АКАДЕМИЯ НАУК РОССИИ

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. СОБОЛЕВА

На правах рукописи

ПЛЯСУНОВ Александр Владимирович

ЗАДАЧИ ДВУХУРОВНЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ ДЕКОМПОЗИЦИЕЙ ОБЛАСТИ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ

специальность 01.01.09 – дискретная математика

и математическая кибернетика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2001

Работа выполнена в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор В.Л. Береснев, кандидат физико-математических наук доцент Ю.А. Кочетов
Официальные оппоненты:	доктор технических наук В.Н. Павлов, кандидат физико-математических наук, О.В. Хамисов
Ведущая организация –	Вычислительный центр АН РАН

Защита состоится "__"_______ 200 г. в __ часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.01 в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН по адресу: пр. Коптюга 4, 630090, г. Новосибирск).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики СО РАН.

Автореферат разослан "__"_______ 200 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Ю.В. Шамардин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исследования двухуровневых задач математического программирования проводятся в Институте математики им. С.Л.СОБОЛЕВА СО РАН с середины 80-х годов. Актуальность этих исследований обусловлена важными практическими приложениями подобных моделей []. С математической точки зрения исследуемые задачи относятся к числу NP–трудных[1] задач. Для их решения разрабатывались точные или приближенные алгоритмы [], для которых не известно приемлемых оценок трудоемкости. Первая работа, посвященная выявлению полиномиально разрешимых частных случаев, появилась лишь в 1995 г. []. Подобное положение вещей обьясняется тем, что не удавалось применить в двухуровневом случае подходы, используемые в классическом математическом программировании или комбинаторной оптимизации для анализа задач и построения алгоритмов.

Цель работы. Выделение полиномиально разрешимых классов задач двухуровневого программирования и разработка малотрудоемких приближенных алгоритмов решения с априорными оценками точности.

Методы исследований. В диссертации использованы современные методы и достижения теории двойственности, теории вычислительной сложности и некоторые результаты выпуклого анализа.

Научная новизна. На основе общего подхода - декомпозиции области допустимых решений, выделены новые полиномиально разрешимые классы двухуровневых линейных, нелинейных и частично целочисленных задач. Исследованы новые двухуровневые математические модели выбора ряда изделий. Для двухуровневой простейшей задачи размеще-

[1] Гэри М., Джонсон Д., Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Москва: Мир, 1982.

ния на максимум впервые предложен приближенный алгоритм с гарантированной оценкой точности.

Практическая ценность. Разработанные полиномиальные и приближенный алгоритмы могут использоваться при получении начального решения в методах типа ветвей и границ и локального поиска при решении прикладных задач.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на X Байкальской школе–семинаре (г. Иркутск, 1995), на Симпозиумах по исследованию операций (г. Брауншвейг, 1996 и г. Йена, 1997), на Втором Сибирском Конгрессе по Прикладной и Индустриальной Математике (г. Новосибирск, 1996), на Международной конференции (г. Омск, 1997), на Международной Байкальской конференции (г. Иркутск, 1998, 2001), на Международной конференции "Дискретный анализ и исследование операций"(г. Новосибирск 1998, 2000), на научных семинарах в Институте математики СО РАН.

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано десять работ.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 108 страницах машинописного текста. Состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы содержащего 84 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Во введении приводится обзор основных направлений исследований в области двухуровневых задач математического программирования и публикаций, посвященных рассматриваемому кругу вопросов. Обосновывается актуальность выбранной темы и коротко излагается содержание диссертационной работы.

Первая глава посвящена исследованию сложности двухуровневых задач линейного программирования и построению полиномиальных алгоритмов решения для специальных классов задач этого типа.

В разделе 1.1 содержатся основные определения. Приводятся примеры, иллюстрирующие свойства оптимальных и наилучших гарантированных решений. Показано, что поиск допустимого решения задачи двухуровневого линейного программирования является NP-полной задачей в сильном смысле. Доказательство этого факта основано на псевдополиномиальном [] сведении задачи о минимальном покрытии к частному случаю рассматриваемой задачи. Так как задача нижнего уровня является невырожденной, то нахождение гарантированного решения также является NP-полной задачей в сильном смысле. Следовательно, задачи нахождения оптимального и наилучшего гарантированного решений для двухуровневого линейного программирования являются NP-трудными в сильном смысле.

