Задача упаковки в контейнеры

Дано: множество предметов $L = \{1, \dots , n\}$ и их веса $w_i \in (0,1]$, $i \in L$.

Найти: разбиение множества L на минимальное число m подмножеств

$B_1, B_2, \dots , B_m$ такое, что

$$\sum_{i \in B_j} w_i \leq 1, \text{ для всех } 1 \leq j \leq m.$$

Множества B_j называют контейнерами.

Требуется упаковать предметы в минимальное число контейнеров.

Задача NP-трудна в сильном смысле и часто возникает в приложениях.

Математическая модель

$$y_j = \begin{cases} 1, & j - й\ контейнер\ используется; \\ 0\ иначе, \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & i - й\ предмет\ лежит\ в\ j - м\ контейнере; \\ 0\ иначе. \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_{ij} \le y_j,\ j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1, \ldots, n$$

Алгоритм «Следующий подходящий» (NF)

В произвольном порядке упаковываем предметы по следующему правилу. Первый предмет помещаем в первый контейнер.

На k-м шаге пытаемся поместить k-й предмет в текущий контейнер.

Если предмет входит, то помещаем его и переходим к следующему шагу,

иначе помещаем предмет в новый контейнер.

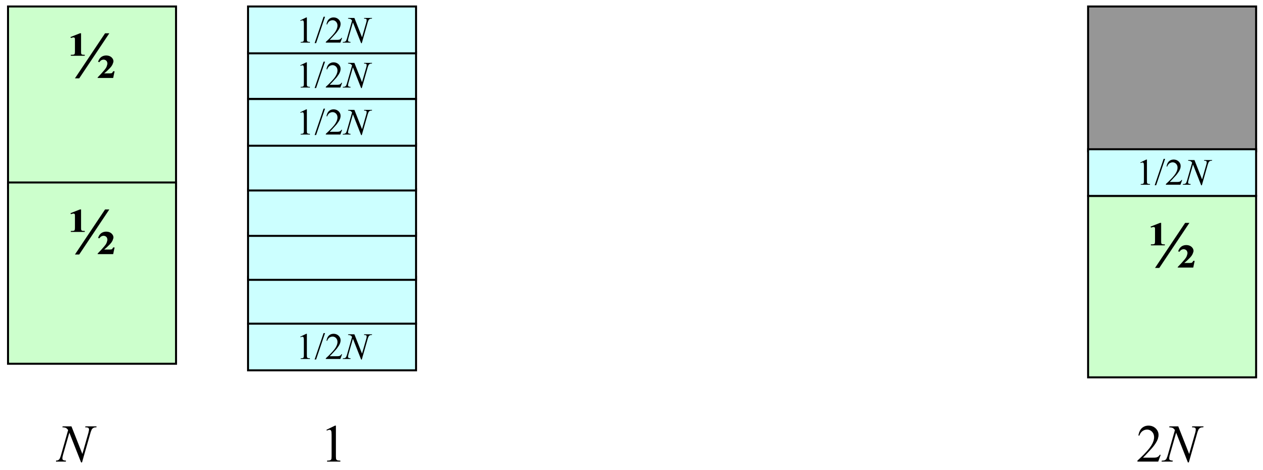
Т = $O(n)$, П = $O(1)$, если не считать место для исходных данных.

Теорема. $NF(L) \le 2OPT(L)$.

Доказательство. Пусть $W = \sum_{i \in L} w_i$. Так как любые два последовательных контейнера содержат предметы суммарным весом не меньше единицы, то $NF(L) < 2\lceil W \rceil$. Кроме того, $OPT(L) \ge \lceil W \rceil$, откуда и следует требуемое. ■

Пример

$L = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2N}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2N}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2N}\}.$ Всего $4N$ предметов.



$OPT(L) = N + 1$ $NF(L) = 2N$

Замечание. $NF(L) \le 2OPT(L) - 1$ для всех L.

