отсекающих плоскостей в задачах со схожей структурой (см. [14], [15], [16], [17]).

Рассмотрим 0–1 матрицу D и неотрицательный вектор d. Задача *упаковки множеств* с булевыми переменными z выглядит следующим образом:

$$\max_z \left\{ d^T z : \; Dz \le 1 \right\}.$$

Она эквивалентна поиску максимального взвешенного независимого множества в графе $G = (V, E)$, полученного следующем образом. Каждому столбцу матрицы D ставится в соответствие вершина графа. Вершины i и j соединяются ребром в том и только том случае, если столбцы i и j матрицы D не ортогональны.

Обозначим через P_G многогранник задачи упаковки множеств, т.е. выпуклую оболочку 0-1 векторов, соответствующих независимым множествам графа G. Рассмотрим один класс правильных неравенств для P_G, который будет использован в дальнейшем. *Кликой* называют любой полный подграф данного графа. *Локально максимальной кликой* называют клику, которая не содержится в клике большей размерности. Пусть K — клика в графе G. Известно (см. [12]), что *неравенство клики*

$$\sum_{k \in K} z_k \le 1$$

является правильным для P_G и гранеобразующим, если K — локально максимальная клика. В формулировке задачи размещения можно выделить группу неравенств, которые будут определять релаксацию данной задачи к задаче упаковки множеств. Следовательно, для решения задачи размещения можно использовать известные семейства правильных неравенств многогранника P_G.

Вернемся к неравенствам $C2(i, j_1, j_2)$, $i \in I, \; j_1, j_2 \in J$:

$$\sum_{k \in T_{ij_1}} x_{kj_1} + \sum_{k \in T_{ij_2} \cap S_{ij_1}} x_{kj_2} + y_i \le 1.$$

Рассмотрим релаксацию исследуемой задачи размещения к задаче упаковки множеств, определяемую данным семейством неравенств. Построим семейство неравенств клик, которые будут правильными и для многогранника P_c. Добавим их к ЛП-релаксации задачи (10), (12), (13), (19). Соответствующую нижнюю оценку обозначим через LB_7.

Теорема 3. Справедливо неравенство $LB_4 \le LB_7$.

Доказательство. Достаточно показать, что неравенства (18) являются неравенствами клик для рассмотренной релаксации к задаче упаковки множеств. Для удобства вершины графа будем обозначать индексами соответствующих переменных, т.е. вершина (i, j) соответствует переменной x_{ij}, а вершина i — переменной y_i. Через $W(i, j)$ обозначим множество вершин вида (i, j), переменные которых входят в сумму $\sum_{k \in T_{ij}} x_{kj}$, через $W(i, j_1, j_2)$ — вершины соответствующие сумме

$$\sum_{k \in T_{ij_2} \cap S_{ij_1}} x_{kj_2},$$

а через $WS(i,j_t)$ — вершины для суммы

$$\sum_{k\in T_{ij_t}\cap(\bigcap\limits_{q=1}^{t-1} S_{ij_q})} x_{kj_t}$$

.

Докажем теорему методом математической индукции по параметру s.

1) *Базис индукции,* $s=1$. Неравенства $Cs(i,j_1)$ совпадают с неравенствами (16). Так как они доминируются неравенствами $C2(i,j_1,j_2)$, $j_2\in J$, а последние использовались при построении графа, то вершины $\{i\}\cup W(i,j)$ образуют клику. При $s=2$ неравенства $Cs(i,j_1,j_2)$ совпадают с $C2(i,j_1,j_2)$. Следовательно, вершины $\{i\}\cup W(i,j_1)\cup W(i,j_1,j_2)$ также образуют клику.

2) *Шаг индукции.* Предположим, что для некоторого s неравенства

$$\sum_{k\in T_{ij_1}} x_{kj_1}+\sum_{t=2}^{s}\sum_{k\in T_{ij_t}\cap(\bigcap\limits_{q=1}^{t-1} S_{ij_q})} x_{kj_t}+y_i\le 1,\ \ i\in I,\ j_1,\dots,j_s\in J$$

являются неравенствами клики, т.е. вершины множества

$$\{i\}\cup W(i,j_1)\cup(\bigcup_{t=2}^{s} WS(i,j_t))$$

образуют клику. Рассмотрим неравенства $C(s+1)(i,j_1,\dots,j_{s+1})$:

$$\sum_{k\in T_{ij_1}} x_{kj_1}+\sum_{t=2}^{s+1}\sum_{k\in T_{ij_t}\cap(\bigcap_{q=1}^{t-1} S_{ij_q})} x_{kj_t}+y_i=$$

$$=\sum_{k\in T_{ij_1}} x_{kj_1}+\sum_{t=2}^{s}\sum_{k\in T_{ij_t}\cap(\bigcap_{q=1}^{t-1} S_{ij_q})} x_{kj_t}+y_i+\sum_{k\in T_{ij_{s+1}}\cap(\bigcap_{q=1}^{s} S_{ij_q})} x_{kj_{s+1}}\le 1.$$

