МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

РУДНЕВ Антон Сергеевич

АЛГОРИТМЫ ЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА ДЛЯ ЗАДАЧ ДВУМЕРНОЙ УПАКОВКИ

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2010

Работа выполнена в Государственном общеобразовательном учреждении высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет» на Кафедре теоретической кибернетики.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Кочетов Юрий Андреевич
Официальные оппоненты:	доктор технических наук, профессор Родионов Алексей Сергеевич
	кандидат физико-математических наук, доцент Еремеев Антон Валентинович
Ведущая организация:	Учреждение Российской академии наук Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Защита состоится 24 июня 2010 г. в 16 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.061.02 при Учреждении Российской академии наук Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения Российской академии наук Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН.

Автореферат разослан 24 мая 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.061.02 при Учреждении
Российской академии наук
ИВМиМГ СО РАН, д.ф.-м.н. С. Б. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Задачи раскроя-упаковки занимают важное место в современной комбинаторной оптимизации и привлекают внимание многих ученых как в России, так и зарубежом. Международная группа ESICUP объединяет исследователей, занимающихся задачами раскроя-упаковки, по всему миру. В настоящее время она насчитывает около пятисот участников, среди которых стоит отметить уфимскую школу под руководством профессора Э. А. Мухачевой и харьковскую школу профессора Ю. Г. Стояна.

Интерес к задачам раскроя-упаковки объясняется, в частности, их большой практической значимостью. Как правило приложения задач раскроя-упаковки относятся к материалоемким производствам, где одним из основных факторов снижения себестоимости выпускаемой продукции является рациональное использование ресурсов. На заре исследования этой проблемы Л. В. Канторовичем и В. А. Залгаллером было предложено использовать линейное программирование с неявно заданной матрицей ограничений, что позволило успешно решить важные производственные задачи. На сегодняшний день для решения задач раскроя-упаковки используются различные оптимизационные алгоритмы. В. М. Картаком и Э. А. Мухачевой разработан метод ветвей и границ для решения одномерной задачи упаковки в контейнеры. В работах Э. Х. Гимади и В. В. Залюбовского рассматриваются асимптотически точные алгоритмы. Для решения задачи гильотинной прямоугольной упаковки в контейнеры М. И. Свириденко была предложена асимптотическая полиномиальная аппроксимационная схема. Задачи раскроя-упаковки относятся к классу $\mathbb{NP}$–трудных задач комбинаторной оптимизации. Многие из них являются $\mathbb{NP}$–трудными в сильном смысле. В связи с этим большое значение приобретает разработка и исследование итерационных методов решения задач раскроя-упаковки, в том числе и методов локального поиска, хорошо зарекомендовавших себя на практике.

Цель работы. Целью диссертационной работы является разработка и исследование методов локального поиска для решения задач раскроя-упаковки на базе эффективных алгоритмов кодирования и декодирования решений.

В соответствии с целью исследования были поставлены и выполнены следующие задачи:

1. Формулировка рассматриваемых задач раскроя-упаковки в терминах математического программирования и оценка эффективности точных методов их решения;

2. Разработка и исследование алгоритмов локального спуска и имитации отжига для решения задачи упаковки прямоугольников в прямоугольную область минимальной площади;

3. Разработка декодеров для гильотинной и негильотинной задач прямоугольной упаковки в контейнеры, позволяющих учитывать запрещенные области;

4. Разработка и исследование алгоритмов имитации отжига для решения гильотинной и негильотинной задач прямоугольной упаковки в контейнеры с запрещенными областями;

5. Разработка двухконтактного декодера для задачи упаковки кругов и прямоугольников в полосу;

6. Разработка и исследование алгоритмов вероятностного поиска с запретами для решения задачи упаковки кругов и прямоугольников в полосу;

7. Анализ эффективности разработанных методов на основе результатов численных экспериментов и сравнения с другими методами.

Методика исследований. В диссертации использованы современные методы исследования операций, включающие в себя математическое моделирование, теорию локального поиска, а также методологию экспериментальных исследований с применением вычислительной техники и коммерческих пакетов прикладных программ для решения задач целочисленной линейной и нелинейной оптимизации.

Научная новизна. Для решения задачи упаковки прямоугольников в прямоугольную область минимальной площади предложен гибридный алгоритм имитации отжига, использующий новую процедуру уплотнения упаковки, аналогичную T–поздним расписаниям в календарном планировании. В ходе вычислительных экспериментов с помощью разработанного алгоритма были найдены новые рекордные значения целевой функции для семи примеров из электронных библиотек MCNC и GSRC с числом предметов от 33 до 300.

Исследован новый класс задач прямоугольной упаковки в контейнеры с запрещенными областями. Получены математические модели в терминах частично-целочисленного программирования. Для решения задач разработаны новые кодирующие схемы. На их основе разработан модифицированный алгоритм имитации отжига, позволяющий решать четыре типа задач с запрещенными областями. Экспериментально установлено, что алгоритм позволяет находить решения с малой погрешностью, в том числе и оптимальные решения на примерах с числом предметов до 20.

