ЛЕКЦИЯ № 14

Метод штрафных функций

1. Метод внешних штрафов.

2. Метод внутренних штрафов.

Прямые и двойственные методы решения экстремальных задач

Прямые методы решения экстремальных задач с ограничениями имеют дело непосредственно с рассматриваемой задачей (называемой исходной или прямой задачей в противоположность двойственной задаче).

В прямых методах порождается последовательность допустимых решений, на которых значение целевой функции монотонно убывает.

Прямые и двойственные методы решения экстремальных задач

Их плюс: на любом шаге имеем допустимое приближенное решение; минус: непросто гарантировать глобальную сходимость.

Прямые и двойственные методы решения экстремальных задач

Общий принцип двойственных методов заключается в замене исходной задачи на решение последовательности экстремальных задач без ограничений.

Их плюс: проще гарантировать глобальную сходимость; минус: допустимое решение обычно получается лишь по завершении работы метода.

Метод штрафов — пример двойственного метода.

Метод штрафных функций

Основная идея метода заключается в сведении исходной задачи

$$f(x) \to \min_{x \in Q} \tag{40}$$

$$Q = \{x \in R^n \mid \varphi_i(x) \le 0,\ i = 1, ..., m\} \tag{41}$$

к последовательности задач минимизации

$$F_k(x) = f(x) + P_k(x) \to \min_{x \in R^n},\ k = 1, 2, \dots \tag{42}$$

где $P_k(x)$ — штрафная функция множества Q.

Метод штрафных функций

Определение Функция $P_k(x)$ называется штрафной функцией множества Q, если $P_k(x) \geq 0$ для любых $k = 1, 2, \ldots,\ x \in R^n$ и

$$\lim_{k\to\infty} P_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in Q \\ +\infty, & \text{если } x \notin Q. \end{cases}$$

Для любого множества Q можно указать сколь угодно много штрафных функций. Пусть $[a]_+ = \max(0, a)$ и h функция от двух переменных.

Метод штрафных функций

Например: $h(k,y) = k[y]_+$, $h(k,y) = k[y]_+^2$, $h(k,y) = (1 + [y]_+)^k - 1$, где k – целое, а $y \in R$.

Штрафные функции:

$$k\sum_{i=1}^{m}[\varphi_i(x)]_+, k\sum_{i=1}^{m}[\varphi_i(x)]_+^2,$$

Метод штрафных функций

$$\sum_{i=1}^{m}(1+[\varphi_i(x)]_+)^k-1.$$

Это разнообразие позволяет подобрать наиболее удобный вид минимизируемой функции $F_k(x)$ и применить более простые методы безусловной оптимизации.

Метод штрафных функций

Для упрощения дальнейших рассуждений будем считать, что функция штрафа имеет следующий вид: $P_k(x) = kH(x)$, где функция $H(x)$ может быть, например, функцией вида

$$\sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(x)]_+^2 \text{ или } \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(x)]_+.$$

Величина k называется коэффициентом штрафа.

Метод штрафных функций

Опишем $(l+1)$-ю итерацию метода штрафов. Пусть $x(k_l)$ — решение задачи без ограничений (42) на шаге l.

Шаг $l+1$. Если $H(x(k_l)) \leq \varepsilon$, то $x(k_l)$ — хорошее приближение для оптимального решения, и вычисления заканчиваются. Иначе выбираем коэффициент штрафа $k_{l+1} > k_l$ (например, $k_{l+1} = 10k_l$) и решаем задачу (42) для нового значения коэффициента штрафа. Получим новое приближение $x(k_{l+1})$.

Метод штрафных функций

Замечание. Задачу (42) можно решить методом градиентов. При этом в качестве начальной точки можно использовать $\boldsymbol{l}$-ое приближение $\boldsymbol{x(k_l)}$. Итак, вместо точного решения $\boldsymbol{x^*}$ будем искать приближенное решение с погрешностью, не превосходящей $\boldsymbol{\epsilon}$. Отметим, что, вообще говоря, приближенное решение $\boldsymbol{x(k_l)}$ может и не принадлежать $\boldsymbol{Q}$.

