РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л.СОБОЛЕВА

На правах рукописи

ПЛЯСУНОВ Александр Владимирович

ЗАДАЧИ ДВУХУРОВНЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ ДЕКОМПОЗИЦИЕЙ ОБЛАСТИ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ

(01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители
д.ф.-м.н., профессор
В.Л.Береснев
к.ф.-м.н., доцент
Ю.А.Кочетов

Новосибирск – 2001 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Задачи многоуровневого программирования появились в связи с проблемами управления производственными, экономическими, социальными и другими сложными системами. Традиционное моделирование таких процессов основывается на предположении, что имеется одно лицо, принимающее решение. Подобный подход игнорирует других участников процесса управления, имеющих свои предпочтения и стратегии выбора. Поэтому в разных областях человеческой деятельности все чаще стали появляться схемы принятия решений, позволяющие учесть конфликтные ситуации, характерные для современного общества. Так как теперь априори предполагается наличие разнородных интересов или факторов, плохо поддающихся прямому контролю, то в качестве подходящей математической модели принятия решений могли бы использоваться системы оптимизационных моделей так или иначе связанных друг с другом. Когда рассматриваются схемы принятия решений, согласовывающие противоречивые интересы, то возникают задачи равновесного программирования [2]. В этих задачах в качестве решений используются неподвижные точки или равновесные решения.

Задачи многоуровневого программирования чаще всего возникают при моделировании процессов управления в иерархических системах. Верхний уровень в таких системах (центральное правительство, руководство корпорации и т.п.) не определяют полностью поведение нижних уровней иерархии (местные органы самоуправления, иногородние филиалы и т.п.). У каждого уровня иерархии имеется возможность только влиять на решения нижних уровней. Цели разных уровней, как правило, не совпадают. Процесс принятия решений в таких системах выглядит следующим образом. Первым принимает решение верхний уровень иерархии. Это решение передается нижестоящим уровням и уже не меняется. Каждый уровень иерархии, получив решения вышестоящих уровней, принимает свое решение. Он преследует свои цели и использует имеющиеся у него возможности и ресурсы. Деятельность всей системы направлена на достижение определенной глобальной цели. Результат деятельности иерархической системы зависит от работы всех уровней иерархии. Задача состоит в том, чтобы найти такое решение верхнего уровня, которое приводит систему к достижению глобальной цели.

Если верхний уровень полностью определяет поведение нижестоящих, то моделирование процессов принятия решений упрощается. В этом случае возникают классические задачи математического программирования, в которых область допустимых значений задается набором равенств и неравенств. Если же верхний уровень может только влиять на работу нижних уровней, то возникает новый класс задач. Область допустимых значений в данном случае задается с помощью вспомогательных (внутренних) задач, моделирующих поведение нижних уровней иерархии. Решения вышестоящих органов выступают в этих задачах в качестве ограничений.

В ряде работ [34, 82], обьединяются задачи многоуровневого и равновесного программирования. В таких постановках верхний уровень обычно рассматривается как арбитр, а нижние уровни как игроки. Под решением понимается равновесное решение, т.е. неподвижная точка. Когда игроки имеют одинаковый статус, то используются двухуровневые постановки. Если игроки подчинены иерархическим отношениям верхний-нижний, то рассматриваются многоуровневые постановки. Когда ограничения, описывающие стратегии игроков, и целевые функции линейны, то в таких задачах существуют равновесные (оптимальные) по Нэшу решения [34]. Методы решения подобных задач предлагаются в уже цитированных работах [34, 82]. Для решения задач равновесного программирования в [2, 37, 38] развиваются алгоритмы градиентного типа.

Впервые задачи многоуровневого программирования в игровой постановке рассматривались Штакельбергом [81]. Как самостоятельное направление, обобщающее математическое программирование, многоуровневое программирование впервые рассматривалось в [52]. В России над этими задачами работали Гермейер и его ученики [6]. Один из первых алгоритмов решения задачи двухуровневого линейного программирования, который является модификацией симплекс-алгоритма, был предложен в [81].

Задачи, в которых рассматриваются только два уровня иерархии, называются задачами двухуровневого программирования. Их область применения чрезвычайно широка:

– задачи стратегического планирования [56];

– анализ динамики регулируемой экономики [52];

– управление ресурсами в децентрализованной фирме [31, 42];

– выбор конфигурации сети дорог в транспортных системах [48, 74];

– производство электроэнергии и тепла [35];

– размещение производства [9, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 30, 32, 35];

– численное решение задач механики твердого тела и гидродинамики [71, 72, 73];

– размещение систем вооружения [51] и т.д.

Методология двухуровневого и равновесного программирования использовалась для анализа международных конфликтов [34]. В качестве модели разрешения конфликта предлагается двухуровневая модель, в которой верхний уровень действует как арбитр среди конфликтующих игроков. Полученные результаты использовались для анализа конфликта, возникшего между Индией и Бангладеш за обладание водными ресурсами. Было показано, что обе стороны получают наилучшие условия, если соглашаются на арбитражное управление третьей незаинтересованной стороной.

Понять постановку задач двухуровневого программирования можно на примере следующей игры. В ней участвуют игрок и игровой автомат. Игрок называет автомату n чисел. Автомат вычисляет по ним параметры оптимизационной задачи, находит оптимальное решение и выдает ответ. Если ответ и названные игроком числа удовлетворяют условиям игры, то считается, что игра состоялась. В этом случае подсчитывается выигрыш, зависящий от хода игрока и ответа автомата. В противном случае считается, что игра не состоялась. Цель игрока — найти ход (набор n чисел), который приводит к максимальному выигрышу.

Выбирая ход, игрок задает параметры оптимизационной задачи автомата. Условия задачи ему известны. В этом смысле данная игра является игрой с полной информацией. Если оптимизационная задача автомата для любого хода игрока имеет единственное решение, то можно считать, что игрок всегда знает состоится игра или нет, а если состоится, то каков будет выигрыш. В этом случае у него имеется принципиальная возможность найти наилучший ход или убедиться, что игра не состоится ни при каком ходе. Когда оптимальных решений несколько, то следует различать по крайней мере две ситуации. Если выбор из множества оптимальных решений предписан заранее и известен игроку, то ситуация становится такой же как и в предыдущем случае. Если же автомат может предъявить любое из оптимальных решений, выбранное, например, случайным образом, то ситуация меняется. В понятие наилучшего хода игрок может вкладывать разный смысл. Он может назвать оптимальным любой ход, дающий шанс получить максимальный выигрыш с риском не получить ничего или получить выигрыш значительно меньше ожидаемого. Другой подход состоит в том, чтобы считать оптимальным такой ход, который дает наибольший гарантированный выигрыш при любом ответном ходе автомата. Оба этих подхода будут использованы ниже для определения **оптимального** и **наилучшего гарантированных решений**.

Приведем математическую формулировку двухуровневых задач и дадим краткий обзор основных результатов их исследования.

Обозначим через $x \in R^n$ ход игрока, а через $y \in R^m$ – ответный ход автомата. Пусть b_1, b_2 – вектора, $f_1(x,y), f_2(x,y), g_1(x,y), g_2(x,y)$ – некоторые функции от x и y. Будем считать, что величины y при заданном x определяются из решения следующей оптимизационной задачи автомата $(A(x))$:

$$\max_y \{ f_2(x,y) \mid \ g_2(x,y) \le b_2 \}.$$

Будем говорить, что игра состоялась, если пара (x,y) удовлетворяет ограничению $g_1(x,y) \le b_1$. В этом случае величина $f_1(x,y)$ определяет выигрыш игрока. Если же пара (x,y) не удовлетворяет данному ограничению, то считаем, что игра не состоялась и значение выигрыша неопределено. Цель игрока — найти такой ход, который приводил бы к максимальному выигрышу, либо выяснить, что игра не состоится ни при каком ходе. С использованием введенных обозначений задача игрока может быть записана следующим образом:

$$\max_x f_1(x,y) \tag{0.1}$$

$$g_1(x,y) \leq b_1, \tag{0.2}$$

где y — оптимальное решение задачи $A(x)$

$$\max_y f_2(x,y) \tag{0.3}$$

$$g_2(x,y) \leq b_2. \tag{0.4}$$

Указанную задачу будем называть **задачей двухуровневого программирования (ДП)**. Напомним определения **полудопустимого**, **допустимого** и **оптимального** решений для этой задачи. Вектор (x,y) назовем полудопустимым решением задачи ДП, если для него выполняются ограничения верхнего и нижнего уровней. Вектор (x,y) — допустимое решение задачи ДП, если он является полудопустимым решением и y — оптимальное решение задачи $A(x)$. Тогда оптимальное решение задачи это есть допустимое решение, на котором достигается максимальное значение целевой функции $f_1(x,y)$ на множестве всех допустимых решений. Как уже отмечалось выше, если внутренняя оптимизационная задача имеет несколько оптимальных решений, то естественно ввести понятия **гарантированного** и **наилушего гарантированного решений**. Допустимое решение (x,y) назовем гарантированным, если для любого оптимального решения $\bar{y}$ задачи $A(x)$ вектор

$(x, \bar{y})$ является допустимым решением задачи ДП и $f_1(x, y) \leq f_1(x, \bar{y})$. Гарантированное решение называется наилучшим, если на нем достигается максимальное значение целевой функции $f_1(x, y)$ на множестве всех гарантированных решений.

Задача ДП называется **невырожденной**, если любое допустимое решение является гарантированным. В этом случае множество оптимальных решений совпадает с множеством наилучших гарантированных решений. Обычно [47, 78], в качестве достаточного условия невырожденности используется предположение о единственности оптимального решения задачи $A(x)$ при всех x, для которых эта задача разрешима. В вырожденном случае, когда среди допустимых решений задачи ДП есть негарантированные, множество оптимальных решений может не иметь общих точек с множеством наилучших гарантированных решений.

Предположим, что в качестве внутренней задачи $A(x)$ используется тривиальная задача, имеющая единственное оптимальное решение $y = 0$ для любого x. Тогда возникает естественное вложение классических задач математического программирования в задачи двухуровневого программирования. В [47] при достаточно общих предположениях приводится сведение двухуровневых задач к нелинейным задачам классического программирования. Это сведение основывается на условиях оптимальности Куна - Таккера для задачи нижнего уровня, которые включаются в ограничения верхнего уровня.

На практике, переход от классических оптимизационных моделей к многоуровневым системам моделей оптимизации сдерживается отсутствием достаточно развитых численных методов их решения. Прогресс в этой области, достигнутый в последние годы, позволяет надеется на более широкое использование этих моделей.

Методы, используемые для решения задач двухуровневого программирования, можно разбить на следующие группы:

1. Методы, в которых двухуровневая задача сводится к решению нелинейной задачи классического математического программирования. Для линейных задач подобные алгоритмы рассматривались в [44, 62, 65, 70], а для нелинейных задач в [39, 41, 44, 47, 50, 59, 62]. Для двухуровневых частично - целочисленных задач соответствующие алгоритмы рассматривались в [41, 45]

2. Методы, основанные на просмотре множества крайних точек многогранника полудопустимых решений. Такой подход применяется для решения задач двухуровневого линейного и выпуклого программирования [50, 53].

3. Методы штрафов [31, 34, 66, 79, 80, 83]. В [83] для решения линейных задач в качестве штрафа, который вносился в целевую функцию верхнего уровня, используется разность между прямым и двойственным решениями задачи нижнего уровня.

4. Методы покоординатного спуска для задачи верхнего уровня с информацией о градиенте, получаемой разными способами из задачи нижнего уровня [43, 60, 68, 78, 83, 84].

5. Метаэвристики: поиск с запретами [63], имитация отжига [33], генетические алгоритмы [33, 76] и методы, использующие решения, оптимальные по Парето [40].

Перечисленные алгоритмы предназначены для решения общих классов задач двухуровневого нелинейного, выпуклого, линейного и частично-целочисленного программирования. Накопленный вычислительный опыт решения задач математического программирования показывает, что в настоящее время неизвестно эффективных алгоритмов решения достаточно общих классов нелинейных или дискретных экстремальных задач. Так как существует вложение этих классов задач в соответствующие двухуровневые задачи, то трудно ожидать существования эффективных алгоритмов решения и в двухуровневогом случае. Подобные аргументы "не работают"в линейном случае. Последнее связано с тем, что для задачи линейного программирования существуют эффективные алгоритмы решения [29].

В [53] рассматривалась линейная задача ДП без ограничений верхнего уровня. Установлено, что в этом случае допустимая область может быть невыпуклой, но является связной и совпадает с обьединением некоторого множества граней многогранника, который определяется ограничениями нижнего уровня. В общем случае, когда есть линейные ограничения на верхнем уровне, это множество может оказаться дискретным [42]. Поэтому неудивительно, что задачи двухуровневого линейного программирования являются NP-трудными [49]. Несколько позднее, в [65] было доказано, что этот класс задач является NP-трудным в сильном смысле. Наконец, в [17] было установлено, что задача нахождения допустимого решения также является NP-трудной в сильном смысле. Отметим также, что проверка локальной оптимальности допустимого решения задачи двухуровневого линейного программирования относится к классу NP-трудных задач [84].

Безусловно трудно дать определение эффективного алгоритма, которым можно было бы воспользоваться, как в непрерывном случае, так и в дискретном. Однако для задач, рассматриваемых в данной работе, достаточно определения эффективного алгоритма как алгоритма, временная сложность которого ограничена сверху некоторым полиномом от длины записи входной информации задачи. В теории вычислительной сложности, начиная с работ Эдмонса [58], Левина [20], Карпа [14] и Кука [18], широко используется соглашение, согласно которому задача не считается "хорошо решаемой"до тех пор, пока для нее не получен полиномиальный алгоритм. Поэтому задачу называют труднорешаемой, если для ее решения не существует полиномиального алгоритма. В качестве формального уточнения этого интуитивного понятия для комбинаторных экстремальных задач служит класс NP-трудных задач [29]. На протяжении десятилетий многие математики безуспешно пытались построить полиномиальные алгоритмы решения задач из этого класса. Это дает основание рассматривать NP-трудные задачи как действительно труднорешаемые. Поэтому маловероятно, что для задач двухуровневого программирования или для достаточно общих подклассов нелинейных, выпуклых, линейных или частично-целочисленных задач удастся получить эффективные алгоритмы решения. В этой ситуации естественно сосредоточить усилия на следующих направлениях:

– выделении **полиномиально разрешимых классов задач**;

– оценке трудоемкости и точности известных алгоритмов, например, алгоритма покоординатного спуска;

– разработке алгоритмов, использующих особенности конкретных классов задач;

– разработке малотрудоемких приближенных алгоритмов решения с **априорными (гарантированными) оценками точности**.

Исследования в этих направлениях только начинаются [9, 10, 11, 13, 15, 73, 19, 28, 30].

Основное содержание диссертационной работы составляют результаты исследований связанных с выделением полиномиально разрешимых классов задач и разработкой малотрудоемких приближенных алгоритмов решения с априорными оценками точности. В основе полученных результатов лежит подход, который оказался полезным при построении полиномиальных алгоритмов решения некоторых задач двухуровневого программирования. Его идея состоит в следующем. Предположим, что имеется разбиение множества допустимых решений на подмножества, в каждом из которых исходная задача ДП сводится к решению более простой задачи. Если число этих подмножеств невелико и на каждом из них соответствующая задача решается эффективным алгоритмом, то получаем малотрудоемкий алгоритм и для исходной задачи ДП. Впервые этот подход был применен к следующей задаче оптимизации состава систем технических средств [16]:

$$\min_{v,\ y}\{\sum_{i\in I} c_i\ v_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\ y_{ij}\}$$

$$\sum_{i\in I} y_{ij}\ = 1, j\in J,$$

$$\sum_{j\in J} p_{ij}\ y_{ij} \le v_i - w_i, i\in I,$$

$$v_i \ge 0,\ y_{ij} \ge 0, i\in I,\ j\in J,$$

где w — оптимальное решение внутренней задачи:

$$\max_{w}\sum_{i\in I}\alpha_i\ w_i$$

$$\sum_{i\in I}\beta_i w_i \le B,$$

$$0 \le w_i \le v_i, i\in I.$$

Установлено, что задача полиномиально разрешима в сильном смысле, т.е. трудоемкость алгоритма решения ограничена полиномом от размерности задачи. Там же показано, что задача остается полиномиально разрешимой, если ввести дополнительное ограничение на верхнем уровне

$$\sum_{i \in I} \gamma_i \ v_i \leq V, \text{ где } \gamma_i \geq 0, \quad V \geq 0.$$

Это первые нетривиальные классы задач двухуровневого программирования, для которых была доказана полиномиальная разрешимость.

Изложим кратко результаты диссертационной работы, состоящей из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Первая глава посвящена доказательству полиномиальной разрешимости двух классов задач двухуровневого линейного программирования.

В разделе 1.1 содержатся основные определения. Приводятся примеры, иллюстрирующие свойства оптимальных и наилучших гарантированных решений. Показано, что поиск допустимого решения задачи двухуровневого линейного программирования является NP-полной задачей в сильном смысле. Доказательство этого факта основано на псевдополиномиальном сведении задачи о минимальном покрытии к частному случаю рассматриваемой двухуровневой задачи. Так как задача нижнего уровня является невырожденной, то нахождение гарантированного решения также является NP-полной задачей в сильном смысле. Следовательно, задачи нахождения оптимального и наилучшего гарантированного решений для двухуровневого линейного программирования являются NP-трудными в сильном смысле.

В разделе 1.2 рассматривается задача двухуровневого линейного программирования с ограничениями общего вида на верхнем уровне. На нижнем уровне рассматривается линейная задача о ранце с непрерывными переменными. В невырожденном случае установлено, что задачи нахождения оптимального и наилучшего гарантированного решений полиномиально разрешимы. В вырожденном случае доказано, что можно с полиномиальной трудоемкостью либо найти оптимальное решение и проверить, является ли оно гарантированным, либо установить неразрешимость или неограниченность задачи.

В разделе 1.3 исследуется задача из предыдущего раздела с дополнительными ограничениями на нижнем уровне. Установлено, что задачи нахождения оптимального и наилучшего гарантированного решений в этом случае являются NP-трудными. Доказательство основывается на сведении задачи о рюкзаке с булевыми переменными к частному случаю рассматриваемой задачи.

В разделе 1.4 исследуются свойства задачи, у которой задачей нижнего уровня является модифицированная задача о многовариантном ранце. Показано, что в невырожденном случае задача полиномиально разрешима.

Во второй главе рассматривается задача двухуровневого программирования, в которой ограничения содержат нелинейные слагаемые специального вида, а внутренняя задача является задачей о ранце с билинейной целевой функцией относительно всех переменных.

В разделе 2.1 приводится постановка задачи и необходимые обозначения.

В разделе 2.2 для невырожденного случая приводится описание функции возмущения внутренней задачи, условий оптимальности и доказывается полиномиальная разрешимость задачи нахождения оптимального и наилучшего гарантированного решений.

В разделе 2.3 рассматривается вырожденный случай. Доказано, что можно с полиномиальной трудоемкостью либо найти оптимальное решение и проверить, является ли оно гарантированным, либо установить неразрешимость или неограниченность задачи.

В третьей главе исследуются частично-целочисленные задачи двухуровневого программирования, связанные с известной задачей выбора ряда изделий [5, стр. 95].

В разделе 3.1 приводится постановка задачи выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием. Доказана полиномиальная сводимость задачи к m классическим задачам выбора ряда изделий. Установлено, что задача полиномиально разрешима, если в ней существует оптимальное решение со связными областями применения.

В разделе 3.2 рассматриваются частные случаи задачи из раздела 3.1, которые полиномиально сводится либо к m простейшим задачам размещения [5, 69], либо к m задачам выбора изделий многоразового применения [5]. Выделены полиномиально разрешимые подклассы.

В разделе 3.3 исследуется максимизационный вариант задачи. Для ее частного случая — простейшей задачи размещения с частичным внешним финансированием предлагается приближенный алгоритм с гарантированной оценкой точности.

В разделе 3.4 установлено, что в вырожденном случае имеют место результаты, полученные в предыдущих параграфах, если под решением задач понимать поиск оптимальных решений. Приводится пример задачи, у которой все оптимальные решения не являются гарантированными.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [16, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 67, 77] и докладывались на X Байкальской школе–семинаре (г. Иркутск, 1995), на Симпозиумах по исследованию операций (г. Брауншвейг, 1996 и г. Йена, 1997), на Втором Сибирском Конгрессе по Прикладной и Индустриальной Математике (г. Новосибирск, 1996), на Международной конференции (г. Омск, 1997), на Международной Байкальской конференции (г. Иркутск, 1998, 2001), на Международной конференции "Дискретный анализ и исследование операций"(г. Новосибирск 1998, 2000), на семинарах в Институте математики СО РАН.

Результаты первой и третьей глав получены совместно с Ю.А. Кочетовым. Автор выражает искренюю признательность научному руководителю Ю.А.Кочетову за постоянное внимание и всестороннюю поддержку при выполнении данной работы.

Глава 1

Линейные модели

Глава посвящена исследованию задач двухуровневого линейного программирования.

В разделе 1.1 приведены необходимые определения. Приводится псевдополиномиальное сведение задачи о минимальном покрытии к задаче поиска допустимого решения задачи двухуровневого линейного программирования. Откуда следует, что поиск допустимого решения задачи двухуровневого линейного программирования — NP-полная задача в сильном смысле.

В разделе 1.2 доказывается полиномиальная разрешимость задачи двухуровневого линейного программирования с ограничениями общего вида на верхнем уровне, в которой задачей нижнего уровня является линейная задача о ранце с непрерывными переменными.

В разделе 1.3 рассматривается обобщение предыдущей задачи, в котором на нижнем уровне использованы дополнительные ограничения сверху на значения переменных. Приводится полиномиальное сведение задачи о ранце с булевыми переменными к частному случаю этой задачи. Так как использованная в сведении подзадача является невырожденной, то нахождение оптимального и наилучшего гарантированного решений в этом случае являются NP-трудными задачами.

В разделе 1.4 в предположении невырожденности доказана полиномиальная разрешимость задачи двухуровневого линейного программирования с ограничениями общего вида на верхнем уровне, в которой задачей нижнего уровня является модифицированная задача о многовариантном ранце.

1.1 Основные определения

Отметим, что в работах [35, 78, 49] задача двухуровневого программирования формулируется в более простой форме, когда ограничения (0.2) отсутствуют. Ниже будет показано, что такое предположение сильно упрощает задачу ДП.

Определение 1 *[49] Пара (x, y) называется полудопустимым решением задачи ДП, если она удовлетворяет ограничениям (0.2),(0.4).*

Определение 2 *[49] Пара (x, y) называется допустимым решением задачи ДП, если выполняются ограничения (0.2) и y — оптимальное решение задачи $A(x)$.*

Приведем пример задачи *ДП*, в котором существуют полудопустимые решения, но не существует допустимых решений. Пусть x и y являются скалярными переменными и задача ДП имеет вид:

$$\max_x\{x \mid \ 1 + y \leq x \leq 2, \ x \geq 0\},$$

где y — оптимальное решение задачи

$$\max_y\{y \mid \ y \leq x, \ y \geq 0\}.$$

Решение $x = 2,\ y = 0$ является полудопустимым решением. Однако при любом выборе $x \geq 0$ оптимальное решение y совпадает с x, что приводит к нарушению условия $1 + y \leq x$, т.е. задача не имеет допустимых решений.

Пусть функции $g_1(x,y), g_2(x,y)$ и $f_2(x,y)$ являются линейными функциями с рациональными коэффициентами. Предположим, что ограничения (0.2) являются несущественными и могут быть отброшены. Тогда поиск допустимого решения задачи $ДП$ является задачей линейного программирования. Если же ограничения (0.2) являются существенными, то поиск допустимого решения становится NP-полной задачей в сильном смысле. Действительно, в этом случае с помощью задачи поиска допустимого решения можно решить следующую дискретную задачу о покрытии [12]. Задан набор подмножеств $J_i \subseteq J,\ i \in I$ и целое положительное число $K \leq\mid I \mid$. Требуется найти такое подмножество $I' \subset I$, что $\mid I' \mid\leq K$ и любой элемент $j \in J$ принадлежит по крайней мере одному подмножеству $J_i,\ i \in I'$.