Для задачи упаковки кругов и прямоугольников в полосу разработана оригинальная процедура декодирования, восстанавливающая по заданной перестановке двухконтактную упаковку предметов. Разработан алгоритм вероятностного поиска с запретами с адаптивно изменяемой рандомизацией окрестности. В результате численных экспериментов для четырех известных примеров упаковки кругов в полосу получены новые рекордные значения целевой функции.

Практическая значимость. Предложенные в диссертационной работе алгоритмы могут быть использованы для эффективного решения следующих задач: упаковка прямоугольников в прямоугольную область минимальной площади, упаковка прямоугольников в контейнеры с запрещенными областями, упаковка кругов и прямоугольников в полосу минимальной длины. Данные задачи имеют широкий спектр практических приложений в тех отраслях индустрии, где традиционно возникают задачи раскроя-упаковки. Разработанные алгоритмы можно использовать в практических расчетах и включать их в автоматизированные системы проектирования и управления.

Апробация работы. Полученные результаты докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Российская конференция «Дискретный анализ и исследование операций», г. Новосибирск, 2004;
- Международный симпозиум по исследованию операций (OR), г. Бремен, 2005, г. Карлсруэ, 2006 и г. Аугсбург, 2008;
- Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения», г. Омск, 2006;
- Азиатская международная школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем», г. Новосибирск, 2006 и п. Чемал, 2008;

- Международная школа-семинар по раскрою и упаковке (ESICUP), г. Токио, 2007;
- Российская конференция «Математика в современном мире», г. Новосибирск, 2007;
- Байкальская международная школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения», г. Северобайкальск, 2008;
- Научные семинары Института математики СО РАН.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ, в том числе 1 статья в рецензируемом журнале из списка ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Объем работы составляет 104 страницы машинописного текста, включая 23 рисунка, 16 таблиц и библиографический список, содержащий 75 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** к диссертации обосновывается актуальность решаемой научной проблемы. Сформулированы цель и задачи исследования. Отмечена новизна полученных результатов и их практическая значимость. Приводятся сведения об апробации работы и публикациях. Кратко излагается содержание диссертационной работы.

В **первой главе** рассматривается задача упаковки конечного множества прямоугольников в прямоугольную область минимальной площади. Исследуются возможности представления решений данной задачи с помощью ориентированных деревьев. Оценивается влияние процедур уплотнения и локального спуска на относительную погрешность и время работы алгоритма имитации отжига, разработанного для решения поставленной задачи.

В разд. 1.1 содержится описание задачи. Приводится обзор уже полученных результатов. Рассматриваются основные характеристики кодирующих схем для задач прямоугольной упаковки.

В разд. 1.2 приводится математическая постановка задачи. Обозначим исходные данные следующим образом: $I = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество прямоугольников, w_i и h_i, $i \in I$ — ширина и высота i-го прямоугольника. Введем переменные: x_i и y_i — координаты левого нижнего угла i-го прямоугольника, W и H — ширина и высота окаймляющего прямоугольника.

Переменная $l_{ij} \in \{0,1\}$ равняется единице, если i-й прямоугольник находится левее j-го, и нулю в противном случае. Аналогично переменная $b_{ij} \in \{0,1\}$ равняется единице, если i-й прямоугольник находится ниже j-го, и нулю в противном случае. С использованием введенных обозначений исследуемая задача может быть представлена следующим образом:

$$\min WH$$

При ограничениях на размеры окаймляющего прямоугольника:

$$x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad x_i + w_i \leq W, \quad y_i + h_i \leq H, \ i \in I.$$

И ограничениях, исключающих пересечения прямоугольников:

$$\begin{aligned}
& x_i + w_i \leq x_j + (1 - l_{ij}) \sum_{k=1}^{n} w_k, && i, j \in I, \\
& y_i + h_i \leq y_j + (1 - b_{ij}) \sum_{k=1}^{n} h_k, && i, j \in I, \\
& l_{ij} + l_{ji} + b_{ij} + b_{ji} = 1, && i, j \in I.
\end{aligned}$$

В связи с тем, что в постановке задачи используются вещественные и бинарные переменные, целевая функция имеет второй порядок и все ограничения линейны, ее относят к классу задач частично-целочисленного квадратичного программирования.

Разд. 1.3 содержит результаты использования коммерческого пакета GAMS для решения сформулированной задачи. Указанный пакет использует методы глобальной и локальной оптимизации и позволяет находить оптимальные решения. Указываются границы применимости такого подхода.

В разд. 1.4 и 1.5 рассматривается способ кодирования решений задачи прямоугольной упаковки с помощью ориентированных деревьев. Такая кодировка обладает линейной трудоемкостью декодирования и относительно небольшим пространством решений, что делает ее эффективной при использовании в алгоритмах локального поиска.

В разд. 1.6 определяется окрестность решений, представленных в виде ориентированных деревьев. Определяется свойство достижимости. Доказывается, что используемая окрестность обладает данным свойством.

