

Задачи о покрытии

лекция 5

Дано: Сеть дорог и конечное множество пунктов для размещения постов ГАИ. Каждый пункт может контролировать дорогу на заданном расстоянии от него. Известно множество опасных участков на дорогах.

Найти: минимальное число постов для контроля всех опасных участков.

Обозначения:

$I = \{1, \dots, m\}$ — множество всех возможных пунктов для размещения постов ГАИ;

$J = \{1, \dots, n\}$ — множество опасных участков;

$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если из пункта } i \text{ можно контролировать участок } j \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

Переменные задачи:

$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ устанавливается пост ГАИ} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$



Математическая модель

$$\min \sum_{i \in I} x_i$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq 1, \quad j \in J;$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i \in I.$$

Пусть $c_i \geq 0$ — стоимость создания поста в пункте i и число постов не превосходит $p > 0$. Требуется минимизировать суммарную стоимость:

$$\min \sum_{i \in I} c_i x_i$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq 1, \quad j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i \in I.$$



Предположим, что имеется возможность открыть не более p постов и их не хватит для контроля всех опасных участков.

Требуется при данном ограничении найти размещение постов для контроля максимального числа опасных участков.

Переменные задачи:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{если опасный участок } j \text{ под контролем} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в пункте } i \text{ устанавливается пост ГАИ} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Математическая модель

$$\max \sum_{j \in J} y_j$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq y_j, \quad j \in J;$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$x_i, y_j \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

Упражнение. Показать, что эта модель не эквивалентна нижеследующей модели:

$$\max \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij} x_i$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I.$$

Если опасные участки опасны в разной степени и величина b_j задает, например, число аварий на участке j за год, то задача предотвращения максимального числа аварий записывается следующим образом:

$$\max \sum_{j \in J} b_j y_j$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq y_j, \quad j \in J,$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p;$$

$$x_i, y_j \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J.$$



Жадный алгоритм

Рассмотрим взвешенную задачу о покрытии

$$\min \left\{ \sum_{i \in I} c_i x_i \mid \sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq 1, j \in J, x_i \in \{0,1\} \right\}$$

Алгоритм

1. Положить $X^0 := \emptyset$, $k := 0$, $J_i^k := \{j \in J \mid a_{ij} = 1\}$, $i \in I$, $J^0 := \emptyset$;

2. Пока $J^0 \neq J$ выполнять:

2.1. Найти $i_0 \in I \setminus X^k$ такой, что $J_{i_0}^k \neq \emptyset$ и $\frac{c_{i_0}}{|J_{i_0}^k|} = \min_{i \in I \setminus X^k} \left\{ \frac{c_i}{|J_i^k|} \mid |J_i^k| \neq \emptyset \right\}$;

2.2. Положить $k := k + 1$, $X^k := X^{k-1} \cup \{i_0\}$, $J^0 := J^0 \cup J_{i_0}^{k-1}$

и $J_i^k := J_i^{k-1} \setminus J_{i_0}^{k-1}$ для всех $i \in I \setminus X^k$.

Пример

$$I = \{1, \dots, n + 1\}, J = \{1, \dots, n\}$$

вектор (c_i)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-2} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1+\varepsilon \end{bmatrix}$$

матрица (a_{ij})

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & \cdot & & & 0 & & & \\ & & & & \cdot & & & & & \\ & 0 & & & & \cdot & & & & \\ & & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & & \cdot & & \\ 1 & 1 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Оптимальное решение $X^* = \{n + 1\}$ и его значение $(1 + \varepsilon)$. Жадный алгоритм сначала возьмет $i = 1$, затем $i = 2, \dots, i = n$, и получит значение

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n.$$

Трудоемкость алгоритма $T \sim O(mn)$ при правильном хранении множеств J_i^k , $i \in I$.

Без ограничения общности будем считать, что $X^k = \{1, 2, \dots, k\}$ для $k = 1, \dots, K$ и алгоритм получил покрытие после K итераций.