Метод штрафных функций

Дальнейшее изложение уже не зависит от того, каким именно методом будет найдена точка $\boldsymbol{x(k_l)}$ $\Longrightarrow$ ограничимся предположением о существовании такого метода и перейдем к исследованию сходимости метода штрафных функций.

Метод внешних штрафов

Итак задача (42) имеет вид

$$F_k(x) = f(x) + kH(x) \to \min_{x \in R^n}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

где k – коэффициент штрафа, а

$$H(x) = \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(x)]_+^2 \text{ или } H(x) = \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(x)]_+.$$

Метод внешних штрафов

Соглашения:

1. функция $\boldsymbol{H : R^n \longrightarrow R}$ непрерывна и $\boldsymbol{H(x) \geq 0, \forall x \in R^n}$,

2. $\boldsymbol{H(x) = 0 \iff x \in Q = \{x | \varphi_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\}}$

3. $\boldsymbol{f}$ — непрерывная функция, а множество $\boldsymbol{Q}$ замкнуто

Метод внешних штрафов

Теорема 22. Пусть выполняется одно из двух условий:

(a). $f(x_k) \longrightarrow +\infty$ для любой последовательности $\{x_k\} \in Q$, $\|x_k\| \longrightarrow +\infty$ или

(b). Q ограничено и $H(x_k) \longrightarrow +\infty$ для любой последовательности $\{x_k\}$, $\|x_k\| \longrightarrow +\infty$

Тогда 1). последовательность $x(k)$ имеет хотя бы одну предельную точку и любая предельная точка этой последовательности есть оптимальное решение задачи; 2). $H(x(k)) \longrightarrow 0$

Доказательство. Покажем, что $\exists$ оптимальное решение задачи. Пусть выполняется (a). Если $\boldsymbol{Q}$ ограничено, то всё очевидно. Иначе $\exists$ последовательность $\{\boldsymbol{x_k}\} \in \boldsymbol{Q}$: $\|\boldsymbol{x_k}\| \longrightarrow +\infty \Longrightarrow \boldsymbol{f(x_k)} \longrightarrow +\infty$. Множества Лебега вида $\boldsymbol{M(x_k)} = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{f(x)} \le \boldsymbol{f(x_k)}\}$ – ограничены и замкнуты $\Longrightarrow \exists$ оптимальное решение.

В случае (b) утверждение очевидно.

Метод внешних штрафов

Пусть x^* – оптимальное решение задачи, $k_1 < k_2 < \dots < k_l < k_{l+1} < \dots$ — коэффициенты штрафа (используемые алгоритмом), а x^l – соответствующие приближения ($x^l = x(k_l)$).

Из $k_{l+1} > k_l \Longrightarrow$

$$F_{l+1}(x^{l+1}) = f(x^{l+1}) + k_{l+1}H(x^{l+1}) >$$

$$> f(x^{l+1}) + k_l H(x^{l+1})$$

Т.к. x^l — минимум $F_l(x) \Longrightarrow$

Метод внешних штрафов

$$\boldsymbol{f(x^{l+1}) + k_l H(x^{l+1}) \geq f(x^l) + k_l H(x^l)}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{F_{l+1}(x^{l+1}) > F_l(x^l)} \text{ для } \forall \boldsymbol{l} \qquad \textbf{(43)}$$

По определению $\boldsymbol{x^l}$ и $\boldsymbol{x^{l+1}}$ имеем

$$\boldsymbol{f(x^l) + k_l H(x^l) \leq f(x^{l+1}) + k_l H(x^{l+1})}$$

$$\boldsymbol{f(x^{l+1}) + k_{l+1} H(x^{l+1}) \leq f(x^l) + k_{l+1} H(x^l)}$$

Суммируем, приводим подобные, получим

$$\boldsymbol{(k_{l+1} - k_l) H(x^{l+1}) \leq (k_{l+1} - k_l) H(x^l)}$$

Метод внешних штрафов

$\Longrightarrow$ и неравенства $k_{l+1} > k_l$ имеем

$$H(x^{l+1}) \le H(x^l) \text{ для } \forall l \qquad (44)$$

С другой стороны для $\forall l$ имеем

$$f(x^l) \le f(x^l) + k_l H(x^l) \le f(x^*) + k_l H(x^*)$$

$\Longrightarrow$ и равенства $H(x^*) = 0$ $(x^* \in Q)$ вытекает

$$f(x^l) \le F_l(x^l) \le f(x^*) \text{ для } \forall l \qquad (45)$$

Метод внешних штрафов

Покажем, что последовательность $\{x^l\}$ является ограниченной. Рассуждаем от противного. Предположим, что она не ограничена.