В разд. 1.7 описываются алгоритмы локального спуска и имитации отжига, разработанные для решения поставленной задачи. Предлагается новая процедура уплотнения упаковки прямоугольников, аналогичная

T–поздним расписаниям в календарном планировании. Действие процедуры заключается в поочередном смещении всех прямоугольников к нижней, правой, верхней и левой границам упаковки. Смещение реализуется за счет смены типов кодирующих деревьев. Процедура уплотнения, встроенная в алгоритмы локального поиска, меняет код решения, не меняя структуру самой упаковки. Поэтому значение целевой функции в новой точке пространства решений не превосходит значения в предыдущей. Использование данной процедуры в алгоритмах локального поиска открывает новые пути выхода из локальных оптимумов. Предлагается гибридный алгоритм имитации отжига с встроенной процедурой локального спуска.

В разд. 1.8 экспериментально устанавливается, что предложенная процедура уплотнения приводит к значительному сокращению погрешности и практически не влияет на время счета. Найдены новые рекордные значения целевой функции для семи примеров из электронных библиотек MCNC и GSRC. Численные эксперименты также показали, что гибридный алгоритм имитации отжига позволяет находить оптимальные решения на примерах небольшой размерности.

Во **второй главе** исследуется новая прикладная задача упаковки прямоугольников (предметов) в минимальное число контейнеров с запрещенными областями. Роль запрещенных областей могут играть как области материала низкого качества (дефекты), так и заранее размещенные предметы. Рассматриваются четыре постановки: с гильотинными разрезами (G), с произвольными разрезами (F), с поворотами предметов на 90° (R) и без поворотов (O). Для решения задачи предлагается модифицированный алгоритм имитации отжига. Алгоритм использует разработанные декодеры, учитывающие запрещенные области.

В разд. 2.1 приводится содержательная постановка задачи. Описываются результаты, полученные для задач, близких к рассматриваемым.

Разд. 2.2 содержит постановки исследуемых задач в терминах математического программирования.

Теорема 2.2 *Задачи 2BP/O/G и 2BP/R/G с запрещенными областями могут быть сформулированы в терминах частично-целочисленного квадратичного программирования с линейной целевой функцией.*

Доказательство. Обозначим исходные данные задачи: $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ — предметы; w_i и h_i, $i \in I$ — ширина и высота i-го предмета; параметр d_i равняется единице, если i-й предмет может пересекаться с запрещенными областями, и нулю иначе; $M = M_1 \cup M_2$ — контейнеры; $M_1 = \{1, 2, \ldots, l\}$ — контейнеры с запрещенными областям; $M_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$ — дополнительные одинаковые контейнеры без запрещенных областей, имеющие достаточные размеры, чтобы вместить самый большой предмет; W_m и H_m, $m \in M$ — ширина и высота m-го контейнера; $I^0 = \{1, 2, \ldots, K\}$ — запрещенные области; x_k^0, y_k^0 и w_k^0, h_k^0, $k \in I^0$ — координаты и размеры запрещенных областей соответственно; параметр q_{km} равняется единице, если k-я запрещенная область находится в m-м контейнере, и нулю в противном случае.

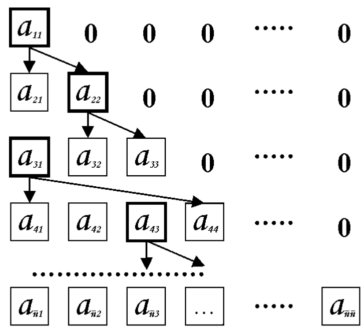

Рис. 1: Матрица гильотинного раскроя

Представим рекурсивный процесс разрезания прямоугольного контейнера на $\bar{n}$ предметов в виде матрицы $\bar{n} \times \bar{n}$, изображенной на рис. 1. Все элементы матрицы над главной диагональю тождественно равны нулю. Каждому ненулевому элементу соответствует некоторая прямоугольная область, имеющая свои координаты и размеры. Элементу a_{11} соответствует сам прямоугольный контейнер. Процесс гильотинного раскроя можно представить в виде последовательности переходов от первой строки матрицы ко второй, третьей и т. д. При каждом переходе совершается разрез одной из областей предыдущей строки на две части. Одна часть сохраняется в следующей строке на месте выбранной области, другая добавляется в качестве новой, увеличивая количество элементов-областей на единицу. Чтобы получить $\bar{n}$ предметов, необходимо сделать $\bar{n} - 1$ разрез. В последней строке получаем $\bar{n}$ областей $a_{\bar{n}1}, \ldots, a_{\bar{n}\bar{n}}$, каждая из которых содержит ровно один предмет. Используем этот способ для представления гильотинного раскроя нескольких контейнеров. Каждому контейнеру будет соответствовать своя матрица гильотинного раскроя. Так как заранее неизвестно, сколько предметов будет содержаться в каждом контейнере, то размер матриц будет максимально возможным — $n \times n$.

