ЛЕКЦИЯ № 7

Необходимые условия экстремума

1. Геометрическая форма необходимых условий оптимальности

2. Необходимые условия оптимальности Фритца–Джона

3. Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

Найти:

$$\min f(x) \tag{1}$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \le 0, i = \overline{1, m}. \tag{2}$$

Здесь $f, \varphi_i : R^n \longrightarrow R$ и $f, \varphi_i \in C^1$.

Определение 8. **Направление $s \neq 0$ называется возможным в точке $x \in Q$, если существует такое число $\overline{\beta}$, что $x + \beta s \in Q$, $\forall \beta \in [0, \overline{\beta}]$.**

Ограничение φ_i называется **активным** в точке x, если $\varphi_i(x) = 0$. $I(x)$ – множество номеров ограничений активных в данной точке.

Лемма 7. Если вектор $s \neq 0$ удовлетворяет системе

$$(\varphi_i'(x), s) + \sigma \leq 0, i \in I(x),$$

при некотором $\sigma > 0$, то направление s является возможным в точке x.

Доказательство. Считаем, что $I(x) \neq \varnothing$ (т.к. иначе любое направление $s \neq 0$ является возможным)

Если $i \notin I(x)$, то малое перемещение не нарушает строгое ограничение $\varphi_i(x) < 0 \implies$ найдется подходящее $\overline{\beta_i}$.

Пусть $i \in I(x) (\equiv \varphi_i(x) = 0)$. Далее рассуждаем от противного. Допустим, что $\varphi_i(x + \beta s) > 0,$ для достаточно малых $\beta > 0 \implies$
$\varphi_i(x+\beta s)/\beta = (\varphi_i(x+\beta s) - \varphi_i(x))/\beta \longrightarrow$
$\longrightarrow (\varphi_i'(x), s) \geq 0$ (при $\beta \to 0$).

Противоречие. Т.к. по условиям леммы
$(\varphi_i'(x), s) < 0,$ ■

Теорема 8. Для того, чтобы точка $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}$ являлась точкой локального минимума функции $\boldsymbol{f}$ на множестве $\boldsymbol{Q}$ необходимо, чтобы для любого решения $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\sigma})$ системы

$$(\varphi_i'(x), s) + \sigma \leq 0, i \in I(x), \tag{12}$$

$$(f'(x), s) + \sigma \leq 0, \tag{13}$$

выполнялось условие

$$\sigma \leq 0. \tag{14}$$

Теорема 9 (Необходимые условия оптимальности Фритца–Джона). Пусть x^* — локальный экстремум задачи (1), (2), функции f, $\varphi_i, i = \overline{1, m}$, непрерывны и непрерывно дифференцируемы. Тогда найдутся такие не все равные 0 множители $\lambda_i \geq 0, i = \overline{0, m}$, что

$$\lambda_0 f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*) = 0^n, \qquad (15)$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}. \qquad (16)$$

Следовательно

$$\lambda_0 f'(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \varphi_i'(x^*) = 0^n,$$

$$\lambda_0 + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i = 1. \qquad (17)$$

Положим $\lambda_i = 0, i \notin I(x^*)$ и получим

$$\lambda_0 f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*) = 0^n,$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}. \blacksquare$$

Теорема 10 (Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера). *Пусть* x^* *— локальный экстремум задачи (1), (2), функции* f, $\varphi_i, i = \overline{1,m}$, *непрерывны и непрерывно дифференцируемы и вектора* $\varphi_i'(x^*), i \in I(x^*)$, *линейно независимы. Тогда найдутся такие множители* $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1,m}$, *что*

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*), \tag{18}$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1,m}. \tag{19}$$

Доказательство. Из теоремы 9 $\Longrightarrow$ найдутся такие не все равные 0 множители $\boldsymbol{\lambda_i \geq 0, i = \overline{0, m}}$, что

$$\boldsymbol{\lambda_0 f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*) = 0^n.} \qquad \mathbf{(15)}$$

$$\boldsymbol{\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}.} \qquad \mathbf{(16)}$$

Также получили равенство

$$\boldsymbol{\lambda_0 + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i = 1.} \qquad \mathbf{(17)}$$

Покажем, что $\boldsymbol{\lambda_0 \neq 0}$ (от противного). Пусть $\boldsymbol{\lambda_0 = 0}$. Из (17) $\Longrightarrow$ $\exists$ $\boldsymbol{\lambda_i \neq 0 \Longrightarrow \{\varphi_i'(x^*)\}_{i \in I(x^*)}}$ линейно зависимые вектора. Противоречие. $\Longrightarrow \boldsymbol{\lambda_0 > 0}$

Теорема о замыкании конуса возможных направлений

$$K_{\leq}(x) = \{s \neq 0 | (\varphi_i'(x), s) \leq 0, \forall\, i \in I(x)\}.$$

Т.к. $K_f(x) \subseteq K_{\leq}(x)$, то конус $K_{\leq}(x)$ называется внешней аппроксимацией конуса возможных направлений.