Требуется показать, что вершины множества

$$\{i\}\cup W(i,j_1)\cup(\bigcup_{t=2}^{s} WS(i,j_t))$$

и вершины множества $WS(i,j_{s+1})$ образуют клику. Действительно, для любого $t=1,2,\dots,s$ неравенства $C2(i,j_t,j_{s+1})$:

$$\sum_{k\in T_{ij_t}} x_{kj_t}+\sum_{k\in T_{ij_{s+1}}\cap S_{ij_t}} x_{kj_{s+1}}+y_i\le 1,\ \ i\in I,\ j_t\in J,$$

использовались при построении графа. Следовательно, множества вершин

$$\{i\}\cup W(i,j_t)\cup W(i,j_t,j_{s+1}),\quad t=1,2,\dots,s$$

образуют клики. Рассмотрим два случая.

i) При $t=1$ имеем следующее неравенство:

$$\sum_{k\in T_{ij_1}} x_{kj_1}+\sum_{k\in T_{ij_{s+1}}\cap S_{ij_1}} x_{kj_{s+1}}+y_i\le 1,\ \ i\in I.$$

Так как

$$\bigcap_{q=1}^{s} S_{ij_q}\subseteq S_{ij_1},$$

то

$$WS(i, j_{s+1}) \subseteq W(i, j_1, j_{s+1}).$$

Таким образом, вершины из множеств $\{i\}$, $W(i, j_1)$, $WS(i, j_{s+1})$ попарно связаны ребрами.

ii) Пусть теперь $t = 2, 3, \ldots, s$. Так как

$$T_{ij_t} \cap (\bigcap_{q=1}^{t-1} S_{ij_q}) \subseteq T_{ij_t},$$

то

$$WS(i, j_t) \subseteq W(i, j_t).$$

Учитывая $\bigcap\limits_{q=1}^{s} S_{ij_q} \subseteq S_{ij_t}$ получаем, что вершины множеств $WS(i, j_t)$ и $WS(i, j_{s+1})$ также попарно связаны ребрами. Теорема доказана.

Отметим, что неравенства (18) также обладают структурой многогранника задачи упаковки множеств. Но в доказательстве теоремы, помимо требуемого неравенства $LB_4 \leq LB_7$, фактически, установлено, что используя неравенства (18) при конструировании графа задачи упаковки множеств, новых ребер построить не удастся. Таким образом, отсутствует необходимость рассматривать экспоненциально большое число ограничений в релаксации к многограннику задачи упаковки множеств.

Как уже упоминалось выше для построения графа можно использовать не только неравенства $C2(i, j_1, j_2),\ i \in I, j_1, j_2 \in J$. Введем дополнительные переменные $y'_i = 1 - y_i$. Тогда неравенства (13) можно записать в виде $x_{ij} + y'_i \leq 1$. Теперь для исследуемой задачи можно выделить следующую группу ограничений:

$$\begin{cases} y_i + \sum\limits_{k \in T_{ij}} x_{kj} \leq 1, \ \ i \in I,\ j \in J \\ \sum\limits_{i \in I} x_{ij} \leq 1, \ \ j \in J, \\ \sum\limits_{k \in T_{ij_1}} x_{kj_1} + \sum\limits_{k \in T_{ij_2} \cap S_{ij_1}} x_{kj_2} + y_i \leq 1, \ \ i \in I,\ j_1, j_2 \in J, \\ x_{ij} + y'_i \leq 1, \ \ i \in I,\ j \in J, \\ \sum\limits_{i \in T_{\pi_l j_1}} x_{ij_1} + \sum\limits_{i \notin T_{\pi_l j_1}} x_{ij_2} \leq 1, \quad l \in L_j,\ i \in I,\ j_1, j_2 \in J,\ \ j_1 \neq j_2, \end{cases} \tag{31}$$

Задача упаковки множеств, определяемая неравенствами (31), также является релаксацией исходной задачи. Обозначим через LB_8 нижнюю оценку, получаемую при решении ЛП-релаксации задачи (10), (12), (13), (19) с неравенствами клик для новой системы (31). Тогда $LB_8 \geq LB_7$ и $LB_8 \geq LB_6$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование нижних оценок для задачи размещения с предпочтениями клиентов. Рассмотрен ряд известных, и предложены новые эквивалентные формулировки ЦЛП данной задачи, отличающиеся разрывом целочисленности. Полученные результаты представлены на следующей схеме:

$$LB_1 \leq LB_2 \leq \begin{array}{c} LB_3 \leq LB_4 \leq LB_7 \\ LB_5 \leq LB_6 \end{array} \leq LB_8.$$

Полученная нижняя оценка LB_8, основанная на новом семействе правильных неравенств и отсечениях задачи упаковки множеств, доминирует уже известные нижние оценки и открывает новые возможности для разработки точных методов.

