ЛЕКЦИЯ № 4

Теория двойственности ЛП (продолжение)

1. Теоремы Фаркаша – Минковского и Гордана

Необходимые условия экстремума

2. Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера

3. Критерий оптимальности (выпуклый случай)

Теорема 7 (Фаркаша–Минковского). **Система уравнений $\boldsymbol{Ax = b, x \geq 0}$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $\boldsymbol{(b, y) \leq 0}$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA \leq 0}$.**

Доказательство. Необходимость. Пусть $\exists \boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{Ax = b, x \geq 0}$ и пусть $\boldsymbol{y}$ — произвольное решение системы $\boldsymbol{yA \leq 0}$. Тогда

$$\boldsymbol{(b, y) = (Ax, y) = (x, yA) \leq (x, 0) = 0.}$$

Достаточность. Пусть неравенство $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \leq \mathbf{0}$ выполняется для всех решений системы неравенств $\boldsymbol{yA} \leq \mathbf{0}$.

Рассмотрим прямую и двойственную задачи ЛП:

$$(\boldsymbol{P}) : \mathbf{0} \rightarrow \min_{\boldsymbol{x}}$$
$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b};$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}.$$

$$(\boldsymbol{D}) : \boldsymbol{by} \rightarrow \max_{\boldsymbol{y}}$$
$$\boldsymbol{yA} \leqslant \mathbf{0}.$$

Следствие 3. **Система уравнений $Ax \le b$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $(b, y) \ge 0$ выполняется для всех решений системы уравнений $yA = 0, y \ge 0$.**

$Ax \le b$ разрешима $\Longleftrightarrow$ разрешима система $Ax_1 - Ax_2 + Eu = b, x_1, x_2, u \ge 0 \Longleftrightarrow$ когда неравенство $(b, y) \le 0$ выполняется для всех решений системы уравнений $yA \le 0, -yA \le 0, Ey \le 0 \Longleftrightarrow$ неравенство $(b, y) \ge 0$ выполняется для всех решений системы уравнений $yA = 0, y \ge 0$. ■

Следствие 4 (теорема Гордана). Имеет место одно и только одно из следующих двух условий:

1. Разрешима система уравнений $\boldsymbol{Ax} < \mathbf{0}$;

2. существует такой $\neq \mathbf{0}$ вектор $\boldsymbol{y}$, что $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$.

Действительно, система уравнений $\boldsymbol{Ax} < \mathbf{0}$ разрешима $\Longleftrightarrow$ разрешима система уравнений $\boldsymbol{Ax} \leq (-\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \ldots, -\mathbf{1})^{\top}$. По теореме Ф.–М. разрешимость последней системы эквивалентна выполнению условия:

если вектор $\boldsymbol{y}$ решение системы $\boldsymbol{yA} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$, то выполняется неравенство $-\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$. Т.е. не существует ненулевого вектора $\boldsymbol{y}$ такого, что $\boldsymbol{yA} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$.

Теперь пусть существует ненулевой вектор $\boldsymbol{y}$ такой, что $\boldsymbol{yA} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$. Но тогда не выполняется неравенство $-\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \Longrightarrow$ не выполнено условие теоремы Ф.–М. $\Longrightarrow$ система $\boldsymbol{Ax} \leq (-\boldsymbol{1}, -\boldsymbol{1}, \ldots, -\boldsymbol{1})^{\top}$ неразрешима $\Longrightarrow$ неразрешима система

$\boldsymbol{Ax} < \boldsymbol{0}$.$\blacksquare$

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

Найти:

$$\min f(x) \tag{1}$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}. \tag{2}$$

Здесь $f, \varphi_i : R^n \longrightarrow R$ и $f, \varphi_i \in C^1$.

Определение 8. Направление $s \neq 0$ **называется возможным в точке** $x \in Q$, **если существует такое число** $\overline{\beta} > 0$, **что** $x + \beta s \in Q$, $\forall \beta \in [0, \overline{\beta}]$.

Комментарий

Множество $\boldsymbol{K}$ называется конусом, если $\forall\ \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ и $\forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}$ имеем $\boldsymbol{\lambda x} \in \boldsymbol{K}$.

Очевидно, что множество возможных направлений в точке $\boldsymbol{x}$ образует конус, который обозначим как $\boldsymbol{K_f(x)}$.

Ограничение φ_i называется **активным** в точке x, если $\varphi_i(x) = 0$. $I(x)$ – множество номеров ограничений активных в данной точке.

