ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА ДИСКРЕТНЫЕ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ [1]

Е. Н. Гончаров, Д. С. Иваненко, Ю. А. Кочетов, Н. А. Кочетова, М. Г. Пащенко
Новосибирск, ИМ СО РАН

Введение

Сложность решения многих задач дискретной оптимизации объясняется наличием большого числа локальных оптимумов, их непредсказуемым и фактически случайным расположением в допустимой области. Принадлежность некоторой задачи к классу NP-трудных задач дискретной оптимизации, по сути, означает отсутствие "простых"правил для нахождения глобального оптимума. Строго доказать несуществование таких правил пока никому не удается. Вместе с тем большинство точных методов при теоретически экспоненциальной трудоемкости на практике находят оптимальное решение сравнительно легко. Приближенные полиномиальные методы, имея высокую оценку погрешности в худшем случае, в среднем демонстрируют достаточно небольшое отклонение от оптимума. Тем самым, имеется существенное расхождение между теоретической оценкой трудоемкости и точности в худшем случае и реальным поведением алгоритмов. Анализ поведения в худшем случае дает излишне пессимистическую картину и искажает реальное положение вещей. Для исследования реального поведения алгоритмов необходим статистический анализ на различных классах тестовых задач, выделение простых и сложных случаев, получение доверительных интервалов для вероятностей нахождения точного решения и несрабатывания алгоритмов. Для проведения такого рода исследований в Институте математики СО РАН разработана электронная библиотека *Дискретные задачи размещения*, которая доступна в интернет по адресу http://www.math.nsc.ru/AP/benchmarks.

1 Структура библиотеки

Библиотека *Дискретные задачи размещения* представляет собой гипертекстовый документ, выполненный в формате HTML. Головная страница

[1]Работа поддержана грантами РФФИ 99-01-00510, 99-01-00601

библиотеки содержит ссылки на основные разделы, посвященные наиболее известным NP-трудным задачам размещения:

- простейшая задача размещения;
- задача размещения с ограничениями на мощности предприятий;
- многостадийная задача размещения.

Каждый раздел содержит:

— постановку задачи на содержательном уровне и точную математическую формулировку в терминах частично-целочисленного программирования;

— обзор литературы по точным и приближенным методам решения задачи; наиболее популярным методам, таким как метод ветвей и границ, Лагранжевы релаксации, поиск с запретами, генетический алгоритм и алгоритм имитации отжига уделено особое внимание, каждому из них посвящена отдельная страница с описанием и ссылками на литературу;

— генераторы исходных данных или тестовые примеры, трудные в вычислительном отношении как для точного решения, так и для приближенного решения с малой относительной погрешностью;

— результаты тестовых расчетов, содержащие точное решение и величину разрыва двойственности.

Для демонстрации возможностей вышеупомянутых методов разработано программное обеспечение, которое на примере простейшей задачи размещения иллюстрирует их работу. Демонстрационная версия програмного продукта снабжена комментариями и дает пользователю возможность управлять процессом решения задачи с помощью управляющих параметров. Графические возможности системы позволяют увидеть изменение относительной погрешности в ходе работы алгоритмов и изменение расстояния Хэмминга от текущей точки до глобального оптимума, до нулевой точки и точки, полученной рандомизированным жадным алгоритмом.

2 Гипотеза большой долины

Основным назначением данной библиотеки является проведение экспериментальных исследований в области дискретных задач размещения. Одним из таких направлений является проверка разного сорта гипотез, например, гипотезы о большой долине. Согласно этому предположению локальные оптимумы NP-трудной задачи расположены неравномерно в допустимой области. В среднем, расстояние от глобального оптимума до произвольного локального оптимума значительно меньше, чем до случайно выбранной точки. Более того, имеется определенная корреляция: чем дальше от глобального оптимума, тем хуже значение локальных оптимумов. Образно говоря, локальные оптимумы образуют *центральный горный массив* в допустимой области (или *большую долину* для задач на минимум). Данная гипотеза хорошо объясняет продуктивность вероятностных методов локального поиска, и ее проверка, теоретическая и экспериментальная, представляет несомненный интерес.

Для проверки гипотезы и объяснения с точки зрения локальных оптимумов разницы между трудными и легкими примерами были проведены следующие эксперименты. Для простейшей задачи размещения сформированны три класса исходных данных фиксированной размерности (100 предприятий, 100 клиентов):

1. Трудный класс, в котором матрица производственно-транспортных затрат содержит в каждом столбце ровно 10 незапрещенных элементов;

2. Случайный класс, в котором элементы матрицы выбираются случайным образом равновероятно из заданного интервала;

3. Полиномиально разрешимый класс, в котором матрица удовлетворяет условию связности.

Для метода ветвей и границ примеры из первого класса требуют около часа машинного времени на PC Pentium 200, для второго класса — несколько секунд. Примеры из последнего класса решаются почти мгновенно.

В каждом классе случайным образом генерировались примеры и для каждого из них выбиралось 9000 случайных точек. К каждой точке применялся алгоритм локального спуска. В результате получалось некоторое множество локальных оптимумов. Наиболее ярким отличием указанных классов является мощность этого множества. Для трудного класса она составляла около 850, для случайного класса ≈ 150, для полиномиально разрешимого ≈ 12. Диаметры составили соответственно 36, 32, 16. Для сравнения диаметр всего пространства решений равен 100.