Если выполняется условие (a) теоремы $\Longrightarrow f(x^l) \longrightarrow +\infty$ при $l \longrightarrow +\infty \Longrightarrow$ противоречие с неравенством (45).

Если выполнено условие (b) теоремы $\Longrightarrow H(x^l) \longrightarrow +\infty$ при $l \longrightarrow +\infty \Longrightarrow$

противоречие с неравенством $\boldsymbol{H(x^l) \le H(x^1)}$ для $\forall \boldsymbol{l},$ которое следствие неравенства (44).

Итак во всех случаях $\exists$ сходящаяся подпоследовательность. Для упрощения будем считать, что ею является последовательность $\boldsymbol{\{x^l\}}$.

Пусть $\boldsymbol{\widehat{x}}$ ее предел. Из непрерывности $\boldsymbol{f}$ имеем

$$\boldsymbol{\lim_{l \to +\infty} f(x^l) = f(\widehat{x})}$$

Из неравенства (45) имеем, что $\boldsymbol{f(\widehat{x}) \le f(x^*)}$.

Метод внешних штрафов

Из (43) $\Longrightarrow F_l(x^l)$ монотонно возрастает.

Из (45) $\Longrightarrow F_l(x^l) \le f(x^*)$ для $\forall l$.

Поэтому последовательность $\{F_l(x^l)\}$ имеет предел F^* и

$$\lim_{l \to +\infty} F_l(x^l) = F^* \le f(x^*)$$

$\Longrightarrow$ и определения $F_k(x)$ имеем

$$f(x^l) + k_l H(x^l) \longrightarrow F^* \text{ при } l \to +\infty$$

$\Longrightarrow$

Метод внешних штрафов

$$\lim_{l \to +\infty} k_l H(x^l) = F^* - f(\widehat{x})$$

Так как величина $F^* - f(\widehat{x})$ конечна, $H(x^l) \geq 0$, $k_l \longrightarrow +\infty \Longrightarrow H(x^l) \longrightarrow 0$, при $l \longrightarrow +\infty$ отсюда и следующих условий $x_l \longrightarrow \widehat{x}$, функция H непрерывна имеем:

$H(\widehat{x}) = 0 \Longrightarrow \widehat{x} \in Q$, но тогда $f(x^*) \leq f(\widehat{x})$.

Ранее показали, что $f(\widehat{x}) \leq f(x^*) \Longrightarrow$

$f(\widehat{x}) = f(x^*) \Longrightarrow \widehat{x}$ оптимальное решение. ■

Метод внутренних штрафов или метод барьерных функций

Основной минус метода внешних штрафов: промежуточные приближения $\boldsymbol{x^1, x^2, \ldots, x^l, \ldots}$ (коэффициенты штрафа: $\boldsymbol{k_1, k_2, \ldots, k_l, \ldots}$) не являются допустимыми решениями задачи, т.е. оптимум аппроксимируется снаружи $\Longrightarrow$ естественно рассмотреть методы штрафа аппроксимирующие оптимум изнутри.

Как и в предыдущем случае идея метода заключается в сведении исходной задачи (40) к последовательности задач минимизации:

Метод внутренних штрафов или метод барьерных функций

$$F_k(x) = f(x) + a_k B(x) \to \min_{x \in R^n}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{46}$$

где $B(x)$ — подходящая функция штрафа или барьерная функция, $a_k > 0$ — коэффициент штрафа или барьерный коэффициент, $a_k \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$.

Пусть ∂Q – граница множества Q.

Метод внутренних штрафов или метод барьерных функций

Определение. Функция $B(x)$ называется барьерной функцией для множества Q, если $B(x)$ определена, конечна и неотрицательна во всех точках из $\mathrm{Int}Q$ и

$$\lim_{x\to\partial Q} B(x) = +\infty.$$

Можно считать, что $B(x) = +\infty$, для $x \in \partial Q$.

