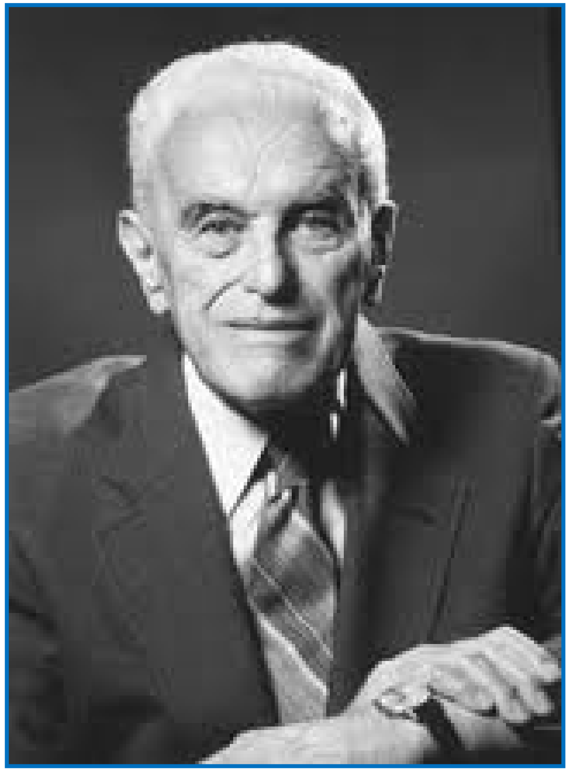
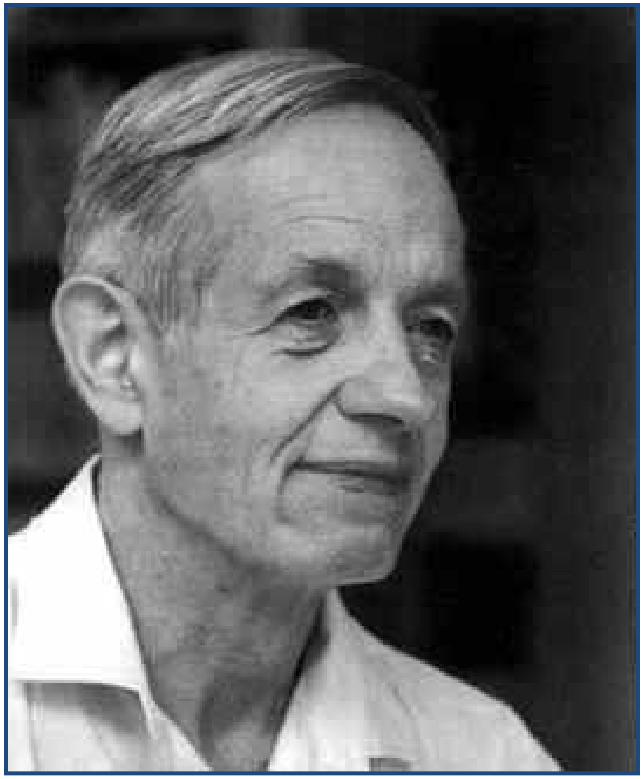
Введение в матричные игры

Три Джона

John von Neumann
(1903 – 1957)



John Harsanyi
(1920 – 2000)



John Nash
(1928)

«Семейный спор»

Муж и жена решают куда пойти в субботу вечером – на футбол или в театр.

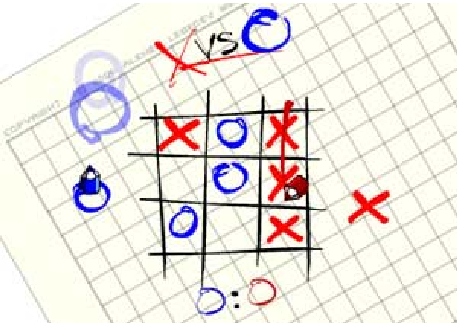
Им небезразлично куда пойдет другой, но всё-таки, каждому больше хотелось бы пойти на что-то одно…

стратегии второго игрока (жена)

стратегии первого игрока (мужа)	футбол	театр
футбол	5 , 4	1 , 1
театр	0 , 0	4 , 5

На первом месте платеж первого игрока, на втором месте платеж второго

Предметом исследований в теории игр являются модели и методы принятия решений в ситуациях, где участвуют несколько сторон (игроков). Цели игроков различны, часто противоположны. Мы будем рассматривать только игры двух лиц с противоположными интересами.