Рассмотрим следующую задачу поиска допустимого решения. Найти пару (x,y), для которой выполнены условия:

$$\sum_{i \in I} x_i \leq K, \qquad \sum_{j \in J} y_j \leq 0, \qquad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i \in I,$$

и y является оптимальным решением задачи

$$\max_y \{\sum_{j \in J} y_j \mid\ y_j \geq 0,\ y_j \leq 1 - x_i, \quad j \in J_i,\ i \in I\}.$$

Убедимся в том, что подмножество I' существует тогда и только тогда, когда в данной задаче существует допустимое решение.

Предположим, что такое решение существует. Тогда из условий $\sum_{j \in J} y_j \leq 0$, следует, что $y_j = 0,\ j \in J$. Так как y — оптимальное решение внутренней задачи, то для любого $j \in J$ существует такой номер $i \in I$, что $j \in J_i$ и $x_i = 1$. Полагая $I' = \{i \in I \mid x_i = 1\}$, получаем требуемое подмножество I'.

Предположим теперь, что в задаче о покрытии существует подмножество I' с требуемыми свойствами. Тогда полагая

$$y_j = 0,\ j \in J; \qquad x_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i \in I', \\ 0, & \text{если} \quad i \notin I', \end{cases}$$

получаем допустимое решение.

Пусть при некотором значении x задача $A(x)$ имеет несколько оптимальных решений. Тогда наряду с понятием допустимого решения введем понятие гарантированного решения.

Определение 3 *Допустимое решение (x, y) называется гарантированным, если для любого оптимального решения $\bar{y}$ задачи $A(x)$ вектор $(x, \bar{y})$ удовлетворяет ограничениям (0.2) и $f_1(x, y) \leq f_1(x, \bar{y})$.*

Если при любом x оптимальное решение задачи $A(x)$ единственно, то любое допустимое решение является гарантированным. Следовательно, поиск гарантированного решения также является NP-полной задачей в сильном смысле. Предположим, что для некоторого x задача $A(x)$ имеет несколько оптимальных решений. Тогда гарантированное решение (x, y) существует, если ни одно из оптимальных решений задачи $A(x)$ не нарушает условий (0.2) и среди них удается найти решение, наихудшее с точки зрения игрока.

Определение 4 *Допустимое решение (x^*, y^*) называется оптимальным, если для любого допустимого решения (x, y) справедливо неравенство $f_1(x^*, y^*) \geq f_1(x, y)$.*

Определение 5 *Гарантированное решение (x^*, y^*) называется наилучшим, если для любого гарантированного решения (x, y) справедливо неравенство $f_1(x^*, y^*) \geq f_1(x, y)$.*

Определение наилучшего гарантированного решения вытекает из содержательного смысла задачи. Если пара (x, y) является оптимальным решением, но не является наилучшим гарантированным решением, то выбрав стратегию x, игрок соглашается идти на риск, стремясь достичь максимального выигрыша. При поиске наилучшего гарантированного решения, игрок исключает риск и стремится найти стратегию с гарантированным результатом. Рассмотрим следующий пример:

$$\max_x \{x_1 + x_2 + y_1 + 2y_2 \mid \ x_1 + x_2 \leq 1 - y_1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$$

где $y = (y_1, y_2)$ — оптимальное решение задачи

$$\max_y \{y_1 + y_2 \mid \ y_1 + y_2 \leq x_1 + 2x_2,\ y_1 \leq x_2,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0\}.$$

Решение $x^* = (0, 1),\ y^* = (0, 2)$ доставляет максимум целевой функции на множестве допустимых решений и $f_1(x^*, y^*) = 5$. Тем не менее это решение не является гарантированным. Для x^* существует $\overline{y} = (1, 1)$ – оптимальное решение задачи $A(x^*)$, которое нарушает ограничение $x_1 + x_2 \leq 1 - y_1$. Решение $x = (0, 0),\ y = (0, 0)$ является гарантированным, но дает минимальное значение выигрыша. Наилучшим гарантированным решением является $x = (1, 0),\ y = (0, 1)$ со значением выигрыша $f_1(x, y) = 3$.

Определение 6 *Задача ДП называется невырожденной, если любое допустимое решение (x, y) является гарантированным.*

В зависимости от контекста под решением задачи (0.1)–(0.4) будем понимать либо оптимальное решение в смысле определения 4, либо наилучшее гарантированное решение в смысле определения 5.

1.2 Задача с линейным ранцем на нижнем уровне

Рассмотрим следующую задачу двухуровневого линейного программирования (*ДЛП*):

$$\max_{x \geq 0} cx + dy \tag{1.1}$$

$$Ax + By \leq b, \tag{1.2}$$

где y — оптимальное решение линейной задачи о рюкзаке ($ЛР(x)$):

$$\max_{y \geq 0} \alpha x + \beta y, \tag{1.3}$$

$$\gamma y \leq 1, \quad y \leq x. \tag{1.4}$$

Будем предполагать, что переменные x и y имеют одинаковую размерность, $x = (x_i)$, $y = (y_i)$, $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$, A, B – матрицы с рациональными элементами, $c, d, b, \alpha, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$ – вектора с рациональными компонентами. Без ограничения общности будем считать, что $\alpha_i = 0$, $\gamma_i = 1, i \in I$.

1.2.1 Невырожденный случай

Пусть величины $\beta_i, i \in I$ попарно различны и множество I упорядочено так, что

$$\beta_1 > \beta_2 > ... > \beta_n > 0.$$

Тогда при любом $x \geq 0$ оптимальное решение задачи $ЛР(x)$ определяется однозначно. Любое допустимое решение является гарантированным и любое оптимальное решение задачи является наилучшим гарантированным решением.

Представим множество допустимых решений задачи *ДЛП* в виде объединения $(n+1)$-го подмножества и решим задачу на каждом из этих подмножеств. Тогда наилучшее из найденных решений будет оптимальным решением задачи *ДЛП*. Пусть (x, y) допустимое решение задачи *ДЛП*. Если $\sum_{i \in I} x_i \leq 1$, то y - оптимальное решение задачи $ЛP(x)$ тогда и только когда, когда $y = x$. Исключая переменные y, получаем задачу P_0

$$\max_{x \geq 0} (c + d)x$$

$$(A + B)x \leq b,$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq 1.$$

Если x – допустимое решение задачи P_0, то пара (x, x) – допустимое решение задачи *ДЛП*, и значения целевых функций на данных решениях совпадают.

Предположим теперь, что $\sum_{i \in I} x_i \geq 1$. Тогда оптимальное решение задачи $ЛP(x)$ имеет вид

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{если } i < k, \\ 1 - \sum\limits_{j<k} x_j, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i > k, \end{cases} \qquad (*)$$

где номер $k \in I$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\sum_{i<k} x_i \leq 1, \qquad \sum_{i<k} x_i + x_k \geq 1.$$

Исключая переменные y, получаем для каждого $k \in I$ оптимизационную задачу P_k

$$\max_{x \geq 0} \sum_{i \in I} c_i x_i + \sum_{i<k} d_i x_i + d_k(1 - \sum_{i<k} x_i)$$

$$\sum_{i \in I} A_i x_i + \sum_{i<k} B_i x_i + B_k(1 - \sum_{i<k} x_i) \leq b$$

$$\sum_{i<k} x_i \leq 1, \qquad \sum_{i<k} x_i + x_k \geq 1.$$

Если x – допустимое решение задачи P_k, то определяя y при помощи соотношений $(*)$, получаем допустимое решение задачи *ДЛП* и значения целевых функций на этих решениях совпадают. Заметим теперь, что все задачи P_k, $k = 0, 1, ..., n$ являются задачами линейного программирования и могут быть решены точно с помощью стандартных методов [29]. Другими словами, доказано следующее утверждение.

Теорема 1 *Для любой невырожденной задачи (1.1)–(1.4) существует полиномиальный алгоритм, который либо находит оптимальное решение, либо позволяет установить, что задача неограничена или не имеет допустимых решений.*

1.2.2 Вырожденный случай

Предположим, что величины $\beta_i, i \in I$ не являются все попарно различными и множество I упорядочено так, что

$$\beta_1 \geq \beta_2 \geq ... \geq \beta_n \geq 0.$$

Разобъем множество I на непересекающиеся подмножества I_j, $j = 1, 2, ..., m$ так, чтобы величины β_i совпадали друг с другом, если они попадают в одно подмножество и отличались бы друг от друга в противном случае. Также как и в невырожденном случае представим множество допустимых решений задачи $ДЛП$ в виде объединения $(m+1)$-го подмножества и решим задачу на каждом из этих подмножеств. Пусть (x, y) — допустимое решение задачи $ДЛП$ и $\sum_{i \in I} x_i \leq 1$. Тогда $y = x$ – единственное оптимальное решение задачи $ЛP(x)$ и задача $ДЛП$ может быть представлена в виде задачи P_0.

Предположим теперь, что $\sum_{i \in I} x_i \geq 1$. Тогда оптимальное решение задачи $ЛP(x)$ удовлетворяет условиям

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{если } i \in I_j,\ j < k, \\ 0, & \text{если } i \in I_j,\ j > k, \end{cases} \quad \text{и} \quad \sum_{i \in I_k} y_i = 1 - \sum_{j<k} \sum_{i \in I_j} x_i$$

для некоторого k. Заметим, что в вырожденном случае вектор y не определяется однозначно по вектору x. Исключая переменные y_i, $i \notin I_k$, получаем новую формулировку задачи P_k:

$$\max_{x\geq 0, y\geq 0} \sum_{i\in I} c_i x_i + \sum_{j<k}\sum_{i\in I_j} d_i x_i + \sum_{i\in I_k} d_i y_i$$

$$\sum_{i\in I} A_i x_i + \sum_{j<k}\sum_{i\in I_j} B_i x_i + \sum_{i\in I_k} B_i y_i \leq b$$

$$\sum_{j<k}\sum_{i\in I_j} x_i \leq 1, \qquad \sum_{j<k}\sum_{i\in I_j} x_i + \sum_{i\in I_k} x_i \geq 1$$

$$\sum_{i\in I_k} y_i = 1 - \sum_{j<k}\sum_{i\in I_j} x_i.$$

Задачи P_k по прежнему являются задачами линейного программирования, что позволяет с полиномиальной трудоемкостью либо найти оптимальное решение задачи *ДЛП*, либо убедиться, что такого решения не существует.

Пусть (x^*, y^*) – оптимальное решение задачи *ДЛП*. Это решение может оказаться негарантированным по двум причинам.

а) Существует оптимальное решение y_1 задачи $ЛР(x^*)$ с меньшим значением целевой функции (1.1).

б) Существует оптимальное решение y_2 задачи $ЛР(x^*)$, нарушающее условия (1.2).

Проверим, является ли (x^*, y^*) гарантированным решением. Если $\sum_{i\in I} x_i^* \leq 1$, то y^* – единственное оптимальное решение задачи $ЛР(x^*)$ и, следовательно, (x^*, y^*) – наилучшее гарантированное решение. Если же $\sum_{i\in I} x_i^* > 1$, то определим номер k, удовлетворяющий неравенствам

$$\sum_{j<k}\sum_{i\in I_j} x_i^* \leq 1, \qquad \sum_{j<k}\sum_{i\in I_j} x_i^* + \sum_{i\in I_k} x_i^* \geq 1.$$

Предположим, что вектор b состоит из L компонент. Для каждого $l, 1 \leq l \leq L$, найдем оптимальное значение b_l^* целевой функции следующей задачи:

$$\max \sum_{i\in I_k} b_{li}y_i,$$
$$\sum_{i\in I_k} y_i = 1 - \sum_{j<k}\sum_{i\in I_j} x_i^*,$$
$$y_i \geq 0, i \in I_k.$$

Из определения номера k следует, что для любого l множество допустимых решений непусто и ограничено. Следовательно все величины b_l^* являются конечными. Через d^* обозначим оптимальное значение целевой функции задачи вида:

$$\min \sum_{i\in I_k} d_i(y_i^* - y_i),$$
$$\sum_{i\in I_k} B_i y_i \leq b - \sum_{i\in I} A_i x_i^* - \sum_{j<k}\sum_{i\in I_j} B_i x_i^*,$$
$$\sum_{i\in I_k} y_i = 1 - \sum_{j<k}\sum_{i\in I_j} x_i^*,$$
$$y_i \geq 0, i \in I_k.$$

Если для всех l выполняются неравенства

$$b_l^* \leq b_l - \sum_{i\in I} a_{li}x_i^* - \sum_{j<k}\sum_{i\in I_j} b_{li}x_i^*$$

и $d^* \leq 0$, то (x^*, y^*) является наилучшим гарантированным решением. В противном случае выполняется хотя бы одно из условий а) или б) и решение (x^*, y^*) не является гарантированным. Таким образом, установлена следующая

Теорема 2 *Для любой задачи (1.1)–(1.4) существует полиномиальный алгоритм, который либо находит оптимальное решение и проверяет является ли оно гарантированным, либо позволяет установить, что задача неограничена или не имеет допустимых решений.*

Заметим также, что все утверждения остаются верными и в случае, когда размерность вектора x больше размерности вектора y и величины β и γ могут принимать произвольные положительные или отрицательные значения.

1.3 Задача с дополнительными ограничениями

Пусть в задаче $ЛP(x)$ переменные y не могут превышать заданных значений y^0. Тогда задача $ДЛП$ принимает вид

$$\max_{x \geq 0} cx + dy \tag{1.5}$$

$$Ax + By \leq b, \tag{1.6}$$

где y — оптимальное решение задачи:

$$\max_{y \geq 0} \alpha x + \beta y, \tag{1.7}$$

$$\gamma y \leq 1, \quad y \leq x, \quad y \leq y^0. \tag{1.8}$$

При заданных значениях x переменные y по-прежнему легко и однозначно вычисляются, но этого оказывается недостаточно для построения эффективного алгоритма поиска оптимального решения.

Теорема 3 *Задача отыскания оптимального решения задачи (1.5)–(1.8) является NP-трудной.*

Доказательство. Покажем, что задача о рюкзаке с булевыми переменными

$$\max_z \{\sum_{i \in I} c_i z_i | \sum_{i \in I} a_i z_i \leq b, \; z_i \in \{0,1\}, \; i \in I\}$$

сводится к задаче отыскания оптимального решения задачи (1.5)–(1.8). Для этого рассмотрим ее частный случай

$$\max_{x \geq 0} \{\sum_{i \in I} c_i (x_i - y_i) | \sum_{i \in I} a_i y_i \leq b, \; x_i \leq 2, \; i \in I\}, \tag{1.9}$$

где y — оптимальное решение задачи

$$\max_{y\geq 0}\{\sum_{i\in I} y_i | y_i \leq x_i,\ i\in I, y_i\leq 1,\ i\in I\}. \tag{1.10}$$

Убедимся в том, что оптимальные решения этих двух задач связаны между собой соотношениями:

$$x_i^* = 2z_i^*; \quad y_i^* = z_i^*,\ i\in I.$$

Пусть $(z_i^*),\ i\in I$ — оптимальное решение задачи о рюкзаке. Положим $x_i = 2z_i^*,\ y_i = z_i^*,\ i\in I$. Построенное решение является допустимым решением в задаче (1.9)–(1.10). Действительно, оно удовлетворяет ограничениям задачи (1.9) и $y_i,\ i\in I$ — единственное оптимальное решение задачи (1.10). Кроме того, поскольку

$$\sum_{i\in I} c_i z_i^* = \sum_{i\in I} c_i(x_i - y_i),$$

то значения целевых функций на данных решениях совпадают.

Обратно, пусть $(x_i^*), (y_i^*),\ i\in I$ — оптимальное решение задачи (1.9)–(1.10). Убедимся в том, что решение

$$x_i = \begin{cases} 2, & \text{если } x_i^* > 1,\\ 0, & \text{если } x_i^* \leq 1, \end{cases} \qquad y_i = \min(1, x_i), \quad i\in I, \tag{1.11}$$

также является оптимальным решением задачи (1.9)–(1.10). Действительно, если $x_i^* > 1$, то $x_i^* = 2$, так как в противном случае x_i^* не оптимальное решение. Значит, $x_i = x_i^*$, при $x_i^* > 1$. Предположим, что $x_i^* \leq 1$ для некоторого $i\in I$. Тогда, полагая $x_i = 0,\ y_i = 0$, получаем новое допустимое решение с тем же значением целевой функции. Таким образом, среди оптимальных решений всегда существует решение вида (1.11). Полагая $z_i = y_i,\ i\in I$, получаем допустимое решение задачи о рюкзаке, для которого

$$\sum_{i\in I} c_i(x_i^* - y_i^*) = \sum_{i\in I} c_i z_i.$$

Теорема 3 доказана.

1.4 Задача с многоинвариантным ранцем на нижнем уровне

Рассмотрим задачу двухуровневого линейного программирования

$$\max_{x\geq 0} c\ x + d\ y, \tag{1.12}$$

при ограничениях

$$Ax + By \leq b, \tag{1.13}$$

где y — оптимальное решение задачи о многовариантном ранце МВР(x):

$$\max_{y\geq 0} \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} f_{ij} y_{ij}, \tag{1.14}$$

при ограничениях

$$\sum_{i\in I_j} y_{ij} = x_j, j \in J, \tag{1.15}$$

$$\sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} p_{ij} y_{ij} \leq \sum_{j\in J} q_j x_j, \tag{1.16}$$

где $J = \{1,\ldots,n\}$, $I_j = \{1,\ldots,m_j\}, j \in J$. Будем предполагать, что компоненты матриц и векторов, образующих исходные данные задачи, являются рациональными величинами.

Задача нижнего уровня (1.14)–(1.16) несколько отличается от классической задачи о многовариантном ранце [57] видом ограничений (1.15), (1.16). Так как их структура не изменилась, то нетрудно показать, что задача МВР(x) обладает теми же свойствами, что и ее классический аналог. Обозначим через ДМВР(x) задачу двойственную к задаче (1.14)–(1.16):

$$\min_{w,\gamma} \{Q(x_1,\ldots,x_n)\ w + \sum_{j\in J} x_j\ \gamma_j\}, \tag{1.17}$$

$$\gamma_j + p_{ij}\ w \geq f_{ij}, j \in J, i \in I_j, \tag{1.18}$$

$$w \geq 0, \tag{1.19}$$

где $w, \gamma_j \in R, j \in J$ — двойственные переменные, $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{j \in J} q_j x_j$. Задачу МВР$(x)$ легко привести к каноническому виду. Для этого достаточно ввести вспомогательную неотрицательную переменную z в ограничение (1.16) и поменять знак неравенства на равенство. При этом двойственная задача к каноническому представлению совпадает с задачей ДМВР(x).

Положим $f_j(w) = \max_{i \in I_j}(f_{ij} - p_{ij}\ w)$. Тогда оптимальное значение переменной γ_j равно $f_j(w)$ при любом w. Поэтому задача ДМВР(x) эквивалентна следующей задаче:

$$\min_{w \geq 0} F_x(w) = Q(x_1, \ldots, x_n)\ w + \sum_{j \in J} x_j\ f_j(w).$$

Так как $f_j(w), j \in J$, — выпуклые функции от w, то функция $F_x(w)$ также является выпуклой функцией [27]. Пусть $\mu(w), \rho(w)$ — левый и правый градиенты функции F в точке w, а $\mu_j(w), \rho_j(w)$ — соответствующие градиенты функции f_j. Тогда

$$\mu_j(w) = -\max\{p_{ij} \mid f_{ij} - p_{ij}\ w = f_j(w)\},\ \rho_j(w) = -\min\{p_{ij} \mid f_{ij} - p_{ij}\ w = f_j(w)\}$$

и

$$\mu(w) = Q(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j \in J} x_j\ \mu_j(w),\ \rho(w) = Q(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j \in J} x_j\ \rho_j(w).$$

Точка w^* — минимум функции F_x тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\mu(w^*) \leq 0 \leq \rho(w^*).$$

Функция F_x неограничена снизу, когда $\rho(w) < 0$ для достаточно большого w. В этом случае задача МВР(x) не имеет решений. Если

$\rho(0) \geq 0$, то минимум F_x достигается в точке 0. Будем считать, что $f_{1j} = \max_i f_{ij}$ для каждого $j \in J$.

В предложениях 1 и 2 формулируются критерии доминирования, которые позволяют получить минимальное представление для любой функции $f_j(w), j \in J$, выбрасывая лишние линейные функции $(f_{ij} - p_{ij}\ w)$. Под минимальным представлением здесь понимается самое короткое представление функций $f_j(w)$, при котором не изменяется множество оптимальных решений задачи МВР(x). Эти утверждения геометрически очевидны и их доказательство легко следует из соотношений дополняющей нежесткости.

Предложение 1 *Если $f_{rj} < f_{1j}$ и $p_{rj} \geq p_{1j}$, то для любого оптимального решения задачи МВР(x) верно равенство $y_{rj} = 0$.*

Пусть $f_{rj}, f_{sj} < f_{1j}$. Тогда при выполнении следующих условий

$$f_{rj} < f_{sj} \text{ и } p_{rj} \geq p_{sj} \text{ или } f_{rj} = f_{sj} \text{ и } p_{rj} > p_{sj}$$

для любого оптимального решения задачи МВР(x) верно равенство $y_{rj} = 0$.

Предложение 2 *Если $f_{rj} < f_{sj} < f_{tj}, p_{tj} > p_{sj} > p_{rj}$ и $(f_{sj} - f_{rj})/(p_{sj} - p_{rj}) < (f_{tj} - f_{sj})/(p_{tj} - p_{sj})$, то для любого оптимального решения задачи МВР(x) верно равенство $y_{sj} = 0$.*

Основываясь на этих утверждениях, без ограничения общности будем предполагать, что выполняются следующие неравенства:

$$f_{1j} \geq f_{2j} \geq \ldots \geq f_{m_j j}, p_{1j} \geq p_{2j} \geq \ldots \geq p_{m_j j}, \qquad (*)$$

и если $f_{rj} < f_{sj} < f_{tj}, p_{tj} > p_{sj} > p_{rj}$, то

$$(f_{sj} - f_{rj})/(p_{sj} - p_{rj}) \geq (f_{tj} - f_{sj})/(p_{tj} - p_{sj}). \qquad (**)$$

1.4.1 Невырожденный случай

Пусть неравенства $(*)$ и $(**)$ являются строгими. Положим $w_{1j} = 0$ при $j \in J$. Для $k = 2, \dots, m_j - 1$ обозначим через w_{kj} узел $(f_{kj} - f_{k+1j})/(p_{kj} - p_{k+1j})$ функции $f_j(w)$, соответствующий линейным функциям $(f_{kj} - p_{kj}\ w)$ и $(f_{k+1j} - p_{k+1j}\ w)$, коэффициенты которых являются соседними в порядке $(*)$. Предположим, что величины w_{kj} попарно различны при $j \in J$ и $k = 2, \dots, m_j - 1$. Тогда выполняется следующее утверждение

Лемма 1 *Если задача МВР(x) разрешима, то в ней существует единственное оптимальное решение.*

Доказательство. Если $x = 0$, то $y = 0$ — единственное оптимальное решение. Далее без ограничения общности будем считать, что $x > 0$ и задача МВР(x) записана в канонической форме. Так как задача МВР(x) разрешима, то функция F_x ограничена снизу и достигает свое минимальное значение в некоторой точке w^*. Обозначим через $w_{k_0j_0}$ и $w_{k_1j_1}$ два соседних узла, между которыми лежит w^*.