В разделе 1.2 рассматривается задача двухуровневого линейного программирования с ограничениями общего вида на верхнем уровне и с линейной задачей о рюкзаке в качестве внутренней оптимизационной задачи:

$$\max_{x \geq 0} cx + dy \tag{1}$$

$$Ax + By \leq b, \tag{2}$$

где y — оптимальное решение линейной задачи о рюкзаке (ЛР(x)):

$$\max_{y \geq 0} \alpha x + \beta y, \tag{3}$$

$$\gamma y \leq 1, \quad y \leq x. \tag{4}$$

В невырожденном случае установлено, что задачи нахождения оптимального и наилучшего гарантированного решений полиномиально разрешимы. В вырожденном случае доказано следующее утверждение

Теорема 1 *Для любой задачи (??)–(??) существует полиномиальный алгоритм, который либо находит оптимальное решение и проверяет является ли оно гарантированным, либо позволяет установить, что задача неограничена или не имеет допустимых решений.*

В разделе 1.3 исследуется задача (??)–(??) с дополнительными ограничениями $y \le y^0$ на нижнем уровне. Установлено, что задачи нахождения оптимального и наилучшего гарантированного решений в этом случае являются NP-трудными. Доказательство основывается на сведении задачи о рюкзаке с булевыми переменными к частному случаю рассматриваемой задачи.

В разделе 1.4 исследуются свойства задачи, у которой задачей нижнего уровня является модифицированная задача о многовариантном ранце:

$$\max_{x \ge 0} c\ x + d\ y, \tag{5}$$

при ограничениях

$$Ax + By \le b, \tag{6}$$

где y — оптимальное решение задачи о многовариантном ранце МВР(x):

$$\max_{y \ge 0} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} f_{ij} y_{ij}, \tag{7}$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I_j} y_{ij} = x_j, j \in J, \tag{8}$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} p_{ij} y_{ij} \le \sum_{j \in J} q_j x_j, \tag{9}$$

Показано, что в невырожденном случае задача полиномиально разрешима.

Во **второй главе** рассматривается задача двухуровневого программирования, в которой ограничения содержат нелинейные слагаемые специального вида, а внутренняя задача является задачей о ранце с билинейной целевой функцией относительно всех переменных.

В разделе 2.1 приводится постановка задачи:

$$\min_{x,y}(cx + dy), \tag{10}$$

$$Cx + D(z)y \geq b, \tag{11}$$

$$x, y \geq 0, \tag{12}$$

где z — оптимальное решение нелинейной задачи о ранце (НЗР(y)):

$$\max_{z} yQ(z), \tag{13}$$

$$yz \leq w, \tag{14}$$

$$z \geq 0, \tag{15}$$

где векторы y и z имеют одинаковую размерность, $y = (y_i)$, $z = (z_i), i \in I = \{1, ..., m\}$, $Q(z)$ – m-значная вектор-функция с компонентами $(Q_1(z_1), ..., Q_m(z_m))$, величина w принимает неотрицательные значения и функциональная матрица $D(z)$ следующим образом выражается через вектор-функцию $Q(z)$:

$$D(z) = (d^1_{si} + d^2_{si} Q_i(z_i)).$$

Функции $Q_i(z_i)$ являются вогнутыми кусочно-линейными, определенными для всех $z_i \geq 0$ и $Q_i(0) = 0$.

В разделе 2.2 для невырожденного случая приводится описание функции возмущения $p_y(w) = \max_z\{yQ(z) \mid yz \leq w, z \geq 0\}$ внутренней задачи [], условий оптимальности для задачи НЗР(y) и доказывается полиномиальная разрешимость задачи нахождения оптимального и наилучшего гарантированного решений.