Теорема 11.

$$\text{Если } K_{<}(x) \neq \emptyset, \text{ то } \overline{K}_f(x) = K_{\leq}(x).$$

Доказательство. Действительно, пусть конус $K_{<}(x)$ не пуст. Тогда найдётся $\overline{s}$ такой, что

$$(\varphi_i'(x), \overline{s}) < 0, \forall\, i \in I(x).$$

Пусть $s \in K_{\leq}(x)$, т.е.

$$(\varphi_i'(x), s) \leq 0, \forall\, i \in I(x).$$

Очевидно, что для любого $\lambda \in [0, 1)$:

$$\lambda s + (1 - \lambda)\overline{s} \in K_{<}(x).$$

Таким образом $\boldsymbol{s}$ предел последовательности направлений из $\boldsymbol{K}_<(\boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{\lambda}$ стремящимся к 1 снизу. Учитывая, что

$$\boldsymbol{K}_<(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{K}_\leq(\boldsymbol{x}),$$

получим $\overline{\boldsymbol{K}}_<(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}_\leq(\boldsymbol{x})$.

Т.к.

$$\boldsymbol{K}_<(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{K}_\leq(\boldsymbol{x}),$$

то

$$\overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}_\leq(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{s} \neq 0 | (\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{i}}^{'}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{s}) \leq \mathbf{0}, \forall\ \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x})\}. \blacksquare$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Задача (1), (2) называется задачей выпуклого программирования, если функции f, $\varphi_i, i = \overline{1, m},$ — выпуклы.

Множество Q выпукло. По прежнему считаем, что f, $\varphi_i \in C^1$.

Условие регулярности для выпуклого случая:

$$\forall i, i = \overline{1, m},\ \exists x^i \in Q : \varphi_i(x^i) < 0.$$

Эквивалентно условию регулярности Слейтера

$$\exists \widetilde{x} \in Q : \varphi_i(\widetilde{x}) < 0, i = \overline{1, m}.$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Лемма 8. Функция f дифференцируемая на выпуклом множестве Q, выпукла в том и только в том случае, когда для любых $x, y \in Q$: $(f'(x), y - x) \leq f(y) - f(x)$.

Доказательство. $\forall x \neq y \in Q, \forall \alpha \; 0 < \alpha \leq 1$

$$f(x + \alpha(y - x)) \leq f(x) + \alpha(f(y) - f(x)).$$

Перепишем неравенство:

$$\|y - x\| \frac{f(x + \beta s) - f(x)}{\beta} \leq f(y) - f(x),$$

где $s = \frac{y-x}{\|y-x\|}$, $\beta = \alpha\|y - x\|$. Устремим β к 0. В пределе получим

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

$$(f'(x), s)\, \|y - x\| \leq f(y) - f(x).$$

Но

$$(f'(x), s)\, \|y - x\| = (f'(x), y - x).$$

Итак, доказали неравенство

$$(f'(x), y - x) \leq f(y) - f(x).$$

В обратную сторону. Пусть $\forall x, y \in Q : (f'(x), y - x) \leq f(y) - f(x)$.

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

По условию $\forall\ \alpha \in [0,1] : z = \alpha x + (1-\alpha) y \in Q$.

Умножим неравенство $(f'(z), x - z) \le f(x) - f(z)$ на α, а

неравенство $(f'(z), y - z) \le f(y) - f(z)$ на $(1-\alpha)$ и сложим их

$$0 = (f'(z), \alpha(x - z) + (1-\alpha)(y - z)) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) - f(z)$$

$$\Longrightarrow f(\alpha x + (1-\alpha) y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Лемма 9. Если

$$\boldsymbol{Q = \{x | \varphi_i(x) = (a_i, x) - b_i \le 0, i = \overline{1, m}\},}$$

то условия

$$\boldsymbol{(a_i, s) \le 0, i \in I(x^*)}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы направление $\boldsymbol{s}$ было возможным в точке $\boldsymbol{x^* \in Q}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\beta > 0}$. Рассмотрим

$$\boldsymbol{\varphi_i(x^* + \beta s) = (a_i, x^* + \beta s) - b_i = (a_i, x^*) - b_i + \beta(a_i, s).}$$

$$\boldsymbol{\forall i \notin I(x^*)\ (a_i, x^*) - b_i < 0 \Rightarrow \forall i \notin I(x^*)\ \varphi_i(x^* + \beta s) \le 0,}$$

для достаточно малых $\boldsymbol{\beta}$.

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

$$\forall i \in I(x^*)\ \varphi_i(x^* + \beta s) = (a_i, x^* + \beta s) - b_i = \beta(a_i, s) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^* + \beta s \in Q\ \forall \beta > 0 \Leftrightarrow (a_i, s) \le 0\ \forall i \in I(x^*).\blacksquare$$

Другими словами в лемме утверждается, что $K_f(x) = K_{\le}(x)$

Эта лемма позволяет элиминировать условие Слейтера в задаче выпуклого программиро
в случае линейных ограничений.

Помним: функции f, φ_i — выпуклые, непрерывно-дифференцируемые. Множество допустимых решений Q удовлетворяет условию Слейтера.