Обозначим $q_i^k = |J_i^k|$, $i \in I$, $k = 1, \dots, K$ и заметим, что

$$c_k / q_k^k \leq c_i / q_i^k, \quad i \in I,$$

$$J_i^{k+1} \subseteq J_i^k \quad \text{и} \quad J_i^0 \cap J_k^k = J_i^k \setminus J_i^{k+1},$$

$$J = \bigcup_{k=1}^K J_k^k, \quad J_{k_1}^{k_1} \cap J_{k_2}^{k_2} = \emptyset, \quad \text{при } k_1 \neq k_2.$$

Рассмотрим функцию $H(p) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{i}$, $p = 1, 2, \dots$

Теорема Хватала. Пусть X^* — оптимальное решение взвешенной задачи о покрытии, а X^K — решение жадного алгоритма. Тогда

$$\sum_{i \in X^K} c_i \leq H \left(\max_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} \right) \sum_{i \in X^*} c_i.$$

Доказательство: Наряду с исходной задачей рассмотрим задачу с новой целевой функцией и непрерывными переменными:

$$\min \left\{ \sum_{i \in I} c_i H \left(\sum_{j \in J} a_{ij} \right) x_i \mid \sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq 1, j \in J, x_i \geq 0 \right\}.$$

Двойственная к ней имеет вид

$$\max \left\{ \sum_{j \in J} u_j \mid \sum_{j \in J} a_{ij} u_j \leq c_i H \left(\sum_{j \in J} a_{ij} \right), i \in I, u_j \geq 0 \right\}.$$

Так как множества J_k^k образуют разбиение множества J , то положим

$$u_j = c_k / q_k^k, \quad j \in J_k^k, \quad k = 1, \dots, K.$$

Покажем, что u_j — допустимое решение двойственной задачи. Для любого $i \in I$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} u_j = \sum_{k=1}^K \sum_{j \in J_k^k} a_{ij} u_j = \sum_{k=1}^K \sum_{j \in J_i^0 \cap J_k^k} u_j = \sum_{k=1}^K \sum_{j \in J_i^k \setminus J_i^{k+1}} c_k / q_k^k = \sum_{k=1}^K (q_i^k - q_i^{k+1}) c_k / q_k^k.$$

Пусть для рассматриваемого $i \in I$ номер k_0 — наибольший номер k , $1 \leq k \leq K$ такой, что $J_i^k \neq \emptyset$. Тогда, продолжая приведенные выше неравенства, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} a_{ij} u_j &= \sum_{k=1}^{k_0} (q_i^k - q_i^{k+1}) c_k / q_k^k \leq \sum_{k=1}^{k_0} (q_i^k - q_i^{k+1}) c_i / q_i^k = \\ c_i \sum_{k=1}^{k_0} (q_i^k - q_i^{k+1}) / q_i^k &\leq c_i \sum_{k=1}^{k_0} (H(q_i^k) - H(q_i^{k+1})) \leq c_i H(q_i^1) = c_i H\left(\sum_{j \in J} a_{ij}\right). \end{aligned}$$

Итак, построенное решение является допустимым в двойственной задаче. Кроме того,

$$\sum_{j \in J} u_j = \sum_{k=1}^K \sum_{j \in J_k^k} c_k / q_k^k = \sum_{k=1}^K q_k^k c_k / q_k^k = \sum_{k=1}^K c_k = \sum_{k \in X^K} c_k.$$

Но по теореме двойственности

$$\sum_{j \in J} u_j \leq H(\max_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij}) \sum_{i \in X^*} c_i \text{ откуда и вытекает требуемая оценка. } \blacksquare$$

Плохая новость.

Существует константа $0 < \gamma < 1$ такая, что наличие полиномиального приближенного алгоритма с оценкой относительной погрешности $\gamma H(\max_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij})$

влечет P=NP.

Алгоритм муравьиной колонии

Предложен в начале 90-х годов прошлого века M. Dorigo и V. Maniezzo



Муравьи ориентируются по запаху.