Кроме мощности и диаметра было посчитано среднее расстояние от каждого локального оптимума до всех остальных и расстояние до лучшего из найденных локальных оптимумов. На рисунке 1 представлены средние расстояния для случайного класса. Каждая точка на графике соответствует одному локальному оптимуму. По оси x откладывается среднее расстояние от данного оптимума до остальных. По оси y — значение целевой функции. Как видно из графика средние расстояния отличаются незначительно, от 14 до 24, и бо́льшим значениям целевой функции в среднем соответствуют бо́льшие расстояния.

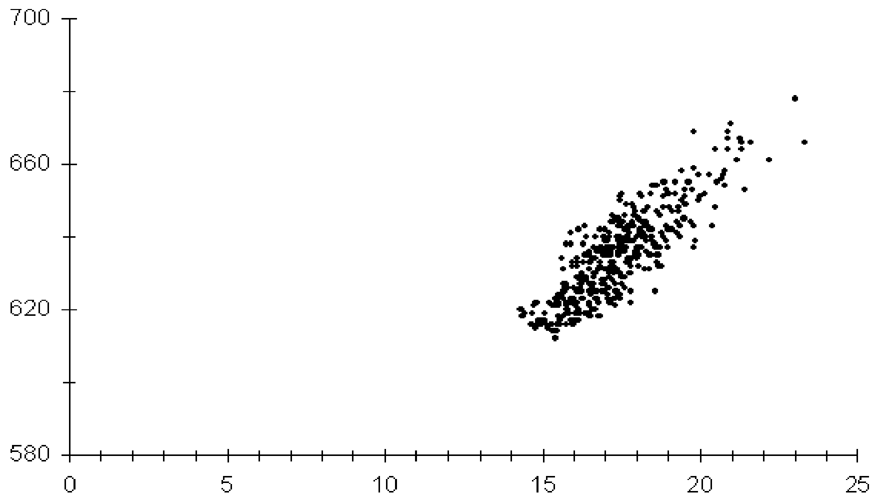

Рис. 1. Средние расстояния между локальными оптимумами

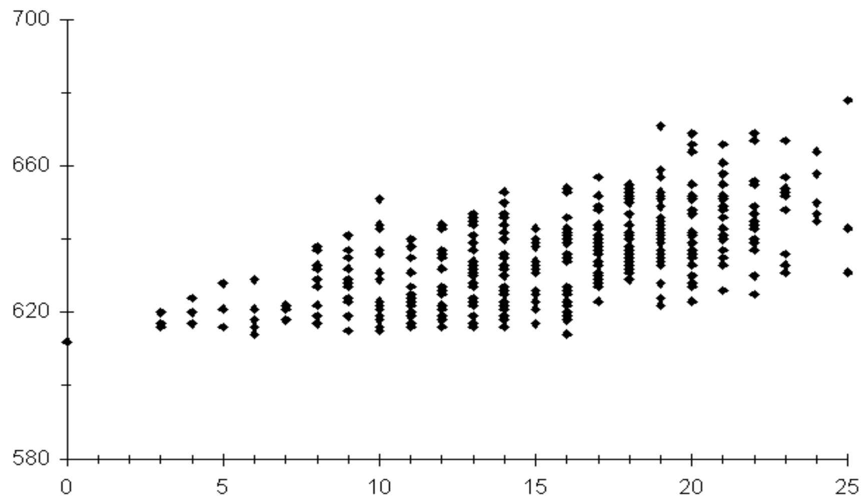

Рис. 2. Расстояния до наилучшего локального оптимума

На рисунке 2 показаны расстояния от наилучшего локального оптимума до остальных. Ближайшие к наилучшему локальному оптимуму имеют небольшое отклонение по целевой функции. Локальные оптимумы с большим значением целевой функции имеют сравнительно большие расстояния. В целом можно заключить, что экспериментальные исследования для простейшей задачи размещения подтверждают гипотезу о концентрации локальных оптимумов.

3 Заключение

Создание электронных библиотек является одним из бурно развивающихся направлений в области экспериментального исследования алгоритмов. На сегодняшний день активно используются следующие библиотеки общего назначения: Operations Research Library [1], DIMACS Implementation Challenge [2], а также специализированные библиотеки: Traveling Salesman Problems Library [3], Project Scheduling Problems Library [4], Library of Location Algorithms [5].

Среди них Operations Research Liblary содержит наибольшее количество тестовых примеров по самым разнообразным моделям исследования операций. В частности, в ней можно найти примеры и для дискретных задач размещения. К сожалению, эти тесты имеют минимальный разрыв двойственности и исследование оптимизационных алгоритмов на них малопродуктивно. Они создают иллюзию, что даже при большой размерности задачи оптимальное решение может быть найдено сравнительно легко. Более того, приведенные библиотеки содержат только оптимальное решение задачи и не дают никакой другой информации о вычислительной сложности, разрыве двойственности, числе оптимальных решений и др. В России работы по созданию таких электронных библиотек только начинаются. При работе над данной библиотекой была сделана попытка подойти к данному вопросу на качественно новом уровне.

РЕСУРСЫ ИНТЕРНЕТ

1. http://mscmga.ms.ic.ac.uk/info.html
2. http://dimacs.rutgers.edu/Challenges/index.html
3. http://www.ing.unlp.edu.ar/cetad/mos/TSPBIB_home.html
4. http://www.bwl.uni-kiel.de/Prod/psplib/index.html
5. http://www.mathematik.uni-kl.de/ lola/

jkochet@math.nsc.ru