Пусть алгоритм A для множества L порождает $A(L)$ контейнеров и

$$R_A(L) \equiv {A(L)}/{OPT(L)}.$$

Для задачи на минимум гарантированная относительная точность R_A для алгоритма A определяется как

$$R_A \equiv \inf \{r \geq 1 \mid R_A(L) \leq r \text{ для всех } L\}.$$

Определение. Асимптотическая гарантированная относительная точность R_A^∞ для алгоритма A определяется как

$$R_A^\infty \equiv \inf \{r \geq 1 \mid \exists\, N > 0 \text{ такое, что } R_A(L) \leq r \text{ для всех } L \text{ с } OPT(L) \geq N\}.$$

Алгоритм «Первый подходящий» (FF)

В произвольном порядке упаковываем предметы по следующему правилу. Первый предмет помещаем в первый контейнер.

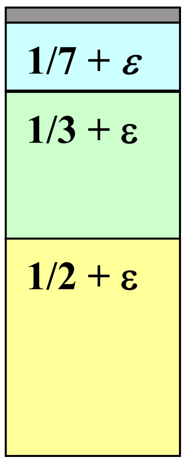
На k-м шаге находим контейнер с наименьшим номером, куда помещается k-й предмет, и помещаем его туда. Если такого контейнера нет, то берем новый пустой контейнер и помещаем предмет в него.

Т $= O(n^2)$, П $= O(n)$.

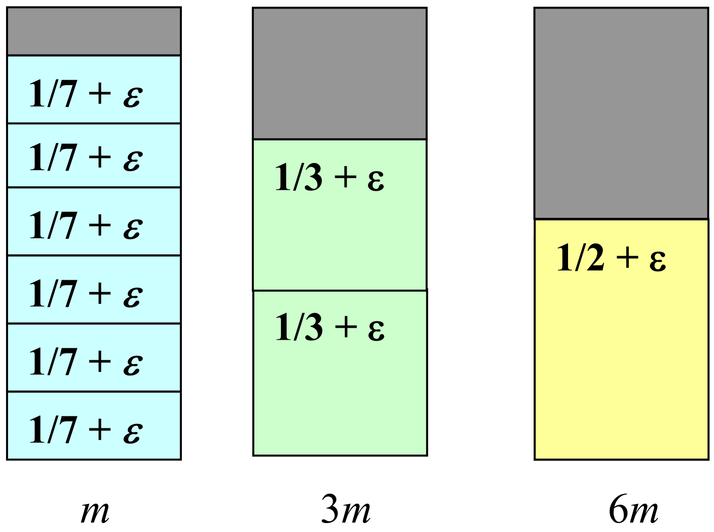
Теорема. $FF(L) \le \left\lceil \frac{17}{10} OPT(L) + 1 \right\rceil$ для всех L и существуют примеры со сколь угодно большими значениями OPT, для которых $FF(L) \ge \left\lceil \frac{17}{10} OPT(L) - 8 \right\rceil$.
(*Без доказательства*)

Пример

$$L = \{1, \ldots, 18\,m\} \qquad w_i = \begin{cases} \frac{1}{7} + \varepsilon, & 1 \le i \le 6m \\ \frac{1}{3} + \varepsilon, & 6m < i \le 12m \\ \frac{1}{2} + \varepsilon, & 12m < i \le 18m \end{cases}$$



$$OPT(L) = 6m$$



$$FF(L) = 10m$$

$$\frac{FF(L)}{OPT(L)} = \frac{5}{3}$$

Алгоритм «Наилучший подходящий» (BF)

В произвольном порядке упаковываем предметы по следующему правилу. Первый предмет помещаем в первый контейнер.

На k-м шаге размещаем k-й предмет. Находим частично заполненные контейнеры, где достаточно для него свободного места и выбираем среди них наиболее заполненный. Если таких нет, то берем новый пустой контейнер и помещаем k-й предмет в него.

Т = $O(n^2)$, П = $O(n)$.

Теорема. $R_{BF} = R_{FF}$, $R_{BF}^{\infty} = R_{FF}^{\infty}$ и существуют примеры со сколь угодно большими значениями $OPT(L)$, для которых $BF(L) = 4/3\ FF(L)$ и $FF(L) = 3/2\ BF(L)$.

