ЛЕКЦИЯ № 1

от 06.09.17

Лектор: Панин Артём (Александрович)

http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5
Opt_FIT_2017.html

1. Понятие экстремальной задачи

2. Элементы алгоритмической теории экстремальных задач

3. Классификация задач

4. Лагранжева теория двойственности

4.1. Определения

4.2. Теорема о седловой точке

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Алексеева Е. В., Кутненко О. А., Плясунов А. В. Численные методы оптимизации. Новосибирск: НГУ, 2008.*

[2] Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.:Наука, 1969.

[3] Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

[4] *Глебов Н. И., Кочетов Ю. А., Плясунов А. В. Методы оптимизации. Новосибирск: НГУ, 2000.*

[5] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

[6] *Ларин Р. М., Плясунов А. В., Пяткин А. В. Методы оптимизации. Примеры и задачи. Новосибирск: НГУ, 2003, 2009.*

[7] Мину М. Математическое программирование. М.: Наука, 1990.

ЛИТЕРАТУРА

[8] Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.

[9] Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.

[10] Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Физматлит, 2005.

[11] Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991.

[12] Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.

[13] Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. М.:Наука, 1969.

Задача ценообразования

Производитель назначает на своих предприятиях цену на однородный продукт;

Каждый потребитель выбирает то предприятие, на котором его суммарные затраты на покупку и транспортировку товара минимальны, и совершает покупку только в том случае, когда эти затраты не превышают бюджет;

Цель игры – найти такие цены, при которых доход производителя максимален.

Задача ценообразования

Введем обозначения:

$I = \{1, ..., m\}$ – множество предприятий;

$J = \{1, ..., n\}$ – множество потребителей;

$b_j \geq 0$ – бюджет j-го потребителя;

$c_{ij} \geq 0$ – транспортные затраты j-го потребителя, если он обслуживается в i-м предприятии;

$p_i \geq 0$ – цена продукции на предприятии i;

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если потребитель } j \text{ обслуживается в предприятии } i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача ценообразования

$$\sum_{i \in I} p_i \sum_{j \in J} x_{ij} \to \max_{p \geq 0, x}$$

где вектор x – оптимальное решение задачи нижнего уровня:

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I} (b_j - c_{ij} - p_i) x_{ij} \to \max_{x_{ij} \in \{0,1\}}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \leq 1; j \in J;$$

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ (ОПТИМИЗАЦИОННАЯ) ЗАДАЧА (Р)

Найти:

$$\min f(x) \tag{1}$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

$$x \in S \subseteq R^n \text{ или } Z^n \text{ или } B^n. \tag{3}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$– вектор переменных;
f – целевая функция задачи;
$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, x \in S$ – ограничения задачи.

Методы оптимизации $\equiv$ Теория оптимизации $\equiv$ Теория экстремальных задач $\equiv$ Математическое программирование

1. Теоретическое исследование вопросов существования оптимальных решений экстремальных задач.
2. Необходимые и/или достаточные условия экстремума.
3. Разработка численных методов решения.
4. Исследование сложности задач.

Источник экстремальных задач: – экономика, техника и д.р.

Цели лекционного курса:

– Изучение ряда базовых алгоритмов, которые используются для решения **конечномерных задач оптимизации**.

– Получение теоретических и концептуальных представлений, достаточных для понимания, оценки этих алгоритмов и, если необходимо, создания новых.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Вектор $\boldsymbol{x}$ – допустимое решение задачи $\boldsymbol{P}$, если выполняются ограничения (2),(3).

$\boldsymbol{Q(P) = \{x \in R^n | \varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, x \in S\}}$ – множество допустимых решений задачи $\boldsymbol{P}$.

Оптимальное решение (глобальный минимум): любое допустимое решение задачи, на котором достигается минимум целевой функции $\boldsymbol{f}$ на множестве $\boldsymbol{Q(P)}$.

1. $\boldsymbol{g(x) = 0 \equiv g(x) \leq 0, -g(x) \leq 0}$.

$\boldsymbol{g(x) \leq 0 \equiv g(x) + y = 0}$, где $\boldsymbol{y \geq 0}$.

2. $\boldsymbol{\max\limits_{x \in Q} g(x) \equiv \min\limits_{x \in Q} -g(x)}$

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Задача оптимизации решена, если
– либо найдено её оптимальное решение,
– либо найден конечный инфинум целевой функции на множестве $\boldsymbol{Q(P)}$, в случае, когда оптимального решения не существует,
– либо доказано, что целевая функция неограничена снизу на множестве допустимых решений,
– либо установлено, что множество допустимых решений задачи $\boldsymbol{P}$ пусто.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ

В зависимости от природы множества $\boldsymbol{S}$ задачи оптимизации классифицируются как:

– **дискретные (комбинаторные)** — $\boldsymbol{S}$ конечно или счетно,

– **целочисленные** — $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{n}}$,

– **булевы** — $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{n}}$,

– **вещественные (непрерывные)** — $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$,

– **бесконечномерные** — $\boldsymbol{S}$ подмножество гильбертова пространства.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ

Если $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}^n$ или $\boldsymbol{Z}^n$ или $\boldsymbol{B}^n$, $(\boldsymbol{m} = \mathbf{0})$, то задача $\boldsymbol{P}$ – **задача безусловной оптимизации**. В противном случае говорят о **задаче условной оптимизации**.

Подробности в пособии (изучить самостоятельно) **Алексеева Е. В., Кутненко О. А., Плясунов А. В. Численные методы оптимизации. Новосибирск: НГУ, 2008.**

ЛАГРАНЖЕВА ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Рассмотрим задачу $\boldsymbol{P}$ с произвольными функциями $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{\varphi_i}$:

$$f(x) \longrightarrow \min \tag{1}$$

$$\varphi_i(x) \le 0, i = \overline{1, m}. \tag{2}$$

Определение 1. Функцию

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x),$$

определенную при всех x и λ, назовем функцией Лагранжа для задачи (1), (2).