Лемма 7. Если вектор $s \neq 0$ удовлетворяет системе

$$(\varphi_i'(x), s) + \sigma \leq 0, i \in I(x),$$

при некотором $\sigma > 0$, то направление s является возможным в точке x.

Доказательство. Считаем, что $I(x) \neq \varnothing$ (т.к. иначе любое направление $s \neq 0$ является возможным)

Если $i \notin I(x)$, то малое перемещение не нарушает строгое ограничение $\varphi_i(x) < 0 \Longrightarrow$ найдется подходящее $\overline{\beta_i}$.

Пусть $i \in I(x)(\equiv \varphi_i(x) = 0)$. Далее рассуждаем от противного. Допустим, что $\varphi_i(x+\beta s) > 0,$ для достаточно малых $\beta > 0 \Longrightarrow$
$\varphi_i(x+\beta s)/\beta = (\varphi_i(x+\beta s) - \varphi_i(x))/\beta \longrightarrow$
$\longrightarrow (\varphi_i'(x), s) \geq 0$ (при $\beta \to 0$).

Противоречие. Т.к. по условиям леммы

$(\varphi_i'(x), s) < 0,$ ■

Комментарий

Пусть $\boldsymbol{K_<(x)} = \{\boldsymbol{s}|\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0}$ и $(\boldsymbol{\varphi_i'(x), s}) < \boldsymbol{0}, \forall\, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I(x)}\}$. Множество $\boldsymbol{K_<(x)}$ конус.

Лемма 7 утверждает, что конус $\boldsymbol{K_<(x)}$ является подмножеством конуса $\boldsymbol{K_f(x)}$.

Поэтому назовем конус $\boldsymbol{K_<(x)}$ конусом внутренней аппроксимации конуса $\boldsymbol{K_f(x)}$.

Теорема о замыкании конуса возможных направлений

$$\boldsymbol{K_{\leq}(x) = \{s \neq 0 | (\varphi_i'(x), s) \leq 0, \forall\, i \in I(x)\}.}$$

Т.к. $\boldsymbol{K_f(x) \subseteq K_{\leq}(x)}$, то конус $\boldsymbol{K_{\leq}(x)}$ называется внешней аппроксимацией конуса возможных направлений.

Теорема 7 (о замыкании конуса возможных направлений).

Если $\boldsymbol{K_{<}(x) \neq \emptyset}$, то $\boldsymbol{\overline{K_f}(x) = K_{\leq}(x)}$.

Доказательство. Действительно, пусть конус $\boldsymbol{K_{<}(x)}$ не пуст. Тогда найдётся $\boldsymbol{\overline{s}}$ такой, что

$$\boldsymbol{(\varphi_i'(x), \overline{s}) < 0, \forall\, i \in I(x).}$$

Пусть $\boldsymbol{s \in K_{\leq}(x)}$, т.е.

$$\boldsymbol{(\varphi_i'(x), s) \leq 0, \forall\, i \in I(x).}$$

Очевидно, что для любого $\boldsymbol{\lambda \in [0, 1)}$:

$$\boldsymbol{\lambda s + (1 - \lambda)\overline{s} \in K_{<}(x).}$$

Таким образом $\boldsymbol{s}$ предел последовательности направлений из $\boldsymbol{K}_<(\boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{\lambda}$ стремящимся к 1 снизу. Учитывая, что

$$\boldsymbol{K}_<(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{K}_\leq(\boldsymbol{x}),$$

получим $\overline{\boldsymbol{K}}_<(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}_\leq(\boldsymbol{x})$.

Т.к.

$$\boldsymbol{K}_<(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{K}_f(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{K}_\leq(\boldsymbol{x}),$$

то

$$\overline{\boldsymbol{K}}_f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}_\leq(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{s} \neq 0 | (\varphi_i'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{s}) \leq \boldsymbol{0}, \forall\, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x})\}.\blacksquare$$

Теорема 8 (Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера). Пусть x^* — локальный экстремум задачи (1), (2), функции f, $\varphi_i, i = \overline{1, m}$, непрерывны и непрерывно дифференцируемы и вектора $\varphi_i'(x^*), i \in I(x^*)$, линейно независимы. Тогда найдутся такие множители $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*), \qquad (3)$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}. \qquad (4)$$

Доказательство.

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера

Так как $\boldsymbol{x}^*$ — локальный минимум задачи (1), (2), то

$\forall \boldsymbol{s} \neq \mathbf{0}$, если $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^*)$, то выполняется неравенство $(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{s}) \geq \mathbf{0}$.

