Матроиды

Системой подмножеств $S=(E,\Im)$ называется пара конечное множество E вместе с семейством $\Im$ подмножеств множества E, замкнутым относительно включения, т.е. если $A\in\Im$ и $A'\subseteq A$, то $A'\in\Im$.

Элементы семейства $\Im$ называются *независимыми*.

Подмножество $D\subseteq E$ не входящее в $\Im$, называется *зависимым*.

Комбинаторная задача оптимизации для системы подмножеств $(E,\Im)$*:*

Для каждого $e\in E$ *задан вес* $w(e)\geq 0$.

Требуется найти независимое подмножество, имеющее наибольший общий вес.

"Жадный" алгоритм для матроидов

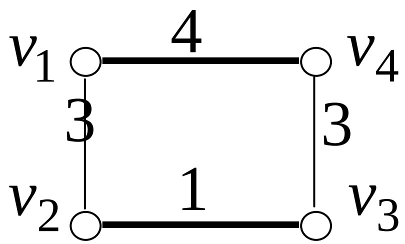
```
begin
I := ∅;
 while E ≠ ∅ do
   begin
       пусть e - элемент из E с наибольшим весом;
       удалить e из E;
       if (I + e) ∈ ℑ then I := I + e
   end
end;
```

Решает ли жадный алгоритм комбинаторную задачу оптимизации?

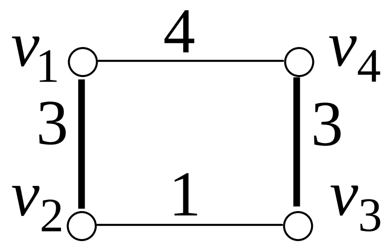
Пример 1.

Дано: граф $G=(V,E)$, веса $w(e)\geq 0, \forall e \in E$

Найти: максимальное взвешенное паросочетание, т.е. подмножество $B \subseteq E$ наибольшего веса так, чтобы никакие два ребра не имели общей вершины.



Решение жадного алгоритма



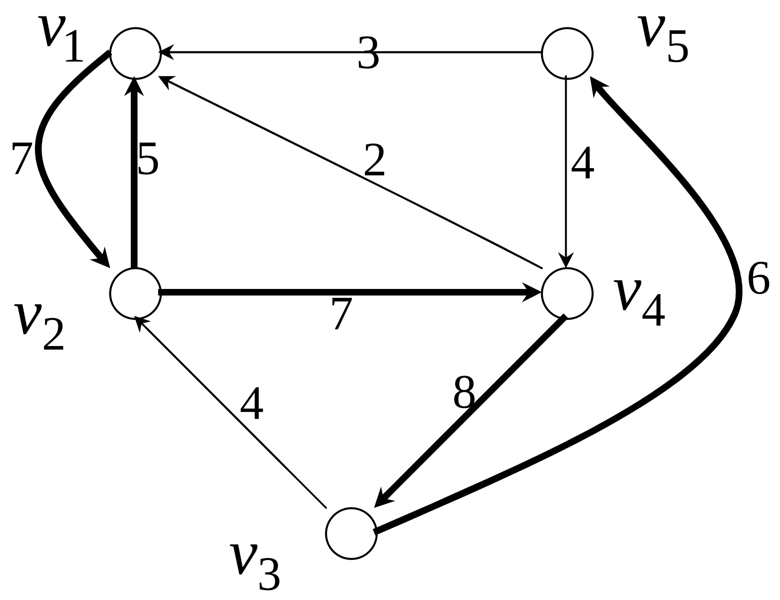
Оптимальное решение

Решает ли жадный алгоритм комбинаторную задачу оптимизации?

Пример 2.

Дано: орграф $D=(V,A)$, веса $w(a)\geq 0, \forall a\in A$

Найти: подмножество $B\subseteq A$ наибольшего веса так, чтобы никакие две дуги из B не имели общего конца.



Оптимальное решение, найденное жадным алгоритмом

Система подмножеств $M=(E,\Im)$ называется M *матроидом*, если жадный алгоритм корректно решает любую индивидуальную комбинаторную задачу оптимизации для системы M.

Теорема 1.

Пусть $M=(E,\Im)$ — система подмножеств. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1) M — матроид;

(2) если I_p, $I_{p+1} \in \Im$, где $|I_p| = p$ и $|I_{p+1}| = p+1$, то существует такой элемент $e \in I_{p+1} \setminus I_p$, что $I_p \cup e \in \Im$;

(3) если $A \subseteq E$ и I, I' — максимальные по включению подмножества множества A, $|I| = |I'|$.

Доказательство. (1)⇒(2): пусть (2) не выполняется,

т.е. ∃ множества I_p, $I_{p+1} \in \Im \,|\, |I_p| = p$ и $|I_{p+1}| = p+1$, и ни для какого $e \in I_{p+1} \setminus I_p$ подмножество $I_p \cup e \notin \Im$.

Выберем следующие веса на E: $w(e) = \begin{cases} p+2, e \in I_p, \\ p+1, e \in I_{p+1} \setminus I_p, \\ 0, e \notin I_{p+1} \cup I_p. \end{cases}$

Заметим, что I_p не оптимально, т.к. $w(I_{p+1}) \geq (p+1)^2 > p(p+2) = w(I_p)$.

Жадный алгоритм дает неоптимальное решение I_p, т.к. он выберет сначала все элементы I_p, а далее не сможет улучшить вес, т.к. для остальных элементов $I_p \cup e \notin \mathfrak{I}$, либо $w(e)=0$. Следовательно, M — не матроид, противоречие.

(2)$\Rightarrow$(3): пусть (2) выполняется, пусть I, I' — два максимальных независимых подмножества множества $A \subseteq E$.

Пусть $|I|<|I'|$. Получим отбрасыванием ($|I'|$-$|I|$-1) элементов такое множество $I'' \subseteq I'$, что $|I''|=|I|+1$. По (2) можно найти элемент $e \in I''\backslash I \mid I \cup e \in \mathfrak{I}$. Следовательно, I не максимальное по включению независимое подмножество множества A. Противоречие.

(3)$\Rightarrow$(1): пусть (3) выполняется для M. Покажем, что жадный алгоритм решает M. Предположим противное: для весов $w(e)$, $e \in E$ решение жадного алгоритма: $I=\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$, но

$\exists J = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_j\} \in \Im \mid w(J) > w(I)$. Пусть $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \ldots \geq w(e_i)$ и $w(e'_1) \geq w(e'_2) \geq \ldots \geq w(e'_i)$.

J — максимальное по включению независимое подмножество в E.

I — максимальное по включению независимое подмножество в E (по построению). По св-ву (3) $i = j$.

Покажем, что $w(e_m) \geq w(e'_m)$, чтобы получить противоречие с предположением, что $w(J) > w(I)$.

Индукция. Для $m = 1$ верно.

Пусть $w(e_m) < w(e'_m)$ для некоторого $m > 1$ и $w(e_s) \geq w(e'_s)$ для $s = 1, \ldots, (m-1)$. Рассмотрим $A = \{e \in E : w(e) \geq w(e'_m)\}$. Множество

$\{e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}\}$ - максимальное по включению независимое подмножество в A, т.к. если $\{e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}, e\} \in \Im$ и $w(e) \geq w(e'_m) > w(e_m)$, то жадный алгоритм должен был бы вместо e_m выбрать e в качестве следующего элемента множества $\in \Im$, это противоречит (3) т.к. $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$ — другое независимое подмножество в A. Доказали.

Пусть $M = (E, \mathfrak{I})$ – матроид и $A \subseteq E$.

Ранг $r(A)$ *множества* A *в* M – мощность максимальных по включению независимых подмножеств множества A.

База – максимальные по включению независимые подмножества множества E.

Цикл – минимальное по включению зависимое подмножество C в E.

Оболочкой множества A – максимальное по включению множество S, содержащее A и удовлетворяющее условию $r(S) = r(A)$.

Вопросы:

$\varnothing \in \mathfrak{I}$?

Пусть B_1, B_2 - базы матроида, что можно сказать про их мощность?

Правда ли, что любое максимальное по включению независимое множество в матроиде является также максимальным по числу элементов?

Примеры.

Графический матроид.

Граф $G=(V,E)$. $\mathcal{F}$ – множество лесов графа. $M_G=(E,\mathcal{F})$ – графический матроид. $E'\subseteq E$

Ранг $r(E')=|V|-c(E')$, $c(E')$ – число связных компонент графа $G'=(V,E')$

Циклы в M_G – это циклы графа G

Оболочка $sp(E')=\{[v,u]\in E: v$ и u лежат в одной и той же компоненте графа $G'=(V,E')\}$

Матроид разбиения

E – конечное множество, $\Pi = \{E_1, E_2, \ldots, E_p\}$ – разбиение $E \mid \bigcup_{i=1,\ldots,p} E_i = E$ и $E_i \cap E_j = \varnothing$, $\forall i, j, i \neq j$.