Игра состоит из последовательности ***ходов***. Ходы бывают личные и случайные. (В шахматах все ходы личные. Рулетка содержит случайный ход).

Результаты ходов оцениваются ***функцией выигрыша*** для каждого игрока. Если сумма выигрышей равна 0, то игра называется ***игрой с нулевой суммой*** (преферанс). Будем рассматривать только такие игры.

Стратегией называется набор правил, определяющих поведение игрока, т.е. выбор хода.

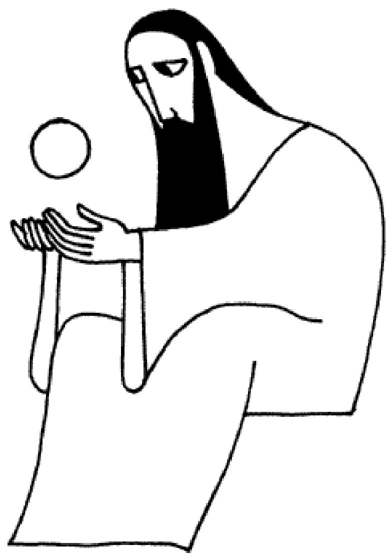
Оптимальной стратегией называют такую стратегию, при которой достигается максимальный ожидаемый средний выигрыш при многократном повторении игры.

Матричные игры — это игры, где два игрока играют в игру с нулевой суммой, имея конечное число «чистых» стратегий: $\{1,\ldots,m\}$ и $\{1,\ldots,n\}$ и $\forall\ (ij)$ задан платеж a_{ij} второго игрока первому. Матрица (a_{ij}) задает выигрыш первого игрока и проигрыш второго, $a_{ij} \gtrless 0$!

Игра в орлянку.

Игроки выбирают ход $\in \{$*орел, решка*$\}$. Если ходы совпали, то выиграл первый, иначе второй.

II игрок / I игрок	орел	решка
орел	(1;-1)	(-1;1)
решка	(-1;1)	(1;1)

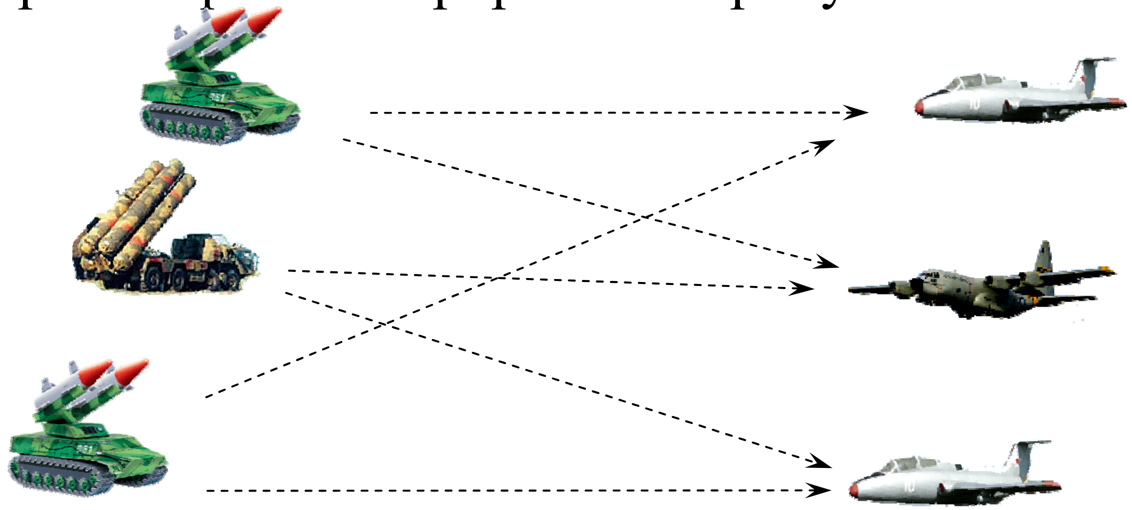


Прорыв обороны. Первый игрок выбирает систему зенитного вооружения. Второй игрок выбирает самолет. Элементы a_{ij} задают вероятность поражения самолета j системой i. Цель второго игрока — прорвать оборону.

Самолеты

Зенитки

0,5	0,6	0,8
0,9	0,7	0,8
0,7	0,5	0,6



В первом примере все ходы одинаково плохи или хороши. Во втором примере ход (2, 2) в некотором смысле лучший для обеих сторон: если взять самолет 2, то зенитка 2 — лучшая для первого игрока; если взять зенитку 2, то самолет 2 лучший для второго. В матрице есть седловая точка!

Определение. *Седловой точкой* матрицы (a_{ij}) называют пару (i_0, j_0) такую, что $a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}, \quad \forall ij$.

Принцип минимакса (осторожности).

Предположим, что противник всеведущ и угадывает все ходы! Первый игрок предполагает, что второй все знает и для хода i первого игрока выберет $j(i)$: $a_{ij(i)} \le a_{ij}, \forall\, j = 1,\dots, n$. Обозначим $\alpha_i = a_{ij(i)} = \min\limits_{1\le j\le n} a_{ij}$, $i = 1,\dots,m$. Тогда лучшей стратегией для первого игрока является выбор i_0 такой, что

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} a_{ij} = \alpha_{i_0}.$$

Величину α назовем ***нижней ценой*** игры в чистых стратегиях.

Второй игрок из соображений осторожности считает, что первый $\forall\, j$ выберет $i(j)$ так, что $a_{i(j)j} \ge a_{ij}$, $\forall\, i$, т.е. $\beta_j = \max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}$ и выбирает j с минимальным β_j, т.е.

$$\beta = \min_{1\le j\le n} \max_{1\le i\le m} a_{ij} = \beta_{j_0}.$$

Величину β назовем ***верхней ценой*** игры в чистых стратегиях.

Пример 1. $\alpha = -1,\ \beta = +1,\ \ \alpha \le \beta$

Пример 2. $\alpha = \max\limits_i\{0.5,\ 0.7,\ 0.5\} = 0.7$, $\ \beta = \min\limits_j\{0.9,\ 0.7,\ 0.8\} = 0.7$.

Лемма. Для любой функции $f(x,y)$, $x\in X$, $y\in Y$, справедливо неравенство

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)$$

в предположении, что эти величины существуют.

Доказательство. Введем обозначения:

$$f(x, y(x)) = \min_{y\in Y} f(x,y),$$

$$f(x^*, y(x^*)) = \max_{x\in X} f(x, y(x)).$$

Тогда

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = f(x^*, y(x^*)) = \min_{y\in Y} f(x^*, y) \le \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

■

Теорема. Необходимым и достаточным условием равенства верхней и нижней цен игры в чистых стратегиях является существование седловой точки в матрице (a_{ij}).

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $\alpha = \beta$. По определению

$$\begin{cases} \alpha = \max\limits_{1\le i\le m} \min\limits_{1\le j\le n} a_{ij} = \min\limits_{1\le j\le n} a_{i_0 j} \le a_{i_0 j_0} \\ \beta = \min\limits_{1\le j\le n} \max\limits_{1\le i\le m} a_{ij} = \max\limits_{1\le i\le m} a_{ij_0} \ge a_{i_0 j_0} \end{cases}$$

т.е. $\alpha \le a_{i_0 j_0} \le \beta$. Так как $\alpha = \beta$, то $a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}, \forall ij$, т.е. является седловой точкой.

Достаточность. Пусть седловая точка $(i_0 j_0)$ существует, т.е.