Введем переменные: x_i и y_i — координаты левого нижнего угла i-го предмета; $z_i \in \{0, 1\}$ принимает значение 1, если i-й предмет повернут на

90°, и значение 0 иначе; $\overline{X}_{ij}^m, \overline{Y}_{ij}^m, \overline{W}_{ij}^m, \overline{H}_{ij}^m$, $i, j \in I$ — координаты и размеры прямоугольных областей, соответствующих элементам матриц гильотинного раскроя; $g_{ij}^m \in \{0,1\}$, $1 \le j < i \le n-1$, $m \in M$ принимает значение 1, если при раскрое m-го контейнера i-м разрезом разрезается j-я область, при этом разрез горизонтальный, и значение 0 иначе; $v_{ij}^m \in \{0,1\}$ — аналогичная переменная для вертикальных разрезов; s_i^m принимает значение, равное длине отрезаемой i-м разрезом части при раскрое m-го контейнера; $r_{ij}^m \in \{0,1\}$, $i, j \in I$, $m \in M$, принимает значение 1, если i-й предмет в m-м контейнере занимает j-ю область, и значение 0 в противном случае; b_{ik}^L, b_{ik}^R, b_{ik}^B, b_{ik}^A, $i \in I$, $k \in I^0$ принимают значение 1, если i-й предмет находится левее, правее, ниже, либо выше k-й запрещенной области, и значение 0 иначе; $u_m \in \{0,1\}$ принимает значение 1, если в m-й контейнер используется, и значение 0 иначе. Целевая функция примет вид: $\min \sum\limits_{m=1}^{l+n} u_m$.

Зададим порядок использования контейнеров от первого к последнему:

$$u_m \ge u_{m+1}, \quad m \in M.$$

Контейнер используется, если в нем содержится хотя бы один предмет:

$$u_m n \ge \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}^m, \quad m \in M.$$

Каждый предмет находится только в одной области одного из контейнеров:

$$\sum_{m=1}^{l+n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}^m = 1, \quad i \in I.$$

В каждой области находится не более одного предмета:

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij}^m \le 1, \quad j \in I,\ m \in M.$$

Элементам a_{11} матриц гильотинного раскроя присваиваются параметры контейнеров:

$$\begin{array}{ll} \overline{X}_{11}^m = 0, & \overline{W}_{11}^m = u_m W_m,\ m \in M, \\ \overline{Y}_{11}^m = 0, & \overline{H}_{11}^m = u_m H_m,\ m \in M. \end{array}$$

При переходе на новую строку в матрице гильотинного раскроя совершается не более одного разреза:

$$\sum_{j=1}^{i} \left(g_{ij}^m + v_{ij}^m\right) \le u_m, \quad 1 \le i \le n-1,\ m \in M.$$

После каждого разреза координаты и размеры прямоугольных областей преобразуются следующим образом:

$$\begin{array}{ll} \overline{X}^m_{i+1,j} = \overline{X}^m_{ij}, & 1 \le j < i \le n-1,\ m \in M, \\ \overline{Y}^m_{i+1,j} = \overline{Y}^m_{ij}, & 1 \le j < i \le n-1,\ m \in M, \\ \overline{W}^m_{i+1,j} = \overline{W}^m_{ij} - v^m_{ij} s^m_i, & 1 \le j < i \le n-1,\ m \in M, \\ \overline{H}^m_{i+1,j} = \overline{H}^m_{ij} - g^m_{ij} s^m_i, & 1 \le j < i \le n-1,\ m \in M. \end{array}$$

В результате разреза добавляется новая область:

$$\overline{X}^m_{i+1,i+1} = \sum_{j=1}^{i} \big((g^m_{ij} + v^m_{ij})\overline{X}^m_{ij} + v^m_{ij}\overline{W}^m_{i+1,j}\big), \quad 1 \le i \le n-1,\ m \in M,$$

$$\overline{Y}^m_{i+1,i+1} = \sum_{j=1}^{i} \big((g^m_{ij} + v^m_{ij})\overline{Y}^m_{ij} + g^m_{ij}\overline{H}^m_{i+1,j}\big), \quad 1 \le i \le n-1,\ m \in M,$$

$$\overline{W}^m_{i+1,i+1} = \sum_{j=1}^{i} \big(g^m_{ij}\overline{W}^m_{ij} + v^m_{ij} s^m_i\big), \quad 1 \le i \le n-1,\ m \in M,$$

$$\overline{H}^m_{i+1,i+1} = \sum_{j=1}^{i} \big(v^m_{ij}\overline{H}^m_{ij} + g^m_{ij} s^m_i\big), \quad 1 \le i \le n-1,\ m \in M.$$