Предположим, что точка w^* является внутренней точкой интервала $[w_{k_0j_0}, w_{k_1j_1}]$. Тогда $\mu(w^*) = \rho(w^*) = 0$. Следовательно, для любого w такого, что $w_{k_0j_0} < w < w_{k_1j_1}$ получим $\mu(w) = \rho(w) = 0$. С другой стороны для концов интервала выполняются следующие равенства и неравенства $\mu(w_{k_0j_0}) < 0 = \rho(w_{k_0j_0})$ и $\mu(w_{k_1j_1}) = 0 < \rho(w_{k_1j_1})$. Таким образом, все точки рассматриваемого интервала являются точками минимума функции F_x. Пусть $\rho(w_{k_0j_0}) = Q(x_1, \dots, x_n) - \sum_{j \in J} x_j\ p_{i_jj}$. Так как неравенства $(*)$ и $(**)$ являются строгими, то величины p_{i_jj} определяются однозначно. Рассмотрим допустимое решение (y^1_{ij}, z^1) задачи МВР(x), где $z^1 = 0, y^1_{i_jj} = x_j$ при $j \in J$ и $y^1_{ij} = 0$ во всех остальных случаях. Пусть M — столбцы матрицы ограничений соответствующие ненулевым переменным $y^1_{i_j j}$. Очевидно, что $rang(M) = n$ и для каждой нулевой переменной z^1 или y^1_{ij} соответствующее двойственное ограничение задачи ДМВР(x) выполняется как строгое неравенство на любом оптимальном оптимальном решении (w, γ), где $w \in [w_{k_0 j_0}, w_{k_1 j_1}]$, $\gamma_j = f_j(w)$. Отсюда имеем, что рассматриваемое допустимое решение задачи МВР(x) является ее единственным оптимальным решением.

Предположим, что $\mu(w^*) < 0 < \rho(w^*)$. Тогда w^* совпадает с одним из узлов $w_{k_0 j_0}$ или $w_{k_1 j_1}$ и является единственной точкой, в которой функция F_x достигает свое минимальное значение. Следовательно, в задаче ДМВР(x) существует единственное оптимальное решение (w^*, γ^*), где $\gamma^*_j = f_j(w^*)$. Допустим, что $w^* = w_{k_1 j_1}$. Тогда для $j \neq j_1$ имеем, что $\mu_j(w^*) = \rho_j(w^*) = -p_{i_j j}$. Если $j = j_1$, то $\mu_{j_1}(w^*) = -p_{k_1 j_1}$ и $\rho_{j_1}(w^*) = -p_{k_1+1 j_1}$. Рассмотрим допустимое решение (y^2_{ij}, z^2) задачи МВР(x), которое является решением следующей системы равенств:

$$z = 0, y_{ij} = 0, j \neq j_1, i \neq i_j, y_{ij_1} = 0, i \neq k_1, k_1 + 1, \tag{1.20}$$

$$y_{i_j j} = x_j, j \neq j_1, \tag{1.21}$$

$$y_{k_1 j_1} + y_{k_1+1 j_1} = x_{j_1}, \tag{1.22}$$

$$\sum_{j \neq j_1} p_{i_j j} y_{i_j j} + p_{k_1 j_1} y_{k_1 j_1} + p_{k_1+1 j_1} y_{k_1+1 j_1} = Q(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.23}$$

Так как $\mu(w^*) < 0 < \rho(w^*)$, то обе переменные $y^2_{k_1 j_1}$ и $y^2_{k_1 j_1}$ являются ненулевыми. Как и в предыдущем случае, рассмотрим множество M — столбцов матрицы ограничений, соответствующих ненулевым переменным y^2_{ij}. Так как ранг матрицы M равен $n+1$, то есть числу ненулевых переменных, то решение системы уравнений (1.20)-(1.23) является базисным допустимым решением задачи МВР(x). Учитывая, что для нулевых переменных соответствующие двойственные ограничения задачи ДМВР(x) выполняются как строгие неравенства на оптимальном решении (w^*, γ^*), то (y^2_{ij}, z^2) — единственное оптимальное решение задачи МВР(x). Случай, когда $w^* = w_{k_0 j_0}$, доказывается аналогичным образом.

Предположим, что функция F_x достигает свое минимальное значение в точке $w^* = 0$ и $\rho(0) > 0$, тогда оптимальное решение внутренней задачи является единственным и определяется следующими соотношениями $y^3_{1j} = x_j, y^3_{kj} = 0, j \in J, k \neq 1, z^3 = Q(x_1, \ldots, x_n) - \sum\limits_j p_{1j} x_j$.

Рассмотрим последний случай, когда w^* совпадает с максимальным среди всех узлов и $\rho(w^*) = 0$. Тогда следующее решение $y^4_{m_j j} = x_j, y^4_{kj} = 0, j \in J, k \neq m_j, z^4 = 0$ является единственным оптимальным решением задачи МВР(x). Лемма 1 доказана.

Из Леммы 1 следует, что любое допустимое решение задачи (1.12)–(1.16) является гарантированным и любое ее оптимальное решение является наилучшим гарантированным решением.

Представим множество допустимых решений задачи (1.12)–(1.16) в виде обьединения подмножеств: $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_L, \Pi_{L+1}, \Pi_{L+2}$. Для этого упорядочим величины w_{kj} в поряде возрастания:

$$w_{i(1)j(1)} = 0 < w_{i(2)j(2)} < \ldots < w_{i(l)j(l)} < \ldots < w_{i(L+1)j(L+1)},$$

где $L = \sum\limits_j (m_j - 1)$ — число ненулевых узлов функций $f_j(w)$. Если вектор $(x, y) = (0, 0)$ — допустимое решение, то $\Pi_0 = \{(0, 0)\}$. Множество Π_1 состоит из всех допустимых решений (x, y), для которых функция F_x достигает своего минимального значения в точке $w = 0$ и $\rho(0) > 0$. Аналогичным образом в множество $\Pi_l, l = 2, \ldots, L + 1$, поместим все допустимые решения (x, y), для которых функция F_x достигает минимума в узле $w_{i(l)j(l)}$ и

$$\mu(w_{i(l)j(l)}) \leq 0 < \rho(w_{i(l)j(l)}). \tag{1.24}$$

Множество Π_{L+2} содержит все допустимые решения, для которых имеет место условие $\rho(w_{i(L+1)j(L+1)}) = 0$.

Пусть (x, y) — произвольное допустимое решение задачи (1.12)–(1.16). Тогда в задаче ДМВР(x) существует оптимальное решение (w^*, γ^*), для которого выполняются неравенства $\mu(w^*) \leq 0 \leq \rho(w^*)$. Как следует из доказательства Леммы 1, можно считать, что $w^* = w_{i(l)j(l)}$ для некоторого l. Если $\rho(w^*) > 0$, то $(x, y) \in \Pi_l$. Если $\rho(w^*) = 0$, то из равенств $\rho(w_{i(l)j(l)}) = \mu(w_{i(l+1)j(l+1)}) = 0$ имеем $(x, y) \in \Pi_{l+1}$. Следовательно, множества $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_L, \Pi_{L+1}, \Pi_{L+2}$ являются разбиением допустимой области задачи (1.12)–(1.16).

Покажем, что, если множество Π_l непусто, то оно совпадает, с множеством решений некоторой системы линейных равенств и неравенств. Определим функцию $q(j, l)$, как такой номер, для которого выполняется равенство

$$-p_{q(j,l)j} = \rho_j(w_l).$$

Так как неравенства $(*)$ и $(**)$ являются строгими, то номер $q(j, l)$ определяется однозначным образом. Очевидно, что $q(j, 1) = 1$ и, если $q(j, l-1)$ известно, то

$$q(j, l) = \begin{cases} q(j, l-1), & \text{если} \ \ j \neq j(l), \\ q(j, l-1) + 1, & \text{если} \ \ j = j(l). \end{cases}$$

Из этих соотношений следует, что функция $q(j, l)$ полиномиально вычислима.

Лемма 2 *Вектор* $(x, y) \in \Pi_l, 1 < l < L + 2$ *тогда и только тогда, когда выполняются ограничения (1.13) и* y *— решение системы урав-*

нений (1.20)–(1.23) для узла $w_{i(l)j(l)}$, где l определяется условиями:

$$\sum_j p_{q(j,l)j} x_j < Q(x_1, \dots, x_n) \le \sum_j p_{q(j,l-1)j} x_j. \tag{1.25}$$

Доказательство. Пусть $(x, y) \in \Pi_l$. Тогда выполняются ограничения (1.13). Если неравенства (1.24) строгие, то, как следует из доказательства Леммы 1, y — решение системы уравнений (1.20)–(1.23). Если в (1.24) достигается равенство, то y совпадает с решением y^1 полученном в Лемме 1. Однако, из условия $\mu(w_{i(l)j(l)}) = 0$ следует, что в любом решении y^2 системы (1.20)–(1.23) переменная $y^2_{q(j,l)}$ будет равна нулю. Следовательно, $y^2 = y^1 = y$. Осталось заметить, что условия (1.24) из определения множества Π_l эквивалентны неравенствам, с помощью которых определяется номер l. Доказательство утверждения в обратную сторону очевидно. Лемма 2 доказана.

Приведем соответствующие описания для множеств Π_1 и Π_{L+2}. Множество Π_1 состоит из всех допустимых решений (x, y), каждое из которых удовлетворяет следующим условиям:

$$y = y^3 \text{ и } \sum_j p_{q(j,1)j} x_j = \sum_j p_{1j} x_j > Q(x_1, \dots, x_n).$$

Соответствующие условия для множества Π_{L+2} имеют вид:

$$y = y^4 \text{ и } \sum_j p_{q(j,L+1)j} x_j = \sum_j p_{m_j j} x_j = Q(x_1, \dots, x_n).$$

Пусть $1 < l < L + 2$. Тогда решение задачи (1.12)–(1.16) на множестве Π_l эквивалентно решению следующей задачи линейного программирования (P_l):

$$\max_{x \ge 0} c\ x + d\ y,$$

$$Ax + By \le b,$$

$$y_{ij} = 0, j \neq j(l), i \neq q(j,l),$$

$$y_{ij(l)} = 0, i \neq q(j(l),l) - 1, q(j(l),l),$$

$$y_{q(j,l)j} = x_j, j \neq j(l),$$

$$y_{q(j(l),l)-1j(l)} + y_{j(l),l)j(l)} = x_{j(l)},$$

$$\sum_{j \neq j(l)} p_{q(j,l)j} y_{q(j,l)j} + p_{q(j(l),l)-1j(l)} y_{q(j(l),l)-1j(l)} + p_{q(j(l),l)j(l)} y_{q(j(l),l)j(l)} = Q(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\sum_j p_{q(j,l)j} x_j < Q(x_1, \ldots, x_n) \leq \sum_j p_{q(j,l-1)j} x_j.$$

Для множеств Π_1 и Π_{L+2} получим еще две задачи линейного программирования (P_1):

$$\max_{x \geq 0} c\ x + d\ y,$$

$$Ax + By \leq b,$$

$$y_{kj} = 0, j \in J, k \neq 1,$$

$$y_{1j} = x_j,$$

$$\sum_j p_{1j} x_j > Q(x_1, \ldots, x_n),$$

и, соответственно, (P_{L+2}):

$$\max_{x \geq 0} c\ x + d\ y,$$

$$Ax + By \leq b,$$

$$y_{kj} = 0, j \in J, k \neq m_j,$$

$$y_{m_j j} = x_j,$$

$$\sum_j p_{m_j j} x_j = Q(x_1, \ldots, x_n).$$

Множеству Π_0 соответствует тривиальная задача линейного программирования (P_0), которая сводится к проверке выполнимости ограничений $Ax + By \leq b$, на векторе $(x, y) = (0, 0)$.

Таким образом, если исходная задача разрешима, то среди задач P_l найдутся разрешимые. В этом случае могут существовать недопустимые задачи P_l, но не должно быть неограниченных сверху задач. Так как задачи P_l могут быть решены точно с помощью стандартных полиномиальных алгоритмов [29] и их число ограничено полиномом от размерности исходных данных, то имеем следующий результат

Теорема 4 *Задача (1.12)–(1.16) полиномиально разрешима.*

Глава 2

Нелинейные модели

Наибольшее внимание в двухуровневом программировании уделяется линейным задачам, и связано это с тем, что многие трудности, возникающие при создании методов решения выпуклых или нелинейных задач, могут быть исследованы в линейном случае. В ряде случаев это позволило построить алгоритмы, которые успешно использовались для решения выпуклых или нелинейных задач [47, 50, 53, 80, 83]. В последние годы более интенсивно стали изучаться свойства конкретных задач нелинейного или частично целочисленного программирования [9, 10, 11, 13, 28, 15, 19, 30, 73].

В данной главе рассматривается класс задач двухуровневого нелинейного программирования, в которых ограничения и целевые функции могут содержать нелинейные слагаемые специального вида.

В разделе 2.1 приводится постановка задачи и необходимые обозначения.

В разделе 2.2 приводится доказательство полиномиальной разрешимости задачи в невырожденном случае.

В разделе 2.3 рассматривается вырожденный случай.

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу двухуровневого нелинейного программирования
(ДНП):

$$\min_{x,y}(cx + dy), \tag{2.1}$$

$$Cx + D(z)y \geq b, \tag{2.2}$$

$$x, y \geq 0, \tag{2.3}$$

где z — оптимальное решение нелинейной задачи о ранце (НЗР(y)):

$$\max_{z} yQ(z), \tag{2.4}$$

$$yz \leq w, \tag{2.5}$$

$$z \geq 0. \tag{2.6}$$

Будем предполагать, что векторы y и z имеют одинаковую размерность, $y = (y_i)$, $z = (z_i), i \in I = \{1, ..., m\}$, $Q(z)$ – m-значная вектор-функция с компонентами $(Q_1(z_1), ..., Q_m(z_m))$, величина w принимает неотрицательные значения и функциональная матрица $D(z)$ следующим образом выражается через вектор-функцию $Q(z)$:

$$D(z) = (d^1_{si} + d^2_{si}Q_i(z_i)).$$

Функции $Q_i(z_i)$ являются вогнутыми кусочно-линейными, определенными для всех $z_i \geq 0$ и $Q_i(0) = 0$.

Предположим, что график каждой функции Q_i состоит из конечного числа линейных сегментов с ненулевыми угловыми коэффициентами. Пусть $K_i \geq 1$ — число линейных сегментов с положительными угловыми коэффициентами. Обозначим через α_{ik} и β_{ik} узлы и угловые коэффициенты функции $Q_i, i \in I$. Множество I разобьем на два непересекающихся подмножества $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$. Номер i принадлежит множеству $\mathcal{I}_1$, если график функции Q_i состоит только из линейных сегментов с положительными угловыми коэффициентами (рис. 2.1). Если график функции Q_i содержит линейные сегменты с отрицательными угловыми коэффициентами, то $i \in \mathcal{I}_2$ (рис. 2.2). В первом случае функция Q_i имеет K_i узлов α_{ik}. Для $i \in \mathcal{I}_2$ ограничимся рассмотрением узлов α_{ik}, $1 \leq k \leq K_i + 1$, соответствующих линейным сегментам с положительными угловыми коэффициентами. Обозначим через α^i вектор с компонентами α_{ik}. Для $i \in \mathcal{I}_1$ введем дополнительный узел $\alpha_{iK_i+1} = +\infty$. Для каждого $i \in I$ положим $\beta_{iK_i+1} = 0$. Будем считать, что $0 = \alpha_{i1} < \alpha_{i2} < \ldots < \alpha_{iK_i+1}$. Предположим также, что исходные данные задачи являются рациональными величинами.

Пусть α – вектор с компонентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{K+1}$ такими, что $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{K+1} \leq +\infty$. Положим $\mathcal{S}_k(\alpha) = [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, $1 \leq k \leq K-1$. Если $\alpha_{K+1} < +\infty$, то $\mathcal{S}_K(\alpha) = [\alpha_K, \alpha_{K+1}]$. Для $\alpha_{K+1} = +\infty$ положим $\mathcal{S}_K(\alpha) = [\alpha_K, \alpha_{K+1})$. Аналогично, пусть $\mathcal{S}(\alpha) = [\alpha_1, \alpha_{K+1}]$, если $\alpha_{K+1} < +\infty$, и $\mathcal{S}(\alpha) = [\alpha_1, \alpha_{K+1})$, если $\alpha_{K+1} = +\infty$.

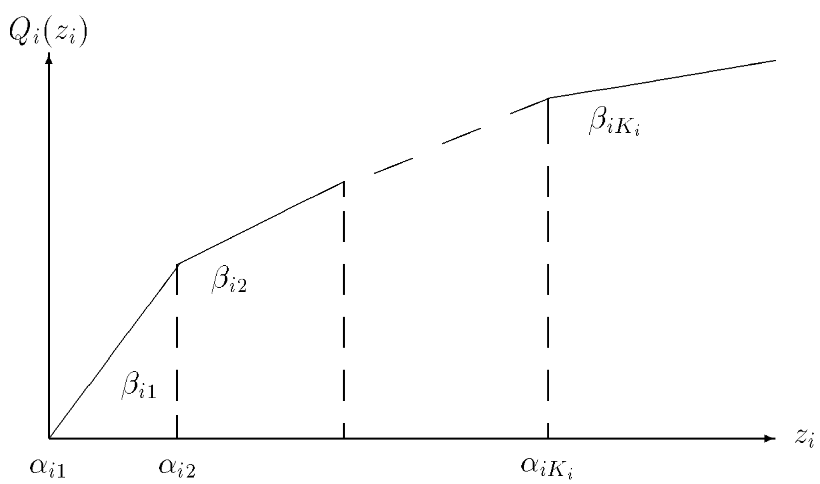

Рис. 2.1: График функции $Q_i(z_i), i \in \mathcal{I}_1$

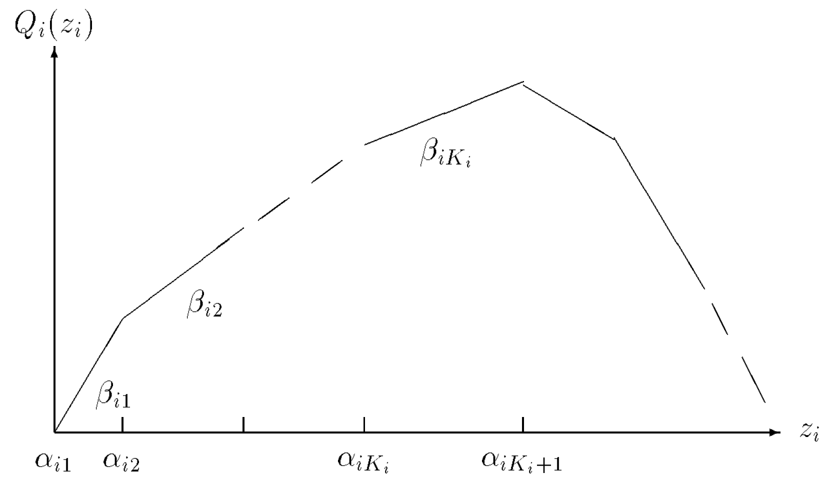

Рис. 2.2: График функции $Q_i(z_i), i \in \mathcal{I}_2$

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество неубывающих вогнутых кусочно-линейных функций, определенных на интервале $[0, +\infty)$ со значениями в R. Рассмотрим функцию f из множества $\mathcal{P}$ с узлами $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{K+1} \leq +\infty$ и угловыми коэффициентами $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_{K+1} = 0$. Выражение $f = \mathcal{P}[(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_l, \beta_l), \ldots, (\alpha_{K+1}, \beta_{K+1})]$ означает следующее. Если $\alpha_{K+1} < +\infty$, то график функции f содержит K линейных отрезков и луч, выходящий из точки $(\alpha_{K+1}, f(\alpha_{K+1}))$ с угловым коэффициентом $\beta_{K+1} = 0$. Если $\alpha_{K+1} = +\infty$, то график функции f содержит $K - 1$ линейных отрезков и луч, выходящий из точки $(\alpha_K, f(\alpha_K))$ с угловым коэффициентом $\beta_K > 0$, а величина β_{K+1} соответствует пустому сегменту. Пара (α_l, β_l) означает, что из точки $(\alpha_l, f(\alpha_l))$ графика функции f выходит линейный отрезок с угловым коэффициентом β_l. Выражение $f \in \mathcal{P}[(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_l, \beta_l)]$ означает, что первые l линейных отрезков графика функции f имеют угловые коэффициенты $\beta_1 > \ldots > \beta_l$.

2.2 Невырожденный случай

Предположим, что величины $\beta_{ik}, i \in I, k \in [1, K_i]$, положительны и попарно различны. В этом случае, как будет доказано ниже, задача ДНП является невырожденной.

2.2.1 Функция возмущения задачи НЗР(y)

Функцией возмущения задачи НЗР(y) назовем функцию p_y, значения которой определяются равенством $p_y(w) = \max_z\{yQ(z) \mid yz \leq w, z \geq 0\}$.

Ниже, если не оговорено противное, будем предполагать, что $y \geq 0$ и $y \neq 0$. Нетрудно проверить, что функция $yQ(z)$ является вогнутой и кусочно-линейной относительно переменных z. Следовательно, подграфик функции p_y — проекция выпуклого многогранного множества $\{(w, q, z) \in R^{2+m} \mid yQ(z) \geq q, yz \leq w, z \geq 0\}$ на пространство R^2 переменных w и q. Поэтому $p_y \in \mathcal{P}$.

Обозначим через p_i функцию возмущения задачи (2.4)–(2.6) для вектора y с одной ненулевой компонентой $y_i > 0$. Очевидно, что $p_i \in \mathcal{P}$.

Лемма 3 *Для любого $y_i > 0$ функция p_i является возрастающей на интервале $\mathcal{S}(y_i\alpha^i)$ и $p_i = \mathcal{P}[(y_i\alpha_{i1}, \beta_{i1}), \ldots, (y_i\alpha_{ik}, \beta_{ik}), \ldots, (y_i\alpha_{iK_i+1}, \beta_{iK_i+1})]$.*

Доказательство. По определению функция Q_i является вогнутой. Так как величины $\beta_{ik}, i \in I$ и $k \in [1, K_i]$, положительны, то функция является возрастающей на интервале $\mathcal{S}(\alpha^i)$. Поэтому для любого $w \geq 0$ такого, что $(w/y_i) \in \mathcal{S}(\alpha^i)$, значение $p_i(w)$ достигается, когда ограничение $y_iz_i \leq w$ выполняется как равенство. Тогда для любого $z_i \in \mathcal{S}(\alpha^i)$ имеем $p_i(y_iz_i) = y_iQ_i(z_i)$. Следовательно, функция p_i является возрастающей на интервале $\mathcal{S}(y_i\alpha^i)$. В частности, отсюда получаем, что для любого $w \in \mathcal{S}(y_i\alpha^i)$ существует единственное оптимальное решение $z_i^* = w/y_i$.

Так как Q_i — кусочно-линейная функция, то для любого $z_i \in \mathcal{S}_k(\alpha^i)$ имеем

$$Q_i(z_i) = Q_i(\alpha_{ik}) + \beta_{ik}(z_i - \alpha_{ik}), \tag{2.7}$$

где $k = 1, \ldots, K_i$. Умножая обе части равенства ((2.7)) на y_i и учитывая, что $p_i(y_i z_i) = y_i Q_i(z_i)$ и $p_i(y_i\alpha_{ik}) = y_i Q_i(\alpha_{ik})$, получаем

$$p_i(y_i z_i) = p_i(y_i\alpha_{ik}) + y_i\beta_{ik}(z_i - \alpha_{ik}),$$

где $z_i \in \mathcal{S}_k(\alpha^i)$ и $k = 1, \ldots, K_i$. Подстановка $w = y_i z_i$ дает следующее равенство

$$p_i(w) = p_i(y_i\alpha_{ik}) + \beta_{ik}(w - y_i\alpha_{ik}),$$

где $w \in \mathcal{S}_k(y_i\alpha^i)$, $k = 1, \ldots, K_i$. Покажем, что это равенство выполняется для функции p_i и на интервале $(y_i\alpha_{iK_i+1}, +\infty)$. Если $i \in \mathcal{I}_1$, то этот интервал является пустым. Пусть $i \in \mathcal{I}_2$. Так как для $z_i > \alpha_{iK_i+1}$ справедливо неравенство $Q_i(z_i) < Q_i(\alpha_{iK_i+1})$, то $p_i(y_i z_i)$ достигается на оптимальном решении $z_i^* = \alpha_{iK_i+1}$. Следовательно, для $w \geq y_i\alpha_{iK_i+1}$ имеем $p_i(w) = p_i(y_i\alpha_{iK_i+1})$. Тогда при $w \geq y_i\alpha_{iK_i+1}$ верно равенство

$$p_i(w) = p_i(y_i\alpha_{iK_i+1}) + \beta_{iK_i+1}(w - y_i\alpha_{iK_i+1}).$$

Это означает, что $p_i = \mathcal{P}[(y_i\alpha_{i1}, \beta_{i1}), \ldots, (y_i\alpha_{ik}, \beta_{ik}), \ldots, (y_i\alpha_{iK_i+1}, \beta_{iK_i+1})]$. Лемма 3 доказана.