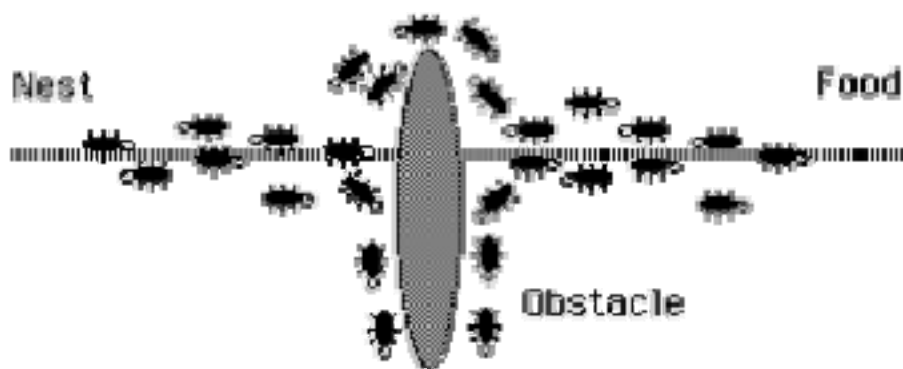
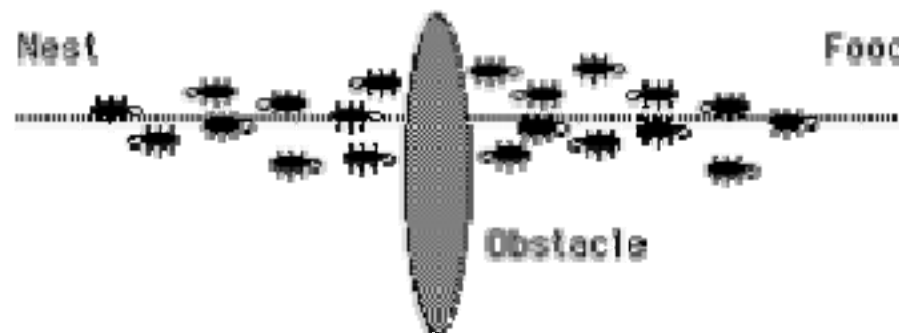
Каждый муравей оставляет после себя сильно пахнущее вещество — *феромон*.

При выборе направления домой с большей вероятностью выбирается направление с более сильным запахом.



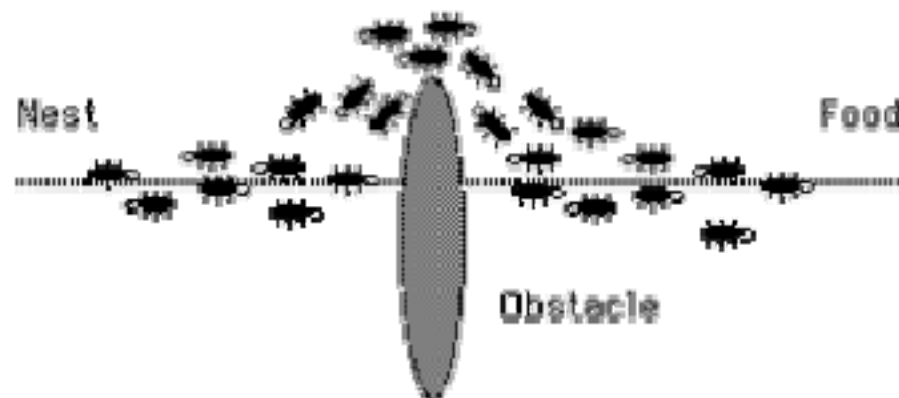
← Кратчайший путь

Появилось препятствие →



← Обход препятствия

Новый кратчайший путь →



Вероятностный жадный алгоритм

Пусть $X \subset I$, $J(X) = \{j \in J \mid \sum_{i \in X} a_{ij} \geq 1\}$ — множество “покрытых” столбцов,

$q_i(X)$ — мощность множества $J_i(X) = \{j \in J \mid a_{ij} = 1\} \setminus J(X)$, $i \in I \setminus X$,

$\rho_i = c_i / q_i(X)$, $i \in I \setminus X$ — удельные приращения целевой функции,

$L(p)$ — случайное подмножество множества $I \setminus X$; элемент $i \in I \setminus X$ включается в множество $L(p)$ с вероятностью p независимо от других элементов.