Каждый предмет размещается в области допустимого размера. Здесь W_{max} и H_{max} — максимальная ширина и максимальная высота контейнеров:

$$x_i \ge \overline{X}^m_{nj} - (1 - \sum_{j=1}^{n} r^m_{ij})W_{max}, \quad i \in I,\ m \in M,$$

$$y_i \ge \overline{Y}^m_{nj} - (1 - \sum_{j=1}^{n} r^m_{ij})H_{max}, \quad i \in I,\ m \in M,$$

$$w_i(1 - z_i) + h_i z_i \le \overline{W}^m_{nj} + (1 - \sum_{j=1}^{n} r^m_{ij})W_{max}, \quad i \in I,\ m \in M,$$

$$h_i(1 - z_i) + w_i z_i \le \overline{H}^m_{nj} + (1 - \sum_{j=1}^{n} r^m_{ij})H_{max}, \quad i \in I,\ m \in M.$$

Последняя группа ограничений исключает пересечения предметов и запрещенных областей, находящихся в одном контейнере, в случаях когда это недопустимо:

$$\begin{array}{ll} x_i + w_i(1 - z_i) + h_i z_i \le x^0_k + \big(1 - b^L_{ik}\big)W_{max}, & i \in I,\ k \in I^0, \\ x^0_k + w^0_k \le x_i + \big(1 - b^R_{ik}\big)W_{max}, & i \in I,\ k \in I^0, \\ y_i + h_i(1 - z_i) + w_i z_i \le y^0_k + \big(1 - b^B_{ik}\big)H_{max}, & i \in I,\ k \in I^0, \\ y^0_k + h^0_k \le y_i + \big(1 - b^A_{ik}\big)H_{max}, & i \in I,\ k \in I^0, \\ b^L_{ik} + b^R_{ik} + b^B_{ik} + b^A_{ik} \ge \sum_{j=1}^{n} r^m_{ij} + q_{km} - d_i - 1, & i \in I,\ k \in I^0,\ m \in M. \end{array}$$

Выписанные условия определяют неориентированную задачу с гильотинными разрезами 2BP|R|G. Аналогично при $z_i \equiv 0$ формулируется ориентированная задача 2BP|O|G. □

Задача прямоугольной упаковки с гильотинными разрезами впервые формулируется в терминах частично-целочисленного квадратичного программирования. В разделе также формулируются задачи 2BP|O|F и 2BP|R|F с запрещенными областями в терминах частично-целочисленного линейного программирования

В разд. 2.3 описываются способы кодирования и декодирования решений. Кодирование гильотинных упаковок осуществляется с помощью арифметических выражений в постфиксной форме, представляющих рекурсивный процесс раскроя (польские записи). Упаковки с произвольными разрезами кодируются с помощью ориентированных деревьев. Для данных кодировок разработаны алгоритмы декодирования, учитывающие запрещенные области. В основе декодеров лежит жадная процедура, позволяющая на каждом шаге декодирования находить допустимое положение предмета относительно запрещенных областей.

В разд. 2.4 с использованием операций над польскими записями и ориентированными деревьями определяются окрестности линейной и квадратичной мощности соответственно. Доказывается, что введенные окрестности обладают свойством достижимости.

В разд. 2.5 приводится модифицированный алгоритм имитации отжига. Пусть число контейнеров в начальном решении равняется m, и содержимое каждого контейнера представлено в закодированном виде $S_j, 1 \leq j \leq m$. Оптимизация делится на два уровня. На первом уровне с помощью локального поиска осуществляется независимая упаковка предметов в каждом контейнере. В качестве целевой функции выступает высота упаковки контейнера $F(S_j)$. Процесс поиска идет в области допустимых и недопустимых решений, когда предметы могут выступать за границы контейнера. В этом случае в целевую функцию добавляется штраф. Второй уровень — выполнение алгоритма *РАЗГРУЗКА*, выполняющего функцию уплотнения. Критерием остановки алгоритма служит количество итераций, либо время работы. Общая схема алгоритма представлена ниже:

1. Построить начальное решение $S_1, \ldots, S_m$.
2. Задать начальную температуру $T > 0$.
3. Повторять, пока не выполнен критерий остановки.
   - 3.1. Выполнить цикл заданное число раз для j-го контейнера $1 \leq j \leq m$.
     - 3.1.1. Выбрать случайного соседа S'_j из окрестности решения S_j.
     - 3.1.2. Если $F(S'_j) - F(S_j) \leq 0$, то $S_j := S'_j$.

3.1.3. Если $F(S'_j) - F(S_j) > 0$, то $S_j := S'_j$ с вероятностью $e^{-\frac{F(S'_j)-F(S_j)}{T}}$.

3.2. Понизить температуру $T := rT$.

3.3. Выполнить алгоритм *РАЗГРУЗКА*.

4. Выдать лучшее найденное решение.

В разд. 2.6 описывается жадный алгоритм построения начального решения. Принцип его работы заключается в равномерном распределении предметов среди контейнеров. Алгоритм использует нижнюю оценку, разработанную для задачи упаковки в контейнеры с запрещенными областями.

В разд. 2.7 описывается процедура уплотнения, которая позволяет концентрировать небольшие предметы в отдельных контейнерах, что облегчает их последующую разгрузку.