Т.к. $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^{\mathbf{1}}$, то

$\forall \boldsymbol{s} \neq \mathbf{0}$, если $\boldsymbol{s} \in \overline{\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{f}}}(\boldsymbol{x}^*)$, то выполняется неравенство $(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{s}) \geq \mathbf{0}$.

Линейная независимость градиентов активных ограничений $\varphi_i'(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}^*)$ означает, что не существует таких ненулевых коэффициентов $\boldsymbol{\lambda}_i$, $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}^*)$, что

$$\sum_{i \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}^*)} \boldsymbol{\lambda}_i \varphi_i'(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}.$$

Отсюда при помощи теоремы Гордана (след-е теор. Ф.–М.) выводим, что найдется такой ненулевой вектор $\boldsymbol{s}$, что

$$(\varphi_i'(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{s}) < \mathbf{0}, \forall\, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}^*).$$

Т.е. конус $\boldsymbol{K}_<(\boldsymbol{x}^*)$ является не пустым. Следовательно

$$\overline{\boldsymbol{K}}_f(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{s} \neq 0 | (\varphi_i'(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{s}) \leq \mathbf{0}, \forall\, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}^*)\}.$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера

Итак имеем, что

$\forall s \neq 0$, если $(\varphi_i'(x^*), s) \leq 0, \forall\ i \in I(x^*)$, то выполняется неравенство $(-f'(x), s) \leq 0$.

Тогда по теореме Фаркаша-Минковского $\exists$ неотрицательное решение системы уравнений:

$$-f'(x^*) = \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \varphi_i'(x^*), \tag{3}$$

Положим $\lambda_i = 0, i \notin I(x^*)$ и получим

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*), \tag{3}$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}. \tag{4}$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Задача (1), (2) называется задачей выпуклого программирования, если функции $\boldsymbol{f}$, $\varphi_i, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{m}},$ — выпуклы.

Множество $\boldsymbol{Q}$ выпукло. По прежнему считаем, что $\boldsymbol{f}$, $\varphi_i \in \boldsymbol{C}^1$.

Условие регулярности для выпуклого случая:

$$\forall \boldsymbol{i}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{m}},\ \exists \boldsymbol{x}^i \in \boldsymbol{Q} : \varphi_i(\boldsymbol{x}^i) < \boldsymbol{0}.$$

Эквивалентно условию регулярности Слейтера

$$\exists \widetilde{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{Q} : \varphi_i(\widetilde{\boldsymbol{x}}) < \boldsymbol{0}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{m}}.$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Лемма 8. Функция f дифференцируемая на выпуклом множестве Q, выпукла в том и только в том случае, когда для любых $x, y \in Q$: $(f'(x), y - x) \leq f(y) - f(x)$.

Доказательство. $\forall x \neq y \in Q, \forall \alpha \; 0 < \alpha \leq 1$

$$f(x + \alpha(y - x)) \leq f(x) + \alpha(f(y) - f(x)).$$

Перепишем неравенство:

$$\|y - x\| \frac{f(x + \beta s) - f(x)}{\beta} \leq f(y) - f(x),$$

где $s = \frac{y-x}{\|y-x\|}$, $\beta = \alpha\|y - x\|$. Устремим β к 0. В пределе получим

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

$$(f'(x), s)\, \|y - x\| \le f(y) - f(x).$$

Но

$$(f'(x), s)\, \|y - x\| = (f'(x), y - x).$$

Итак, доказали неравенство

$$(f'(x), y - x) \le f(y) - f(x).$$

В обратную сторону. Пусть $\forall x, y \in Q : (f'(x), y - x) \le f(y) - f(x)$.

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

По условию $\forall\ \alpha \in [0,1] : z = \alpha x + (1-\alpha) y \in Q$.

Умножим неравенство $(f'(z), x - z) \le f(x) - f(z)$ на α, а

неравенство $(f'(z), y - z) \le f(y) - f(z)$ на $(1-\alpha)$ и сложим их

$$0 = (f'(z), \alpha(x - z) + (1-\alpha)(y - z)) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) - f(z)$$

$$\Longrightarrow f(\alpha x + (1-\alpha) y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

Лемма 9. Если

$$\boldsymbol{Q = \{x | \varphi_i(x) = (a_i, x) - b_i \leq 0, i = \overline{1, m}\},}$$

то условия

$$\boldsymbol{(a_i, s) \leq 0, i \in I(x^*)}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы направление $\boldsymbol{s}$ было возможным в точке $\boldsymbol{x^* \in Q}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\beta > 0}$. Рассмотрим

$$\boldsymbol{\varphi_i(x^* + \beta s) = (a_i, x^* + \beta s) - b_i = (a_i, x^*) - b_i + \beta(a_i, s).}$$

$$\boldsymbol{\forall i \notin I(x^*)\ (a_i, x^*) - b_i < 0 \Rightarrow \forall i \notin I(x^*)\ \varphi_i(x^* + \beta s) \leq 0,}$$

для достаточно малых $\boldsymbol{\beta}$.