Вероятностный жадный алгоритм

1. Положить $X := \emptyset$, $J^0 := \emptyset$.

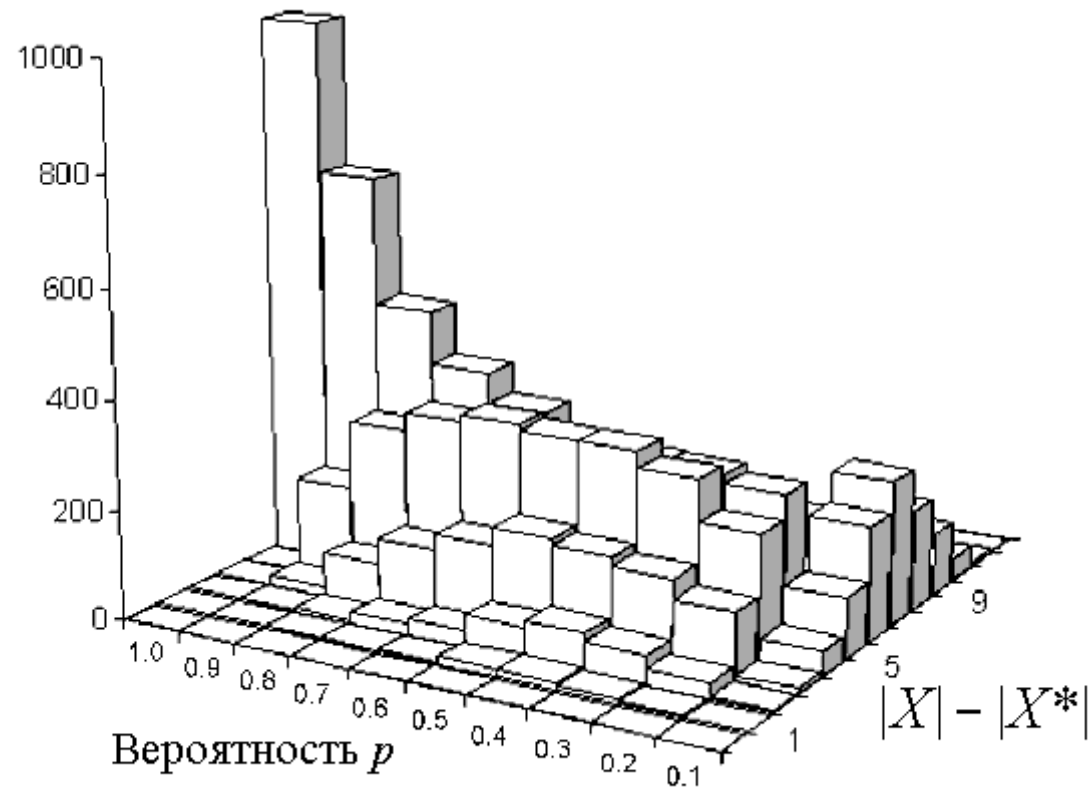
2. Пока $J^0 \neq J$ выполнять:

2.1. Сформировать подмножество $L(p) \subseteq I \setminus X$;

2.2. Найти $i_0 \in L(p)$ с ненулевым значением $q_{i_0}(X)$ и минимальным удельным приращением ρ_i .

2.3. Положить $X := X \cup \{i_0\}$; $J^0 := J^0 \cup J_{i_0}(X)$.

Влияние рандомизации на погрешность, случай $c_i = 1, i \in I$.



При фиксированном значении $p > 0$ проводилось 1000 испытаний алгоритма. Число решений с одинаковым значением представлено на графике столбиком.