В разд. 2.8 приводятся результаты численных экспериментов, показывающие эффективность разработанного алгоритма при решении рассматриваемых задач и близких к ним классических задач упаковки в контейнеры. Также данный раздел содержит результаты численных экспериментов, полученных с помощью коммерческого пакета GAMS.

В **третьей главе** рассматривается задача упаковки кругов и прямоугольников в полосу минимальной длины. Для ее решения предлагается алгоритм вероятностного поиска с запретами, использующий двухконтактную схему кодирования.

В разд. 3.1 описывается содержательная постановка задачи. Приводится обзор уже полученных результатов.

В разд. 3.2 приводится постановка задачи в терминах частично-целочисленного квадратичного программирования. Обозначим исходные данные задачи: W — ширина полосы; $I = \{1, 2, \dots, n_c\}$ — множество кругов; $J = \{1, 2, \dots, n_r\}$ — множество прямоугольников; $r_i,\ i \in I$, – радиус i-го круга; l_j и $w_j,\ j \in J$ — длина и ширина j-го прямоугольника.

Введем переменные: x_i^c и y_i^c — координаты центра i-го круга; x_j^r и y_j^r — координаты левого нижнего угла j-го прямоугольника; переменная $z_j \in \{0,1\}$ равняется единице, если j-й прямоугольник повернут на $90°$, и нулю в противном случае; переменная $a_{jm}^L \in \{0,1\},\ j,m \in J$ равняется единице, если j-й прямоугольник находится левее m-го, и нулю иначе; аналогично переменная $a_{jm}^B \in \{0,1\}$ равняется единице, если j-й прямоугольник находится ниже m-го, и нулю иначе. В качестве целевой функции выступает длина занятой части полосы $\min L$, которая определяется с помощью ограничений:

$$x_i^c + r_i \le L,\ i \in I, \quad x_j^r + l_j(1 - z_j) + w_j z_j \le L,\ j \in J.$$

Выпишем ограничения, гарантирующие, что все круги будут размещены в пределах полосы:

$$x_i^c - r_i \geq 0,\ i \in I, \quad y_i^c - r_i \geq 0,\ i \in I, \quad y_i^c + r_i \leq W,\ i \in I.$$

Выпишем аналогичные ограничения для прямоугольников:

$$x_j^r \geq 0,\ j \in J, \quad y_j^r \geq 0,\ j \in J, \quad y_j^r + w_j(1 - z_j) + l_j z_j \leq W,\ j \in J.$$

Следующее неравенство исключает пересечения кругов между собой. Два круга не пересекаются, если расстояние между их центрами не меньше суммы их радиусов:

$$\left(x_i^c - x_k^c\right)^2 + \left(y_i^c - y_k^c\right)^2 \geq (r_i + r_k)^2, \quad i, k \in I.$$

Следующая группа ограничений исключает пересечения прямоугольников между собой. Здесь L_{max} — достаточно большое число, $L_{max} > L$:

$$\begin{array}{ll}
x_j^r + l_j(1 - z_j) + w_j z_j \leq x_m^r + (1 - a_{jm}^L)L_{max}, & j, m \in J, \\
y_j^r + w_j(1 - z_j) + l_j z_j \leq y_m^r + (1 - a_{jm}^B)W, & j, m \in J, \\
a_{jm}^L + a_{mj}^L + a_{jm}^B + a_{mj}^B = 1, & j, m \in J.
\end{array}$$

Последняя группа ограничений исключает пересечения кругов и прямоугольников. Круг i не пересекается с прямоугольником j, если точка (x_i^c, y_i^c) лежит вне фигуры, которую очерчивает центр круга при движении круга по периметру прямоугольника. Переменные $b_{ij}^t,\ c_{ij}^t \in \{0, 1\}$ используются для реализации дизъюнкций неравенств:

$$\begin{array}{ll}
x_i^c + r_i \leq x_j^r + (1 - b_{ij}^1)L_{max}, & i \in I,\ j \in J, \\
x_j^r + l_j(1 - z_j) + w_j z_j \leq x_i^c - r_i + (1 - b_{ij}^2)L_{max}, & i \in I,\ j \in J, \\
y_i^c \leq y_j^r + (1 - b_{ij}^3)W, & i \in I,\ j \in J, \\
y_j^r + w_j(1 - z_j) + l_j z_j \leq y_i^c + (1 - b_{ij}^4)W, & i \in I,\ j \in J, \\
\sum\limits_{t=1}^{4} b_{ij}^t = 1, & i \in I,\ j \in J, \\
x_i^c \leq x_j^r + (1 - c_{ij}^1)L_{max}, & i \in I,\ j \in J, \\
x_j^r + l_j(1 - z_j) + w_j z_j \leq x_i^c + (1 - c_{ij}^2)L_{max}, & i \in I,\ j \in J, \\
y_i^c + r_i \leq y_j^r + (1 - c_{ij}^3)W, & i \in I,\ j \in J, \\
y_j^r + w_j(1 - z_j) + l_j z_j \leq y_i^c - r_i + (1 - c_{ij}^4)W, & i \in I,\ j \in J, \\
\sum\limits_{t=1}^{4} c_{ij}^t = 1, & i \in I,\ j \in J, \\
\left(x_i^c - x_j^r\right)^2 + \left(y_i^c - y_j^r\right)^2 \geq r_i^2, & i \in I,\ j \in J, \\
\left(x_i^c - \left(x_j^r + l_j(1 - z_j) + w_j z_j\right)\right)^2 + \left(y_i^c - y_j^r\right)^2 \geq r_i^2, & i \in I,\ j \in J, \\
\left(x_i^c - x_j^r\right)^2 + \left(y_i^c - \left(y_j^r + w_j(1 - z_j) + l_j z_j\right)\right)^2 \geq r_i^2, & i \in I,\ j \in J,
\end{array}$$