Обозначим через p_y^* функцию возмущения следующей задачи

$$\max\{p_1(w_1) + \ldots + p_m(w_m) \mid w_i \in R, w_i \geq 0, w_1 + \ldots + w_m = w\}. \tag{2.8}$$

Если $y_i = 0$, то будем считать, что на интервале $[0, +\infty)$ функция p_i тождественно равна 0. Упорядочим по убыванию положительные угловые коэффициенты всех функций p_i, для которых $y_i > 0$,

$$\beta_{i(1)k(1)} > \beta_{i(2)k(2)} > \ldots > \beta_{i(K_y)k(K_y)} > 0, \tag{2.9}$$

где $K_y = \sum_{i:y_i>0} K_i$. Определим номер K_u следующим образом. Если среди функций p_i, для которых $y_i > 0$, есть неограниченные функции на интервале $[0, +\infty)$, то положим K_u равным наименьшему l такому, что $y_{i(l)} > 0, i(l) \in \mathcal{I}_1$ и $k(l) = K_{i(l)}$. Если все функции p_i, для которых $y_i > 0$, являются ограниченными, то положим $K_u = K_y$. Введем величины $\gamma_1, \ldots, \gamma_{K_u}$ такие, что $0 = \gamma_1 < \ldots < \gamma_{K_u}$, и при любом $l, 1 < l \leq K_u$,

$$\gamma_l = \sum_{t=1}^{l-1} y_{i(t)}(\alpha_{i(t)k(t)+1} - \alpha_{i(t)k(t)}),$$

и дополнительный узел

$$\gamma_{K_u+1} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \mathcal{I}_1 \neq \emptyset; \\ \sum_{t=1}^{K_u} y_{i(t)}(\alpha_{i(t)k(t)+1} - \alpha_{i(t)k(t)}), & \text{если } \mathcal{I}_1 = \emptyset. \end{cases}$$

Положим $\beta_{i(K_u+1)k(K_u+1)} = 0$.

Для любых $l, 1 \leq l \leq K_u$, и $i, 1 \leq i \leq m$, введем множества $T_i^l = \{t \mid 1 \leq t \leq l-1, i(t) = i\}$. Для каждой пары (i, l), $1 \leq i \leq m, 1 \leq l \leq K_u$, определим функцию $h(i, l) = |T_i^l|$. Из определения множеств T_i^l следует, что величина $h(i, l)$ равна числу отрезков функции Q_i, угловые коэффициенты которых строго больше $\beta_{i(l)k(l)}$. Обозначим через $\alpha_l, 1 \leq l \leq K_u$, вектор с компонентами $\alpha_{ih(i,l)+1}$. Если $\mathcal{I}_1 = \emptyset$, то при каждом i введем множества $T_i^{K_u+1}$. Положим $h(i, K_u + 1) = |T_i^{K_u+1}|$. Теперь в качестве α_{K_u+1} возьмем вектор с компонентами $\alpha_{ih(i,K_u+1)}$, $i \in I$.

Лемма 4 *Если величина γ_{l+1} конечна, то справедливо равенство $\gamma_l = \alpha_l y$ и все компоненты векторов α_l и α_{l+1}, за исключением компоненты с номером $i(l)$, совпадают.*

Доказательство. Из определения величины γ_l и множеств T_i^l следует, что

$$\gamma_l = \sum_{i=1}^{m} \sum_{t \in T_i^l} y_{i(t)} \big(\alpha_{i(t)k(t)+1} - \alpha_{i(t)k(t)} \big).$$

Так как $\{k(t) \mid t \in T_i^l\} = \{1, \ldots, h(i,l)\}$, то

$$\gamma_l = \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{h(i,l)} y_i (\alpha_{is+1} - \alpha_{is}).$$

Из равенств $\sum\limits_{s=1}^{h(i,l)} y_i(\alpha_{is+1} - \alpha_{is}) = y_i \alpha_{ih(i,l)+1}$, $1 \le i \le m$, следует, что

$$\gamma_l = \sum_{i=1}^{m} y_i \alpha_{ih(i,l)+1} = \alpha_l y.$$

По условию величина γ_{l+1} конечна. Тогда из определения следует, что

$$\gamma_{l+1} = \gamma_l + y_{i(l)} \big(\alpha_{i(l)k(l)+1} - \alpha_{i(l)k(l)} \big).$$

Теперь из равенств $T_i^{l+1} = T_i^l$ при $i \neq i(l)$ и $T_{i(l)}^{l+1} = T_{i(l)}^l \cup \{l\}$ следует требуемое утверждение. Лемма 4 доказана.

Пусть γ – вектор с компонентами $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{K_u+1} \le +\infty$ и e^i единичные орты пространства R^m. Обозначим через $\alpha_r(y)$ вектор с компонентами $y_i \alpha_{ih(i,r)+1}$, $i \in I$.

Лемма 5 *Функция p_y^* является возрастающей на интервале $\mathcal{S}(\gamma)$ и*

$$p_y^* = \mathcal{P}[(\gamma_1, \beta_{i(1)k(1)}), \ldots, (\gamma_{K_u}, \beta_{i(K_u)k(K_u)}), (\gamma_{K_u+1}, \beta_{i(K_u+1)k(K_u+1)})].$$

Для любого $w \in \mathcal{S}(\gamma)$ в задаче (2.8) существует единственное оптимальное решение.

Доказательство. Из определения функции p_y^* следует, что ее подграфик G^* равен сумме подграфиков G_i функций p_i. Так как множества

G_i являются выпуклыми многогранными, то подграфик функции p_y^* — выпуклое многогранное множество. Следовательно, $p_y^* \in \mathcal{P}$.

Покажем, что на интервале $\mathcal{S}(\gamma)$ функция p_y^* является возрастающей и для каждого $w \in \mathcal{S}(\gamma)$ в задаче (2.8) существует единственное оптимальное решение. Пусть $r \leq K_u$ – первый номер, для которого справедливо включение $w \in \mathcal{S}_r(\gamma)$. Тогда из леммы 4 следует, что вектор

$$\mathcal{W} = \alpha_r(y) + e^{i(r)}(w - \alpha_r y) \tag{2.10}$$

удовлетворяет равенству $\sum\limits_{i \in I} \mathcal{W}_i = w$.

Индукцией по r докажем, что на интервале $[\gamma_1, \gamma_r]$

$$p_y^* \in \mathcal{P}[(\gamma_1, \beta_{i(1)k(1)}), \ldots, (\gamma_{r-1}, \beta_{i(r-1)k(r-1)})]$$

и вектор $\mathcal{W}$, который вычисляется с помощью равенства (2.10), является оптимальным решением задачи (2.8).

При $r = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение выполняется при $r \geq 1$. Покажем, что оно верно при $r + 1$. Рассмотрим произвольное w из интервала $\mathcal{S}_r(\gamma)$. Так как $\gamma_r = \alpha_r y = \sum\limits_i y_i \alpha_{ih(i,r)+1}$, то, вводя переменные $\delta w_i = w_i - y_i \alpha_{ih(i,r)+1}$, представим задачу (2.8) в эквивалентном виде:

$$p_y^*(w) = \max \sum_{i \in I} p_i(y_i \alpha_{ih(i,r)+1} + \delta w_i) \tag{2.11}$$

$$\sum_{i \in I} \delta w_i = w - \gamma_r, \tag{2.12}$$

$$\delta w_i \geq -y_i \alpha_{ih(i,r)+1}, 1 \leq i \leq m. \tag{2.13}$$

Пусть δw^* — оптимальное решение задачи (2.11)–(2.13). Покажем, что $\delta w^* \geq 0$. Предположим, что для некоторого i_0 выполняется неравенство $\delta w_{i_0}^* < 0$. Из равенства (2.12) следует, что найдется i_1 такое, что $\delta w^*_{i_1} > 0$. Очевидно, что $y_{i_0} > 0$ и $y_{i_1} > 0$. Тогда из леммы 3 следует, что для функции p_{i_0} найдется интервал $\mathcal{S}_{k_0}(y_{i_0}\alpha^{i_0})$, содержащий $w'_{i_0} = y_{i_0}\alpha_{i_0h(i_0,r)+1} + \delta w^*_{i_0}$, на котором выполняется равенство

$$p_{i_0}(w'_{i_0}) = p_i(y_{i_0}\alpha_{i_0k_0}) + \beta_{i_0k_0}(w'_{i_0} - y_{i_0}\alpha_{i_0k_0}). \tag{2.14}$$

Аналогично для функции p_{i_1} найдется интервал $\mathcal{S}_{k_1}(y_{i_1}\alpha^{i_1})$, содержащий $w'_{i_1} = y_{i_1}\alpha_{i_1h(i_1,r)+1} + \delta w^*_{i_1}$, на котором выполняется равенство

$$p_{i_1}(w'_{i_1}) = p_i(y_{i_1}\alpha_{i_1k_1}) + \beta_{i_1k_1}(w'_{i_1} - y_{i_1}\alpha_{i_1k_1}). \tag{2.15}$$

Так как $\delta w^*_{i_0} < 0$, то для некоторого $t_0 \in T^r_{i_0}$ справедливо равенство $\beta_{i_0k_0} = \beta_{i(t_0)k(t_0)}$. Вместе с тем из неравенства $\delta w^*_{i_1} > 0$ следует, что если $\beta_{i_1k_1} = \beta_{i(t_1)k(t_1)}$, то $t_1 \notin T^r_{i_1}$. Поэтому $\beta_{i_0k_0} > \beta_{i(r)k(r)} \geq \beta_{i_1k_1}$.

Пусть $\delta_{i_0} = y_{i_0}\alpha_{i_0k_0+1} - w'_{i_0}$ и $\delta_{i_1} = w'_{i_1} - y_{i_1}\alpha_{i_1k_1}$. Без ограничения общности можно считать, что величины w'_{i_0} и w'_{i_1} лежат внутри соответствующих интервалов. Поэтому $\delta_{i_0} > 0$ и $\delta_{i_1} > 0$. Пусть $\delta = \min\{\delta_{i_0}, \delta_{i_1}\}$. Положим $\overline{\delta w_{i_0}} = \delta w^*_{i_0} + \delta, \overline{\delta w_{i_1}} = \delta w^*_{i_1} - \delta$ и $\overline{\delta w_i} = \delta w^*_i$ при $i \neq i_0, i_1$. Вектор $\overline{\delta w}$ является допустимым решением задачи (2.11)–(2.13).

Заметим, что $y_{i_0}\alpha_{i_0h(i_0,r)+1} + \overline{\delta w_{i_0}} = w'_{i_0} + \delta$ и $y_{i_1}\alpha_{i_1h(i_1,r)+1} + \overline{\delta w_{i_1}} = w'_{i_1} - \delta$. Так как $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то $w'_{i_0} + \delta \in \mathcal{S}_{k_0}(y_{i_0}\alpha^{i_0})$ и $w'_{i_1} - \delta \in \mathcal{S}_{k_1}(y_{i_1}\alpha^{i_1})$. Тогда из равенств (2.14), (2.15) и неравенства $\beta_{i_0k_0} > \beta_{i_1k_1}$ следует, что

$$\sum_{i\in I} p_i(y_i\alpha_{ih(i,r)+1} + \overline{\delta w_i}) - \sum_{i\in I} p_i(y_i\alpha_{ih(i,r)+1} + \delta w^*_i) =$$

$$= p_{i_0}(w'_{i_0} + \delta) + p_{i_1}(w'_{i_1} - \delta) - p_{i_0}(w'_{i_0}) - p_{i_1}(w'_{i_1}) = \delta(\beta_{i_0k_0} - \beta_{i_1k_1}) > 0,$$

что противоречит оптимальности вектора δw^*. Следовательно, в оптимальном решении задачи (2.11)–(2.13) не может быть отрицательных переменных δw_i.

Теперь рассмотрим угловые коэффициенты β_{ik_i} линейных отрезков функций p_i, выходящих из точек $(y_i\alpha_{ih(i,r)+1}, p_i(y_i\alpha_{ih(i,r)+1}))$, $i \neq i(r)$. Так как $w \in \mathcal{S}_r(\gamma)$, то при любом $i \neq i(r)$ имеем $\beta_{i(r)k(r)} > \beta_{ik_i}$. Тогда повторяя рассуждения из доказательства неравенства $\delta w^* \geq 0$, получаем, что в оптимальном решении $\delta w_i^* = 0$ при $i \neq i(r)$ и $\delta w_{i(r)}^* = w - \gamma_r$. Так как $w - \gamma_r \leq y_i(\alpha_{ih(i,r)+2} - \alpha_{ih(i,r)+1})$, то согласно лемме 1 имеем, что

$$p_y^*(w) = \sum_{i \in I} p_i(y_i\alpha_{ih(i,r)+1}) + \beta_{i(r)k(r)}(w - \gamma_r).$$

Из равенства (2.10) следует, что при $w = \gamma_r$ соответствующий вектор $\mathcal{W}$ равен $\alpha_r(y)$. Тогда из индуктивного предположения следует, что $\sum\limits_{i \in I} p_i(y_i\alpha_{ih(i,r)+1}) = p_y^*(\gamma_r)$. Таким образом, справедливо равенство

$$p_y^*(w) = p_y^*(\gamma_r) + \beta_{i(r)k(r)}(w - \gamma_r). \tag{2.16}$$

Поэтому, $p_y^* \in \mathcal{P}[(\gamma_1, \beta_{i(1)k(1)}), \ldots, (\gamma_r, \beta_{i(r)k(r)})]$ и вектор $\mathcal{W} = \alpha_r(y) + e^{i(r)}(w - \alpha_r y)$ – единственное оптимальное решение задачи (2.8). Так как $\beta_{i(r)k(r)} > 0$, то из индуктивного предположения и равенства (2.16) следует, что на интервале $[\gamma_1, \gamma_{r+1}]$ функция p_y^* является возрастающей. Поэтому на интервале $\mathcal{S}(\gamma)$ функция p_y^* является возрастающей и в задаче (2.8) для каждого $w \in \mathcal{S}(\gamma)$ существует единственное оптимальное решение. Для завершения доказательства осталось рассмотреть интервал $(\gamma_{K_u+1}, +\infty)$. Если среди функций p_i, соответствующих ненулевым y_i, есть неограниченные функции, то рассматриваемый интервал является пустым (рис. 2.3). Предположим, что $\gamma_{K_u+1} < +\infty$. Как уже доказано выше, в оптимальном решении задачи (2.11)–(2.13) не может быть отрицательных переменных δw_i. Поэтому из леммы 3 следует, что при $w \geq \gamma_{K_u+1}$ значение функции возмущения $p_y^*(w)$ задачи (2.8) постоянно и равно $p_y^*(\gamma_{K_u+1})$.

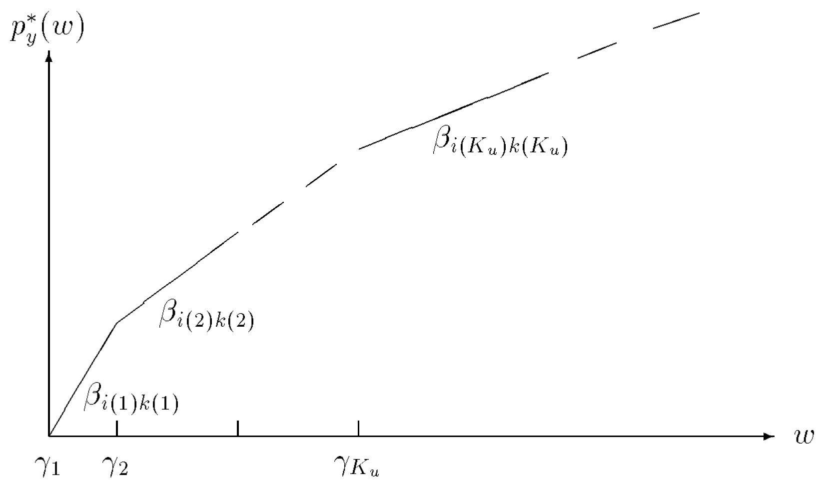

Рис. 2.3: График функции $p_y^* : \mathcal{I}_1 \neq \emptyset$

Учитывая определение величины $\beta_{i(K_u+1)k(K_u+1)}$, получаем равенство (рис. 2.4)

$$p_y^*(w) = p_y^*(\gamma_{K_u+1}) + \beta_{i(K_u+1)k(K_u+1)}(w - \gamma_{K_u+1}).$$

Следовательно,

$$p_y^* = \mathcal{P}[(\gamma_1, \beta_{i(1)k(1)}), \ldots, (\gamma_{K_u}, \beta_{i(K_u)k(K_u)}), (\gamma_{K_u+1}, \beta_{i(K_u+1)k(K_u+1)})].$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6 *Если* $w \geq 0$, *то* $p_y^*(w) = p_y(w)$.

Доказательство. Рассмотрим $w \in \mathcal{S}_r(\gamma), r \leq K_u$. Из леммы 5 следует, что существует оптимальное решение $\mathcal{W}$ задачи (2.8) и $p_y^*(w) = \sum_{i \in I} p_i(\mathcal{W}_i)$. Для ненулевых y_i, как следует из доказательства леммы 3, справедливы равенства $p_i(\mathcal{W}_i) = y_i Q_i(\mathcal{W}_i / y_i)$. Так как $\sum_{i \in I} \mathcal{W}_i = w$, то $p_y(w) \geq p_y^*(w)$.

Предположим, что существует такое оптимальное решение z^* задачи НЗР(y) для данного w, что $yQ(z^*) > p_y^*(w)$ и $yz^* < w$. Из леммы 3 следует, что $p_i(\overline{w_i}) = y_i Q_i(z_i^*)$, где $\overline{w_i} = y_i z_i^*$. Пусть $\overline{w_i} \leq \mathcal{W}_i$ при каждом i. Так как $w \in \mathcal{S}_r(\gamma)$ и $r \le K_u$, то $\mathcal{W}_i \in \mathcal{S}(y_i\alpha_i)$ для каждого номера i. Поэтому если увеличить каждое $\overline{w_i}$ до $\mathcal{W}_i$, то получим неравенство $p_y^*(w) = \sum\limits_{i\in I} p_i(\mathcal{W}_i) \ge \sum\limits_{i\in I} p_i(\overline{w_i}) = yQ(z^*) > p_y^*(w)$. Противоречие. Следовательно, существует номер i такой, что $\overline{w_i} > \mathcal{W}_i$. Множество всех таких номеров обозначим через I_l.

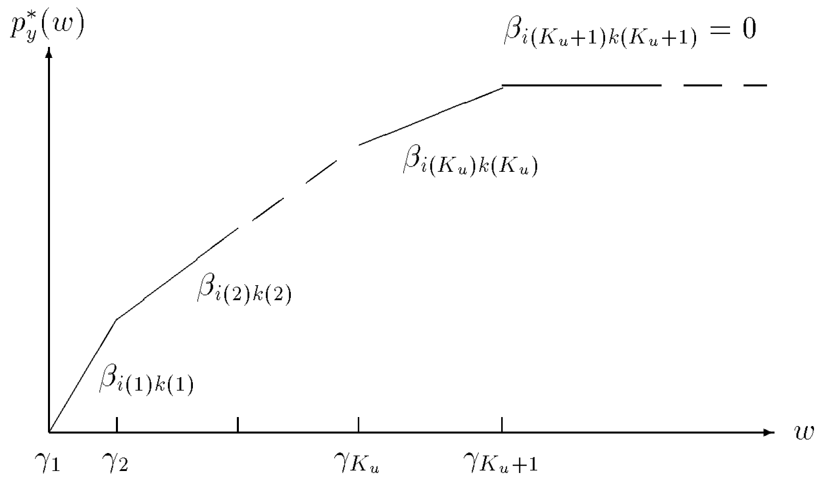

Рис. 2.4: График функции $p_y^* : \mathcal{I}_1 = \emptyset$

По предположению $yz^* < w$, а $\sum\limits_{i\in I} \mathcal{W}_i = w$. Поэтому $I_g = \{i \mid \overline{w_i} < \mathcal{W}_i\} \ne \emptyset$. Так как $\sum\limits_{i\in I} \overline{w_i} < w$, то $\sum\limits_{i\in I_l} \overline{w_i} + \sum\limits_{i\in I_g} \overline{w_i} < \sum\limits_{i\in I_l\cup I_g} \mathcal{W}_i$ и, следовательно, $\sum\limits_{i\in I_l} (\overline{w_i} - \mathcal{W}_i) < \sum\limits_{i\in I_g} (\mathcal{W}_i - \overline{w_i})$. Поэтому

$$w - \sum_{i\in I} \overline{w_i} = \sum_{i\in I_g} (\mathcal{W}_i - \overline{w_i}) - \sum_{i\in I_l} (\overline{w_i} - \mathcal{W}_i) > 0. \qquad (*)$$

Пусть $\delta = w - \sum\limits_{i\in I} \overline{w_i}$. Для $i \in I_g$ выберем такие δw_i, что $\delta w_i \ge 0$, $\sum\limits_{i\in I_g} \delta w_i = \delta$ и $\overline{w_i} + \delta w_i \le \mathcal{W}_i$. Из неравенства $(*)$ следует, что это возможно. При $i \notin I_g$ возьмем $\delta w_i = 0$ и положим $\widetilde{w}_i = \overline{w_i} + \delta w_i$. Очевидно, что $\widetilde{w}$ – допустимое решение задачи (2.8). Так как $r \le K_u$, то при любом i из I_g справедливо включение $\mathcal{W}_i \in \mathcal{S}(y_i\alpha^i)$. Следовательно, $\widetilde{w}_i \in \mathcal{S}(y_i\alpha^i)$ при $i \in I_g$. Поэтому справедливо неравенство $\sum\limits_{i\in I} p_i(\widetilde{w}_i) > \sum\limits_{i\in I} p_i(\overline{w}_i) = yQ(z^*) > p_y^*(w)$. Получили противоречие. Следовательно,

$p_y^*(w) = p_y(w)$ при $w \in \mathcal{S}(\gamma)$. Аналогично доказывается утверждение для w из интервала $(\gamma_{K_u+1}, +\infty)$. Лемма 6 доказана.

2.2.2 Условия оптимальности для задачи НЗР(y)

Предположим,что z – оптимальное решение задачи НЗР(y). Геометрически ему соответствует точка пересечения графика функции p_y с прямой, которая проходит через точку с координатами $(w, 0)$ параллельно оси ординат (рис. 2.5).

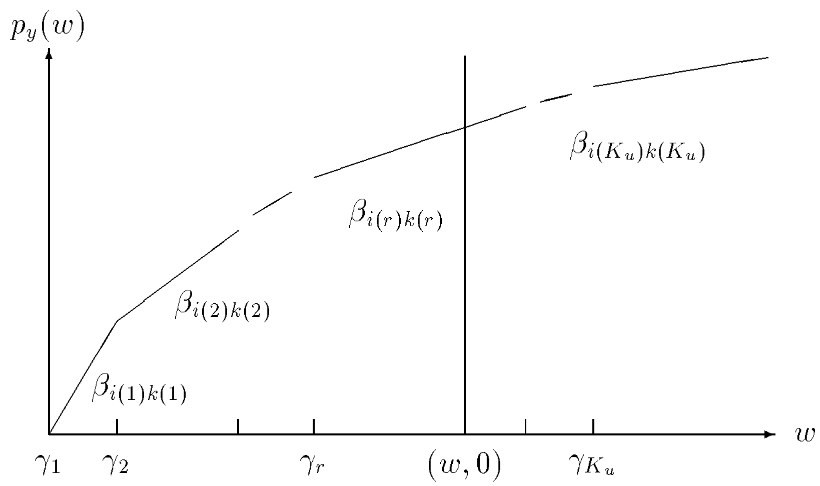

Рис. 2.5: График функции p_y

Пусть эта точка пересечения лежит на отрезке с угловым коэффициентом $\beta_{i(r)k(r)}$. Тогда $y_{i(r)} > 0$. Предположим, что отрезок $\mathcal{S}_r(\gamma)$ конечен. Это означает, что либо $r < K_u$, либо $r = K_u$, но функция $p_{i(r)}$ является ограниченной. Поэтому любой отрезок графика функции $p_y(w)$ с угловым коэффициентом, большим $\beta_{i(r)k(r)}$, также конечен.