Основное содержание раздела 2.3 состовляет доказательство следующего утверждения:

Теорема 2 *Для любой задачи (??)–(??) с полиномиальной временной сложностью можно либо найти оптимальное решение и проверить, является ли оно гарантированным, либо установить, что задача неограничена или не имеет допустимых решений.*

В **третьей главе** исследуются частично-целочисленные задачи двухуровневого программирования, связанные с известной задачей выбора ряда изделий [стр. 95]BGD. Особенностью предлагаемых постановок по сравнению с задачей выбора ряда изделий, является покрытие части расходов средствами инвестора, который может получить любые изделия из числа произведенных по заранее согласованным ценам. На верхнем уровне выбирается ряд изделий, которые будут производиться для выполнения работ, а на нижнем уровне инвестор стремится максимизировать суммарную эффективность выбранных им изделий, исходя из величины своего кредита. В таких условиях выбор ряда изделий и выбор множества изделий, используемых для погашения кредита, становятся взаимозависимыми, что приводит к двухуровневым математическим моделям. Задача состоит в том, чтобы найти такой ряд изделий, который позволил бы рассчитаться с инвестором и выполнить все работы с минимальными суммарными затратами.

В разделе 3.1 приводится постановка двухуровневой задачи выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием. Пусть множество $I = \{1, 2, ..., m\}$ задает исходный ряд типов изделий. Исходный ряд включает в себя типы изделий, которые выпускаются серийно, либо могут быть запущены в производство в ближайшем будущем. Их область применения задается множеством работ $J = \{1, 2, ..., n\}$. Для каждой работы существуют изделия в исходном ряде, предназначенные для ее выполнения и для каждого изделия имеются работы в области применения, для которых оно предназначено. Для каждого $i \in I$ задано разбиение множества J на подмножества $J_i^1, \dots, J_i^{T_i}$. Работы из одного множества могут быть выполнены последовательно одна за другой одними и теми же изделиями. Работы из разных подмножеств выполняются параллельно.

Математическая постановка задачи может быть записана в виде задачи частично-целочисленного программирования. Введем следующие обозначения. Для каждого $i \in I$:

$g_i(v_i) \geq 0$ — затраты на разработку изделия и его производство в зависимости от обьема выпуска $v_i \geq 0$; будем предполагать, что это кусочно линейные вогнутые неубывающие функции;

$\beta_i \geq 0$ — стоимость одного изделия для инвестора;

$\alpha_i \geq 0$ — оценка эффективности одного изделия инвестором;

$p_{ij} \geq 0$ — число изделий, требующихся для выполнения j-й работы;

$c_{ij} \geq 0$ — стоимость выполнения j-й работы;

$B \geq 0$ — величина кредита.

Переменные задачи $(v_i), (y_{ij}), (w_i)$ имеют следующий смысл:

$v_i \geq 0$ — объем производства изделия i-го типа;

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я работа выполняется изделиями } i\text{-го типа}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$w_i \geq 0$ — объем изделий i-го типа, проданных инвестору.

С использованием введенных обозначений задача выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием записывается следующим образом:

$$\min_{v,y} \sum_{i \in I} \{g_i(v_i) + \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij}\}, \tag{16}$$

$$\sum_{i\in I} y_{ij} = 1, j \in J, \tag{17}$$

$$\sum_{t=1}^{T_i} \max_{j\in J_i^t} p_{ij} y_{ij} \le v_i - w_i, i \in I, \tag{18}$$

$$v_i \ge 0, y_{ij} \in \{0,1\}, i \in I, j \in J, \tag{19}$$

где w — оптимальное решение линейной задачи о ранце ЛР(v):

$$\max_w \sum_{i\in I} \alpha_i w_i, \tag{20}$$

$$\sum_{i\in I} \beta_i w_i \le B, \tag{21}$$

$$0 \le w_i \le v_i, i \in I. \tag{22}$$

Целевая функция (**??**) имеет смысл суммарных затрат на разработку, производство и эксплуатацию изделий. Равенства (**??**) гарантируют выполнение всех работ области применения. Неравенства (**??**) ограничивают возможности выполнения работ имеющимися в наличии изделиями. Целевая функция (**??**) внутренней задачи имеет смысл суммарной эффективности изделий, выбранных инвестором. Неравенство (**??**) ограничивает финансовые возможности инвестора величиной его кредита. Ограничения (**??**) позволяют инвестору закупать изделия в количествах не превышающих их обьемы производства.

