

# ЛЕКЦИЯ № 1

от 05.09.18

Лектор: Панин Артём Александрович

<http://www.math.nsc.ru/LVRT/k5>

[Opt\\_FIT\\_2018.html](#)

1. Понятие экстремальной задачи
2. Элементы алгоритмической теории экстремальных задач
3. Классификация задач

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алексеева Е. В., Кутненко О. А., Пясунов А. В. *Численные методы оптимизации. Новосибирск: НГУ, 2008.*
- [2] Болтянский В. Г. *Математические методы оптимального управления. М.:Наука, 1969.*
- [3] Васильев Ф. П. *Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.*
- [4] Глебов Н. И., Кочетов Ю. А., Пясунов А. В. *Методы оптимизации. Новосибирск: НГУ, 2000.*
- [5] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. *Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.*
- [6] Ларин Р. М., Пясунов А. В., Пяткин А. В. *Методы оптимизации. Примеры и задачи. Новосибирск: НГУ, 2003, 2009.*
- [7] Мину М. *Математическое программирование. М.: Наука, 1990.*

## ЛИТЕРАТУРА

[8] Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.

[9] Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.

[10] Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Физматлит, 2005.

[11] Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991.

[12] Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.

[13] Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. М.:Наука, 1969.

## ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ (ОПТИМИЗАЦИОННАЯ) ЗАДАЧА (P)

Найти:

$$\min f(x) \quad (1)$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

$$x \in S \subseteq \underline{R}^n \text{ или } \underline{Z}^n \text{ или } B^n. \quad (3)$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$  – вектор переменных;

$f$  – целевая функция задачи;

$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, x \in S$  – ограничения задачи.

Методы оптимизации  $\equiv$  Теория оптимизации  $\equiv$  Теория экстремальных задач  $\equiv$  Математическое программирование

1. Теоретическое исследование вопросов существования оптимальных решений экстремальных задач.
2. Необходимые и/или достаточные условия экстремума.
3. Разработка численных методов решения.
4. Исследование сложности задач.

**Источник экстремальных задач:** – экономика, техника и д.р.

### **Цели лекционного курса:**

– Изучение ряда базовых алгоритмов, которые используются для решения **конечномерных задач оптимизации**.

– Получение теоретических и концептуальных представлений, достаточных для понимания, оценки этих алгоритмов и, если необходимо, создания **НОВЫХ**.

## ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Вектор  $x$  – допустимое решение задачи  $P$ , если выполняются ограничения (2),(3).

$Q(P) = \{x \in R^n | \varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, x \in S\}$  – множество допустимых решений задачи  $P$ .

**Оптимальное решение (глобальный минимум):**  
любое допустимое решение задачи, на котором достигается минимум целевой функции  $f$  на множестве  $Q(P)$ .

1.  $g(x) = 0 \equiv g(x) \leq 0, -g(x) \leq 0.$

$g(x) \leq 0 \equiv g(x) + y = 0, \text{ где } y \geq 0.$

2.  $\max_{x \in Q} g(x) \equiv \min_{x \in Q} -g(x)$

## ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Задача оптимизации решена, если

- либо найдено её оптимальное решение,
- либо найден конечный инфимум целевой функции на множестве  $Q(P)$ , в случае, когда оптимального решения не существует,
- либо доказано, что целевая функция неограничена снизу на множестве допустимых решений,
- либо установлено, что множество допустимых решений задачи  $P$  пусто.

## КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ

В зависимости от природы множества  $S$  задачи оптимизации классифицируются как:

- дискретные (комбинаторные) —  $S$  конечно или счетно,
- целочисленные —  $x \in S \subseteq \mathbb{Z}^n$ ,
- булевы —  $x \in S \subseteq B^n$ ,
- вещественные (непрерывные) —  $x \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ ,
- бесконечномерные —  $S$  подмножество гильбертова пространства.

## КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ

Если  $S = R^n$  или  $Z^n$  или  $B^n$ , ( $m = 0$ ), то задача  $P$  – задача безусловной оптимизации. В противном случае говорят о задаче условной оптимизации.

Подробности в пособии (изучить самостоятельно)  
Алексеева Е. В., Кутненко О. А., Плясунов А. В.  
Численные методы оптимизации. Новосибирск: НГУ,  
2008.

## Задача ценообразования

Производитель назначает на своих предприятиях цену на однородный продукт;

Каждый потребитель выбирает то предприятие, на котором его суммарные затраты на покупку и транспортировку товара минимальны, и совершает покупку только в том случае, когда эти затраты не превышают бюджет;

Цель игры – найти такие цены, при которых доход производителя максимален.

## Задача ценообразования

Введем обозначения:

$I = \{1, \dots, m\}$  – множество предприятий;

$J = \{1, \dots, n\}$  – множество потребителей;

$b_j \geq 0$  – бюджет  $j$ -го потребителя;

$c_{ij} \geq 0$  – транспортные затраты  $j$ -го потребителя, если он обслуживается в  $i$ -м предприятии;

$p_i \geq 0$  – цена продукции на предприятии  $i$ ;

## Задача ценообразования

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если потребитель } j \text{ обслуживается в предприятии } i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$\sum_{i \in I} p_i \sum_{j \in J} x_{ij} \rightarrow \max_{p, x}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \leq 1;$$

$$\sum_{i \in I} (b_j - c_{ij} - p_i) x_{ij} \geq 0, j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} (c_{ij} + p_i) x_{ij} \leq c_{kj} + p_k, k \in I, j \in J;$$

$$p_i \geq 0, x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J.$$