Лемма 7 *Если значение функции $p_y(w)$ достигается на конечном интервале $\mathcal{S}_r(\gamma)$, то z – оптимальное решение задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда*

$$z = \alpha_r + e^{i(r)}(w - (\alpha_r, y))/y_{i(r)}, \tag{2.17}$$

$$(\alpha_r, y) \leq w \leq (\alpha_{r+1}, y). \tag{2.18}$$

Доказательство. Действительно, если z – оптимальное решение задачи НЗР(y) для $w \in \mathcal{S}_r(\gamma)$, то из леммы 6 следует, что

$$\sum_{i \in I} y_i Q_i(z_i) = p_y(w) = p_y^*(w) = \sum_{i \in I} p_i(\mathcal{W}_i),$$

где $\mathcal{W}$ – оптимальное решение задачи (2.8). Предположим, что $\sum\limits_{i \in I} y_i z_i = w' < w$. Тогда из леммы 5 следует неравенство $p_y^*(w') < p_y^*(w)$. Учитывая, что $p_y(w') = p_y^*(w')$ и $p_y(w) = p_y(w')$, имеем $p_y(w) = p_y^*(w') < p_y^*(w) = p_y(w)$. Противоречие. Следовательно, $\sum\limits_{i \in I} y_i z_i = w$. Так как $\mathcal{W}$ – единственное оптимальное решение задачи (2.8), то $\mathcal{W} = (y_1 z_1, \ldots, y_m z_m)$. Отсюда и условия $y_{i(r)} > 0$ получаем равенство (2.17). Из леммы 4 и условия $w \in \mathcal{S}_r(\gamma)$ имеем неравенства (2.18).

Теперь предположим, что выполняются соотношения (2.17) и (2.18). Тогда для любого i имеем $y_i z_i \in \mathcal{S}(y_i \alpha^i)$ и по лемме 1 выполняются равенства $p_i(y_i z_i) = y_i Q_i(z_i)$. С другой стороны, из условий (2.17), (2.18) и леммы 5 следует, что вектор $y \cdot z$ – оптимальное решение задачи (2.8). Поэтому, $p_y^*(w) = \sum\limits_{i \in I} p_i(y_i z_i) = \sum\limits_{i \in I} y_i Q_i(z_i)$. Так как $\sum\limits_{i \in I} y_i z_i = w$, то z – допустимое решение задачи НЗР(y). Из леммы 6 следует, что $p_y(w) = p_y^*(w) = \sum\limits_{i \in I} y_i Q_i(z_i)$. Поэтому z — оптимальное решение задачи НЗР(y). Лемма 7 доказана.

Рассмотрим случай, когда отрезок с угловым коэффициентом $\beta_{i(r)k(r)}$ неограничен справа. Для этого необходимо, чтобы $i(r) \in \mathcal{I}_1, k(r) = K_{i(r)}$ и если $\beta_{iK_i} > \beta_{i(r)k(r)}$ при любом $i \in \mathcal{I}_1$, то $y_i = 0$.

Лемма 8 *Если значение функции $p_y(w)$ достигается на неограниченном справа отрезке с угловым коэффициентом $\beta_{i(r)k(r)} > 0$, то z –*

оптимальное решение задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда выполняются равенства (2.17) и

$$\alpha_{K_u} y \leq w. \tag{2.19}$$

Доказательство. Справедливость леммы легко устанавливается с использованием рассуждений, аналогичных тем, которые привели к условиям (2.17), (2.18), если вместо неравенств $\gamma_r \leq w \leq \gamma_{r+1}$ использовать неравенство $\gamma_{K_u} \leq w$. Лемма 8 доказана.

Замечание. Предположим, что все функции Q_i — линейные. Тогда задача НЗР(y) является частным случаем линейной задачи о ранце и ее можно записать в следующем виде:

$$\max_{z \geq 0} \Big\{ \sum_{i \in I} y_i \beta_i z_i \mid \sum_{i \in I} y_i z_i \leq w \Big\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $y > 0$ и $\beta_1 > \ldots > \beta_m > 0$. Тогда $K_u = 1$ и график функции возмущения p_y является лучом, выходящим из точки $\gamma_1 = 0$ с угловым коэффициентом β_1. Поэтому $\alpha_1 = 0$ и, следовательно, условия оптимальности леммы 8 эквивалентны условиям $z = e^1 w / y_1, w \geq 0$. Таким образом, для линейных функций Q_i лемма 6 приводит к классическим условиям оптимальности для задачи о ранце с непрерывными переменными [75].

Предположим, что $y_i = 0$ при любом $i \in \mathcal{I}_1$. Тогда справедлива следующая

Лемма 9 *Если значение функции $p_y(w)$ достигается на отрезке с нулевым угловым коэффициентом, то z – оптимальное решение задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда $z = \alpha_{K_u+1}$ и $\alpha_{K_u+1} y \leq w$.*

Доказательство. По условию, если $y_i > 0$, то $i \in \mathcal{I}_2$. Поэтому если $z_i > \alpha_{iK_i+1}$, то $Q_i(z_i) < Q_i(\alpha_{iK_i+1})$. Следовательно, z – оптимальное решение задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда $z = \alpha_{K_u+1}$ и $\alpha_{K_u+1} y \leq w$. Лемма 9 доказана.

2.2.3 Декомпозиция и полиномиальная разрешимость задачи

Упорядочим угловые коэффициенты $\beta_{ik}, i \in I, 1 \leq k \leq K_i$:

$$\beta_{i(1)k(1)} > \beta_{i(2)k(2)} > \ldots > \beta_{i(L)k(L)} > 0, \tag{2.20}$$

где $L = \sum\limits_{i \in I} K_i$ – общее число линейных сегментов с положительными угловыми коэффициентами. Пусть $\beta_{i(L+1)k(L+1)} = 0$.

Множество допустимых решений задачи ДНП представим в виде объединения подмножеств: $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_L, \Pi_{L+1}$. Если $y = 0$, то допустимое решение (x, y, z) задачи (2.1)–(2.6) принадлежит множеству Π_0. Если $y \neq 0$ и значение функции $p_y(w)$ достигается на отрезке с угловым коэффициентом $\beta_{i(r)k(r)}$, где $r \neq L + 1$ – номер, определяемый упорядочением (2.20), то допустимое решение принадлежит множеству Π_r. Все оставшиеся допустимые решения, если они есть, принадлежат множеству Π_{L+1}. Условия оптимальности, найденные в предыдущем пункте, позволяют свести задачу ДНП на любом из этих подмножеств к соответствующей задаче линейного программирования.

Теорема 5 *Для любой невырожденной задачи (2.1)–(2.6) существует полиномиальный алгоритм, который либо находит оптимальное решение, либо позволяет установить, что задача неограничена или не имеет допустимых решений.*

Доказательство. Пусть $(x, y, z) \in \Pi_0$. Тогда любой вектор $z \geq 0$ – оптимальное решение задачи НЗР(0). Если $(x, 0, z)$ – оптимальное решение задачи ДНП на подмножестве Π_0, то x – оптимальное решение следующей задачи P_0: найти

$$\min_{x \geq 0} cx$$

при условии, что

$$Cx \geq b.$$

Аналогично, если x – оптимальное решение задачи P_0, то $(x, 0, z)$ – оптимальное решение задачи ДНП на рассматриваемом подмножестве при любом $z \geq 0$ и значения целевых функций на данных решениях совпадают.

1. Рассмотрим множество допустимых решений Π_r таких, что значение функции $p_y(w)$ достигается на конечном отрезке с угловым коэффициентом $\beta_{i(r)k(r)}$. Тогда если $i(r) \in \mathcal{I}_1$, то $k(r) < K_i$. Очевидно, что $y_{i(r)} > 0$ для любого допустимого решения (x, y, z) из этого множества. Из определения допустимого решения для задачи ДНП и леммы 7 следует, что вектор (x, y, z) — допустимое решение тогда и только тогда, когда выполняются ограничения (2.2) и соотношения (2.17), (2.18). Чтобы упростить обозначения, предположим, что рассматриваемый отрезок в локальной нумерации (2.9), связанной с y, имеет тот же самый номер r.

Из леммы 4 следует, что неравенства (2.18) эквивалентны неравенствам $\alpha_{i(r)k(r)} < z_{i(r)} \leq \alpha_{i(r)k(r)+1.}$ Тогда из равенств (2.7) и (2.17) получаем

$$Q_{i(r)}(z_{i(r)}) = Q_{i(r)}(\alpha_{i(r)h(i(r),r)}) + \beta_{i(r)k(r)}(w - \alpha_r y)/y_{i(r)}.$$

Следовательно,

$$Q_{i(r)}(z_{i(r)})y_{i(r)} = Q_{i(r)}(\alpha_{i(r)h(i(r),r)})y_{i(r)} + \beta_{i(r)k(r)}(w - \alpha_r y).$$

Используя равенства (2.17) и последнее равенство и исключая переменные z из ограничений (2.2), получаем

$$Cx + (D(\alpha_r) - D^*(\alpha_r))y \geq b^*, \tag{2.21}$$

где $D^*(z)$ – функциональная матрица вида $(\beta_{i(r)k(r)} d^2_{si(r)} z_i)$, b^* – вектор с компонентами $(b_s - \beta_{i(r)k(r)} w d^2_{si(r)})$.

Пусть $H(i,l)$ – число сегментов функции Q_i, угловые коэффициенты которых строго больше $\beta_{i(l)k(l)}$, $1 \leq l \leq L+1$. Обозначим через $\mathcal{A}_l$ вектор с компонентами $\alpha_{iH(i,l)+1}$ для всех i, а через $I(l)$ множество номеров i из $\mathcal{I}_1$ таких, что $\beta_{iK_i} > \beta_{i(l)k(l)}$, $1 \leq l \leq L+1$.

Лемма 10 *Если вектор (x,y,z) является допустимым решением из множества Π_r, то вектор (x,y) удовлетворяет следующей системе ограничений:*

$$Cx + (D(\mathcal{A}_r) - D^*(\mathcal{A}_r))y \geq b^*, \tag{2.22}$$

$$\mathcal{A}_r y \leq w \leq \mathcal{A}_{r+1} y, \tag{2.23}$$

$$y_i = 0, i \in I(r), \tag{2.24}$$

$$y_{i(r)} > 0, \tag{2.25}$$

$$x, y \geq 0. \tag{2.26}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное допустимое решение (x,y,z) из множества Π_r. Чтобы доказать, что вектор (x,y) — допустимое решение системы ограничений (2.22)–(2.26), достаточно сравнить значения функций h и H при всех (i,r), где $i \in I$. Функция h вычисляется с использованием локального упорядочения (2.9), которое нумерует угловые коэффициенты функций Q_i, соответствующих ненулевым y_i, в порядке убывания. Глобальное упорядочение (2.20) также нумерует угловые коэффициенты в порядке убывания, но уже для всех функций Q_i. Поэтому если $y_i > 0$, то значения $h(i,r)$ и $H(i,r)$ должны совпадать и, следовательно, могут различаться только в случае $y_i = 0$. Отсюда получаем

$$D(\alpha_r)y = D(\mathcal{A}_r)y, D^*(\alpha_r)y = D^*(\mathcal{A}_r)y \text{ и } \alpha_r y = \mathcal{A}_r y, \alpha_{r+1}y = \mathcal{A}_{r+1}y. \tag{2.27}$$

Следовательно, неравенства (2.22), (2.23) справедливы.

Предположим, что $i \in I(r)$ и $y_i > 0$. Тогда, как и в лемме 3, найдется допустимое решение задачи НЗР(y) с большим значением целевой функции, чем на оптимальном решении леммы 7. Противоречие. Следовательно, должны выполняться ограничения (2.24). Неравенство (2.25) вытекает из определения множества Π_r. Лемма 10 доказана.

Лемма 11 *Если неотрицательный вектор (x,y) удовлетворяет системе ограничений (2.22)–(2.26), то существует оптимальное решение z задачи НЗР(y) такое, что вектор (x,y,z) является допустимым решением из множества Π_r.*

Доказательство. Из ограничения (2.25) следует, что $y_{i(r)} > 0$. Поэтому значения $h(i(r),r)$ и $H(i(r),r)$ совпадают. Таким образом, выполняются равенства (2.27). Тогда из ограничений (2.22), (2.23) следуют ограничения (2.21) и (2.18). Учитывая, что $y_{i(r)} > 0$ и выполняются неравенства (

Из леммы 10 следует, что если вектор (x,y,z) является допустимым решением из множества Π_r, то пара (x,y) – допустимое решение следующей оптимизационной задачи P_r:

$$\min_{x,y\geq 0}(cx+dy)$$

$$Cx + (D(\mathcal{A}_r) - D^*(\mathcal{A}_r))y \geq b^*,$$

$$\mathcal{A}_r y \le w \le \mathcal{A}_{r+1} y,$$

$$y_i = 0, i \in I(r),$$

$$y_{i(r)} > 0.$$

В свою очередь, если (x, y) — допустимое решение задачи P_r и вектор z вычисляется с помощью соотношений (2.17), то из леммы 11 следует, что вектор (x, y, z) является допустимым решением из множества Π_r.

2. Рассмотрим случай, когда отрезок с угловым коэффициентом $\beta_{i(r)k(r)}$ неограничен справа. Из леммы 8 следует, что оптимальное решение задачи удовлетворяет равенствам (2.17) и условию $\alpha_r y \le w$. Как и ранее, исключая переменные z, получим оптимизационную задачу P_r, в которой вместо двустороннего ограничения используется ограничение вида $\mathcal{A}_r y \le w$.

3. Рассмотрим последний случай, когда отрезок неограничен справа и его угловой коэффициент равен нулю. Для этого необходимо, чтобы $y_i = 0$ при любом $i \in \mathcal{I}_1$. Тогда по лемме 9 при любом $w \ge \gamma_{K_u+1}$ оптимальное решение задачи НЗР(y) имеет вид $z = \alpha_{K_u+1}$. Из (2.27) следует, что $D(\alpha_{K_u+1})y = D(\mathcal{A}_{L+1})y$ и $\alpha_{K_u+1}y = \mathcal{A}_{L+1}y$. Поэтому, исключая переменные z, получаем оптимизационную задачу P_{L+1}:

$$\min_{x,y \ge 0}(cx + dy)$$

$$Cx + D(\mathcal{A}_{L+1})y \ge b,$$

$$\mathcal{A}_{L+1} y \le w,$$

$$y_i = 0, i \in \mathcal{I}_1.$$

Заметим, что функционал задачи (2.1)–(2.6) не зависит от переменных внутренней задачи (2.4)–(2.6). Поэтому если $(x, y, z) \in \Pi_r$, то в каждом случае 1–3 (x, y) — допустимое решение задачи P_r, и значения целевых функций на этих решениях совпадают. Верно и обратное утверждение: если (x, y) — допустимое решение задачи P_r, то $(x, y, z) \in \Pi_r$, где z вычисляется с помощью одной из лемм 7–9, и значения целевых функций на этих решениях также совпадают.

Таким образом, если в задаче (2.1)–(2.6) существует оптимальное решение, то среди задач $\mathrm{P}_k, 0 \leq k \leq L+1$, найдутся разрешимые. Заметим, что в рассматриваемом случае могут быть недопустимые задачи P_k, но не может быть неограниченных снизу задач. В этом случае исходная задача сводится к нахождению такого оптимального решения задач P_k, которое является наименьшим относительно функционала.

Так как все задачи P_k, $k = 0, 1, \ldots, L+1$, являются задачами линейного программирования, то они могут быть решены точно с помощью стандартных полиномиальных алгоритмов [29]. Теорема 5 доказана.

2.3 Вырожденный случай

Предположим, что величины β_{ik}, где $i \in I$ и $k \in [1, K_i]$, положительны, но, вообще говоря, не являются попарно различными. В этом случае задача ДНП может оказаться вырожденной. Ниже предлагается модификация подхода, который оказался успешным в невырожденном случае, для этой более общей ситуации.

2.3.1 Функция возмущения задачи НЗР(y)

Без ограничения общности можно считать, что при любом $i \in I$ величины β_{ik} попарно различны. Действительно, если $\beta_{ik} = \beta_{ik+1} = \cdots = \beta_{ik+l}$, то из определения функции Q_i следует, что этим величинам соответствуют узлы $\alpha_{ik} < \alpha_{ik+1} < \alpha_{ik+2} < \cdots < \alpha_{ik+l} < \alpha_{ik+l+1}, 1 \leq k < k+l+1 \leq \overline{K}$, где $\overline{K} = K_i$, если $i \in \mathcal{I}_1$, и $\overline{K} = K_i + 1$, если $i \in \mathcal{I}_2$. Удалим промежуточные узлы $\alpha_{ik+1}, \alpha_{ik+2}, \ldots, \alpha_{ik+l}$. Тогда отрезку с угловым коэффициентом β_{ik} будет соответствовать пара узлов $\alpha_{ik}, \alpha_{ik+l+1}$. Осталось перенумеровать величины β_{ik} и α_{ik}. Следовательно, для функций $p_1, \ldots, p_m$ справедлива лемма 3.

Разобьем множество $L = \{(i,k) \mid i \in I, k \in [1, K_i]\}$ на такие непересекающиеся подмножества $L_t, t = 1, \ldots, T$, чтобы величины β_{ik} совпадали друг с другом, если они попадают в одно подмножество, и отличались бы друг от друга в противном случае. Общее значение величин β_{ik} из множества L_t обозначим через $\beta_t, t = 1, \ldots T$. Пусть I_t – множество всех номеров i таких, что для некоторого k пара (i,k) принадлежит множеству L_t.

Пусть $y \geq 0$ и $y \neq 0$. Рассмотрим множество $L^y = \{(i,k) \mid (i,k) \in L, y_i > 0\}$. Аналогично определяются множества $L_t^y, I_t^y, t = 1, \ldots, T$. Упорядочим по убыванию величины β_t, которые соответствуют непустым множествам L_t^y :

$$\beta_{t(1)} > \beta_{t(2)} > \ldots > \beta_{t(T_y)} > 0. \qquad (2.28)$$

Определим номер K_u следующим образом. Если среди функций p_i, для которых $y_i > 0$, есть неограниченные на интервале $[0, +\infty)$, то в качестве K_u возьмем наименьшее l, для которого найдется $(i,k) \in L_{t(l)}^y$ такое, что $i \in \mathcal{I}_1$ и $k = K_i$. Если все функции p_i, для которых $y_i > 0$, являются ограниченными, то положим $K_u = T_y$. Введем величины $\gamma_1, \ldots, \gamma_{K_u}$ такие, что $0 = \gamma_1 < \ldots < \gamma_{K_u}$ и при любом $l, 1 < l \leq K_u$,

$$\gamma_l = \sum_{s=1}^{l-1} \sum_{(i,k) \in L_{t(s)}^y} y_i(\alpha_{ik+1} - \alpha_{ik}),$$

и дополнительный узел

$$\gamma_{T_y+1} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \mathcal{I}_1 \neq \emptyset; \\ \sum\limits_{s=1}^{T_y} \sum\limits_{(i,k)\in L^y_{t(s)}} y_i(\alpha_{ik+1} - \alpha_{ik}), & \text{если } \mathcal{I}_1 = \emptyset. \end{cases}$$

Положим $\beta_{i(K_u+1)k(K_u+1)} = 0$.

При любом $l, 1 \leq l \leq K_u$, введем множества $T^l_i = \{(i,k) \mid (i,k) \in L^y_{t(s)}, 1 \leq s \leq l-1\}, 1 \leq i \leq m$. Положим $h(i,l) = |T^l_i|$. Как и в невырожденном случае, с помощью функции $h(i,l)$ определим векторы $\alpha_l, 1 \leq l \leq K_u$. Если $\mathcal{I}_1 = \emptyset$, то введем множества $T_i^{K_u+1}$ для всех i. Положим $h(i, K_u+1) = |T_i^{K_u+1}|$. Теперь в качестве α_{K_u+1} возьмем вектор с компонентами $\alpha_{ih(i,K_u+1)}$, где $i \in I$. Пусть γ – вектор с компонентами $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{K_u+1} \leq +\infty$.

Замечания

1. Предположим, что $\gamma_{l+1} < +\infty$. Тогда, следуя доказательству леммы 4, для узла с номером l получаем $\gamma_l = \alpha_l y$. Так как

$$\gamma_{l+1} = \gamma_l + \sum_{(i,k)\in L^y_{t(l)}} y_i(\alpha_{ik+1} - \alpha_{ik}),$$

то справедливы равенства

$$T_i^{l+1} = T_i^l \text{ при } i \notin I_l^y \text{ и } T_i^{l+1} = T_i^l \cup \{(i,k) \mid (i,k) \in L^y_{t(l)}\} \text{ при } i \in I_l^y.$$

Следовательно, все компоненты векторов α_l и α_{l+1} совпадают, кроме компонент с номерами из множества $I_l^y, l < K_u$.

2. В вырожденном случае строгая монотонность функции p_y^* на интервале $\mathcal{S}(\gamma)$ сохраняется. Однако для $w \notin \{\gamma_1, \ldots, \gamma_{K_u+1}\}$ может существовать бесконечно много оптимальных решений в задаче НЗР(y). Пусть $r \leq K_u$ —- первый номер такой, что справедливо включение $w \in \mathcal{S}_r(\gamma)$. Рассматривая задачу (2.11)–(2.13), как при доказательстве

леммы 5 убеждаемся в том, что в оптимальном решении не может быть отрицательных переменных δw_i. Более того, для оптимальности решения также необходимо выполнение неравенств $0 \leq \delta w_i \leq y_i(\alpha_{ih(i,r)+2} - \alpha_{ih(i,r)+1})$ при всех $i \in I_r^y$. Последнее утверждение обосновывается практически так же, как и предыдущее. Тогда любое оптимальное решение задачи может быть записано в следующем виде:

$$\mathcal{W} = \alpha_r(y) + \sum_{i \in I_r^y} \delta w_i e^i, \tag{2.29}$$

где δw_i — решение системы ограничений

$$\sum_{i \in I_r^y} \delta w_i = w - \gamma_r, 0 \leq \delta w_i \leq y_i(\alpha_{ih(i,r)+2} - \alpha_{ih(i,r)+1}). \tag{2.30}$$

Далее, используя схему доказательства леммы 5, получаем равенство

$$p_y^*(w) = p_y^*(\gamma_r) + \beta_{t(r)}(w - \gamma_r),$$

из которого следует, что в силу условия (2.28) на интервале $\mathcal{S}(\gamma)$ функция p_y^* является возрастающей. Случай $r = K_u + 1$ рассматривается аналогично. Таким образом справедливо равенство $p_y^* = \mathcal{P}[(\gamma_1, \beta_{t(1)}), \ldots, (\gamma_{K_u}, \beta_{t(K_u)}), (\gamma_{K_u+1}, \beta_{t(K_u+1)})]$.

3. При доказательстве леммы 6 не использовалась единственность решения (2.10). Поэтому и в вырожденном случае для любого $w \geq 0$ справедливо равенство $p_y^*(w) = p_y(w)$.

