ЛЕКЦИЯ № 3

Симплекс-метод

1. Симплекс-таблица (с.-т.). Элементарное преобразование б.д.р., базиса и с.-т. Алгоритм симплекс-метода

2. Лексикографический симплекс-метод

3. Двухфазный симплекс-метод или метод искусственного базиса

Симплекс-таблица (с.-т.)

$\boldsymbol{x}$ – допустимое решение задачи (5–7) со значением целевой функции $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w} \Leftrightarrow$ пара $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x})$ – решение системы уравнений $(\mathbf{5}')$, $(\mathbf{6}')$, $(\mathbf{7})$ или системы

$$-\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}} - \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} = -\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \qquad (\mathbf{5}')$$

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \qquad (\mathbf{6}')$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \qquad (\mathbf{7})$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$-w + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j = z_{00}, \qquad (5'')$$

$$x_{\sigma(i)} + \sum_{j \in S'} z_{ij} x_j = z_{i0}, \; i = \overline{1, m}, \qquad (6'')$$

где

$$z_{00} = -c_B B^{-1} b = -w(\overline{x}),$$

$$z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j, \; j = 1, \ldots, n,$$

$$(z_{10}, \ldots, z_{m0})^\top = B^{-1} b,$$

$$(z_{1j}, \ldots, z_{mj})^\top = B^{-1} A_j, \;\; j = 1, \ldots, n.$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$
\begin{array}{c|c|cccccc|}
 & & x_1 & \ldots & x_j & \ldots & x_n \\
\cline{2-7}
-w & z_{00} & z_{01} & \ldots & z_{0j} & \ldots & z_{0n} \\
\cline{2-7}
x_{\sigma(1)} & z_{10} & z_{11} & \ldots & z_{1j} & \ldots & z_{1n} \\
. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_{\sigma(i)} & z_{i0} & z_{i1} & \ldots & z_{ij} & \ldots & z_{in} \\
. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_{\sigma(m)} & z_{m0} & z_{m1} & \ldots & z_{mj} & \ldots & z_{mn} \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$
\begin{array}{c|c|cccccccc|}
 & & x_1 & \dots & x_i & \dots & x_m & x_{m+1} & \dots & x_n \\
\hline
-w & z_{00} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & z_{0m+1} & \dots & z_{0n} \\
\hline
x_1 & z_{10} & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & z_{1m+1} & \dots & z_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_i & z_{i0} & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & z_{im+1} & \dots & z_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_m & z_{m0} & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & z_{mm+1} & \dots & z_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

Определение 6. Симплекс–таблица прямо допустима, если $\boldsymbol{z_{i0} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m.}$

Базис $\boldsymbol{B}$, соответствующий ей, также называется прямо допустимым.

Определение 7. Симплекс–таблица двойственно допустима, если $\boldsymbol{z_{0j} \geq 0,\ j = 1, \ldots, n.}$

Базис $\boldsymbol{B}$, соответствующий этой таблице, также называется двойственно допустимым.

Элементарное преобразование б.д.р.

$\boldsymbol{x(t), t \geq 0:}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x_{\sigma(i)}(t)} &= \boldsymbol{\overline{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t,} \\
\boldsymbol{x_s(t)} &= \boldsymbol{t,} \\
\boldsymbol{x_j(t)} &= \boldsymbol{0, j \in S' \backslash s}
\end{aligned} \qquad \mathbf{(10)}
$$

$$
\boldsymbol{\overline{t} = \frac{\overline{x}_{\sigma(r)}}{z_{rs}} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min_{z_{is}>0,\ i\geq 1} \frac{z_{i0}}{z_{is}}.}
$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$\boldsymbol{\alpha'_i = (z'_{i0}, z'_{i1}, \ldots, z'_{in})}$ $(\boldsymbol{i = \overline{0, m}})$ строки новой симплекс– таблицы:

$$\begin{cases} \alpha'_i = \alpha_i - \dfrac{z_{is}}{z_{rs}}\alpha_r, \; i \neq r, \\ \alpha'_r = \dfrac{1}{z_{rs}}\alpha_r. \end{cases} \tag{11}$$

$\boldsymbol{r}$-я строка, $\boldsymbol{s}$-й столбец и элемент $\boldsymbol{z_{rs}}$ называются ведущими.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Соотношения (11) эквивалентны следующим

$$\begin{cases} z'_{ij} = z_{ij} - \dfrac{z_{is} z_{rj}}{z_{rs}}, \; i \neq r, \\ z'_{rj} = \dfrac{z_{rj}}{z_{rs}}. \end{cases}$$

Замечание 3. Элементарные преобразования сохраняют прямо допустимость с.-т.

Симплекс-метод

0) Построить симплекс–таблицу, соответствующую заданному базисному допустимому решению (таблица, естественно, будет прямо допустимой, т.е. $z_{i0} \geq 0, i = \overline{1, m}$).

1) Если симплекс–таблица двойственно допустима, т.е. $z_{0j} \geq 0,\ j = \overline{1, n}$, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение)

2) Иначе, выбрать ведущий столбец $s : z_{0s} < 0,\ s \geq 1$.

Симплекс-метод

3) Если $\{i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min\{\frac{z_{i0}}{z_{is}} \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции).

4) Преобразовать симплекс–таблицу, положить $\sigma(r) := s$ и перейти на шаг 1.

