ЛЕКЦИЯ № 4

Линейное программирование

1. **Теория двойственности (окончание)**

2. **Задача двойственная к задаче ЛП**

3. **Базисные допустимые решения**

4. **Критерий разрешимости задач ЛП**

Теория двойственности

Следствие 1. Следующие утверждения эквивалентны:

1. **Пара $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ — седловая точка функции Лагранжа.**

2. $f(\overline{x}) = h(\overline{\lambda})$.

3. $\min\limits_{x} \sup\limits_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) = \max\limits_{\lambda \geq 0} \inf\limits_{x} L(x, \lambda)$.

Следствие 2. Пусть $x^*, \overline{x} \in Q$, $\lambda^*, \overline{\lambda} \geq 0$.

Если пары $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ и (x^*, λ^*) — седловые точки функции Лагранжа, то пары $(\overline{x}, \lambda^*)$ и $(x^*, \overline{\lambda})$ — также седловые точки функции Лагранжа, причем

$$L(x^*, \overline{\lambda}) = L(\overline{x}, \lambda^*) = L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = L(x^*, \lambda^*).$$

Теория двойственности

Замечание 1. Двойственная задача $\boldsymbol{D}$ эквивалентна задаче выпуклого программирования. (Упражнение).

Пусть задача $\boldsymbol{P}$ — задача выпуклого программирования и выполняется условие Слейтера. Тогда

Следствие 3. Допустимое решение $\overline{\boldsymbol{x}}$ прямой задачи является оптимальным тогда и только тогда, когда существует $\overline{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$ такой, что $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{h}(\overline{\boldsymbol{\lambda}})$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\overline{\boldsymbol{x}}$ — оптимальное решение задачи $\boldsymbol{P}$. По Т. 9 (Теорема Куна-Таккера в нелокальной форме)

$$\exists \overline{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0} : (\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\lambda}}) \text{ — седловая точка функции Лагранжа.}$$

Из следствия 1 имеем $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{h}(\overline{\boldsymbol{\lambda}})$. Достаточность следует из леммы 6.

Линейное программирование (ЛП)

Замечание 2. Если ограничения линейны, т.е. $\varphi_i(x) = (a_i, x) - b_i \leq 0$, то условие Слейтера излишне и при обосновании следствия 3 вместо теор. 9 использовать теор. 10.

Задача линейного программирования (ЛП) в канонической форме:

$$w(x) = (c, x) \longrightarrow \min \tag{16}$$

$$Ax = b, \tag{17}$$

$$x \geq 0, \tag{18}$$

где $c = (c_j), x = (x_j) \in R^n$, $A = (a_{ij}) - (m \times n)$ матрица, $b = (b_i) \in R^m$, $m \leq n$, $rang(A) = m$.

$$Ax = b \equiv (a_i, x) = b_i, i = \overline{1, m},$$

$$Ax = b \equiv \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b$$

ЛП: двойственная задача

$\mathbf{(16) - (18)} \equiv$ задаче

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{(c, x) \longrightarrow \min} && \\
&\boldsymbol{(a_i, x) - b_i \leq 0,} && \boldsymbol{\lambda_i^1 \geq 0} \\
&\boldsymbol{-(a_i, x) + b_i \leq 0,} && \boldsymbol{\lambda_i^2 \geq 0} \\
&\boldsymbol{-x_j \leq 0.} && \boldsymbol{\mu_j \geq 0}
\end{aligned}
$$

Ее функция Лагранжа:

$$
\boldsymbol{L(x, \lambda^1, \lambda^2, \mu) = (c, x) + (\lambda^1, Ax - b) + (\lambda^2, -Ax + b) + (\mu, -x) =}
$$

$$
\boldsymbol{= \Big(c + (\lambda^1 - \lambda^2)A - \mu, x\Big) - (\lambda^1 - \lambda^2, b).}
$$

Следовательно, целевая функция двойственной задачи имеет вид:

ЛП: двойственная задача

$$h(\lambda^1, \lambda^2, \mu) = \inf_x L(x, \lambda^1, \lambda^2, \mu) =$$

$$= \begin{cases} -(b, \lambda^1 - \lambda^2), & \text{если } c + (\lambda^1 - \lambda^2)A - \mu = 0, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \Longrightarrow$$

Двойственная задача

$$h(\lambda^1, \lambda^2, \mu) \longrightarrow \sup_{\lambda^1 \geq 0, \lambda^2 \geq 0, \mu \geq 0},$$

эквивалентна задаче ЛП:

$$-(b, \lambda^1 - \lambda^2) \longrightarrow \max$$

$$c + (\lambda^1 - \lambda^2)A - \mu = 0 \equiv c + (\lambda^1 - \lambda^2)A \geq 0.$$

Умножим ограничения на -1, обозначим $y = -(\lambda^1 - \lambda^2)$

ЛП: двойственная задача

Получим

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \longrightarrow \max \tag{19}$$

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}. \tag{20}$$

Замечание 3. Для задач (16)-(18) и (19)-(20) выполняются все утверждения: л. 5, л. 6, теор. 11, следствия 1 — 3 (без условия Слейтера).

Теорема 12. Задача двойственная к задаче (19)-(20) совпадает с исходной задачей (16)-(18).

Доказательство. Задача (19)-(20) эквивалентна задаче

$$-(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \longrightarrow \min$$

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}.$$

ЛП: двойственная задача

$$\boldsymbol{yA \leq c} \equiv \text{системе неравенств } \boldsymbol{(y, A_j) - c_j} \qquad\qquad \boldsymbol{x_j \geq 0}$$

(сопоставили каждому ограничению двойственную переменную (множитель Лагранжа))

Функция Лагранжа:

$$\boldsymbol{L(y,x) = -(b,y) + (x, yA - c) =}$$

$$\boldsymbol{-(b,y) + (Ax, y) - (x,c) = (Ax - b, y) - (c, x).}$$

Целевая функция двойственной задачи

$$\boldsymbol{h(x) = \inf_y L(y,x) =}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{-(c,x)}, & \text{если } \boldsymbol{Ax = b}, \\ \boldsymbol{-\infty}, & \text{иначе}. \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

ЛП: двойственная задача

Задача

$$\max_{x \geq 0} h(x)$$

эквивалентна задаче ЛП:

$$-(c, x) \longrightarrow \max$$

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0$$

или

$$\min (c, x)$$

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0. \qquad \blacksquare$$

ЛП: двойственная задача

Прямая задача		Двойственная задача
$w(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$		$z(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$
$a_i x \geq b_i$	$i \in I_1$	$y_i \geq 0$
$a_i x = b_i$	$i \in I_2$	$y_i -$ своб.
$x_j \geq 0$	$j \in J_1$	$y A_j \leq c_j$
$x_j -$ своб.	$j \in J_2$	$y A_j = c_j.$

Упражнение. Техника получения этой схемы: либо повторить выкладки, приведшие к задаче (19), (20), либо воспользоваться сводимостью общей задачи ЛП к задаче ЛП в канонической форме и применить готовый рецепт (задача (19), (20)).

ЛП: понятие базисного допустимого решения (б.д.р.).

Базис — любой набор $A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}$ из m линейно независимых столбцов матрицы системы ограничений A. Матрицу $B = [A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$ также назовем базисной.

Пусть $S = \{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\}$, $S' = \{1, \dots, n\} \setminus S$.

Считаем, что $A = [B, N]$, где $N = [A_j]_{j \in S'}$, $x = (x_B, x_N)$,

$x_B = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$ — базисные, а $x_N = (x_j)_{j \in S'}$ — небазисные переменные.

Умножим систему ограничений (17) на B^{-1}:

$$E\, x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \qquad (17')$$

Определение 4. Решение $(x_B, x_N) = (B^{-1}b, 0)$ системы уравнений (17) назовем базисным (соответствующим базису B).

ЛП: понятие б.д.р.

Лемма 7. Вектор x — базисное решение системы (17) тогда и только тогда, когда множество столбцов с индексами из множества $S(x) = \{j|x_j \neq 0\}$ — линейно независимо.

Действительно. Пусть x — базисное решение, B — соответствующий базис. Тогда $S \supseteq S(x)$. Докажем в обратную сторону. Пусть множество столбцов с индексами из $S(x)$ линейно независимо. Если $|S(x)| = m$, то $S(x)$ — базис. Если нет, то из условия $rang(A) = m \Longrightarrow$ множество $S(x)$ можно дополнить до подходящего базиса B, которому будет соответствовать решение x.

ЛП: понятие б.д.р.

Определение 5. **Базисным допустимым решением (б.д.р.)** называется любой элемент множества $\boldsymbol{Q}$, являющийся базисным решением системы уравнений $\mathbf{(17)}$.

Замечание 4. Решение соответствующее базису $\boldsymbol{B}$ — б.д.р. $\iff \boldsymbol{B^{-1}b \geq 0}$.

Определение 6. Вектор $\boldsymbol{x \in Q}$ — **крайняя точка или вершина** множества $\boldsymbol{Q}$, если не существует допустимых решений $\boldsymbol{x^1 \neq x^2}$ из $\boldsymbol{Q}$ таких, что $\boldsymbol{x = \alpha x^1 + (1-\alpha) x^2}$, где $\boldsymbol{0 < \alpha < 1}$.

Теорема 13. Вектор $\boldsymbol{x}$ — б.д.р. тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x}$ — крайняя точка множества $\boldsymbol{Q}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}$ — крайняя точка, но не б.д.р. Из леммы 7 $\Longrightarrow$

$$\exists\ \boldsymbol{y \neq 0:\ Ay = 0.} \tag{$*$}$$

ЛП: понятие б.д.р.

При этом можем считать, что $(x_j = 0 \Longrightarrow y_j = 0) \Longrightarrow$

$$\{j | y_j \neq 0\} \subseteq \{j | x_j > 0\}. \qquad (**)$$

Т.к. $x \in Q$, то из $(*) \Longrightarrow$

$$\forall\, t \in R: z(t) = x + t\, y \text{ — решение } (17),$$

тогда из $(**) \Longrightarrow$

$$\forall \text{ малого } t \in R: \ z(t) \in Q.$$

$\Longrightarrow$

$$\exists\, \varepsilon > 0: \ x^1 = x + \varepsilon y \in Q, x^2 = x - \varepsilon y \in Q,$$

$\Longrightarrow$

$$x^1 \neq x^2 \text{ и } x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow\to\leftarrow\Rightarrow x \text{ — б.д.р..}$$

ЛП: понятие б.д.р.

Пусть $\boldsymbol{x}$ — б.д.р., но

$$\exists\, 0 < \alpha < 1, \exists\, x^1 \neq x^2, x^1, x^2 \in Q : x = \alpha x^1 + (1-\alpha) x^2.$$

По условию $\boldsymbol{Ax^1 = Ax^2 (= b) \Longrightarrow A(x^1 - x^2) = 0}$, но

$$A(x^1 - x^2) = 0 \Longleftrightarrow \{A_j | x_j^1 \neq x_j^2\} \text{ — линейно зависимо } \Rightarrow$$

$$\{A_j | \alpha x_j^1 + (1-\alpha) x_j^2 > 0\} \text{ — линейно зависимо } \Rightarrow$$

$$\{A_j | x_j > 0\} \text{ — линейно зависимо } \Rightarrow \rightarrow\leftarrow,$$

т.е. если x — б.д.р., то $\boldsymbol{x}$ — крайняя точка множества Q. ■

ЛП: Критерий разрешимости

Теорема 14 (Критерий разрешимости). Задача линейного программирования (16)-(18) разрешима тогда и только тогда, когда множество допустимых решений не пусто и целевая функция ограничена на нем.

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности покажем, что

$$\forall\, x^0 \in Q\ \exists\ \text{б.д.р. } \overline{x} : w(x^0) \le w(\overline{x}).$$

Пусть

$$\overline{x} \in Q^0 = \{x \in Q | w(x) \le w(x^0)\} \neq \emptyset$$

и имеет минимальное число ненулевых компонент $(supp(\overline{x}))$.