4. Пусть значение функции $p_y(w)$ достигается на интервале $\mathcal{S}_r(\gamma)$, где $r \leq K_u$ и $\gamma_r \leq w$. Тогда из замечаний 2 и 3 следует, что z – оптимальное решение задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда существует оптимальное решение $\mathcal{W}$ задачи (2.8) такое, что $\mathcal{W} = (y_1 z_1, \ldots, y_m z_m)$. Учитывая соотношения (2.29)–(2.30) и условие $\gamma_r \leq w \leq \gamma_{r+1}$, получаем, что z – оптимальное решение задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда

$$(y_1 z_1, \ldots, y_m z_m) = \alpha_r(y) + \sum_{i \in I_r^y} \delta w_i e^i, \tag{2.31}$$

$$\sum_{i \in I_r^y} \delta w_i = w - \alpha_r y, \tag{2.32}$$

$$\alpha_r y < w \leq \alpha_{r+1} y \tag{2.33}$$

$$0 \leq \delta w_i \leq y_i(\alpha_{ih(i,r)+2} - \alpha_{ih(i,r)+1}), i \in I_r^y. \tag{2.34}$$

5. Предположим, что значение функции $p_y(w)$ достигается на неограниченном справа отрезке с угловым коэффициентом $\beta_{t(r)} > 0$. Это означает, что $r = K_u, \gamma_{r+1} = +\infty$ и $I_r^y \cap \mathcal{I}_1 \neq \emptyset$. В этом случае z – оптимальное решение задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда выполняются равенства (2.31), (2.32) и неравенства

$$\alpha_r y \leq w, \tag{2.35}$$

$$0 \leq \delta w_i \leq y_i(\alpha_{ih(i,r)+2} - \alpha_{ih(i,r)+1}), i \in I_r^y \setminus \mathcal{I}_1, \tag{2.36}$$

$$0 \leq \delta w_i, i \in I_r^y \cap \mathcal{I}_1. \tag{2.37}$$

6. Нетрудно проверить, что если значение функции $p_y(w)$ достигается на отрезке с нулевым угловым коэффициентом, то, как и в невырожденном случае, z является оптимальным решением задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда $z = \alpha_{K_u+1}$ и $\alpha_{K_u+1} y \leq w$.

2.3.2 Декомпозиция и полиномиальная разрешимость задачи

Так как величины $\beta_t, 1 \leq t \leq T$, попарно различны, то можно предполагать, что

$$\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_T > 0. \tag{2.38}$$

Предположим, что $\beta_{T+1} = 0$. Пусть $H(i,l)$ – число сегментов функции Q_i, угловые коэффициенты которых строго больше β_l, $1 \leq l \leq T+1$. Обозначим через $\mathcal{A}_l$ вектор с компонентами $\alpha_{iH(i,l)+1}$ для всех i, а через $I(l)$ — множество $i \in \mathcal{I}_1$ таких, что $\beta_{iK_i} > \beta_l$, $1 \leq l \leq T+1$.

Множество допустимых решений задачи ДНП представим в виде объединения подмножеств $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_T, \Pi_{T+1}$. Если $y \neq 0$ и значение функции $p_y(w)$ достигается на отрезке с угловым коэффициентом β_r, где $r \notin \{0, T+1\}$ – номер, определяемый упорядочением (2.38), то допустимое решение принадлежит множеству Π_r. Все оставшиеся допустимые решения, если они есть, принадлежат либо Π_0, либо Π_{T+1}. Условия оптимальности, приведенные в замечаниях 4, 5 и 6, позволяют свести задачу ДНП к $T+2$ задачам линейного программирования.

Теорема 6 *Для любой задачи (2.1)–(2.6) с полиномиальной временной сложностью можно либо найти оптимальное решение и проверить, является ли оно гарантированным, либо установить, что задача неограничена или не имеет допустимых решений.*

Доказательство. Утверждение о том, что задача ДНП на подмножестве Π_0 эквивалентна задаче линейного программирования P_0, доказывается так же, как и в теореме 5.

1. Рассмотрим множество допустимых решений на Π_r. Предположим, что множества I_r и $\mathcal{I}_1$ не имеют общих элементов. Из определения допустимого решения для задачи ДНП и замечания 4 следует, что вектор (x, y, z) является допустимым решением тогда и только тогда, когда выполняются ограничения (2.2), (2.31)–(2.34). Для упрощения последующих рассуждений предположим, что рассматриваемый отрезок в локальной нумерации (2.28), связанной с y, имеет тот же самый номер r. Заменим множество I_r^y на множество I_r в ограничениях (2.31), (2.34), векторы α_r и α_{r+1} на векторы $\mathcal{A}_r$ и $\mathcal{A}_{r+1}$ в ограничениях (2.32), (2.33) и функцию h на функцию H в ограничении (2.34). Легко доказать, что при $y_i > 0$ значения функций $h(i, r)$ и $H(i, r)$ совпадают. С другой стороны, переменные y_i входят в ограничения (2.31)–(2.34).

Следовательно, для текущего y имеем

$$\alpha_r(y) = \mathcal{A}_r(y), \alpha_r y = \mathcal{A}_r y, \alpha_{r+1} y = \mathcal{A}_{r+1} y,$$

$$y_i(\alpha_{ih(i,r)+2} - \alpha_{ih(i,r)+1}) = y_i(\alpha_{iH(i,r)+2} - \alpha_{iH(i,r)+1}).$$

Таким образом, условия (2.31)–(2.34) эквивалентны следующей системе ограничений

$$(y_1 z_1, \ldots, y_m z_m) = \mathcal{A}_r(y) + \sum_{i \in I_r} \delta w_i e^i, \tag{2.39}$$

$$\mathcal{A}_r y \leq w \leq \mathcal{A}_{r+1} y, \tag{2.40}$$

$$\sum_{i \in I_r} \delta w_i = w - \mathcal{A}_r y, \tag{2.41}$$

$$0 \leq \delta w_i \leq y_i(\alpha_{iH(i,r)+2} - \alpha_{iH(i,r)+1}), i \in I_r. \tag{2.42}$$

В невырожденном случае редукция ограничений (2.2) к (2.21) основывалась на строгом неравенстве $y_{i(r)} > 0$. В рассматриваемой ситуации из условия $(x, y, z) \in \Pi_r$ следует лишь, что $\sum_{i \in I_r^y} y_i > 0$. Поэтому при $z \in \mathcal{S}_k(\alpha^i), k = 1, \ldots, K_i$ воспользуемся равенствами из леммы 3

$$p_i(y_i z_i) = y_i Q_i(z_i), p_i(y_i \alpha_{ik}) = y_i Q_i(\alpha_{ik}), p_i(y_i z_i) = p_i(y_i \alpha_{ik}) + y_i \beta_{ik}(z_i - \alpha_{ik}),$$

и получим $y_i Q_i(z_i) = y_i Q_i(\alpha_{ik}) + \beta_r(y_i z_i - y_i \alpha_{ik})$. Отсюда и из равенства (2.39) следует, что $y_i Q_i(z_i) = y_i Q_i(\alpha_{iH(i,r)}) + \beta_r \delta w_i$. Используя это представление, исключим переменные z из ограничений (2.2) и получим

$$Cx + D(\mathcal{A}_r) y + D^* \delta w \geq b, \tag{2.43}$$

где D^* — матрица, имеющая $|I_r|$ столбцов, элементы которой совпадают с величиной β_r, δw — вектор переменных с компонентами $\delta w_i, i \in I_r$, удовлетворяющих ограничениям (2.40)–(2.42). Очевидно и обратное утверждение: если $(x, y, \delta w)$ — вектор, удовлетворяющий ограничениям (2.40)–(2.43), то существует единственный вектор (x, y, z), удовлетворяющий ограничениям (2.39)–(2.42). Теперь, учитывая, как в леммах 10 и 11, условие $y_i = 0$ при $i \in I(r)$ и то, что функционал задачи

(2.1)–(2.6) не зависит от переменных z, получаем, что вектор (x, y, z) является допустимым решением из множества Π_r тогда и только тогда, когда для некоторого вектора $\delta w \geq 0$ тройка $(x, y, \delta w)$ является допустимым решением следующей задачи P_r:

$$\min_{x,y\geq 0}(cx + dy)$$

$$Cx + D(\mathcal{A}_r)y + D^*\delta w \geq b,$$

$$\mathcal{A}_r y \leq w \leq \mathcal{A}_{r+1}y,$$

$$\sum_{i\in I_r} \delta w_i = w - \mathcal{A}_r y,$$

$$0 \leq \delta w_i \leq y_i(\alpha_{iH(i,r)+2} - \alpha_{iH(i,r)+1}), i \in I_r,$$

$$y_i = 0, i \in I(r),$$

$$x, y \geq 0.$$

2. Теперь предположим, что $I_r \cap \mathcal{I}_1 \neq \emptyset$, т. е. отрезок с угловым коэффициентом $\beta_r > 0$ неограничен справа. Из определения допустимого решения для задачи ДНП и замечания 5 следует, что вектор (x, y, z) является допустимым решением тогда и только тогда, когда выполняются ограничения (2.2) и равенства (2.31), (2.32), (2.35)–(2.37). Как и ранее, исключая переменные z, получаем оптимизационную задачу P_r :

$$\min_{x,y\geq 0}(cx + dy)$$

$$Cx + D(\mathcal{A}_r)y + D^*\delta w \geq b,$$

$$\mathcal{A}_r y \leq w$$

$$\sum_{i\in I_r} \delta w_i = w - \mathcal{A}_r y,$$

$$0 \leq \delta w_i \leq y_i(\alpha_{iH(i,r)+2} - \alpha_{iH(i,r)+1}), i \in I_r \setminus \mathcal{I}_1,$$

$$0 \leq \delta w_i, i \in I_r \cap \mathcal{I}_1,$$

$$y_i = 0, i \in I(r),$$

$$x, y \geq 0.$$

3. Рассмотрим последний случай, когда отрезок неограничен справа и его угловой коэффициент равен нулю. Для этого необходимо, чтобы $y_i = 0$ при любом $i \in \mathcal{I}_1$. Из замечания 6 следует, что при любом $w \geq \gamma_{K_u+1}$ вектор z является оптимальным решением задачи НЗР(y) тогда и только тогда, когда $z = \alpha_{K_u+1}$ и $\alpha_{K_u+1}y \leq w$. Так же как и в невырожденном случае, исключая переменные z, получим оптимизационную задачу P_{T+1}:

$$\min_{x,y\geq 0}(cx + dy)$$

$$Cx + D(\mathcal{A}_{T+1})y \geq b,$$

$$\mathcal{A}_{T+1}y \leq w,$$

$$y_i = 0, i \in \mathcal{I}_1.$$

Заметим, что функционал задачи (2.1)–(2.6) не зависит от переменных внутренней задачи (2.4)–(2.6). Поэтому если $(x, y, z) \in \Pi_r$, то в случаях 1 и 2 при подходящем δw вектор $(x, y, \delta w)$ является допустимым решением задачи P_r и значения целевых функций на этих решениях совпадают. Верно и обратное утверждение. Аналогичное замечание справедливо для случая 3.

Таким образом, если существует оптимальное решение задачи (2.1)–(2.6), то среди задач $\mathrm{P}_k, 0 \leq k \leq T + 1$, найдутся разрешимые задачи. Заметим, что в рассматриваемом случае могут быть недопустимые задачи P_k, но не может быть неограниченных снизу задач. В этом случае исходная задача сводится к нахождению такого оптимального решения задач P_k, которое является наименьшим относительно функционала.

Так как каждая задача P_k, $k = 0, 1, \ldots, T+1$, является задачей линейного программирования, то все такие задачи могут быть решены точно с помощью стандартных полиномиальных алгоритмов [29].

Рассмотрим оптимальное решение (x^*, y^*, z^*) задачи ДНП. Оно может оказаться негарантированным лишь тогда, когда существует оптимальное решение z' задачи НЗР(y^*) такое, что вектор (x^*, y^*, z') не удовлетворяет ограничениям (2.2). Если z^* — единственное оптимальное решение задачи НЗР(y^*), то вектор (x^*, y^*, z^*) будет гарантированным решением задачи ДНП. Поэтому из замечания 6 следует, что решения из множества Π_{T+1} будут гарантированными. Если $(x^*, y^*, z^*) \in \Pi_0$, то ограничения (2.2) не зависят от переменных z и, следовательно, решение также является гарантированным. В общем случае, когда $(x^*, y^*, z^*) \in \Pi_r$ и $r \notin \{0, T+1\}$, вопрос о единственности решения z^* сводится к исследованию следующей задачи:

$$\max \sum_{i \in I_r^{y^*}} \beta_r \delta w_i, \tag{2.44}$$

$$\sum_{i \in I_r^{y^*}} \delta w_i = w - \mathcal{A}_r y^*, \tag{2.45}$$

$$\delta w_i \leq y_i^* (\alpha_{iH(i,r)+2} - \alpha_{iH(i,r)+1}), i \in I_r^{y^*} \setminus \mathcal{I}_1, \tag{2.46}$$

$$\delta w_i \geq 0, i \in I_r^{y^*}. \tag{2.47}$$

Нетрудно доказать, что z^* является единственным решением задачи НЗР(y^*) тогда и только тогда, когда ранг подсистемы закрепленных ограничений задачи (2.44)–(2.47) равен $|I_r^{y^*}|$. Последнее условие может выполняться лишь в двух случаях: либо при $w = \mathcal{A}_{r+1} y^*$, либо при $|I_r^{y^*}| = 1$. Теперь предположим, что эти условия нарушаются. Тогда w принадлежит внутренности интервала $\mathcal{S}_r(\mathcal{A}_r(y^*))$ и $|I_r^{y^*}| > 1$. Для каждого $s, 1 \leq s \leq S$, рассмотрим вспомогательную задачу G_s:

$$d_s^* = \min_{\delta w \geq 0} \sum_{i \in I_r^{y^*}} d_{si}^* \delta w_i$$

$$\sum_{i \in I_r^{y^*}} \delta w_i = w - \mathcal{A}_r y^*,$$

$$\delta w_i \leq y_i^* (\alpha_{iH(i,r)+2} - \alpha_{iH(i,r)+1}), i \in I_r^{y^*} \setminus \mathcal{I}_1,$$

где $d_{si}^*, 1 \in |I_r^{y^*}|$ — коэффициенты матрицы D^*. Так как (x^*, y^*, z^*) – оптимальное решение задачи ДНП, то существует вектор δw^* такой, что $(x^*, y^*, \delta w^*)$ – оптимальное решение задачи P_r. Поэтому для любой задачи G_s множество допустимых решений непусто. Очевидно, что оно является ограниченным. Из соотношений (2.39)–(2.42) следует, что допустимому решению δw задачи G_s соответствует единственное оптимальное решение $z(\delta w)$ задачи НЗР(y^*). Верно и обратное утверждение.

Предположим, что выполняется неравенство

$$d_s^* = \sum_{i \in I_r^{y^*}} d_{si}^* \overline{\delta w}_i < b_s - \sum_j c_{sj} x_j^* - \sum_{i \in I_r^{y^*}} (d_{si}^1 + d_{si}^2 \alpha_{iH(i,r)+1}) y_i^*. \qquad (2.48)$$

Покажем, что вектор $(x^*, y^*, z(\overline{\delta w}))$ не является допустимым решением задачи (2.1)–(2.6). Предположим противное, т. е. вектор $(x^*, y^*, z(\overline{\delta w}))$ удовлетворяет ограничениям (2.2). Тогда нетрудно доказать, что $(x^*, y^*, z(\overline{\delta w})) \in \Pi_r$ и, следовательно, $(x^*, y^*, \overline{\delta w})$ — допустимое решение задачи P_r. Поэтому

$$\sum_{i \in I_r^{y^*}} d_{si}^* \overline{\delta w}_i \geq b_s - \sum_j c_{sj} x_j^* - \sum_{i \in I_r^{y^*}} (d_{si}^1 + d_{si}^2 \alpha_{iH(i,r)+1}) y_i^*,$$

что противоречит неравенству (2.48). Таким образом, $z(\overline{\delta w})$ — такое оптимальное решение задачи НЗР(y^*), что вектор $(x^*, y^*, z(\overline{\delta w}))$ не является допустимым решением задачи (2.1)–(2.6). Тогда из определения 3 следует, что оптимальное решение (x^*, y^*, z^*) не является гарантированным. Если при каждом s выполняется неравенство

$$d_s^* \geq b_s - \sum_j c_{sj} x_j^* - \sum_{i \in I_r^{y^*}} (d_{si}^1 + d_{si}^2 \alpha_{iH(i,r)+1}) y_i^*,$$

то вектор (x^*, y^*, z^*) будет наилучшим гарантированным решением.

Теорема 6 доказана.

Глава 3

Частично-целочисленные модели

В этой главе рассматриваются математические модели двухуровневого программирования, связанные с широко известной задачей выбора ряда изделий [5, стр. 95]. Предлагаемые постановки являются менее общими, чем в предшествующих главах, но они имеют самостоятельное прикладное значение [16, 26, 32], что подтверждается, в частности, рядом прикладных научно-исследовательских работ, в разные годы проводившихся в Институте математики СО РАН.

Особенностью предлагаемых постановок по сравнению с задачей выбора ряда изделий [5], является покрытие части расходов средствами инвестора, который может получить любые изделия из числа произведенных по заранее согласованным ценам. На верхнем уровне выбирается ряд изделий, которые будут производиться для выполнения работ, а на нижнем уровне инвестор стремится максимизировать суммарную эффективность выбранных им изделий, исходя из величины своего кредита. В таких условиях выбор ряда изделий и выбор множества изделий, используемых для погашения кредита, становятся взаимозависимыми, что приводит к двухуровневым математическим моделям. Задача состоит в том, чтобы найти такой ряд изделий, который позволил бы рассчитаться с инвестором и выполнить все работы с минимальными суммарными затратами.

3.1 Задача выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием

Пусть множество $I = \{1, 2, ..., m\}$ задает исходный ряд типов изделий. Исходный ряд включает в себя типы изделий, которые выпускаются серийно, либо могут быть запущены в производство в ближайшем будущем. Их область применения задается множеством работ $J = \{1, 2, ..., n\}$. Для каждой работы существуют изделия в исходном ряде, предназначенные для ее выполнения и для каждого изделия имеются работы в области применения, для которых оно предназначено. Для каждого $i \in I$ задано разбиение множества J на подмножества $J_i^1, \dots, J_i^{T_i}$. Работы из одного множества могут быть выполнены последовательно одна за другой одними и теми же изделиями. Работы из разных подмножеств выполняются параллельно.

Математическая постановка задачи может быть записана в виде задачи частично-целочисленного программирования. Введем следующие обозначения. Для каждого $i \in I$:

$g_i(v_i) \geq 0$ — затраты на разработку изделия и его производство в зависимости от обьема выпуска $v_i \geq 0$; будем предполагать, что это кусочно линейные вогнутые неубывающие функции;

$\beta_i \geq 0$ — стоимость одного изделия для инвестора;

$\alpha_i \geq 0$ — оценка эффективности одного изделия инвестором;

$p_{ij} \geq 0$ — число изделий, требующихся для выполнения j-й работы;

$c_{ij} \geq 0$ — стоимость выполнения j-й работы;

$B \geq 0$ — величина кредита.

Переменные задачи $(v_i), (y_{ij}), (w_i)$ имеют следующий смысл:

$v_i \geq 0$ — объем производства изделия i-го типа;

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я работа выполняется изделиями } i\text{-го типа,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$w_i \geq 0$ — объем изделий i-го типа, проданных инвестору.

С использованием введенных обозначений **задача выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием** (обозначим ее BP) записывается следующим образом:

$$\min_{v,y} \sum_{i \in I} \{g_i(v_i) + \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij}\}, \tag{3.1}$$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = 1, j \in J, \tag{3.2}$$

$$\sum_{t=1}^{T_i} \max_{j \in J_i^t} p_{ij} y_{ij} \leq v_i - w_i, i \in I, \tag{3.3}$$

$$v_i \geq 0, y_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J, \tag{3.4}$$

где w — оптимальное решение линейной задачи о ранце ЛР(v):

$$\max_{w} \sum_{i \in I} \alpha_i w_i, \tag{3.5}$$

$$\sum_{i \in I} \beta_i w_i \leq B, \tag{3.6}$$

$$0 \leq w_i \leq v_i, i \in I. \tag{3.7}$$

Целевая функция (3.1) имеет смысл суммарных затрат на разработку, производство и эксплуатацию изделий. Равенства (3.2) гарантируют выполнение всех работ области применения. Неравенства (3.3) ограничивают возможности выполнения работ имеющимися в наличии изделиями. Целевая функция (3.5) внутренней задачи имеет смысл суммарной эффективности изделий, выбранных инвестором. Неравенство (3.6) ограничивает финансовые возможности инвестора величиной его кредита. Ограничения (3.7) позволяют инвестору закупать изделия в количествах не превышающих их обьемы производства.

При $B = 0$ в задаче ЛР(v) имеется единственное оптимальное решение $w^* = 0$. В этом случае задача (3.1)–(3.7) эквивалентна классической **задаче выбора ряда изделий** [5, стр. 95]:

$$\min_{v,y} \sum_{i \in I} \{g_i(v_i) + \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij}\},$$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = 1, j \in J,$$

$$\sum_{t=1}^{T_i} \max_{j \in J_i^t} p_{ij} y_{ij} \leq v_i, i \in I,$$

$$v_i \geq 0, y_{ij} \in \{0,1\}, i \in I, j \in J.$$

Таким образом, задача (3.1)–(3.7) является NP — трудной в сильном смысле [12] и для нее маловероятно [61] существование приближенных алгоритмов, относительная погрешность которых росла бы медленнее, чем $\ln(n)$.

3.2 Сведение к задаче выбора ряда изделий

Пусть величины $\alpha_i/\beta_i, i \in I$, попарно различны и множество I упорядочено так, что $\alpha_1/\beta_1 > \alpha_2/\beta_2 > \ldots > \alpha_m/\beta_m > 0$. В этом случае, задача ЛР(v) имеет единственное оптимальное решение и, следовательно, задача ВР невырождена. Поэтому каждое ее оптимальное решение является наилучшим гарантированным решением. Вырожденный случай будет рассмотрен в параграфе 3.5.

Пусть $s \in I$. Для задачи

$$\min_{v} \{\sum_{i=1}^{s} g_i(v_i) \mid \sum_{i=1}^{s} \beta_i v_i = B, v_i \geq 0\} \tag{3.8}$$

рассмотрим функцию возмущения $p_g^s(B) = \min_v\{\sum\limits_{i=1}^{s} g_i(v_i) \mid \sum\limits_{i=1}^{s} \beta_i v_i = B, v_i \geq 0\}$.

Лемма 12 . *Для любого $B \geq 0$ справедливо равенство*

$$p_g^s(B) = \min\{g_i(B/\beta_i) \mid 1 \leq i \leq s\}. \tag{3.9}$$

Доказательство леммы прямо следует из предположения о вогнутости и неубывании функций $g_i(v_i)$.

Лемма 13 *Существует оптимальное решение задачи BP с единственной ненулевой компонентой вектора w.*

Доказательство. Пусть $(v_i^*), (y_{ij}^*), (w_i^*)$ — произвольное оптимальное решение задачи BP. Тогда найдется номер s, для которого выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{s} \beta_i w_i^* = B,\ w_i^* = v_i^* \text{ при } i < s \text{ и } 0 < w_s^* \leq v_s^*.$$

Пусть $w_s^* = v_s^*$. Из леммы 12 следует, что для некоторого номера $k \leq s$ допустимое решение задачи BP

$$\bar{v}_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \ i \leq s,\, i \neq k \\ B/\beta_i, & \text{если } \ i = k, \\ v_i^*, & \text{если } \ i > s, \end{cases} \qquad \bar{w}_i = \begin{cases} \bar{v}_i, & \text{если } \ i \leq s, \\ 0, & \text{если } \ i > s, \end{cases} \qquad \bar{y} = y^*,$$

будет его оптимальным решением с одной ненулевой компонентой $\bar{w}_k$.