Метод внутренних штрафов или метод барьерных функций

Примеры барьерных функций:

$$-\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x)^{-1}, \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(x)|^{-1}, \ \sum_{i=1}^{m} |\varphi_i(x)|^{-2}.$$

Замечание. Задачу (46) можно решать методом градиентов: $x^{k+1} = x^k - \alpha_k f'(x_k), \alpha_k \geq 0.$ Если $x^k \in \mathrm{Int}Q$, то при достаточно малом α_k $x^{k+1} \in \mathrm{Int}Q$, т.е. если $x^0 \in \mathrm{Int}Q$, то все приближения x^k – допустимые решения (40)-(41)

Метод внутренних штрафов или метод барьерных функций

Пусть x^k — решение задачи (46) на шаге k и $x^k \in \mathrm{Int}Q$.

Итерация $(k+1)$. Решаем задачу (46) для нового значения коэффициента штрафа a_{k+1} с решением x^k в качестве начального приближения. Т.к. $x^k \in \mathrm{Int}Q \Longrightarrow x^{k+1} \in \mathrm{Int}Q$.

Если $a_{k+1}B(x^{k+1}) \leq \varepsilon$, то стоп. Иначе переходим к следующей итерации.

Метод внутренних штрафов или метод барьерных функций

Соглашения: $\boldsymbol{Q}$ замкнуто, Int$\boldsymbol{Q} \neq \emptyset$ и любая точка $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}$ есть предел последовательности точек из внутренности $\boldsymbol{Q}$.

Пусть $\boldsymbol{f}$ — непрерывная функция на всем $\boldsymbol{R^n}$, а барьерная функция $\boldsymbol{B(x)}$ непрерывна на множестве Int$\boldsymbol{Q}$.

Метод внутренних штрафов или метод барьерных функций

Теорема 23. Пусть выполняется одно из двух условий:

(a). $f(x_k) \longrightarrow +\infty$ для любой последовательности $\{x_k\} \in Q$, $\|x_k\| \longrightarrow +\infty$ или

(b). Q ограничено.

Тогда 1) последовательность x^k имеет хотя бы одну предельную точку и любая предельная точка этой последовательности есть оптимальное решение задачи; 2) $a_k B(x^k) \longrightarrow 0$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса в задаче (40)-(41) $\exists$ оптимальное решение $x^* \in Q$.

Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ — приближения (получены алгоритмом), а $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ – соответствующие барьерные коэффициенты.

Тогда $\forall\ k$ имеем

$$f(x^*) \leq f(x^k) \leq f(x^k) + a_k B(x^k) = F_k(x^k) \qquad (47)$$

Метод внутренних штрафов или метод барьерных функций

$\forall\ \varepsilon > 0$ найдется $\widetilde{x} \in \mathrm{Int}Q$: $f(\widetilde{x}) \le f(x^*) + \varepsilon$ $\Longrightarrow$

$$f(x^*)+\varepsilon+a_kB(\widetilde{x}) \ge f(\widetilde{x})+a_kB(\widetilde{x}) \ge F_k(x^k)$$

$$\lim_{k\to\infty} F_k(x^k) \le f(x^*) + \varepsilon.$$

Т.к. это верно $\forall\ \varepsilon > 0$, то из (47) и монотонного убывания $\{F_k(x^k)\}_k$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} F_k(x^k) = f(x^*),$$

Метод внутренних штрафов или метод барьерных функций

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x^k) = f(x^*),$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k B(x^k) = 0.$$

Как и в теореме 22 можно считать, что последовательность x^k – ограничена (из (a), (b)) и пусть $x^k \longrightarrow \widehat{x}$. Из непрерывности $f \Longrightarrow f(\widehat{x}) = f(x^*)$. Т.к. Q – замкнуто и $(\forall\ k)\ x^k \in Q$, то имеем $\widehat{x} \in Q$. Следовательно, любая предельная точка последовательности приближений x^k

является оптимальным решением задачи. ■

Упражнение. Докажите следующие неравенства:

$$F_{k+1}(x^{k+1}) < F_k(x^k) \ \forall\, k,$$

$$B(x^k) \leq B(x^{k+1}) \ \forall\, k,$$

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) \ \forall\, k.$$