Необходимые условия оптимальности Куна–Таккера: выпуклый случай

$$\forall i \in I(x^*)\ \varphi_i(x^* + \beta s) = (a_i, x^* + \beta s) - b_i = \beta(a_i, s) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^* + \beta s \in Q\ \forall \beta > 0 \Leftrightarrow (a_i, s) \leq 0\ \forall i \in I(x^*).\blacksquare$$

Другими словами в лемме утверждается, что $K_f(x) = K_{\leq}(x)$

Эта лемма позволяет элиминировать условие Слейтера в задаче выпуклого программирования в случае линейных ограничений.

Помним: функции f, φ_i — выпуклые, непрерывно-дифференцируемые. Множество допустимых решений Q удовлетворяет условию Слейтера.

Критерий оптимальности: выпуклый случай

Теорема 9 (Теорема Куна-Таккера в локальной форме). *Точка $x^* \in Q$ — оптимальное решение задачи выпуклого программирования в том и только в том случае, когда существуют такие числа $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, что*

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*),$$

$$\lambda_i \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}.$$

Доказательство. "Необходимость."

Из леммы 8 и условия Слейтера следует, что для любого $i \in I(x^*)$

$$0 > \varphi_i(\widetilde{x}) = \varphi_i(\widetilde{x}) - \varphi_i(x^*) \geq (\varphi_i'(x^*), \widetilde{x} - x^*).$$

Таким образом вектор $s = (\widetilde{x} - x^*) \in K_<(x^*)$. Следовательно, по теореме о замыкании конуса возможных направлений имеем $\overline{K}_f(x^*) = K_\leq(x^*)$. Повторяем соответствующие рассуждения доказательства теоремы 8.

"Достаточность."

$\forall z \in Q : s = (z - x^*) \in K_f(x^*) \Rightarrow (\varphi_i'(x^*), s) \leq 0, \forall\, i \in I(x^*).$

$$\forall z \in Q : f(z) - f(x^*) \geq (f'(x^*), z - x^*) = (f'(x^*), s) = (-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i'(x^*), s) = \sum_{i=1}^{m} (-\lambda_i)(\varphi_i'(x^*), s) \geq 0. \blacksquare$$

Критерий оптимальности: линейный случай

Теорема 10 (Теорема Куна-Таккера в локальной форме). Точка $x^* \in Q$ — оптимальное решение задачи выпуклого программирования с линейными ограничениями в том и только в том случае, когда существуют такие числа $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, что

$$-f'(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i,$$

$$\lambda_i \big((a_i, x) - b_i \big) = 0, i = \overline{1, m}.$$

Критерии оптимальности

Функцию

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x),$$

определенную при всех x и λ, назовем функцией Лагранжа для задачи (1), (2).

Пара (x^*, λ^*) называется седловой точкой функции Лагранжа, если

$$L(x^*, \lambda) \overset{(3)}{\leq} L(x^*, \lambda^*) \overset{(4)}{\leq} L(x, \lambda^*) \;\forall x \in R^n, \forall \lambda \geq 0.$$

Критерии оптимальности

Теорема 11 (Теорема Куна-Таккера в нелокальной форме). Вектор $\boldsymbol{x^*} \in \boldsymbol{Q}$ является оптимальным решением задачи выпуклого программирования тогда и только тогда, когда существует такой вектор $\boldsymbol{\lambda^*}$, что пара $(\boldsymbol{x^*}, \boldsymbol{\lambda^*})$ является седловой точкой функции Лагранжа.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\boldsymbol{x^*} \in \boldsymbol{Q}$ — оптимальное решение. Тогда из теоремы 9 имеем

$$\exists \boldsymbol{\lambda}^* \geq 0 : \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x}\bigg|_{(x^*, \lambda^*)} = f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \varphi_i'(x^*) = 0 \text{ и}$$

$$\lambda_i^* \varphi_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m}.$$

Достаточность. Как в теореме 1. ■