Пусть $w_s^* < v_s^*$. Рассмотрим задачу (3.8) в следующей постановке:

$$\min_v\{\sum_{i=1}^{s-1} g_i(v_i) \mid \sum_{i=1}^{s-1} \beta_i v_i = B - \beta_s w_s^*, v_i \geq 0\}.$$

Из леммы 12 получим, что для некоторого номера $k < s$ следующее допустимое решение

$$\bar{v}_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \;\; i < s, i \neq k, \\ (B - \beta_s w_s^*)/\beta_i, & \text{если} \;\; i = k, \\ v_i^*, & \text{если} \;\; i \geq s, \end{cases} \qquad \bar{w}_i = \begin{cases} \bar{v}_i, & \text{если} \;\; i < s, \\ w_s^*, & \text{если} \;\; i = s, \\ 0, & \text{если} \;\; i > s, \end{cases}$$

$\bar{y} = y^*$,

является оптимальным решением задачи ВР, у которого две ненулевые компоненты $\bar{w}_k, \bar{w}_s$. Пусть $p_g^{ks}(B)$ — функция возмущения следующей задачи:

$$\min_{v_k, v_s} \{g_k(v_k) + g_s(v_s^* - w_s^* + v_s) \mid \beta_k v_k + \beta_s v_s = B, v_k, v_s \geq 0\}.$$

Очевидно, что вектор $(\bar{v}_k, w_s^*)$ является допустимым решением этой задачи. Так как функция $g_s(v_s^* - w_s^* + v_s)$ является кусочно линейной неубывающей и вогнутой, то из леммы 12 следует, что либо $p_g^{ks}(B) = g_k(B/\beta_k)$, либо $p_g^{ks}(B) = g_s(v_s^* - w_s^* + B/\beta_s)$. Тогда в первом случае оптимальным решением задачи ВР с одной ненулевой компонентой $\bar{w}_i$ будет следующее решение:

$$\bar{v}_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \;\; i < s, i \neq k, \\ B/\beta_i, & \text{если} \;\; i = k, \\ v_i^* - w_i^*, & \text{если} \;\; i = s, \\ v_i^*, & \text{если} \;\; i > s, \end{cases} \qquad \bar{w}_i = \begin{cases} \bar{v}_i, & \text{если} \;\; i < s, \\ 0, & \text{если} \;\; i \geq s, \end{cases} \qquad \bar{y} = y^*,$$

а во втором случае:

$$\bar{v}_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \;\; i < s, \\ B/\beta_i + v_i^* - w_i^*, & \text{если} \;\; i = s, \\ v_i^*, & \text{если} \;\; i > s, \end{cases} \quad \bar{w}_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \;\; i \neq s, \\ B/\beta_i, & \text{если} \;\; i = s, \end{cases} \quad \bar{y} = y^*.$$

Лемма 13 доказана.

В главе 1 были получены условия оптимальности для задачи ЛР(v), проверка которых сводится к поиску решения системы линейных ограничений относительно переменных v и w. Всего таких разных систем ограничений в рассматриваемом случае не более m. Тогда для невырожденой задачи получим разбиение множества допустимых решений на m подмножеств, на каждом из которых исходная задача ВР эквивалентна решению задачи частично-целочисленного программирования следующего вида:

$$\min_{v,y} \sum_{i \in I_k} \{g_i(v_i) + \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij}\},$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I_k} y_{ij} = 1, j \in J,$$

$$\sum_{t=1}^{T_k} \max_{j \in J_k^t} p_{kj} y_{kj} \le v_k - (B - \sum_{i<k} \beta_i v_i)/\beta_k,$$

$$\sum_{t=1}^{T_i} \max_{j \in J_i^t} p_{ij} y_{ij} \le v_i, i > k,$$

$$\sum_{i<k} \beta_i v_i \le B,$$

$$\sum_{i<k} \beta_i v_i + \beta_k v_k \ge B,$$

$$y_{ij} = 0, i < k, j \in J,$$

$$v_i \ge 0, y_{ij} \in \{0,1\}, i \in I_k, j \in J,$$

где $I_k = \{k, k+1, \ldots, m\}$. Однако из леммы 13 следует более сильный результат:

Теорема 7 *Задача ВР сводится к решению m задач выбора ряда изделий.*

Доказательство. Из леммы 13 следует, что в задаче ВР можно ограничиться поиском оптимальных решений (v^*, y^*, w^*) с одной ненулевой компонентой $w_k^*, k \in I$, которая удовлетворяет следующим соотношениям: $\beta_k w_k^* = B$ и $w_k^* \le v_k^*$.

Пусть (v, y) — произвольное допустимое решение следующей задачи (обозначим ее BP_k):

$$Z_k^* = \min_{v,y} \sum_{i \in I_{k+1}}^{m} \{g_i(v_i) + \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij}\} + \sum_{j \in J} c_{kj} y_{kj} + g_k(B/\beta_k + v_k),$$

при ограничениях

$$\sum_{i\in I_k} y_{ij} = 1, j \in J,$$

$$\sum_{t=1}^{T_i} \max_{j\in J_i^t} p_{ij} y_{ij} \le v_i, i \in I_k,$$

$$v_i \ge 0, y_{ij} \in \{0,1\}, i \in I_k, j \in J.$$

Тогда решение

$$\bar{v}_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \;\; i < k, \\ B/\beta_i + v_i, & \text{если} \;\; i = k, \\ v_i, & \text{если} \;\; i \in I_{k+1}, \end{cases}$$

$$\bar{y}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \;\; i < k, j \in J, \\ y_{ij}, & \text{если} \;\; i \in I_k, j \in J, \end{cases} \qquad \bar{w}_i = \begin{cases} B/\beta_i, & \text{если} \;\; i = k, \\ 0, & \text{в противном случае} \;, \end{cases}$$

является допустимым решением задачи BP с одной ненулевой компонентой вектора w и значения целевых функций на этих решениях совпадают.

Осталось заметить, что для любого k задача BP_k является задачей выбора ряда изделий [5]. Теорема 7 доказана.

Пусть (v, y, w) — произвольное допустимое решение задачи BP. Обозначим через $J(i)$ множество вида $\{j \in J \mid y_{ij} = 1\}$ и назовем его **областью применения изделия** i. Пусть L_i — число точек излома кусочно линейной функции $g_i(v)$ и $L = \max_{i\in I} L_i$. Следующий результат показывает, что существование оптимального решения со **связными** областями применения [5] — достаточное условие для полиномиальной разрешимости задачи BP.

Теорема 8 *Если в задаче BP существует оптимальное решение со связными областями применения, то оно может быть найдено с трудоемкостью* $O((mn)^2 L)$.

Доказательство. Из теоремы 7 следует, что задача ВР сводится к решению m задач выбора ряда изделий $BP_k, k \in I$. При доказательстве леммы 13 в оптимальном решении модифицировались только компоненты соответствующие переменным v и w. Следовательно, если в задаче ВР существует оптимальное решение со связными областями применения, то найдется оптимальное решение со связными областями применения и с одной ненулевой компонентой у вектора w^*. Поэтому в одной из задач BP_k найдется оптимальное решение со связными областями применения. Покажем, что тогда задача BP_k сводится к решению **задачи о ближайшем соседе** ($БC_k$) вида

$$\min_{R,z}\{\sum_{l=1}^{R} f_k(z_{l-1}, z_l) \mid 0 = z_0 \leq z_1 \leq \ldots \leq z_R = n\},$$

где $f_k(z_{l-1}, z_l)$ — неотрицательная функция определенная для всех пар $z_{l-1} \leq z_l$ из множества $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Для оптимального значения задачи BP_k справедливо равенство

$$Z_k^* = g_k(B/\beta_k)+min_{(v,y)}\{\sum_{i\in I_{k+1}}\{g_i(v_i)+\sum_{j\in J} c_{ij}y_{ij}\}+\sum_{j\in J} c_{kj}y_{kj}+g_k(B/\beta_k+v_k)-g_k(B/\beta_k)\},$$

где минимум берется по всем допустимым решениям. Пусть

$$f_k(J') = \min\{\min_{i\in I_{k+1}}\{g_i(v_i(J'))+\sum_{j\in J'} c_{ij}\}, g_k(B/\beta_k+v_k(J'))-g_k(B/\beta_k)+\sum_{j\in J'} c_{kj}\}\},$$

где

$$v_i(J') = \sum_{t=1}^{T_i} \max_{j\in J_i^t\cap J'} p_{ij}, i \in I_k.$$

Тогда переходя к областям применения, получим

$$Z_k^* = g_k(B/\beta_k) + \min\{\sum_{l=1}^{R} f_k(J(l)) \mid \cup_{l=1}^{R} J(l) = J, J(l) \cap J(l') = \emptyset, l \neq l'\}.$$

По предположению в задаче BP_k существует оптимальное решение со связными областями применения. Следовательно, полагая, что

$J(l) = (z_{l-1}, z_l]$, где $z_{l-1} < z_l$ — целые числа из интервала $[0, n]$, получим

$$Z_k^* = g_k(B/\beta_k) + \min_{R,(z_l)} \{ \sum_{l=1}^{R} f_k(z_{l-1}, z_l) \mid 0 = z_0 \leq z_1 \leq \ldots \leq z_R = n \}.$$

Поэтому задача BP_k сводится к решению задачи о ближайшем соседе $БC_k$ и, следовательно, задача ВР сводится к решению m задач о ближайшем соседе.

Оценим трудоемкость нахождения оптимального решения задачи ВР. Если значение функции $f_k(z_{l-1}, z_l)$ известно для каждой пары точек $z_{l-1} < z_l$, то трудоемкость алгоритма решения задачи $БC_k$ равна $O(n^2)$. Трудоемкость вычисления всех значений функции f_k равна $O(|I_k|Ln^2)$, что и определяет трудоемкость алгоритма решения задачи BP_k. Таким образом, трудоемкость нахождения оптимального решения задачи ВР равна $O((mn)^2 L)$. Теорема 8 доказана.

Замечание. Приведенные утверждения имеют место и для задачи ВР с дополнительными ограничениями вида:

$$x_i \geq y_{ij}, i \in I, j \in J,$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq M,$$
$$x_i \in \{0, 1\}, i \in I,$$

которые запрещают выбирать число типов изделий превышающее заданную величину. И в этом случае трудоемкость решения задачи определяется предварительным этапом, на котором вычисляются функции f_k, и, следовательно, равна $O((mn)^2 L)$.

3.3 Линейная задача

В этом разделе рассматривается частный случай задачи ВР, который является обобщением **простейшей задачи размещения** [69]

Пусть для каждого $i \in I$ функция $g_i(v_i)$ имеет следующий вид:

$$g_i(v_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } v_i = 0, \\ f_i + c_i v_i, & \text{если } v_i > 0, \end{cases}$$

где

$f_i \geq 0$ — начальные затраты на подготовку производства;

$c_i \geq 0$ — затраты на производство одного изделия.

Введем переменные x_i, имеющие следующий смысл:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если принимается решение о производстве изделий } i\text{-го типа }, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предположим, что при всех $i \in I$ и t множества J_i^t состоят из одного элемента. Тогда с использованием введенных обозначений **простейшая задача размещения с частичным внешним финансированием** (обозначим ее ПЗР) записывается следующим образом:

$$\min_{x,v,y} \sum_{i \in I} \{f_i x_i + c_i v_i + \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij}\}, \tag{3.10}$$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = 1, j \in J, \tag{3.11}$$

$$x_i \geq y_{ij}, i \in I, j \in J, \tag{3.12}$$

$$\sum_{j \in J} p_{ij} y_{ij} \leq v_i - w_i, i \in I, \tag{3.13}$$

$$v_i \geq 0, x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J, \tag{3.14}$$

где w — оптимальное решение линейной задачи о ранце ЛР(v)

$$\max_{w} \sum_{i \in I} \alpha_i w_i, \tag{3.15}$$

$$\sum_{i \in I} \beta_i w_i \leq B, \tag{3.16}$$

$$0 \le w_i \le v_i x_i, i \in I. \qquad (3.17)$$

Для задачи ПЗР выполняется Лемма 13. Учитывая вид функций g_i, можно усилить утверждение Теоремы 7.

Теорема 9 *Задача ПЗР сводится к решению m простейших задач размещения производства.*

Доказательство. Из теоремы 7 получим, что задача ПЗР эквивалентна решению m задач следующего вида

$$\min_{x,y} \sum_{i \in I_k} \{f_i x_i + \sum_{j \in J} (c_{ij} + c_i p_{ij}) y_{ij}\} + c_k B/\beta_k,$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I_k} y_{ij} = 1, j \in J,$$

$$x_i \ge y_{ij} \ge 0, j \in J, i \in I_k,$$

$$x_k = 1,$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}, j \in J, i \in I_k,$$

каждая из которых является простейшей задачей размещения производства [69]. Теорема 9 доказана.

Простейшая задача размещения является частным случаем задачи $ПЗР$. Поэтому в общей постановке задача $ПЗР$ является NP–трудной в сильном смысле. Однако, если ввести ограничения на класс матриц $C = (c_{ij} + c_i p_{ij}), i \in I, j \in J$, то можно получить ее полиномиально разрешимые частные случаи.

Теорема 10 *Пусть матрица C удовлетворяет одному из следующих условий:*

1. *C — связная [5], либо 2–связная [4];*
2. *C — квазивыпуклая [8];*

3. C — связная относительно дерева [64].

Тогда задача ПЗР — полиномиально разрешима.

Доказательство. Из теоремы 9 имеем, что задача ПЗР эквивалентна решению m простейших задач размещения производства. Пусть $C_k = (c_{ij} + c_i p_{ij}), i \in I_k, j \in J, k \in I$, матрицы соответствующие этим задачам. Из определений связности, 2–связности, квазивыпуклости и связности относительно дерева следует, что, если матрица C обладает одним из этих свойств, то и все подматрицы C_k обладают этим свойством. Поэтому в каждом из случаев 1–3 задача *ПЗР* полиномиально разрешима. Теорема 10 доказана.

Заменим в задаче *ПЗР* ограничения (3.13) на ограничения следующего вида

$$\max_{j\in J} p_{ij} y_{ij} \le v_i - w_i, i \in I.$$

Полученная задача сводится к решению m задач вида

$$\min_{x,y} \sum_{i\in I_k} \{f_i x_i + c_i \max_{j\in J} p_{ij} y_{ij} + \sum_{j\in J} c_{ij} y_{ij}\} + c_k B/\beta_k,$$

$$\sum_{i\in I_k} y_{ij} = 1, j \in J,$$

$$x_i \ge y_{ij} \ge 0, j \in J, i \in I_k,$$

$$x_k = 1,$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0,1\}, j \in J, i \in I_k.$$

Теорема 11 *Пусть матрицы $(c_{ij}), (c_i p_{ij}), i \in I, j \in J$ являются соответственно связной и сильно связной [5], а величины p_{ij} не убывают с ростом j для любого $i \in I$. Тогда задача ПЗР является полиномиально разрешимой.*

Доказательство. Из определения связности и сильной связности следует, что подматрицы $(c_{ij}), (c_i p_{ij}), i \in I_k, j \in J$ также являются, соответственно, связной и сильно связной при $k \in I$. Тогда полиномиальная разрешимость задачи $\mathit{ПЗР}$ следует из полиномиальной разрешимости указанных выше задач [5]. Теорема 11 доказана.

Рассмотрим задачу ПЗР с дополнительным ограничением верхнего уровня

$$\sum_{i \in I} x_i \leq M.$$

Утверждения теорем 10, 11 остаются справедливыми и в этом более общем случае.

3.4 Задачи на максимум

Рассмотрим максимизационный вариант задачи ВР:

$$\max_{x,v,y} \sum_{i \in I} \{ \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij} - g_i(v_i) \},$$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = 1, j \in J,$$

$$x_i \geq y_{ij}, i \in I, j \in J,$$

$$\sum_{t=1}^{T_i} \max_{j \in J_i^t} p_{ij} y_{ij} \leq v_i - w_i, i \in I,$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq M,$$

$$v_i \geq 0, x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J,$$

где w — оптимальное решение линейной задачи о ранце ЛР(v)

$$\max_{w} \sum_{i \in I} \alpha_i w_i,$$

$$\sum_{i \in I} \beta_i w_i \leq B,$$

$$0 \leq w_i \leq v_i, i \in I.$$

В задачах на максимум величины c_{ij} обычно интерпретируются как доход, который получает поставщик в результате удовлетворения спроса j-го потребителя из i-го пункта производства. Если $M = 1$, то в задаче всего m допустимых решений, среди которых легко найти оптимальное решение. Поэтому будем считать, что $M > 1$.

В задаче на максимум, как и в задаче ВР, существует оптимальное решение с одной ненулевой компонентой у вектора w. Следовательно, она сводится к решению m задач выбора ряда изделий на максимум. Однако, более содержательные результаты удается получить для **простейшей задачи размещения с частичным внешним финансированием на максимум** (обозначим ее $ЗP$):

$$\max_{x,v,y} \sum_{i \in I} \{ \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij} - c_i v_i - f_i x_i \}, \tag{3.18}$$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = 1, j \in J, \tag{3.19}$$

$$x_i \geq y_{ij}, i \in I, j \in J, \tag{3.20}$$

$$\sum_{j \in J} p_{ij} y_{ij} \leq v_i - w_i, i \in I, \tag{3.21}$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq M, \tag{3.22}$$

$$v_i \geq 0, x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J, \tag{3.23}$$

где w — оптимальное решение линейной задачи о ранце ЛР(v)

$$\max_{w} \sum_{i \in I} \alpha_i w_i, \tag{3.24}$$

$$\sum_{i \in I} \beta_i w_i \leq B, \tag{3.25}$$

$$0 \leq w_i \leq v_i x_i, i \in I. \tag{3.26}$$

Так как в задаче $ЗP$ существует оптимальное решение с единственной ненулевой компонентой w_k^*, то она сводится к решению m задач следующего вида $(ЗP_k)$:

$$Z_k^* = \max_{x,y} \sum_{i \in I_k} \{ \sum_{j \in J} (c_{ij} - c_i p_{ij}) y_{ij} - f_i x_i \} - c_k B / \beta_k,$$

$$\sum_{i \in I_k} y_{ij} = 1, j \in J,$$

$$x_i \geq y_{ij}, i \in I_k, j \in J,$$

$$\sum_{i \in I_k} x_i \leq M,$$

$$x_k = 1,$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I_k, j \in J,$$

каждая из которых является простейшей задачей размещения на максимум [54] с дополнительным ограничением $x_k = 1$. Так как $\alpha_1/\beta_1 > \alpha_2/\beta_2 > \ldots > \alpha_m/\beta_m > 0$, то для каждого $k \in I$ имеем, что $I_k = \{k, k+1, \ldots, m\}$. Значение целевой функции задачи $ЗP_k$ на допустимом решении (x, y) обозначим через $Z_k(x, y)$.

Используя данное сведение, построим для задачи $ЗP$ приближенное решение с гарантированной оценкой точности. Для оценки относительной погрешности алгоритмов будем использовать следующую величину $\epsilon = (Z^* - Z^g)/(Z^* - Z^l)$, где Z^* — оптимальное значение целевой функции задачи, Z^g — значение целевой функции на приближенном решении, Z^l — минимальное значение целевой функции на множестве допустимых решений, либо оценка снизу на эту величину.

Приведем описание **жадного алгоритма** для простейшей задачи размещения на максимум [55]:

$$\max_{x,y} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij} - \sum_{i \in I} f_i x_i \tag{3.27}$$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = 1, j \in J, \tag{3.28}$$

$$x_i \geq y_{ij}, i \in I, j \in J, \tag{3.29}$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq M, \tag{3.30}$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J. \tag{3.31}$$

Рассмотрим **лагранжеву релаксацию** $L(u)$ этой задачи по ограничениям (3.28) с множителями $u = (u_1, \ldots, u_n)$:

$$Z_D(u) = \max_{x,y} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (c_{ij} - u_j) y_{ij} - \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} u_j,$$

при ограничениях (3.29)–(3.31).

Тогда двойственная задача относительно ограничений (3.28), по определению, есть задача D вида

$$Z_D = \min_u Z_D(u).$$

Для фиксированных **множителей Лагранжа** $u = (u_1, \ldots, u_n)$ легко найти оптимальные значения переменных x и y задачи $L(u)$. Из вида функции $Z_D(u)$ и ограничений (3.29)–(3.30) следует, что оптимальные значения переменных y вычисляются по формулам:

$$y_{ij} = \begin{cases} x_i, & \text{если} \quad c_{ij} - u_j > 0, \\ 0, & \text{если} \quad c_{ij} - u_j \leq 0. \end{cases}$$

Пусть

$$\rho_i(u) = \sum_{j \in J} \max(0, c_{ij} - u_j) - f_i, i \in I.$$

Тогда оптимальные значения переменных x_i можно легко найти из решения следующей задачи:

$$\max_x \{\sum_{i \in I} \rho_i(u) x_i \mid \sum_{i \in I} x_i \leq M, x_i \in \{0, 1\}, i \in I\}.$$

При любом выборе вектора u имеем

$$Z^* \leq Z_D \leq Z_D(u).$$

Общая схема жадного алгоритма для задачи (3.27)–(3.31) может быть представлена следующим образом:

Жадный алгоритм

1. Положить $\tau := 1$, $I^* := \emptyset$, $u_j^\tau := \min_{i \in I} c_{ij}\; j \in J$.

2. Вычислить $\rho_i(u^\tau)$ для всех $i \in I \setminus I^*$.

3. Если $\rho_i(u^\tau) \leq 0$ для всех $i \in I \setminus I^*$ и $|I^*| \geq 1$, то STOP и положить $\tau := \tau - 1$.

4. Найти номер $i_\tau \in I \setminus I^*$, для которого $\rho_{i_\tau}(u^\tau) = \max\{\rho_i(u^\tau), i \in I \setminus I^*\}$.

5. Положить $I^* := I^* \cup \{i_\tau\}$. Если $|I^*| < M$, то положить $\tau := \tau + 1$, u$_j^\tau := \max_{i \in I^*} c_{ij}, j \in J$, и вернуться на шаг 2, иначе STOP.

Из описания алгоритма следует, что $I^* = \{i_1, \ldots, i_\tau\}$ и $\tau \geq 1$. Решение (x^g, y^g), полученное жадным алгоритмом, задается следующими соотношениями:

$$x_i^g = \begin{cases} 1, & \text{если } \ i \in I^*, \\ 0 & \text{в противном случае} \ , \end{cases} \qquad y_{ij}^g = \begin{cases} 1, & \text{если } \ i = i_l \text{ и } c_{i_l j} - u_j^l > 0, \\ 0 & \text{в противном случае} \ . \end{cases}$$

Из описания шага 5 имеем, что (x^g, y^g) — допустимое решение задачи (3.27)–(3.31). Для полученного приближенного решения

$$Z^g = \sum_{j \in J} u_j^1 + \sum_{l=1}^{\tau} \rho_{i_l}(u^l)$$

справедлива [54] следующая оценка

Теорема 12 $(Z^* - Z^g)/(Z^* - Z^l) \leq 1/e$.

Покажем, как с помощью жадного алгоритма можно построить приближенное решение задачи $\mathit{ЗР}$.

Рассмотрим задачу $\overline{ЗP}_k$:

$$\overline{Z}_k^* = \max_{x,y} \sum_{i \in I_{k+1}} \{\sum_{j \in J} \overline{c}_{ij} y_{ij} - f_i x_i\},$$

$$\sum_{i \in I_{k+1}} y_{ij} = 1, j \in J,$$

$$x_i \geq y_{ij}, i \in I_{k+1}, j \in J,$$

$$\sum_{i \in I_{k+1}} x_i \leq M - 1,$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I_{k+1}, j \in J,$$

где $\overline{c}_{ij} = \max(c_{kj} - c_k p_{kj}, c_{ij} - c_i p_{ij})$ при $i \in I_{k+1}, j \in J$. Обозначим через $\overline{Z}_k(x, y)$ целевую функцию этой задачи, $\overline{Z}_k^g$ — значение $\overline{Z}_k$ на жадном решении, $\overline{Z}_k^l$ — оценка снизу на минимальное значение целевой функции задачи $\overline{ЗP}_k$. Тогда из теоремы 12 имеем следующую оценку для относительной погрешности жадного решения:

$$(\overline{Z}_k^* - \overline{Z}_k^g)/(\overline{Z}_k^* - \overline{Z}_k^l) \leq 1/e. \tag{3.32}$$

Лемма 14 $Z_k^* = \max\{\sum_{j \in J}(c_{kj} - c_k p_{kj}), \overline{Z}_k^*\} - f_k - c_k B/\beta_k$.