$$\left(x_i^c - \left(x_j^r + l_j(1-z_j) + w_j z_j\right)\right)^2 + \left(y_i^c - \left(y_j^r + \right.\right.$$
$$\left.\left. + w_j(1-z_j) + l_j z_j\right)\right)^2 \geq r_i^2, \quad i \in I,\ j \in J.$$

В разд. 3.3 вводится понятие двухконтактной схемы кодирования: предметы упаковываются в полосу в заданном порядке так, чтобы каждый следующий предмет имел как минимум две точки касания с уже упакованными предметами, либо границами полосы. Предлагается двухконтактная кодировка с трудоемкостью декодирования $O(n^4)$ и мощностью $n!$, где n — число предметов. Доказывается следующая теорема

Теорема 3.1 *Существует семейство входных данных задачи упаковки кругов в полосу минимальной длины, на которых множество двухконтактных решений не содержит оптимум.*

Следовательно множество двухконтактных решений также не всегда содержит глобальный оптимум исследуемой задачи.

В разд. 3.4 определяется окрестность квадратичной мощности.

В разд. 3.5 описывается разработанный алгоритм вероятностного поиска с запретами. Алгоритм осуществляет вероятностный локальный поиск по рандомизированной окрестности $N_P(i_k) \subseteq N(i_k)$, где каждый элемент окрестности $N(i_k)$ решения i_k включается в множество $N_P(i_k)$ с вероятностью $0 \leq P \leq 1$ независимо от других элементов. Основным механизмом, позволяющим алгоритму покидать локальные оптимумы, является список запретов $\mathrm{TABU}_l(i_k)$, который строится по предыстории поиска и запрещает часть окрестности $N(i_k)$ текущего решения. Длина списка запретов определяется параметром $l \geq 0$ и показывает максимальное количество элементов, которое может содержаться в списке. На каждом шаге алгоритма очередная точка i_{k+1} является оптимальным решением подзадачи $L(i_{k+1}) = \min\{L(j) \mid j \in N_P(i_k) \backslash \mathrm{TABU}_l(i_k)\}$, где $L(i)$ — длина полосы. Ниже представлена общая схема алгоритма:

1. Построить начальное решение i_0.
2. Положить $\mathrm{TABU}_l(i_0) := \emptyset$, $i^* := i_0$,$L^* := L(i^*)$, $i^r := i_0$, $L^r := L(i^r)$, $k := 0$, $P := P_{\min}$, $\mathrm{sgn} := 1$.
3. Повторять, пока не выполнен критерий остановки.
   3.1. Выполнить цикл N_{loop} раз.
      3.1.1. Сформировать окрестность $N_P(i_k)$.
      3.1.2. Найти i_{k+1} такое, что $L(i_{k+1}) = \min\limits_{j \in N_P(i_k) \backslash \mathrm{TABU}_l(i_k)} L(j)$.
      3.1.3. Если $L^* > L(i_{k+1})$, то $L^* := L(i_{k+1})$ и $i^* := i_{k+1}$.
      3.1.4. Если $L^r > L(i_{k+1})$, то $L^r := L(i_{k+1})$, $i^r := i_{k+1}$ и $\mathrm{sgn} := 1$.
      3.1.5. Положить $k := k + 1$ и обновить $\mathrm{TABU}_l(i_k)$.
   3.2. Если $\mathrm{sgn} = 1$, то $i_k := i^r$.

3.3. Положить $P := P + \mathrm{sgn} \cdot \Delta P$.

3.4. Если $P \geq P_{\max}$, то $\mathrm{sgn} := -1$.

3.5. Если $P \leq P_{\min}$, то $\mathrm{sgn} := 1$, $L^r := L(i_k)$ и $i^r := i_k$.

4. Выдать результат i^* и L^*.