Лексикографический с. - м.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}'' \in \boldsymbol{R}^{n+1}$.

Вектор $\boldsymbol{\alpha}'$ лексикографически больше вектора $\boldsymbol{\alpha}''$ $(\boldsymbol{\alpha}' \succ \boldsymbol{\alpha}'') \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}' - \boldsymbol{\alpha}'' \succ \mathbf{0}$.

Симплекс-таблица *нормальна*, если каждая ее строка $\boldsymbol{\alpha}_i$, $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{m}$ лексикографически больше нуля.

Лексикографический с. - м.

0) Начать с нормальной симплекс–таблицы.

3) Если $\{i \mid z_{is} < 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{1}{z_{rs}}\alpha_r = lex\min\{\frac{1}{z_{is}}\alpha_i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).

Сохранение нормальности с.-т. на шаге 4:

1. $\boldsymbol{\alpha_r} \succ \mathbf{0}$, $\boldsymbol{z_{rs}} > \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z_{rs}}}\boldsymbol{\alpha_r} \succ \mathbf{0}$
2. $\boldsymbol{z_{is}} \leq \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_i} - \frac{\boldsymbol{z_{is}}}{\boldsymbol{z_{rs}}}\boldsymbol{\alpha_r} \succeq \boldsymbol{\alpha_i} \succ \mathbf{0}$
3. $\boldsymbol{z_{is}} > \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{z_{is}}[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z_{is}}}\boldsymbol{\alpha_i} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z_{rs}}}\boldsymbol{\alpha_r}] \succ \mathbf{0}$.

Лексикографическое возрастание 0-й строки:

$\boldsymbol{z_{0s}} < \mathbf{0}$, $\boldsymbol{z_{rs}} > \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\alpha_r} \succ \mathbf{0}$, то

$$\boldsymbol{\alpha_0} - \frac{\boldsymbol{z_{0s}}}{\boldsymbol{z_{rs}}}\boldsymbol{\alpha_r} \succ \boldsymbol{\alpha_0}.$$

Итак базисы не могут повторятся, следовательно, метод конечен.

Метод искусственного базиса

Пусть $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1, \ldots, x_n})$, $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u_1, \ldots, u_m})$.
Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\boldsymbol{\xi = u_1 + \cdots + u_m \longrightarrow \min}$$

$$\boldsymbol{Ax + Eu = b \geq 0}$$

$$\boldsymbol{(a_i x + u_i = b_i \geq 0, i = \overline{1, m})}$$

$$\boldsymbol{x, u \geq 0}$$

$\boldsymbol{z^0 = (0, b) \in R^{n+m}}$ – б.д.р.

Метод искусственного базиса

Вспомогательная задача разрешима и $\min \xi \geq 0$.
Пусть $z^* = (x^*, u^*)$ – оптимальное решение

A. $\min \xi > 0 \iff Q = \emptyset$

B. $\min \xi = 0 \implies u_i^* = 0$, $i = \overline{1, m}$, $\implies$ вектор x^* – доп. реш. задачи (5)-(7) $\implies x^*$ – б.д.р. задачи (5)-(7).

$\{A_j | j \in S\} \cup \{E_i | i \in I'\}$ – базис z^*, где $S \subseteq \{1, \ldots, n\}, I' \subseteq \{1, \ldots, m\}$ и

Метод искусственного базиса

$|S| + |I'| = m.$ Тогда

$$A_k = \sum_{j \in S} z_{jk} A_j + \sum_{i \in I'} \mu_{ik} E_i$$

Возможны случаи:

B1. $I' = \emptyset$.

B2. $I' \neq \emptyset$ и $\exists r \in I', \exists s \notin S\ \mu_{rs} \neq 0$.

B3. $I' \neq \emptyset$ и $\forall r \in I', \forall s = \overline{1, n}\ \mu_{rs} = 0$.

Метод искусственного базиса

B1. $\boldsymbol{I'} = \boldsymbol{\emptyset} \Longrightarrow |\boldsymbol{S}| = \boldsymbol{m} \Longrightarrow$ множество $\{\boldsymbol{A_j} | \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{S}\}$ – базис б.д.р. $\boldsymbol{x^*}$.

Преобразовать оптимальную с.-т.:

1. Вычеркнуть столбцы для переменных:

$\boldsymbol{u_1, \ldots, u_m}$.

2. Пересчитать 0-строку: $\boldsymbol{z_{00} = -(c, x^*)}$,

$\boldsymbol{z_{0k} = 0, k \in S}$, $\boldsymbol{z_{0k} = c_k - \sum_{j \in I} c_j z_{jk}, k \notin S}$.

Метод искусственного базиса

В2. $I' \neq \emptyset$ и $\exists r \in I'$, $\exists s \notin S$ $\mu_{rs} \neq 0 \Longrightarrow$ Выполнить элементарное преобразование с.-т. с ведущим элементом $\mu_{rs} \neq 0$. Новая с.-т. соответствует базису

$$\{A_j | j \in S \cup \{s\}\} \cup \{E_i | i \in I' \setminus \{r\}\}.$$

Метод искусственного базиса

В3. $\boldsymbol{I}' \neq \emptyset$ и $\forall \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{I}', \forall \boldsymbol{s} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{n}} : \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{rs}} = \mathbf{0}.$

Ограничения $\boldsymbol{a_i x} = \boldsymbol{b_i}$ системы (6) с номерами $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}'$ являются избыточными.