Доказательство. Пусть $(\overline{x}, \overline{y})$ — произвольное допустимое решение задачи $\overline{ЗP}_k$. Положим $R_k = \{(i, j) \mid \overline{y}_{ij} = 1 \text{ и } c_{kj} - c_k p_{kj} > c_{ij} - c_i p_{ij}\}$, J_k — множество всех номеров j таких, что существует номер $i \in I_{k+1}$, для которого $(i, j) \in R_k$. Сопоставим решению $(\overline{x}, \overline{y})$ допустимое решение (x, y) задачи $ЗP_k$:

$$x_i = \begin{cases} \overline{x}_i, & \text{если } \ i \in I_{k+1}, \\ 1, & \text{если } \ i = k, \end{cases} \quad y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \ i = k, j \in J_k, \\ 0, & \text{если } \ (ij) \in R_k, \\ \overline{y}_{ij} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из определения величин $\overline{c}_{ij}$ следует, что

$$Z_k(x, y) = \overline{Z}_k(\overline{x}, \overline{y}) - f_k - c_k B/\beta_k. \tag{3.33}$$

Пусть (x^*, y^*) — оптимальное решение задачи $\mathit{ЗP}_k$ и $I^* = \{i \mid x_i^* = 1\}$. Допустим, что $I^* = \{k\}$. Тогда из равенства (3.33) следует, что для любого допустимого решения $(\overline{x}, \overline{y})$ задачи $\overline{\mathit{ЗP}}_k$ выполняется неравенство

$$Z_k^* + f_k + c_k B/\beta_k \ge \overline{Z}_k(\overline{x}, \overline{y})$$

и, следовательно,

$$\sum_{j \in J}(c_{kj} - c_k p_{kj}) = Z_k^* + f_k + c_k B/\beta_k \ge \overline{Z}_k^*.$$

Рассмотрим случай, когда $I^* \ne \{k\}$. Пусть $J_k^* = \{j \mid y_{kj}^* = 1\}$ и i^* — произвольный элемент из множества I^* отличный от k. Сопоставим решению (x^*, y^*) допустимое решение $(\overline{x}, \overline{y})$ задачи $\overline{\mathit{ЗP}}_k$:

$$\overline{x}_i = x_i \text{ для } i \in I_{k+1},$$

$$\overline{y}_{ij} = \begin{cases} y_{ij}^*, & \text{если } \ i \in I^* \setminus \{k\}, j \notin J_k^*, \\ 1, & \text{если } \ j \in J_k^*, i = i^*, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как без ограничения общности можно считать, что для $j \in J^*$ выполняются неравенства $c_{i^*j} - c_{i^*} p_{i^*j} \le c_{kj} - c_k p_{kj}$, то

$$Z_k(x^*, y^*) + f_k + c_k B/\beta_k = \overline{Z}_k(\overline{x}, \overline{y}) \text{ и } \overline{Z}_k^* \ge \sum_{j \in J}(c_{kj} - c_k p_{kj}).$$

Следовательно

$$Z_k^* = \max\{\sum_{j \in J}(c_{kj} - c_k p_{kj}), \overline{Z}_k^*\} - f_k - c_k B/\beta_k.$$

Лемма 14 доказана.

Приближенный алгоритм для задачи $\mathit{ЗP}$:

Шаг 1. Положить $k := 1$, $Z^g := \sum_{j=1}^{n}(c_{mj} - c_m p_{mj}) - f_m - c_m B/\beta_m$.

Шаг 2. Найти с помощью жадного алгоритма решение (x^k, y^k) задачи $\overline{ЗP}_k$.

Вычислить $\overline{Z}_k^g := \overline{Z}_k(x^k, y^k)$ и $Z_k^g := \max\{\sum\limits_{j\in J}(c_{kj} - c_k p_{kj}), \overline{Z}_k^g\} - f_k - c_k B/\beta_k$.

Если $Z_k^g > Z^g$, то $Z^g := Z_k^g$.

Шаг 3. Положить $k := k + 1$. Если $k < m$, то вернуться на шаг 2.

Определим оценку снизу на минимальное значение целевой функции задачи $ЗP_k$:

$$Z_k^l = \sum_{j\in J} \min_{i\in I_k}(c_{ij} - c_i p_{ij}) - M \max_{i\in I_k} f_i - c_k B/\beta_k,$$

и положим $Z^l = \min_{k\in I} Z_k^l$. Будем считать, что $Z^* = \max_{k\in I} Z_k^*$ — оптимальное значение целевой функции задачи $ЗP$. Для полученного приближенного решения Z^g справедлива следующая оценка на его относительное уклонение от оптимума.

Теорема 13 $(Z^* - Z^g)/(Z^* - Z^l) \le 1/e$.

Доказательство. Пусть $Z^* = Z_k^*$. Допустим, что $Z_k^* = \sum\limits_{j\in J}(c_{kj} - c_k p_{kj}) - f_k - c_k B/\beta_k$. Тогда из Леммы 14 имеем, что на шаге 2 приближенного алгоритма выполняется равенство $Z_k^g = Z_k^*$. Поэтому $Z^g = Z^*$ и, следовательно, выполняется утверждение теоремы.

Предположим, что $Z_k^* = \overline{Z}_k^g - f_k - c_k B/\beta_k$. Из определения величин $\overline{c}_{ij}$ следует, что

$$Z_k^l \le \sum_{j\in J} \min_{i\in I_{k+1}} \overline{c}_{ij} - M \max_{i\in I_k} f_i - c_k B/\beta_k.$$

Учитывая соотношения

$$M \max_{i\in I_k} f_i = (M-1)\max\{\max_{i\in I_k\setminus k} f_i, f_k\} + \max\{\max_{i\in I_k\setminus k} f_i, f_k\} \ge (M-1)\max_{i\in I_k\setminus k} f_i + f_k,$$

получим неравенство

$$Z_k^l \leq \overline{Z}_k^l - f_k - c_k B/\beta_k,$$

где

$$\overline{Z}_k^l = \sum_{j \in J} \min_{i \in I_{k+1}} \overline{c}_{ij} - (M-1) \max_{i \in I_{k+1}} f_i$$

— оценка снизу на минимальное значение целевой функции задачи $\overline{ЗP}_k$. Из Леммы 14 и предположения следует, что

$$Z_k^* = \overline{Z}_k^* - f_k - c_k B/\beta_k.$$

Так как

$$Z_k^g \geq \overline{Z}_k^g - f_k - c_k B/\beta_k,$$

то из (3.32) имеем следующую оценку для величины Z_k^g:

$$(Z_k^* - Z_k^g)/(Z_k^* - Z_k^l) \leq 1/e.$$

Из условия $Z^* = Z_k^*$ и определения Z^l следует, что

$$(Z^* - Z_k^g)/(Z^* - Z^l) \leq 1/e.$$

Учитывая, что $Z^g \geq Z_k^g$, получаем требуемое. Теорема 13 доказана.

3.5 Вырожденный случай

Предположим, что величины $\alpha_i/\beta_i, i \in I$, не являются попарно различными и множество I упорядочено так, что $\alpha_1/\beta_1 \geq \alpha_2/\beta_2 \geq \ldots \geq \alpha_m/\beta_m > 0$. Разобьем множество I на непересекающиеся подмножества $S_l, l = 1, 2, \ldots, T$, так, чтобы величины α_i/β_i совпадали друг с другом, если они попадают в одно множество, и отличались бы друг от друга в противном случае.

Пусть $(v_i^*), (y_{ij}^*), (w_i^*)$ — произвольное оптимальное решение задачи ВР. Для него существует номер k, для которого выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{i\in\cup_{l=1}^{k} S_l} \beta_i w_i^* = B,\ w_i^* = v_i^* \text{ при } i \in \cup_{l=1}^{k-1} S_l \text{ и}$$

$$w_i^* \le v_i^* \text{ при } i \in S_k.$$

Так как в общем случае множество S_k содержит несколько элементов, то задача ЛР(v^*) может иметь бесконечно много оптимальных решений, удовлетворяющих приведенным соотношениям. Как и в невырожденном случае, среди оптимальных решений задачи ВР найдется решение с одной ненулевой компонентой у вектора w^*. Так как доказательства теорем 7–12 основывались на этом свойстве оптимальных решений и не использовалась единственность оптимальных решений задачи ЛР(v^*), то упомянутые результаты и в вырожденном случае имеют место.

Тем не менее наличие нескольких оптимальных решений на нижнем уровне существенно меняет свойства задачи ВР. Покажем, что в вырожденном случае любое оптимальное решение задачи может оказаться негарантированным. Рассмотрим линейную задачу (3.10)-(3.17). Пусть $I = J = \{1,2,3\}, f_i = 10, c_i = 1, c_{ij} = 0, \alpha_i = 1, \beta_i = 1, B = 1000$,

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 100 & 100 \\ 100 & 1 & 100 \\ 100 & 100 & 1 \end{pmatrix}$$

при $i \in I, j \in J$. Так как $\alpha_i/\beta_i = 1$, то $T = 1$ и $S_1 = I$. Прямыми вычислениями нетрудно показать, что для всех оптимальных решений (x^*, y^*, v^*, w^*) задачи выполняется равенство $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1,1,1)$

и оптимальное значение целевой функции равно 1033. Рассмотрим одно из таких решений:

$$y^*_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \;\; i = j, \\ 0 & \text{в противном случае} \,, \end{cases} \qquad v^*_i = \begin{cases} 1001, & \text{если} \;\; i = 1, \\ 1 & \text{в противном случае} \,, \end{cases}$$

$$w^*_i = \begin{cases} 1000, & \text{если} \;\; i = 1, \\ 0 & \text{в противном случае} \,. \end{cases}$$

Вектор w^* — оптимальное решение задачи $ЛP(v^*)$. Вектор

$$\bar{w}_i = \begin{cases} 998, & \text{если} \;\; i = 1, \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

также является оптимальным решением этой задачи. Несложно проверить, что для вектора $(x^*, y^*, v^*, \bar{w})$ нарушаются ограничения (3.13) и, следовательно, оптимальное решение (x^*, y^*, v^*, w^*) задачи BP не является гарантированным решением.

Список литературы

[1] Агеев А.А. О минимизации некоторых полиномов от булевых переменных. // Целочисленные экстремальные задачи (Управляемые системы). Новосибирск, 1981. Вып. 21, 3–5.

[2] Антипин А.С. Билинейное равновесное программирование(приложение к играм с ненулевой суммой) //Методы оптимизации и их приложения. 12-я Байкальская международная конференция. Иркутск, 2001. 10–24.

[3] Береснев В.Л. О задаче выбора оптимальных рядов изделий и комплектующих узлов. I. // Оптимальные процессы (Управляемые системы). Новосибирск, 1977. Вып. 16. 35–46.

[4] Береснев В.Л. Алгоритмы минимизации полиномов от булевых переменных. // Проблемы кибернетики. Москва, 1979. Вып. 36. 225–246.

[5] Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. – Новосибирск: Наука, 1978.

[6] Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. Москва: Наука, 1976.

[7] Гимади Э.Х. Эффективный алгоритм решения задачи размещения с областями обслуживания, связными относительно ациклической сети. // Управляемые системы. Новосибирск, 1983. Вып. 23. 12–23.

[8] Гимади Э.Х. Задача стандартизации с данными произвольного знака и связными, квазивыпуклыми и почти квазивыпуклыми матрицами. // Управляемые системы. Новосибирск, 1987. Вып. 27. 3–11.

[9] Горбачевская Л.Е. Алгоритмы и сложность решения двухуровневых задач стандартизации с коррекцией дохода. // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1998. Т. 5. N 2. С. 20–33.

[10] Горбачевская Л.Е., Дементьев В.Т., Шамардин Ю.В. Двухуровневая задача стандартизации с условием единственности оптимального потребительского спроса. // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1999. Т. 6. N 2. С. 3–11.

[11] Горбачевская Л.Е. Двухуровневые задачи стандартизации при условиях неднозначности оптимального потребительского выбора. // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 7. N 1. С. 35–46.

[12] Гэри М., Джонсон Д., Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Москва: Мир, 1982.

[13] Дементьев В.Т., Шамардин Ю.В. Трехуровневая модель выбора номенклатуры изделий. //Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. Т. 8. N 1. С. 40–46.

[14] Карп Р.М. Сводимость комбинаторных задач. Кибернетический сборник (новая серия). 1975. Москва: Мир. N. 12. С. 123–148.

[15] Колоколов А.А., Рубанова Н.А. Об одном декомпозиционном алгоритме решения двухуровневой задачи размещения. // Методы оптимизации и их приложения. Труды XII Байкальской международной конференции. Иркутск, 2001. 206–210.

[16] Кочетов Ю.А., Плясунов А.В. Полиномиальные алгоритмы для задачи выбора состава системы с активным противодействием. // Методы оптимизации и их приложения. X Байкальская школа–семинар. Иркутск, 1995. 86–87.

[17] Кочетов Ю.А., Плясунов А.В. Полиномиально разрешимый класс задач двухуровневого линейного программирования. // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1997. Т. 4. N 2. С. 23–33.

[18] Кук С. Сложность процедур вывода. Кибернетический сборник (новая серия). 1975. Москва: Мир. N. 12. С. 149–174.

[19] Ларин Р.М., Пяткин А.В. Двухуровневая задача о назначениях. // Методы оптимизации и их приложения. Труды XII Байкальской международной конференции. Иркутск, 2001. 212–218.

[20] Левин Л.А. Универсальные задачи перебора. //Проблемы передачи информации. 1973. Т. 9. N. 3. С. 115–117.

[21] Плясунов А.В. Задачи двухуровневого линейного программирования. // Проблемы оптимизации и экономические приложения. Тезисы докладов международной конференции. Омск. 1997. С. 127.

[22] Плясунов А.В. Полиномиально разрешимая задача двухуровневого вогнутого программирования. //Международная Сибирская конференция по исследованию операций. Материалы конференции.— Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1998. С. 98.

[23] Плясунов А.В. Полиномиально разрешимый случай задачи двухуровневого квадратичного программирования. //Методы оптимизации и их приложения. Труды XI Байкальской международной конференции. Иркутск, 1998. С. 257–260.

[24] Плясунов А.В. Полиномиально разрешимая задача двухуровневого квадратичного программирования. //Международная конференция "Дискретный анализ и исследование операций". Материалы конференции.— Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 2000. С. 201.

[25] Плясунов А.В. Полиномиально разрешимый класс задач двухуровневого нелинейного программирования. // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 7. N 2. С. 89–113.

[26] Плясунов А.В. Об одном подходе к решению задач двухуровневого программирования. // Методы оптимизации и их приложения. Труды XII Байкальской международной конференции. Иркутск, 2001. С. 227–231.

[27] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир. 1973.

[28] Рыпалова О.А. Двухуровневые модели налогооблажения сельскохозяйственных предприятий в регионе. // Методы оптимиза-

ции и их приложения. Труды XII Байкальской международной конференции. Иркутск, 2001. С. 233–237.

[29] Схрейвер А., Теория линейного и целочисленного программирования. Москва: Мир, 1991.

[30] Шамардин Ю.В. О двухуровневой задаче размещения при ограничениях на обьем производства. //Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 8. N 2. С. 114–118.

[31] Aiyoshi E., Shimizu K. Hierarchical decentralized systems and its new solution by a barrier method. //IEEE Trans. on systems, Man, and Cybernetics. 1981. V. SMC–11. N. 6. P. 444-449.

[32] Alexandrov D., Kochetov Y. Siple plant location problem with partial external finance: lower bound, heuristic and exact solution. // Operations Research Proceedings 1996. Berlin: Springer–Verlag. 1997. 90–94.

[33] Anandalingam G., Mathieu R., Pittard L., Sinha R. Artificial Intelligence Based Approaches for Hierarchical Optimization. // in Sharda R. et all (eds.). Impact of Recent Computer Advances in Operations Research. New York: North–Holland. 1989.

[34] Anandalingam G., Apprey V. Multi-level programming and conflict resolution. //European Journal of Operational Researh. 1991. V. 51. P. 233–247.

[35] Anandalingam G., Friesz T.L. (eds.) Hierarchical optimization: an introduction. //Annals of Operations Researh. 1992. V. 34. P. 281–292.

[36] Anandalingam G., Friesz T.L., Hierarchical optimization: an introduction, Annals of Operations Research, 1992. v. 34. P. 1-11.

[37] Antipin A. A gradient–type method for the equilibrium programming problem with coupled constraints. //Yugoslav J. of Operations Research. 2000. N. 6. P. 163-184.

[38] Antipin A. Equilibrium programming problems: prox-regularization and prox-methods. Recent Advances in Optimization. Lecture notes in Economics and Mathematical Systems.–Berlin: Springer. 1997. P. 1–18.

[39] Bard J.F., Falk J.E. An explicit solution to the general multi-level programming problem. //Computers & Operations Research. 1982. V. 9. P. 77–100.

[40] Bard J.F. An Efficient Point Algorithm for a Linear Two–Stage Optimization Problem. //Operations Research. 1983. V. 31. N. 4. P. 670–684.

[41] Bard J.F. An Algorithm for solving the general bilevel programming program. //Math. of Oper. Res. 1983. V. 8. P. 260–272.

[42] Bard J.F. Coordination of a multidivisional firm through two levels of management //Omega. 1983. V. 11. N. 5. P. 457–465.

[43] Bard J.F. Convex two–level optimization. //Math. Program. 1988. V. 40. P. 15–27.

[44] Bard J.F., Moore J.T. A Branch and Bound Algorithm for the bilevel programming problem //SIAM Journal of Sci. and Statistical Computing. 1990. V. 11. N 2 P. 281–292.

[45] Bard J.F., Moore J.T. The mixed integer linear bilevel programming problem. //Operations Research. 1990. V. 38. N. 5. P. 911–921.

[46] Bard J.F., Moore J.T. An algorithm for the Discrete bilevel programming problem. //Naval Research Logistics. 1992. V. 39. P. 419–435.

[47] Bard J.F. Bilevel practical optimization. Algorithms and Applications. //Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1998.

[48] Ben–Ayed O., Blair C.E., Boyce D.E. A general bilevel linear programmming formulation of the network desisgn problem. //Transportation researh. 1988. V. B22. P. 311–318.

[49] Ben-Ayed O., Bilevel linear programming, // Computers and Operations Research. 1993. V. 20. N 5. P. 485-501.

[50] Bialas W.F., Karwan M.H. On two–level optimization. //IEEE Trans. Automatic Control. 1982. V. AC-27. N 1. P. 211–214.

[51] Bracken J., McGill J.T. Mathematical programs with Optimization problems in the constraints. //Operations researh. 1973. V. 21. N. 1. P. 37–44.

[52] Candler W., Norton R. Multi–level programmming and development policy. //Working paper. 1977. N.258. World Bank.

[53] Candler W., Townsely R. A linear two–level programming problem. //Computers & Operations Research. 1982. V. 9. N. 1. P. 59–76

[54] Cornuejols G., Fisher M., Nemhauser G. Location of bank accounts to optimize float : an analytic study of exact and approximate algorithms. // Management Science. 1977. V. 23. N.8. P. 789–810.

[55] Cornuejols G., Fisher M., Nemhauser G. On the uncapacitated location problem. // Annals of Discrete Mathematics. Amsterdam: North–Holland Publishing Company. 1977. V. 1. P. 163–177.

[56] Danskin J.M. The theory of max-min with applications. //SIAM J. of Applied Mathematics. 1966. V. 14. N. 4. P. 641–664.

[57] Dyer M.E. An $O(n)$ algoritm for the multiple-choice knapsak linear program. //Math. Program. 1984. V. 29. N. 1. P. 57–63.

[58] Edmonds J. Paths, trees and flowers. //Canad. J. Math. 1965. V. 17. P. 449–467.

[59] Edmunds T.A., Bard J.F. Algorithm for nonlinear bilevel mathematical programs. //IEEE Trans. on systems, Man, and Cybernetics. 1991. V. 21. P. 83–89.

[60] Falk J.E., Liu J. On bilevel programming, Part 1: general nonlinear Cases. //Math. Prog. 1995. V. 70. P. 47–52.

[61] Feige U. A threshold of $\ln n$ for approximating set cover. //Proc. 28th Ann. ACM Symp. on Theory of Comp. ACM. 1996. P. 314–318.

[62] Fortuny-Amat J., McCarl B. A representation and economic interpretation of a two–level programming problem. //Journal of the Operational Research Society. 1981. V. 32. P. 783–792.

[63] Gendreau M., Marcotte P., Savard G. A Hybrid Tabu–Ascent Algorithm for the Linear Bilevel Programming Problem. //Journal of Global Optimization. 1996. V. 8. N. 3. P. 217–233.

[64] Geoffrion A.M. Lagrangian relaxation for Integer Programming. // Math. Prog. Study. 1974. V. 2. P. 82–114.

[65] Hansen P., Jaumard B., Savard G., A variable elimination algorithm for bilevel linear programming. //SIAM Journal Scientific and Statistical Computing, 1992. V. 13. P. 1194–1217.

[66] Ishizuka Y., Aiyoshi E. Doubly penalty method for bilevel programming problem. //Annals of Operations Research. 1992. V. 34. N 1–4. P. 73–88.

[67] Kochetov Y., Plysunov A. Efficient algorithm for a class of bilevel linear programming problems. //Operations Research Proceedings 1996. Berlin: Springer–Verlag. 1997. P. 10–13.

[68] Kolstad C.D., Lasdon L.S. Derivative evaluation and computational experience with large bilevel mathematical programs. //J. of Optimization Theory & Appl. 1990. V. 65. P. 485–499.

[69] Krarup J., Bilde O. The simple plant location problem: Survey and Synthesis. // European Journal of Operational Research. 1983. V. 12. P. 36–81.

[70] Judice J.J., Faustino A.M. A sequential LCP method for bilevel linear programming. //Annals of Operations Research. 1992. V. 34. N 1–4. P. 89–106.

[71] Leontiev A. Contact shape optimization: a bilevel programming approach //Structural and Multidiscoplinary Optimization. 2000. V. 20. N 3. P. 214–221.

[72] Leontiev A. Mathematical programming approach for unconfined seepage flow problem. //Engineering Analysis with Boundary Elements. 2000. V. 10. P. 1–8.

[73] Leontiev A., Huacasi W., Herskovits J. Bilevel programming problems: an interior point algorithm and engineering applications. //Optimization methods and their applications. Proceedings of 12-th Baikal International Conference. Irkutsk. 2001. P. 220–225.

[74] Marcotte P. Network desisgn problem with congestion effects: A case of bilevel programmming. //Math. Program. 1986. V. 34. P. 142–162.

[75] Martello S., Toth P. Knapsack problems. Algorithms and computer implementations. //Chichester:John Wiley & Sons, 1990.

[76] Mathieu R., Pittard L., Anandalingam G. Genetic Algorithm Based Approach to Bi–Level Linear Programming. //Recherche operationnelle. 1994. V. 28. N 1. P. 1–21.

[77] Plyasunov A. A polynomially solvable case of the bilevel nonlinear programming problem. //Symposium on Operations Research 1997. Jena, 1997, P. 33.

[78] Savard G., Gauvin J., The steepest descent direction for the nonlinear bilevel programming problem, //Operations Research Letters. 1994. V. 15. N 5. P. 265-272.

[79] Shimizu K., Aiyoshi E. New computational method for Stackelberg and min–max problems by use of a penalty method. // IEEE Trans. Automatic Control. 1981. V. AC-26. P. 460–466.

[80] Shimizu K., Lu M. A global optimization method for the Stackelberg Problem with convex functions via problem transformations and concave programming. //IEEE Trans. Systems, Man, Cybernetics. 1995. V. 25. N. 12. P. 1635–1640.

[81] Stackelberg H.V., The Theory of the Market Economy. //Oxford: Oxford University Press, 1952.

[82] Tobin R. Uniqueness results and algorithm for Stackelberg–Cournot–Nash equilibra. // Annals of Operations Research. 1992. V. 34. P. 21–36.

[83] White D.J., Anandalingam G. A penalty function for solving bilevel linear programs. //Journal of Global Optimization. 1993. V. 3. P. 397–419.

[84] Vicente L.N., Savard G., Judice J.J. Descent approaches for quadratic bilevel programming. //J. of Optimization Theory & Appl. 1994. V. 81. N. 2. P. 379–399.