Доказана полиномиальная сводимость рассматриваемой задачи к m классическим задачам выбора ряда изделий. Установлено, что задача полиномиально разрешима, если в ней существует оптимальное решение со связными областями применения.

В разделе 3.2 рассматриваются частные случаи задачи из раздела 3.1, которые полиномиально сводится либо к m простейшим задачам размещения [**?**, **?**], либо к m задачам выбора изделий многоразового применения [**?**]. Выделены полиномиально разрешимые подклассы:

Теорема 3 *Пусть матрица C удовлетворяет одному из следующих условий:*

1. C — связная [?], либо 2–связная [?];

2. C — квазивыпуклая, либо квазивогнутая [?];

3. C — связная относительно дерева [?, ?].

Тогда задача ПЗР — полиномиально разрешима.

В разделе 3.3 исследуется максимизационный вариант задачи. Наиболее содержательные результаты получены для ее частного случая — простейшей задачи размещения с частичным внешним финансированием:

$$\max_{x,v,y} \sum_{i \in I} \{ \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij} - c_i v_i - f_i x_i \}, \tag{23}$$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = 1, j \in J, \tag{24}$$

$$x_i \geq y_{ij}, i \in I, j \in J, \tag{25}$$

$$\sum_{j \in J} p_{ij} y_{ij} \leq v_i - w_i, i \in I, \tag{26}$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq M, \tag{27}$$

$$v_i \geq 0, x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J, \tag{28}$$

где w — оптимальное решение линейной задачи о ранце ЛР(v)

$$\max_{w} \sum_{i \in I} \alpha_i w_i, \tag{29}$$

$$\sum_{i \in I} \beta_i w_i \leq B, \tag{30}$$

$$0 \leq w_i \leq v_i x_i, i \in I. \tag{31}$$

В задачах на максимум величины c_{ij} обычно интерпретируются как доход, который получает поставщик в результате удовлетворения спроса

j-го потребителя из i-го пункта производства. Раздел посвящен описанию и анализу приближенного алгоритма решения для задачи (**??**)–(**??**). Основное содержание раздела составляет доказательство теоремы 13, из которой следует, что приближенный алгоритм решения задачи имеет оценку точности

$$(Z^* - Z^g)/(Z^* - Z^l) \leq 1/e,$$

где Z_k^l — оценка снизу на минимальное значение целевой функции задачи, Z^* — оптимальное значение целевой функции на множестве допустимых решений и Z^g — приближенное решение.

В разделе 3.4 установлено, что в вырожденном случае имеют место результаты, полученные в предыдущих параграфах, если под решением задач понимать поиск оптимальных решений. Приводится пример задачи, у которой все оптимальные решения не являются гарантированными.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Пащенко М.Г. Алгоритм вычисления нижней границы для динамической задачи оптимального выбора состава систем технических средств с ограничениями на объемы производства. //Модели дискретной оптимизации (Управляемые системы). Новосибирск, 1989. Вып. 29, 57–71.

2. Кочетов Ю.А., Пащенко М.Г. Лагранжевы релаксации в задаче выбора оптимального состава системы технических средств. // Оптимизация дискретных структур (Управляемые системы). Новосибирск, 1993. Вып. 31, 26–39.

3. Кочетов Ю.А., Пащенко М.Г. Динамические задачи выбора оптимального состава системы технических средств. //Дискретный анализ и исследование операций. 1995. Т 2, N 1, 36–49.

4. Кочетов Ю.А., Пащенко М.Г. Нижние оценки в задаче выбора состава двухуровневой системы технических средств. //Дискретный анализ и исследование операций. 1995. Т 2, N 4, 32–41.

5. Пащенко М.Г. Нижние оценки для целевой функции в динамической задаче выбора оптимального состава двухуровневой системы технических средств. //Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. Новосибирск, 1997. Т 4, N 1, 40–53.