Параметры $P_{\min}$, $P_{\max}$ — верхняя и нижняя границы параметра рандомизации, ΔP — величина изменения параметра рандомизации, l — длина списка запретов и N_{loop} — количество итераций локального поиска при фиксированной рандомизации являются заданными. Выполнение алгоритма начинается с построения начального решения и присвоения начальных значений внутренним переменным, которыми являются k — номер итерации алгоритма, i_k — текущее решение, $\mathrm{TABU}_l(i_k)$ — список запретов на k−й итерации, P — параметр рандомизации окрестности, $\mathrm{sgn} \in \{-1, +1\}$ — убывание или возрастание параметра рандомизации, i^*, L^* — лучшее найденное решение и значение целевой функции для него и аналогично i^r, L^r — лучшее найденное решение при фиксированном значении параметра P и значение целевой функции для него. Далее происходит локальный поиск с запретами по рандомизированной окрестности $N_P(i) \backslash \mathrm{TABU}_l(i)$. В процессе поиска параметр рандомизации меняется в пределах $[P_{\min}, \ldots, P_{\max}]$ на величину ΔP в зависимости от того, как часто встречаются решения с малой относительной погрешностью. Таким способом осуществляется интенсификация и диверсификация поиска. В начале работы алгоритма P принимает минимальное значение $P_{\min}$. Алгоритм выполняет заданное число N_{loop} шагов локального поиска при фиксированном значении P и запоминает наилучшее найденное решение для него. В это решение алгоритм возвращается при последующем увеличении значения параметра P. Таким образом, увеличивая долю просматриваемой окрестности, и возвращаясь в наилучшее найденное на предыдущем этапе решение, реализуется интенсификация поиска. Другими словами, алгоритм осуществляет более детальный поиск в окрестности лучших, ранее найденных решений. Действия повторяются до тех пор, пока значение параметра P не достигнет максимального значения $P_{\max}$. Затем доля просматриваемой окрестности начинает уменьшаться, и алгоритм переходит в фазу диверсификации, пытаясь перейти в новую область пространства решений. Если в процессе диверсификации удается найти решение лучше, чем i^r, то алгоритм начинает интенсификацию поиска, запомнив это решение как i^r. Этап диверсификации длится до тех пор, пока параметр P не достигнет минимального значения $P_{\min}$. Критерием остановки алгоритма служит число итераций, либо время работы.

Разд. 3.6 содержит результаты численных экспериментов. Исследуется влияние рандомизации окрестности и длины списка запретов на работу алгоритма. Экспериментально устанавливаются значения данных параметров, при которых алгоритм наиболее эффективен. Найденные значения используются при проведении численных экспериментов на случайно сгенерированных примерах, а также на известных тестовых примерах для частных случаев рассматриваемой задачи. Для четырех известных примеров упаковки кругов в полосу удалось найти новые рекордные значения целевой функции. Приводятся результаты, полученные с помощью коммерческого пакета GAMS.

Список публикаций

[1] *Руднев А. С.* Вероятностный поиск с запретами для задачи упаковки кругов и прямоугольников в полосу // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т. 16, № 4. — С. 61—86.

[2] *Кочетов Ю. А., Руднев А. С.* Алгоритм имитации отжига для задач прямоугольной упаковки // Материалы конференции «Дискретный анализ и исследование операций». — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2004. — С. 187.

[3] *Руднев А. С.* Алгоритм имитации отжига для задачи упаковки кругов и прямоугольников в контейнеры // Материалы конференции «Дискретная оптимизация и исследование операций». — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2007. — С. 156.

[4] *Руднев А. С.* Алгоритм имитации отжига для упаковки кругов и прямоугольников на плоскости // Материалы конференции «Математика в современном мире». — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2007. — С. 284.

[5] *Руднев А. С.* Вероятностный поиск с запретами для задачи упаковки кругов и прямоугольников в полосу // Труды XIV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». — Иркутск: Изд-во Ин-та систем энергетики, 2008. — Т. 1. — С. 521–529.

[6] *Руднев А. С.* Задачи двумерной прямоугольной упаковки с запрещенными областями // Труды ИВМиМГ СО РАН. Сер. Информатика. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2006. — Вып. 6. — С. 156–162.

[7] *Руднев А. С.* Прямоугольная упаковка в полосу с запрещенными областями // Материалы конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения». — Омск: Изд-во ОмГТУ, 2006. — С. 120.

[8] *Beisiegel B., Kallrath J., Kochetov Y., Rudnev A.* Efficient encoding schemes for rectangular packing with impurities // Abstracts of international conference on operations research. — Karlsruhe, 2006. — P. 156.

[9] *Beisiegel B., Kallrath J., Kochetov Y., Rudnev A.* Simulated annealing based algorithm for the 2D bin packing problem with impurities // Operations research proceedings, 2005. — Heidelberg: Springer, 2006. — P. 109–113.

[10] *Kallrath J., Kochetov Y., Rudnev A.* Probabilistic tabu search for packing circles and rectangles into the strip // Abstracts of international conference on operations research and global business. — Augsburg, 2008. — P. 197.

[11] *Kallrath J., Kochetov Y., Rudnev A.* Strip packing problem for circles and rectangles // Abstracts of international conference on cutting and packing problems «4th ESICUP Meeting». — Tokyo, 2007. — P. 20.

РУДНЕВ Антон Сергеевич

Алгоритмы локального поиска
для задач двумерной упаковки

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 12.05.2010. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 110 экз. Заказ № 60.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
пр. Ак. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск