ЛЕКЦИЯ № 6

1. **Симплекс-таблица (с.-т.)**

2. **Элементарное преобразование с.-т.**

3. **Симплекс-метод**

Симплекс-таблица (с.-т.)

Пусть $s \in S'$. Для анализа случаев 2 и 3 введём параметризованное семейство векторов

$x(t), t \geq 0:$

$$\begin{gathered} x_{\sigma(i)}(t) = \overline{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t, \\ x_s(t) = t, \\ x_j(t) = 0, j \in S' \backslash s \end{gathered} \tag{21}$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

Пусть $\boldsymbol{S'} \cup \boldsymbol{S} = \{\mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$. Множество решений системы уравнений

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x_j} = \mathbf{0}, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{S'}, \boldsymbol{x_j} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{S},$$

называется гранью множества допустимых

решений (17)-(18).

Симплекс-таблица (с.-т.)

Величина $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{m} - |\boldsymbol{S}'|$ – размерность данной грани (здесь $\boldsymbol{m} + |\boldsymbol{S}'|$ – ранг системы уравнений).

Так как $\overline{\boldsymbol{x}}$ – б.д.р., то $|\boldsymbol{S}'| = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{m}$, следовательно, $\overline{\boldsymbol{x}}$ – грань размерности 0.

Если $|\boldsymbol{S}'| = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{m} - \mathbf{1}$, то получим грань размерности 1, т.е. ребро: ограниченное или неограниченное.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Если $\boldsymbol{S}$ – множество номеров базисных переменных, а $\boldsymbol{S}'$, соответственно, небазисных, то б.д.р. $\overline{\boldsymbol{x}}$ – единственное решение системы уравнений

$$\boldsymbol{Ax = b, x_j = 0, j \in S'}.$$

Тогда семейство векторов (21) есть множество решений системы

$$\boldsymbol{Ax = b, x_j = 0, j \in S' \setminus s}.$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

При $t = 0$ решение $x(0)$ совпадает с исходным б.д.р. $\overline{x}$. При увеличении $t \geq 0$ точка $x(t)$ движется в пределах множества решений системы $Ax = b$. Пока сохраняется неотрицательным знак величин $x_{\sigma(i)}(t) = \overline{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t \geq 0,$ при всех $i = \overline{1, m}$, то движение происходит по ребру

$$Ax = b, x_j = 0, j \in S' \setminus s, x_j \geq 0, j \in S \cup \{s\},$$

в пределах множества допустимых решений задачи (16)-(18).

Симплекс-таблица (с.-т.)

Преобразование исходного б.д.р. $\overline{\boldsymbol{x}}$. по формулам (21) назовём его элементарным преобразованием. Предыдущий слайд позволяет интерпретировать элементарное преобразование как движение по ребру, которое начинается из вершины $\overline{\boldsymbol{x}}$.

В лемме 9 анализируется случай, когда элементарное преобразование приводит к движению по бесконечному ребру, на котором целевая функция убывает. Последняя лемма анализирует варианты возникающие при движении по ограниченному ребру.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Лемма 9 (о неразрешимости). Если для номера s оценка замещения $z_{0s} < 0$ и для всех индексов i коэффициенты замещения z_{is} неположительны, то в задаче (16)–(18) не существует оптимального решения.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Так как $\forall \boldsymbol{i} : \boldsymbol{z_{is}} \leq \mathbf{0}$, то из (21) имеем

$$\forall \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0} : \boldsymbol{x_j(t)} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{n}.$$

Таким образом множество точек $\boldsymbol{x(t), t \geq 0},$ образует неограниченное ребро многогранного множества $\boldsymbol{Q}$, выходящее из вершины $\overline{\boldsymbol{x}}$.

Но из $(\mathbf{16''}) \Longrightarrow$

$$\boldsymbol{w(x(t))} = -\boldsymbol{z_{00}} + \boldsymbol{z_{0s}t} \rightarrow -\infty \text{ при } \boldsymbol{t} \rightarrow +\infty.$$

$\Longrightarrow$ в задаче (16)-(18) не существует оптимального решения. ■

Симплекс-таблица (с.-т.)

Лемма 10 (о существовании лучшей вершины). Если оценка замещения $z_{0s} < 0$ и существуют базисные переменные с коэффициентами замещения $z_{is} > 0$, то элементарное преобразование приведёт либо в вершину с меньшим значением целевой функции, либо вершина останется прежней, но изменится её базис.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Пусть r – индекс базисной переменной такой, что

$$\bar{t} = \frac{\overline{x}_{\sigma(r)}}{z_{rs}} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min_{z_{is}>0,\ i\geq 1} \frac{z_{i0}}{z_{is}}.$$

Возможно два случая: $\bar{t} > 0$ и $\bar{t} = 0$. Рассмотрим первый случай. Тогда

$$\forall i \forall t < \bar{t}:\ x_{\sigma(i)}(t) = \overline{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t > 0.$$

В силу выбора индекса r : $x_{\sigma(r)}(\bar{t}) = 0$ и для $\forall t > \bar{t}$ имеем $x_{\sigma(r)}(\bar{t}) < 0$.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Итак множество векторов $\boldsymbol{x(t), 0 \le t \le \bar{t}}$ образует ограниченное ребро множества допустимых решений $\boldsymbol{Q}$. Покажем, что вектор $\boldsymbol{x(\bar{t})}$ – б.д.р. По определению

$$\boldsymbol{(z_{1s}, \ldots, z_{ms})^\top = B^{-1}A_s} \Longleftrightarrow$$

$$\boldsymbol{A_s = B(z_{1s}, \ldots, z_{ms})^\top} \Longleftrightarrow$$

$$\boldsymbol{A_s = \sum_{i=1}^{m} z_{is} A_{\sigma(i)}} \text{ (и т.к.) } \boldsymbol{z_{rs} > 0} \Longrightarrow$$

(легко доказывается от противного)

Симплекс-таблица (с.-т.)

столбцы матрицы

$$\boldsymbol{B}' = [\boldsymbol{A}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{\sigma(r-1)}, \boldsymbol{A}_s, \boldsymbol{A}_{\sigma(r+1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{\sigma(n)}]$$

линейно независимы. Следовательно $\boldsymbol{B}'$ – базис и $\boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{t}})$ – б.д.р., а так как из $(\mathbf{16}'')$ $\Longrightarrow$

$$\forall t, 0 \le t \le \bar{t}, w(x(t)) = -z_{00} + z_{0s}t \le -z_{00},$$

то $\boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{t}})$ – искомое б.д.р. с меньшим значением целевой функции. Рассмотрим случай $\bar{\boldsymbol{t}} = \mathbf{0}$.

Симплекс-таблица (с.-т.)

В силу выбора индекса $\boldsymbol{r} : \boldsymbol{x_{\sigma(r)}(\bar{t}) = x_{\sigma(r)}(0) = \overline{x}_{\sigma(i)} = z_{r0} = 0}$. Т.к. $\boldsymbol{z_{rs} > 0}$, то как и ранее нетрудно показать, что столбцы матрицы

$$\boldsymbol{B' = [A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(r-1)}, A_s, A_{\sigma(r+1)}, \ldots, A_{\sigma(n)}]}$$

линейно независимы. Следовательно $\boldsymbol{B'}$ – другой базис вершины $\boldsymbol{\overline{x}}$.

■

Симплекс-таблица (с.-т.)

Определение 9. Преобразование симплекс–таблицы (соответственно, базиса), при котором происходит замена одного из базисных столбцов на другой столбец матрицы $\boldsymbol{A}$ из числа небазисных, называется элементарным преобразованием симплекс–таблицы (соответственно, базиса).

Пусть $z_{rs} \neq 0$. Тогда базис

$$B = [A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(m)}]$$

заменяется на новый базис

$$[A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(r-1)}, A_s, A_{\sigma(r+1)}, \ldots, A_{\sigma(m)}].$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$\boldsymbol{\alpha}'_i = (z'_{i0}, z'_{i1}, \ldots, z'_{in})\ (i = \overline{0, m})$ строки новой симплекс– таблицы:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}'_i = \boldsymbol{\alpha}_i - \dfrac{z_{is}}{z_{rs}}\boldsymbol{\alpha}_r,\ i \neq r, \\ \boldsymbol{\alpha}'_r = \dfrac{1}{z_{rs}}\boldsymbol{\alpha}_r. \end{cases} \tag{22}$$

r-я строка, s-й столбец и элемент z_{rs} называются ведущими.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Соотношения (22) эквивалентны следующим

$$\begin{cases} z'_{ij} &= z_{ij} - \dfrac{z_{is} z_{rj}}{z_{rs}}, \ i \neq r, \\ z'_{rj} &= \dfrac{z_{rj}}{z_{rs}}. \end{cases}$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

Симплекс-метод

0) Построить симплекс–таблицу, соответствующую заданному базисному допустимому решению (таблица, естественно, будет прямо допустимой, т.е. $\boldsymbol{z_{i0} \geq 0, i = \overline{1, m}}$).

1) Если симплекс–таблица двойственно допустима, т.е. $\boldsymbol{z_{0j} \geq 0,\ j = \overline{1, n}}$, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение)

2) Иначе, выбрать ведущий столбец $\boldsymbol{s : z_{os} < 0,\ s \geq 1}$.

Симплекс-таблица (с.-т.)

3) Если $\{i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min\{\ \frac{z_{i0}}{z_{is}}\ \mid\ z_{is} > 0,\ i \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции).

4) Преобразовать симплекс–таблицу, положить

$\sigma(r) := s$ и перейти на шаг 1.

Замечание 6. Элементарное преобразование с.-т. на шаге 4 сохраняет её прямо допустимость в силу выбора ведущей строки.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Замечание. Анализ сходимости с.-м. значительно упрощается, если предполагать невырожденность задачи. Так как в этом случае элементарное преобразование б.д.р. всегда приводит к новому б.д.р. со строго меньшим значением целевой функции (лемма 10). Поэтому раз число вершин конечно, то и алгоритм конечен. Для почти всех известных вариантов с.-м. построены примеры требующие экспоненциального числа шагов относительно размерности задачи. Однако, с точки зрения вычислительной практики, с.-м. – самый эффективный метод решения задач ЛП.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Для произвольной задачи ЛП конечность с.-м. может быть гарантирована только при уточнении правила выбора ведущего столбца и ведущей строки. Наиболее известный и простой вариант конечного с.-м. это лексикографический с.-м. (см. учебное пособие Глебова Н.И. Разобрать самостоятельно.)