Докажем, что $\overline{x}$ — б.д.р. Допустим противное. $\Longrightarrow$

ЛП: Критерий разрешимости

множество

$$\{A_j | \overline{x}_j > 0\} \text{ линейно зависимо } \Longrightarrow$$

$$\exists\; y \neq 0 : Ay = 0 \text{ и если } \overline{x}_j = 0, \text{ то } y_j = 0.$$

Пусть $w(y) \leq 0$ (если необходимо, то возьмем $-y$). Положим $x(t) = \overline{x} + ty$. Выполняется следующее свойство

$$\forall \text{ малого } t \in R: \; x(t) \in Q.$$

1). Пусть $\forall j : y_j \geq 0 \Rightarrow \forall t \geq 0 \; x(t) \geq 0 \Rightarrow \forall t \geq 0 \; x(t) \in Q$

$$\text{отсюда и неравенства } w(x(t)) = w(\overline{x}) + tw(y) \geq const (\text{по условию})$$

учитывая, что $w(y) \leq 0$ и $t \geq 0$ — произвольно,

$$\text{имеем: } w(y) = 0 \text{ и, следовательно, } w(x(t)) = w(\overline{x}) \; \forall t.$$

ЛП: Критерий разрешимости

Т.к. из условия $y_j > 0 \Rightarrow \overline{x}_j > 0$, то

$$\forall \text{ малого по абсолютной величине } t < 0: \; x(t) \in Q.$$

Найдем такое $\bar{t}$ наибольшее по абсолютной величине из условия:

$$\forall j (y_j > 0 \Rightarrow \overline{x}_j + \bar{t} y_j \geq 0)$$

которое эквивалентно условию:

$$\forall j (y_j > 0 \Rightarrow \overline{x}_j \geq (-\bar{t}) y_j) \iff$$

$$(-\bar{t}) = \min_{y_j > 0} \frac{\overline{x}_j}{y_j} \iff \bar{t} = -\min_{y_j > 0} \frac{\overline{x}_j}{y_j}.$$

Итак $x(\bar{t}) \in Q$ и $w(x(\bar{t})) = w(\overline{x}) \leq w(x^0) \Rightarrow x(\bar{t}) \in Q^0$.

Получили противоречие. Т.к. $supp(x(\bar{t})) = supp(\overline{x}) - 1$.

ЛП: Критерий разрешимости

2). Пусть $\exists j : y_j < 0$. Тогда

$$\forall \text{ достаточно малых } t \geq 0 : \ x(t) \in Q.$$

Найдем наибольшее такое $\bar{t}$ из условия:

$$\forall j (y_j < 0 \Rightarrow \overline{x}_j + \bar{t} y_j \geq 0)$$

которое эквивалентно условию:

$$\forall j (y_j < 0 \Rightarrow \overline{x}_j \geq \bar{t}(-y_j)) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \bar{t} = \min_{y_j < 0} \frac{\overline{x}_j}{-y_j}.$$

Итак $x(\bar{t}) \in Q$ и т.к. $\bar{t} > 0, d \leq 0$, то $w(x(\bar{t})) = w(\overline{x}) + d\bar{t} \leq$ $\leq w(x^0) \Rightarrow x(\bar{t}) \in Q^0$.

Получили противоречие. Т.к. $supp(x(\bar{t})) = supp(\overline{x}) - 1$.

ЛП: Критерий разрешимости

Т.к. по условию $\boldsymbol{Q} \neq \varnothing$, то множество базисных допустимых решений задачи не пусто. Т.к. оно конечно, то

$$\exists\, \boldsymbol{x}^* \text{ — б.д.р.: } \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}^*) \leq \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \ \forall \text{ б.д.р. } \boldsymbol{x}.$$

Из ранее доказанного следует, что $\boldsymbol{x}^*$ — оптимальное решение. ■

Следствие 4. Если множество допустимых решений задачи ЛП не пусто, то существуют базисные допустимые решения.

Следует из доказательства теоремы 14 (взять $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{0}$).

Следствие 5. Если задача ЛП разрешима, то существует оптимальное базисное решение.