Лагранжева теория двойственности

Пусть

$$g(x) = \sup_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)$$

Тогда

$$g(x) = \begin{cases} f(x), \ x \in Q, \\ +\infty, \ x \notin Q. \end{cases} \Longrightarrow$$

Лагранжева теория двойственности

Задача P эквивалентна следующей:

$$g(x) \longrightarrow \min$$

Пусть

$$h(\lambda) = \inf_{x \in R^n} L(x, \lambda).$$

Рассмотрим задачу (D):

$$h(\lambda) \longrightarrow \max_{\lambda \geq 0}.$$

(D) – задача двойственная к прямой (или исходной) задаче P. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – двойственные переменные, а $x_1, \ldots, x_n$ — прямые переменные.

Лагранжева теория двойственности

Если $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{x}$ — допустимое решение прямой задачи, а $\boldsymbol{\lambda}$ — допустимое решение двойственной задачи.

Лемма 1. (Слабая теорема двойственности).

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}\ \forall \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}\ (\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\lambda}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})).$$

Док-во: $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\lambda}) = \inf\limits_{\tilde{x} \in R^n} \boldsymbol{L}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda}) \leq \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \leq \sup\limits_{\tilde{\lambda} \geq 0} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

■

Лемма 2. **Если $\overline{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{Q}$ и $\overline{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{h}(\overline{\boldsymbol{\lambda}})$, то $\overline{\boldsymbol{x}}$ и $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ — оптимальные решения задачи $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{D}$, соответственно.**

Лагранжева теория двойственности

Определение 2. Пара (x^*, λ^*), $\lambda^* \ge 0$, называется седловой точкой функции Лагранжа, если

$$L(x^*, \lambda) \overset{(3)}{\le} L(x^*, \lambda^*) \overset{(4)}{\le} L(x, \lambda^*) \; \forall x \in R^n, \forall \lambda \ge 0.$$

Теорема 1. Вектора $\overline{x}, \overline{\lambda}$ — оптимальные решения прямой и двойственной задачи и $f(\overline{x}) = h(\overline{\lambda})$ тогда и только тогда, когда пара $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ — седловая точка функции Лагранжа. При этом $L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = f(\overline{x}) = h(\overline{\lambda})$.

Док-во:

Лагранжева теория двойственности

1) НЕОБХОДИМОСТЬ.

Пусть $\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{\lambda}}$ – оптимальные решения прямой и двойственной задачи. Тогда:

$$\boldsymbol{f(\overline{x}) = \sup_{\lambda \geq 0} L(\overline{x}, \lambda) \geq L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \geq \inf_{x \in R^n} L(x, \overline{\lambda}) = h(\overline{\lambda}).}$$

Но $\boldsymbol{f(\overline{x}) = h(\overline{\lambda})}$. Возьмем произвольные $\boldsymbol{x \in R^n}$, $\boldsymbol{\lambda \geq 0}$. Получается, что

$$\boldsymbol{L(\overline{x}, \lambda) \leq \sup_{\lambda \geq 0} L(\overline{x}, \lambda) = L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = \inf_{x \in R^n} L(x, \overline{\lambda}) \leq L(x, \overline{\lambda}).}$$

Из последнего следуют (3) и (4).

Лагранжева теория двойственности

2) ДОСТАТОЧНОСТЬ.

Пусть $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ – седловая точка функции Лагранжа. Тогда из (3) следует:

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \overline{\lambda}_i)\varphi_i(\overline{x}) \leq 0, \forall \lambda \geq 0.$$

Предположим, что $\overline{x} \notin Q$. Т.е. $\exists i : \varphi_i(\overline{x}) > 0$. Тогда для достаточно большого $\lambda_i > 0$:

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \overline{\lambda}_i)\varphi_i(\overline{x}) > 0.$$

Противоречие. Следовательно, $\overline{x} \in Q$.

Лагранжева теория двойственности

При $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i \varphi_i(\overline{x}) \geq 0,$$

откуда:

$$\overline{\lambda}_i \varphi_i(\overline{x}) = 0, \forall i = \overline{1, m}.$$

Следовательно, $f(\overline{x}) = L(\overline{x}, \overline{\lambda})$. Из (4) следует, что:

$$L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = \inf_{x \in R^n} L(x, \overline{\lambda}) = h(\overline{\lambda}).$$

По Лемме 2, $\overline{x}$ и $\overline{\lambda}$ – оптимальные решения прямой и двойственной задачи, соответственно. ■

Лагранжева теория двойственности

Следствие 1. **Пусть $\overline{x} \in Q(P)$, $\overline{\lambda} \geq 0$. Следующие утверждения эквивалентны:**

1. **Пара $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ — седловая точка функции Лагранжа.**
2. $f(\overline{x}) = h(\overline{\lambda})$.
3. $\min\limits_{x} \sup\limits_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) = \max\limits_{\lambda \geq 0} \inf\limits_{x} L(x, \lambda)$.

Лагранжева теория двойственности

Следствие 2. Пусть $x^*, \overline{x} \in Q$, $\lambda^*, \overline{\lambda} \geq 0$.

Если пары $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ и (x^*, λ^*) — седловые точки функции Лагранжа, то пары $(\overline{x}, \lambda^*)$ и $(x^*, \overline{\lambda})$ — также седловые точки функции Лагранжа, причем

$$L(x^*, \overline{\lambda}) = L(\overline{x}, \lambda^*) = L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = L(x^*, \lambda^*).$$