(*Без доказательства*)

Алгоритмы типа On-line

Предметы поступают в непредсказуемом порядке. Требуется упаковать их в минимальное число контейнеров. Упакованный предмет нельзя перемещать в другой контейнер. Место для предварительного хранения предметов отсутствует.

Алгоритмы NF, FF, BF являются On-line алгоритмами.

Теорема. Для любого On-line алгоритма A справедливо неравенство $R_A^{\infty} > 1.5$

(*Без доказательства*)

Алгоритмы с ограниченным доступом к контейнерам

On-line алгоритм называют алгоритмом с ограниченным доступом к контейнерам, если на каждом шаге алгоритм имеет возможность помещать предметы только в один из K контейнеров (K — const). Эти контейнеры называются открытыми. Если контейнер закрыли, то он уже не открывается (например, отправляется потребителю). Прежде чем добавить пустой открытый контейнер, нужно закрыть один из K открытых контейнеров.

Алгоритм NF — пример для $K = 1$.

Правила для выбора контейнера

1. Закрыть контейнер с наименьшим номером
2. Закрыть самый заполненный контейнер.

Примеры алгоритмов с ограниченным доступом

FF_1 — алгоритм FF с правилом 1.

FF_2 — алгоритм FF с правилом 2.

BF_1 — алгоритм BF с правилом 1.

BF_2 — алгоритм BF с правилом 2.

Теорема. Для любого $K \geq 2$

1) $R_{FF_1}^{\infty} = R_{FF_2}^{\infty} = 1{,}7 + \frac{3}{10(K-1)}$.

2) $R_{BF_1}^{\infty} = 1{,}7 + \frac{3}{10K}$.

3) $R_{BF_2}^{\infty} = 1{,}7$.

4) Для любого алгоритма A с ограниченным доступом к контейнерам

$R_A^{\infty} \geq 1{,}69103...$

Алгоритм «Первый подходящий с упорядочиванием» (FFD)

- Сортируем предметы по невозрастанию весов $w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_n$
- Применяем алгоритм FF (BF).

Теорема. $FFD(L) \leq \frac{11}{9} OPT(L) + 4$ для всех L и существуют примеры со сколь угодно большими значениями $OPT(L)$, для которых

$$FFD(L) \geq \frac{11}{9} OPT(L).$$

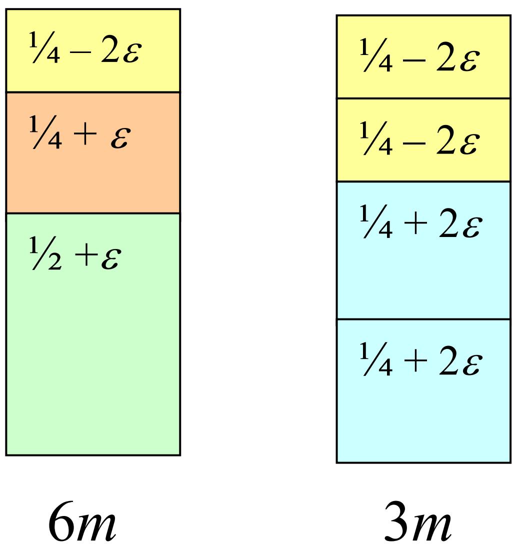
Кроме того $R_{FFD}^{\infty} = R_{BFD}^{\infty} = \frac{11}{9} \approx 1.22$.

(*Без доказательства*)