Для получения нижних оценок LB_7 и LB_8 использовались неравенства клик. Однако известны и другие семейства правильных неравенств для задачи упаковки множеств, например, неравенства цикла нечетной длины (см. [12]) и другие (см. [18], [19], [20]). Их также можно использовать для усиления нижних оценок. При реализации этого подхода необходимо располагать эффективными алгоритмами поиска нужных неравенств. Таких неравенств может оказаться экспоненциальное число, что делает проблему нетривиальной. Разработка эффективных алгоритмов поиска подходящих неравенств является актуальным направлением дальнейших исследований.

Кроме того, представляют интерес и более общие модели размещения (см. [10], [21]), например, конкурентные и динамические модели, в которых учитывались бы предпочтения клиентов. По-видимому, все модели размещения можно обобщить на случай, когда предпочтения клиентов учитываются в моделях явным образом. Изучение таких моделей и методов решения соответствующих оптимизационных задач также представляет интерес для дальнейших исследований.

Список литературы

[1] *Береснев В. Л.* Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. Новосибирск: Ин-т. математики СО РАН, 2005.

[2] *Горбачевская Л. Е.* Полиномиально разрешимые и NP-трудные задачи стандартизации: Дис...канд. физ.-матем. наук. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1998.

[3] *Hanjoul P., Peeters D.* A facility location problem with clients' preference orderings // Regional Sci. Urban Econom. 1987. V. 17. P. 451–473.

[4] *Горбачевская Л. Е., Дементьев В. Т, Шамардин Ю. В.* Двухуровневая задача стандартизации с условием единственности оптимального потребительского выбора // Дискретный анализ и иссл. операций. Сер. 2. 1999. Т. 6. № 2. С. 3–11.

[5] *Ausiello G., Crescenzi P., Gambosi G. and al.* Complexity and approximation: Combinatorial optimization problems and their approximability properties. Berlin: Springer, 1999.

[6] *Hansen P., Kochetov Y., Mladenovic N.* Lower bounds for the uncapacitated facility location problem with user preferences. 2004. Techn. rept, Les Charies du GERAD G-2004-24.

[7] *Hansen P., Kochetov Y., Mladenovic N.* The uncapacitated facility location problem with user preferences // Proc. DOM'2004 Workshop. Omsk–Irkutsk, 2004. P. 50–55.

[8] *Алексеева Е.В., Кочетов Ю.А.* Генетический локальный поиск для задачи о p-медиане с предпочтениями клиентов // Дискретный анализ и иссл. операций. Сер. 2. 2007. Т. 14. № 1. С. 3–17.

[9] *Cánovas L., García S., Labbé M., Marín A.* A strengthened formulation for the simple plant location problem with order // Operat. Res. Letts. 2007. V. 35. № 2. P. 141–150.

[10] *Кононов А.В., Кочетов Ю.А., Плясунов А.В.* Конкурентные модели размещения производства // Жур. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 5.

[11] *Nemhauser G.N., Wolsey L.A.* Integer and combinatiorial optimization. Chichester: Wiley-Intersc. Publ., 1999.

[12] *Padberg M.W.* On the facial structure of the set packing polyhedra // Math. Program. 1973. V. 5. P. 199–215.

[13] *Pochet Y., Wolsey L.A.* Production planning by mixed integer programming. Berlin: Springer, 2006.

[14] *Avella P. and Vasil'ev I.* A computational study of a cutting plane algorithm for university course timetabling author // J. Scheduling. 2005. V. 8. № 6. P. 497–514.

[15] *Hoffman K.L., Padberg M.* Solving airline crew scheduling problems by branch-and-cut // Management Sci. 1993. V. 39. № 6. P. 657–682.

[16] *Borndorfer R., Weismantel R.* Set packing relaxations of some integer programs // Math. Program. 2000. V. 88. P. 425–450.

[17] *Waterer H., Johnson E.L., Nobili P., Savelsbergh M.W.P.* The relation of time indexed formulations of single machine scheduling problems to the node packing problem // Math. Program. 2002. V. 93. P. 477–494.

[18] *Cheng E., Cunninghav W.Y.* Wheel inequalities for stable set polytopes // Math. Program. 1997. V. 77. № 3. P. 389–421.

[19] *Cheng E., Vries S.* Antiweb-wheel inequalities and their separation problems over the stable set polytopes // Math. Program. 2002. V. 92. № 1. P. 153–175.

[20] *Rossi F., Smriglio S.* A branch-and-cut algorithm for the maximum cardinality stable set problem // Operat. Res. Letts. 2001. V. 28. P. 63–74.

[21] *Хачатуров В. Р., Веселовский В. Е., Злотов А. В. и др.* Комбинаторные методы и алгоритмы решения задач дискретной оптимизации большой размерности. М.: Наука, 2000.