$I \subseteq E$, $I \in \Im \Leftrightarrow |I \cap E_j| \leq 1,\ j = 1, 2, \ldots, p$

$M_\Pi = (E, \Im)$ – матроид разбиения

Ранг $r(A) = |J(A)|$, где $J(A) = \{j \leq p : E_j \cap A \neq \varnothing\}$

Цикл в M_Π – любое множество, состоящее из двух элементов одного и того же E_j

Оболочка $sp(A) = \bigcup_{j \in J(A)} E_j$

Матричный матроид

E – множество столбцов некоторой $(n\times|E|)$ - матрицы A.

Элементы матрицы A - элементы любого поля K.

$\Im$ – множество линейно независимых подмножеств множества E.

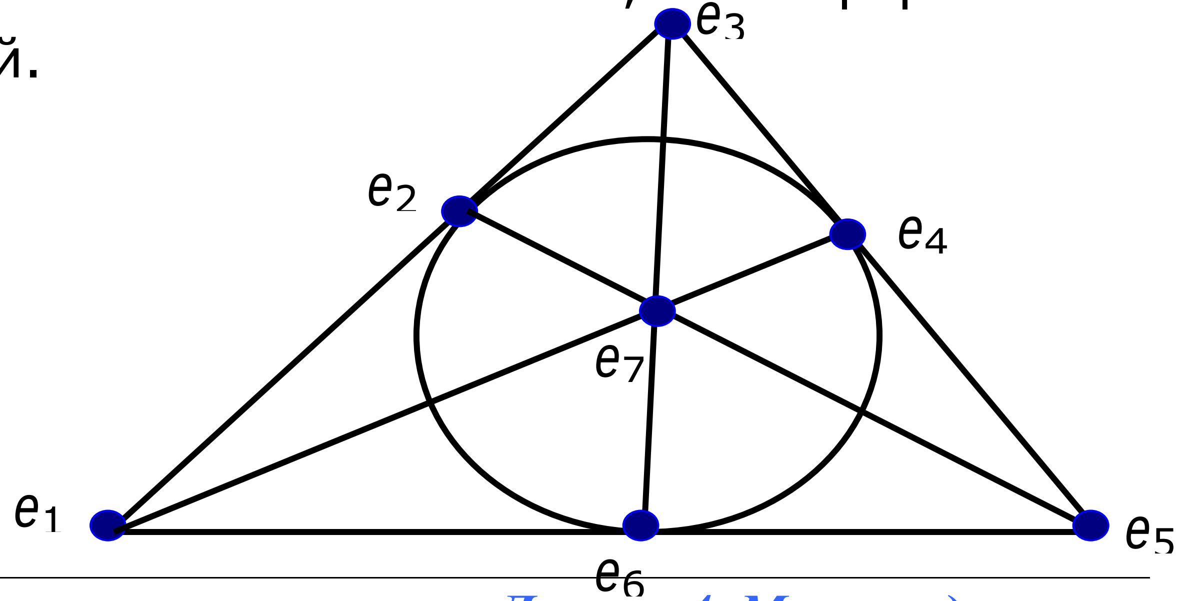
$M_A = (E, \Im)$ – матричный матроид (почему?)

Матроид Фано. Пусть $E = \{e_1,\ldots, e_7\}$ — множество элементов проективной плоскости порядка 2.

$|E| = n^2 + n + 1$, где n — простое число или степень простого числа.

- Каждые две прямые имеют ровно одну точку пересечения.
- Через любые две точки проходит ровно одна прямая.

Матроид Фано: $A \subset E$ — независимое множество, если $|A| \leq 2$ или $|A|=3$ и A не является прямой.



Прямые: $\{e_1, e_2, e_3\}$,

$\{e_3, e_4, e_5\}$, $\{e_5, e_6, e_1\}$,

$\{e_1, e_7, e_4\}$, $\{e_3, e_7, e_6\}$,

$\{e_2, e_7, e_5\}$, $\{e_2, e_4, e_6\}$