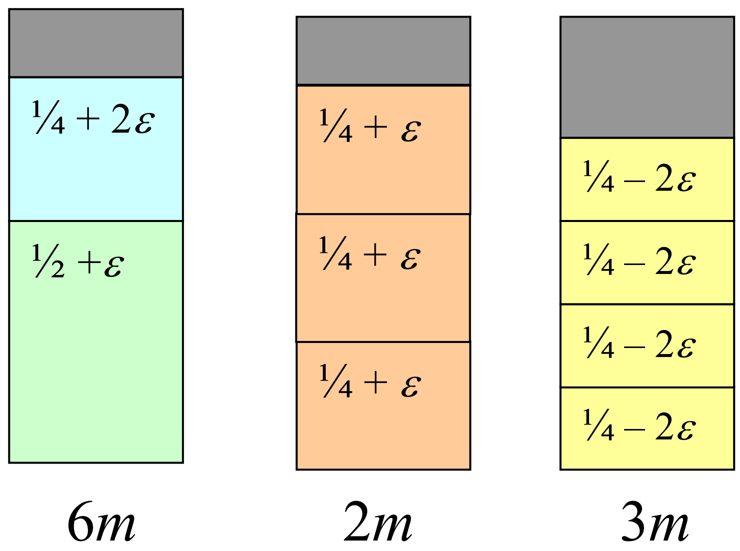
Пример

$$L = \{1, \ldots, 30\, m\}$$

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{2} + \varepsilon, & 1 \le i \le 6m \\ \frac{1}{4} + 2\varepsilon, & 6m < i \le 12m \\ \frac{1}{4} + \varepsilon, & 12m < i \le 18m \\ \frac{1}{4} - 2\varepsilon, & 18m < i \le 30m \end{cases}$$



$$OPT(L) = 9m$$



$$FFD(L) = 11m$$

Асимптотические гарантированные оценки точности

Алгоритм	T^*_A	R_A^∞	$R_A^\infty(1/2)$	$R_A^\infty(1/3)$	$R_A^\infty(1/4)$
NF	$O(n)$	2.000	2.000	1.500	1.333
FF	$O(n^2)$	1.700	1.500	1.333	1.250
BF	$O(n^2)$	1.700	1.500	1.333	1.250
NFD	$O(n\log n)$	1.691	1.424	1.302	1.234
FFD	$O(n\log n)$	1.222	1.183	1.183	1.150
BFD	$O(n\log n)$	1.222	1.183	1.183	1.150

$R_A^\infty(\alpha)$ — асимптотическая точность для примеров с весами предметов $w_i \le \alpha$, для всех $i \in L$.

Теорема. Для любого $\varepsilon \in (0,1]$ существует алгоритм A_ε, который находит упаковку с числом контейнеров не более $(1+2\varepsilon)\,OPT+1$. Трудоемкость A_ε полиномиально зависит от n.

(*Без доказательства*)

Алгоритм A_ε

1. Удалить предметы с весом менее ε.
2. Упорядочить оставшиеся предметы и разбить их на $K = \lceil 1/\varepsilon^2 \rceil$ групп.
3. В каждой группе увеличить веса предметов до максимального веса в группе.
4. Найти оптимальную упаковку предметов, имеющих только K различных весов каждый из которых не менее ε.
5. Вернуть исходные веса предметов и применить алгоритм FF для предметов с весом менее ε.

Негативный результат

Теорема. Для любого $\varepsilon > 0$ существование приближенного полиномиального алгоритма A с гарантированной точностью $R_A = \frac{3}{2} - \varepsilon$ влечет P = NP.

Доказательство. Пусть такой алгоритм A существует. Покажем, как с его помощью можно решить точно одну из NP-полных задач, а именно задачу о разбиении. Дано n неотрицательных чисел $a_1, \ldots, a_n$. Можно ли разбить их на два подмножества так, чтобы сумма чисел в каждом подмножестве равнялась $C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$? Рассмотрим задачу упаковки в контейнеры с весами предметов $w_i = a_i / C$, $i = 1, \ldots, n$. Если их можно упаковать в два контейнера, ответ в задаче о разбиении — «ДА». Применим алгоритм A к задаче о контейнерах. Если $OPT = 2$, то алгоритм A тоже дает 2, иначе $R_A \geq \frac{3}{2}$, то есть алгоритм A точный.

■

Нижние оценки

Переменные задачи $y_j = \begin{cases} 1, & \text{если используется контейнер } j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если предмет } i \text{ помещен в контейнер } j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\min \sum_{j=1}^{n} y_j$$

при ограничениях $$\sum_{i=1}^{n} w_i x_{ij} \le y_j, \quad j = 1,\ldots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\ldots,n,$$

$$y_j, x_{ij} \in \{0,1\} \quad i, j = 1,\ldots, n.$$

Релаксация линейного программирования

Заменим условие Булевости переменных на условия:

$$0 \le y_j \le 1, \qquad j = 1,\dots, n$$

$$0 \le x_{ij} \le 1, \quad i, j = 1,\dots, n.$$

Тогда одно из оптимальных решений имеет вид

$$x_{ij}^* = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases}, \qquad y_j^* = w_j,$$

что дает нижнюю оценку

$$H_0 = \left\lceil \sum_{i=1}^{n} w_i \right\rceil$$

(предметы можно резать произвольным образом).