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}, \quad \forall i = 1,\dots,m, \; j = 1,\dots,n.$$

Тогда $\min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} \le \max\limits_{i} a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le \min\limits_{j} a_{i_0 j} \le \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$, но по лемме верно обратное, т.е. $\min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$. Следовательно $\alpha = \beta$. ■

Смешанные стратегии и основная теорема матричных игр

Определение. Под *смешанной стратегией* будем понимать вероятностное распределение на множестве чистых стратегий.

Смешанная стратегия первого игрока: $p = (p_1,\ldots, p_m)$,

$$p \in P_m = \{(p_1,\ldots,p_m) \mid \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,m\}.$$

Смешанная стратегия второго игрока $q = (q_1,\ldots, q_n)$,

$$q \in Q_n = \{(q_1,\ldots,q_n) \mid \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ q_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n\}.$$

При многократном повторении игры игрок выбирает чистые стратегии случайным образом с соответствующими вероятностями.

Платежная функция для смешанных стратегий p и q:

$$E(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$$

задает математическое ожидание выигрыша первого игрока при p,q.

Замечание. Добавлением большой положительной константы можно добиться того, что $E(p,q) > 0,\ \forall\ p,q$ без изменения стратегий.

Из принципа осторожности:

Первый игрок ищет максимум $\alpha(p) = \min\limits_{q\in Q_n} E(p,q)$ и получает нижнюю цену игры $\alpha = \max\limits_{p\in P_m} \alpha(p)$.

Второй игрок ищет минимум $\beta(q) = \max\limits_{p\in P_m} E(p,q)$ и получает верхнюю цену игры $\beta = \min\limits_{q\in Q_n} \beta(q)$.

Теорема Фон–Неймана

В матричной игре существует пара (p^*, q^*) смешанных стратегий, таких что

1. $E(p,q^*) \le E(p^*,q^*) \le E(p^* q),\ \forall\ p\in P_m,\ q\in Q_n$.
2. $\alpha = \beta = E(p^*,q^*)$.

Доказательство. Сначала покажем, как представить задачу о выборе наилучших стратегий в виде ЛП, а затем докажем теорему.

Первый игрок: $\alpha(p) \to \max$

$$\alpha(p) = \min_{q \in Q_n} E(p,q) \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i, \quad \forall j = 1,\dots,n.$$

Пусть $u_i = p_i / \alpha(p)$, $i = 1,\dots, m$, в предположении $\alpha(p) > 0$.

Тогда $u_i \ge 0$, $i = 1,\dots, m$, и $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \ge 1, \quad \forall j = 1,\dots,n$. Заметим, что $\sum_{i=1}^{m} u_i = \dfrac{1}{\alpha(p)}$

и задача $\alpha(p) \to \max$ может быть записана следующим образом:

$$\min \sum_{i=1}^{m} u_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \ge 1, \; j = 1,\dots,n,$$

$$u_i \ge 0, i = 1,\dots,m.$$

Аналогичным образом получаем задачу второго игрока:

$$\max \sum_{j=1}^{n} v_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \le 1, \quad i = 1,\dots,m,$$

$$v_j \ge 0, j = 1,\dots,n,$$

где $v_j = q_j / \beta(q)$, $j = 1,\dots, n$. Полученные задачи являются взаимодвойственными. Пусть u_i^*, v_j^* — оптимальные решения этих задач.

Положим $p_i^* = u_i^* \Big/ \sum_{i=1}^{m} u_i^*$, $q_j^* = v_j^* \Big/ \sum_{j=1}^{n} v_j^*$. Из второй теоремы двойственности следует, что

$$v_j^* (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* - 1) = 0, \quad j = 1,\dots,n, \qquad u_i^* (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j^* - 1) = 0, \quad i = 1,\dots,m.$$

Просуммировав, получим

$$\sum_{j=1}^{n} v_j^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i^* v_j^* = \sum_{i=1}^{m} u_i^* .$$

Поделим на $(\sum v_j^*)(\sum u_i^*)$:

$$E(p^*, q^*) = \frac{1}{\sum v_j^*} = \frac{1}{\sum u_i^*}.$$

Теперь докажем первое утверждение теоремы:

$$E(p, q^*) = \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* = \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{v_j^*}{\sum v_j^*} \le \frac{1}{\sum v_j^*} \sum p_i = \frac{1}{\sum v_j^*}.$$

Аналогично

$$E(p^*, q) = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{u_i^*}{\sum u_i^*} \ge \frac{1}{\sum u_i^*} \sum q_j = \frac{1}{\sum u_i^*}.$$

т.е. $E(p, q^*) \le E(p^*, q^*) \le E(p^*, q), \quad \forall p \in P_m, q \in Q_n.$

Докажем второе утверждение теоремы.

Из предыдущего неравенства имеем:

$$\max_p E(p, q^*) \le E(p^*, q^*) \le \min_q E(p^*, q),$$

т.е. $\beta = \min_q \max_p \sum_{ij} a_{ij} p_i q_j \le \max_p \min_q \sum_{ij} a_{ij} p_i q_j = \alpha.$

Но по лемме $\alpha \le \beta \Rightarrow \alpha = \beta = E(p^*, q^*)$. ■

Дилемма заключенных

Два преступника пойманы за совершение преступления. У следствия не хватает доказательств их виновности и преступникам предлагают сделку:

Если сознаешься и подтвердишь участие товарища в преступлении, то выйдешь на свободу, а товарищ получит 7 лет лишения свободы.

Преступники сидят в разных камерах и не могут общаться, но они знают, что каждому сделано такое предложение.

Если оба преступника сознаются, то каждый получит 5 лет.

Если оба не сознаются, то каждый получит по 1 году.

Матричная игра двух лиц

	2-й сознался	2-й не сознался
1-й сознался	5 : 5	0 : 7
1-й не сознался	7 : 0	1 : 1

Седловая точка — оба сознаются — существует и дает 5 лет каждому

Оптимальное решение — не сознаваться — дает только 1 год.
Оно не является седловой точкой!

Что будет, если дать преступникам посовещаться?

Игра с ненулевой суммой. Дилемма путешественников

Авиакомпания потеряла багаж двух путешественников. Оба чемодана полностью идентичны. Авиакомпания готова возместить не более $100 за чемодан. Представитель авиакомпании просит пассажиров оценить стоимость багажа величиной от $2 до $100, совещаться и договариваться они не могут.

Если пассажиры напишут одинаковую стоимость, им возместят в этом размере. Иначе, стоимость багажа оценивается меньшим числом, и оба получают эту сумму с бонусом или вычетом: тот, кто написал меньшее число, получает на $2 больше, тот кто написал большее число получает на $2 меньше.

Что должны написать путешественники?

Дилемма путешественников

	100	99	98	97	…	3	2
100	100 , 100	97 , 101	96 , 100	95 , 99	…	1 , 5	0 , 4
99	101 , 97	99, 99					
98	100 , 96		98 , 98				
97	99 , 95						
…	…						
3	5 , 1						
2	4 , 0	4 , 0	4 , 0	4 , 0	4 , 0	4 , 0	2 , 2

(2, 2) – равновесие по Нэшу

(100, 100) – оптимальное решение в чистых стратегиях

Упражнение.

У хозяина работает работник. Он может работать хорошо (Х) и сачковать (С). Хозяин может либо проверять его (П), либо нет (Н). Таблица выигрышей:

	Х	С
П	10;2	4;0
Н	10;2	4;3

В игре два равновесия (какие)?

Пусть теперь у хозяина два работника, но проверять он может только одного (а выигрыши складываются для хозяина). Тогда, у него есть два равновесия: проверять первого работника (и тогда первый старается, а второй сачкует) выигрыш хозяина равен 14 или проверять второго. Представим, что хозяин использует смешанную стратегию и с равными вероятностями проверяет того и другого. В этом случае каждый работник будет стараться, и хозяин получит выигрыш 20! Не противоречит ли этот пример замечанию, что смешанная стратегия не может дать больше чистой?