ЛЕКЦИЯ № 11

1. Метод ветвей и границ

2. Конечность алгоритма

Метод ветвей и границ

Простой перебор: наилучшее текущее решение (рекорд) сравнивается с очередным допустимым решением.

Метод ветвей и границ (МВГ): рекорд сравнивается с целым множеством допустимых решений.

МВГ — метод, который сводит поиск оптимального решения посредством последовательного разбиения множества допустимых решений на все более мелкие подмножества и последующего сравнения этих подмножеств с рекордом.

Рассмотрим задачу:

$$\min\{f(x) | x \in Q\}.$$

Известно разбиение множества Q на конечное число атомарных множеств. Содержательно, атомарное множество это подмножество Q, на котором исходная задача легко решается (точно или приближенно).

Пусть $\boldsymbol{x(d)}$ — наилучшее достижимое решение задачи на атомарном множестве $\boldsymbol{d}$. Для нее существует малотрудоёмкий алгоритм вычисления.

Метод ветвей и границ

Например, когда множество Q - конечно, роль атомарных могут играть одноточечные множества. Если Q – гиперкуб, а целевая функция непрерывна, то в качестве атомарных можно выбрать достаточно маленькие гиперкубики.

При описании алгоритма МВГ рассматриваем лишь такие подмножества $\boldsymbol{Q}$, которые есть объединение атомарных множеств (разложимые подмножества).

Метод ветвей и границ

Будем предполагать, что независимо от природы множества Q, число атомарных множеств конечно.

Функцию $\boldsymbol{b(d)}$, определенную на разложимых подмножествах множества $\boldsymbol{Q}$ и ставящую в соответствие множеству $\boldsymbol{d}$ определенное разбиение его на несобственные разложимые подмножества, будем называть функцией ветвления.

Метод ветвей и границ

Вещественную функцию $\boldsymbol{H(d)}$, определенную на разложимых подмножествах множества $\boldsymbol{Q}$ и такую, что

$$\mathbf{0} < \boldsymbol{H(d)} \leq \min_{\boldsymbol{x \in d}} \boldsymbol{f(x)}$$

назовем нижней границей.

Функция $\boldsymbol{H(d)}$ — невозрастающая, то есть такая, что $\boldsymbol{H(d_1)} \geq \boldsymbol{H(d_2)}$, если $\boldsymbol{d_1} \subseteq \boldsymbol{d_2}$.

Метод ветвей и границ

Алгоритм, реализующий метод ветвей и границ, состоит из конечной последовательности однотипных шагов. На каждом шаге рассматривается некоторое разбиение $t_1, \ldots, t_L$ множества еще неотброшенных допустимых решений и некоторый рекорд x^0.

На первом шаге имеем $t_1 = Q$, x^0 – произвольный элемент множества Q. Пусть к очередному шагу имеется разбиение $t_1, \ldots, t_L$ и рекорд x^0.

Шаг начинается с проверки элементов разбиения (не обязательно всех) на предмет выяснения, во-первых, содержит ли оно решение лучше рекорда и, во-вторых, какое решение в подмножестве является наилучшим. Предположим, что проверяется множество t_l. Это множество считается проверенным и отбрасывается, если выполняется одно из двух условий:

$$1)\ H(t_l) \geq f(x^0),$$

2) функция $\boldsymbol{x(d)}$ определена на множестве $\boldsymbol{t_l}$. При этом, если реализуется второй случай и

$$\boldsymbol{f(x(t_l)) < f(x^0)},$$

то устанавливается новое значение рекорда $\boldsymbol{x^0 = x(t_l)}$.

Если отброшенными оказываются все элементы разбиения, то алгоритм заканчивает работу и $\boldsymbol{x^0}$ – решение, найденное в результате его работы.

Метод ветвей и границ

Пусть $t'_1, \ldots, t'_{L'}, 0 < L' \leq L$ – множества, не отброшенные в результате проверок. Выберем среди них некоторое "перспективное"подмножество t_{l_0}.

Применим к нему функцию ветвления $b(d)$, в результате чего получим его разбиение $d_1, \ldots, d_N$ и в целом новое разбиение

$$t'_1, \ldots, t'_{l_0-1}, d_1, \ldots, d_N, t'_{l_0+1}, \ldots, t'_{L'}$$

множества неотброшенных решений.

После этого начинается следующий шаг.

Конечность алгоритма следствие следующих фактов:

1. Конечность числа атомарных множеств.
2. На каждом шаге алгоритма хотя бы один элемент разбиения либо отбрасывается, либо разбивается на подмножества, каждое из которых состоит из меньшего числа атомарных множеств.
3. Атомарные множества всегда отбрасываются.

Метод ветвей и границ

Что можно сказать о полученном в результате работы алгоритма рекорде $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$?

Ответ зависит от природы функции $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{d})$. Ограничимся анализом двух случаев.

В первом данная функция вычисляет оптимальное решение на любом из атомарных множеств.

Во втором функция находит на любом из атомарных множеств лишь некоторое приближённое решение.

Покажем, что в первом случае полученный в результате работы алгоритма рекорд $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ является оптимальным решением.