Оценки Martello & Toth

Для примера $L = \{1,\ldots, n\}$, $0 \le w_i < 1$ и произвольного $0 \le \alpha \le ½$ положим

$L_1 = \{\, i \in L \mid w_i > 1 - \alpha \,\}$ — крупные предметы

$L_2 = \{\, i \in L \mid 1 - \alpha \ge w_i > ½ \,\}$ — средние предметы

$L_3 = \{\, i \in L \mid ½ \ge w_i \ge \alpha \,\}$ — мелкие предметы

Теорема. Для любого $0 \le \alpha \le ½$ величина

$$H_1(\alpha) = |L_1| + |L_2| + \max\left(0, \left\lceil \sum_{i \in L_3} w_i - (|L_2| - \sum_{i \in L_2} w_i) \right\rceil \right).$$

является нижней оценкой для $OPT(L)$.

Доказательство. Каждый предмет из множества $L_1 \cup L_2$ требует отдельный контейнер. Поэтому в любом допустимом решении не менее $|L_1| + |L_2|$ контейнеров. Предметы из множества L_3 не лежат вместе с предметами из L_1. Значит, они лежат либо вместе с предметами из L_2, либо в отдельных контейнерах. В контейнерах для L_2 осталось $S = \left(|L_2| - \sum_{i \in L_2} w_i \right)$ свободного места.

Следовательно, для предметов из множества L_3 требуется как минимум $\left\lceil \sum_{i \in L_3} w_i - S \right\rceil$ отдельных контейнеров. ■

Теорема. Для любого $0 \le \alpha \le ½$ величина

$$H_2(\alpha) = |L_1| + |L_2| + \max\left\{ 0, \left\lceil \frac{|L_3| - \sum\limits_{i \in L_2} \left\lfloor \frac{1-w_i}{\alpha} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor} \right\rceil \right\}$$

является нижней оценкой для $OPT(L)$.

Доказательство. Заменим вес каждого предмета из множества L_3 на α. Тогда в один контейнер войдет $\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor$ предметов, и для множества L_3 потребовалось бы $\left\lceil |L_3| / \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor \right\rceil$ дополнительных контейнеров. Но часть предметов из L_3 можно уложить в контейнеры для L_2. Каждый из них имеет $1 - w_i$, $i \in L_2$ свободного места, где поместится $\left\lfloor \frac{1-w_i}{\alpha} \right\rfloor$ предметов из L_3. ■

Следствие 1. Величина $H = \max\{H_1(\alpha),\ \text{H}_2(\alpha),\ 0 \le \alpha \le 0{,}5\}$ является нижней оценкой для $OPT(L)$.

Следствие 2. $H \ge H_0 \equiv \left\lceil \sum_{i \in L} w_i \right\rceil$.

Доказательство. При $\alpha = 0$ получаем $H \ge H_1(0) = \max\{|L_2|, H_0\} \ge H_0$.

Как найти H, не перебирая все значения α?

Следствие 3. Пусть V — множество всех различных значений $w_i \le 0{,}5$. Тогда

$$H = \begin{cases} n, & \text{если } V = \varnothing, \\ \max\{H_1(\alpha), H_2(\alpha), \text{ для } \alpha \in V\}, & \text{если } V \ne \varnothing. \end{cases}$$

т. е. после сортировки предметов получаем $T_H = O(n + n \log n)$.

Дополнительная литература

1. E.G. Coffman, M.R. Garey, D.S. Johnson. Approximation algorithms for bin packing: A survey. http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/bp-chapter.pdf

2. Э.Х. Гимади. О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов //Модели и методы оптимизации. Труды Института математики. Новосибирск. Наука. Сиб. Отд–ние. 1988. с. 89–115.

3. М. Гэри, Д. Джонсон. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. с. 154–191.