Предположим, это не так и пусть $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}) > \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{*})$, где $\boldsymbol{x}^{*}$ – оптимальное решение. Тогда на некотором шаге алгоритма элемент $\boldsymbol{x}^{*}$ был отброшен вместе с некоторым множеством $\boldsymbol{t}$. Но множество $\boldsymbol{t}$ не может быть отброшено по первому условию, поскольку в этом случае будут выполняться противоречащие исходному предположению неравенства

$$\boldsymbol{f(x^0) \le f(x_1^0) \le H(t) \le f(x^*)},$$

где $\boldsymbol{x_1^0}$ – рекорд, действующий на момент проверки множества $\boldsymbol{t}$. Значит на множестве $\boldsymbol{t}$ определена функция $\boldsymbol{x(d)}$ и это множество отброшено по второму условию. Но тогда рекорд $\boldsymbol{x_1^0}$ должен быть заменен на решение $\boldsymbol{x(t)}$ такое, что $\boldsymbol{f(x(t)) = f(x^*)}$.

Отсюда получаем что $f(x^0) \leq f(x^*)$. Это противоречит исходному предположению и доказывает оптимальность решения x^0.

Рассмотрим второй случай. Будем считать, что для всякого атомарного множества d выполняется неравенство

$$f(x(d)) \leq (1+\varepsilon) f(x^*(d)),$$

где $x^*(d)$ – оптимальное решение задачи на множестве d.

Метод ветвей и границ

Покажем, что выполняется неравенство

$$f(x^0) \le (1+\varepsilon) f(x^*),$$

где x^* – оптимальное решение задачи. Предположим противное и пусть

$$f(x^0) > (1+\varepsilon) f(x^*).$$

Тогда $f(x^0) > f(x^*)$ и, следовательно, решение x^* на некотором шаге алгоритма было отброшено вместе с некоторым множеством d.

Поскольку $\boldsymbol{f(x^0) > f(x^*)}$, то множество $\boldsymbol{d}$ не могло быть отброшено по первому условию. Если оно отброшено по второму условию, то можем написать

$$\boldsymbol{f(x^0) \le f(x(d)) \le (1+\varepsilon) f(x^*(d)) =}$$
$$\boldsymbol{= (1+\varepsilon) f(x^*)}$$

Полученное неравенство противоречит предположению, что доказывает справедливость требуемого.

Метод ветвей и границ

При разработке алгоритма МВГ, исходя из специфики рассматриваемой задачи, необходимо конкретизировать и определить следующие составные элементы общей схемы:

– атомарные множества решений;

– способ задания подмножеств решений;

– функцию ветвления;

– способ вычисления нижней границы;

– функцию выбора наилучшего решения;

– правило выбора перспективного элемента разбиения.

Рассмотрим задачу, в которой целевая функция удовлетворяет условию Липшица.

Ограничимся задачей минимизации на параллелепипеде: $\boldsymbol{f(x) \longrightarrow \inf_{x \in Q}}$, где $\boldsymbol{Q = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \ldots, n\}}$

Метод ветвей и границ

Соглашения: $a_i, b_i \in R, a_i < b_i$,

$$|f(x)-f(y)| \le L\|x-y\|_\infty \text{ для всех } x, y \in Q, \quad (35)$$

где $L = const > 0$ – константа Липшица,

$$\|x-y\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|.$$

Из (35) $\Longrightarrow$ функция f – непрерывна и, следовательно, достигает минимального значения f^* на параллелепипеде.

Метод ветвей и границ

Выберем на отрезке $[a_j, b_j]$ (на оси j) следующие точки

$$x_j^1 = a_j + \frac{h}{2}, x_j^2 = x_j^1 + h, \ldots, x_j^{i+1} = x_j^i + h, \ldots$$

$$\ldots, x_j^{m_j-1} = x_j^1 + (m_j - 2)h, x_j^{m_j} =$$

$$= \min\{x_j^1 + (m_j - 1)h, b_j\},$$

где $h = \frac{2\varepsilon}{L}$ – шаг метода, а m_j – натуральное число:

$$x_j^{m_j-1} < b_j - \frac{h}{2} \leq x_j^1 + (m_j - 1)h$$

На параллелепипеде Q введем сетку

$$Q_h = \{x^{i_1 \ldots i_n} = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \ldots, x_j^{i_j}, \ldots, x_n^{i_n})\},$$

где j-ая координата $x_j^{i_j}$ точки $x^{i_1 \ldots i_n}$ принимает одно из следующих значений

$$x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^{m_j}.$$

Пусть

$$F_h = \min_{Q_h} f(x^{i_1 \ldots i_n}).$$

Теорема 18. Для любой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию Липшица (35), справедлива оценка

$$f^* \le F_h \le f^* + \varepsilon. \tag{36}$$

Доказательство. Множество

$$Q_{i_1 \dots i_n} = \left\{ x \in R^n : \|x - x^{i_1 \dots i_n}\|_\infty \le \frac{h}{2} \right\}$$

является кубом с центром в точке $x^{i_1 \dots i_n}$, с гранями параллельными осям координат, у которого длина ребра равна h.

Множество всех кубов $Q_{i_1\ldots i_n}$ с центрами $x^{i_1\ldots i_n} \in Q_h$ покрывают весь параллелепипед $Q \Longrightarrow$ Для любой точки $x \in Q$ найдется куб $Q_{i_1\ldots i_n}$, содержащий эту точку $\Longrightarrow$ и условия (35) имеем для любого $x \in Q$

$$f(x) \geq f(x^{i_1\ldots i_n}) - L\|x - x^{i_1\ldots i_n}\|_\infty \geq$$

$$\geq F_h - L\frac{h}{2} = F_h - \varepsilon \Longrightarrow$$

Имеем $f^* \leq F_h \leq f^* + \varepsilon$. ■