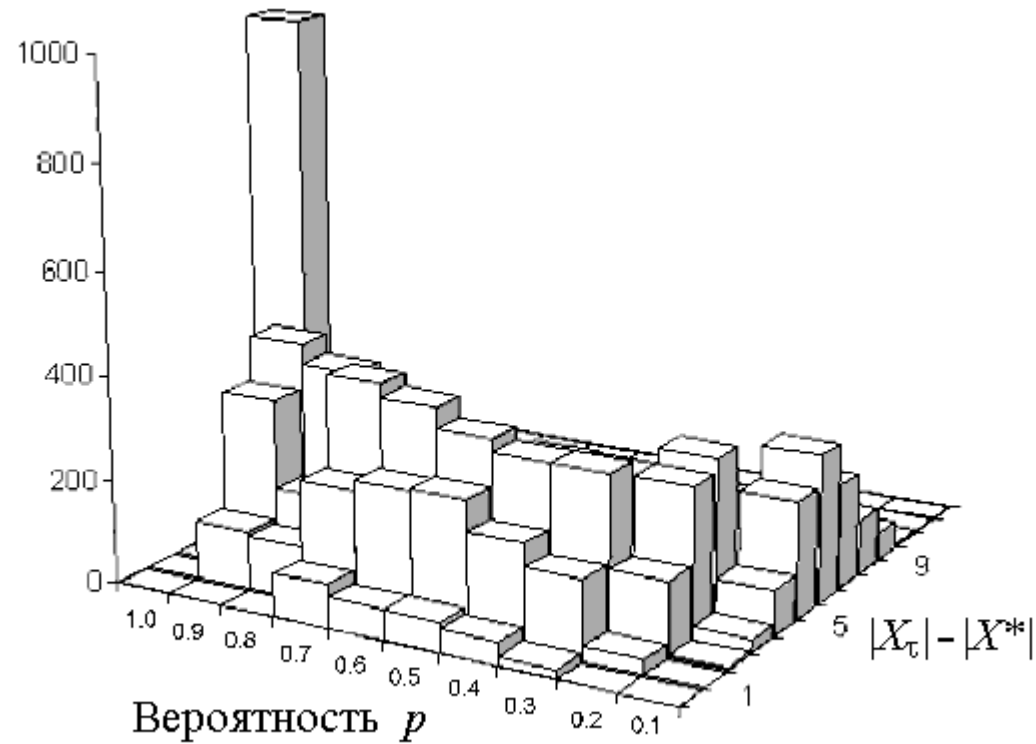
Алгоритм муравьиной колонии

Пусть вектор τ_i , $i \in I$ задает статистическую информацию о частоте появления элемента $i \in I$ в решении $X \subseteq I$. Положим $\rho_i = c_i / q_i(X) + \alpha / \tau_i$, $i \in I \setminus X$, где параметр α определяет важность статистической информации.

Алгоритм МК

1. Положить $\tau_i := 1$, $i \in I$, $X^{\text{МК}} := I$, $t := 0$.
2. Пока $t \leq T_{\max}$ выполнять:
 - 2.1. Построить решения X_τ , $\tau = 1, \dots, T$ вероятностным жадным алгоритмом
 - 2.2. Выбрать часть наилучших решений X_τ , $\tau = 1, \dots, T'$, $T' \leq T$
 - 2.3. По решениям X_τ , $\tau = 1, \dots, T'$, обновить статистическую информацию τ_i , $i \in I$ и положить $t := t + 1$
 - 2.4. Сменить рекорд $X^{\text{МК}}$, если найдено лучшее решение.

Влияние статистической информации, случай $c_i = 1, i \in I$.



Большое число оптимальных решений получено при $0,3 \leq p \leq 0,7$.

Ant Colony Optimization

BY MARCO DORIGO, IRIDIA, UNIVERSITE' LIBRE DE BRUXELLES, BELGIUM

ABOUT ACO

PEOPLE

PUBLICATIONS

IN THE PRESS

TUTORIALS

CONFERENCES

JOBS

SOFTWARE

MAILING LIST

LINKS

Links

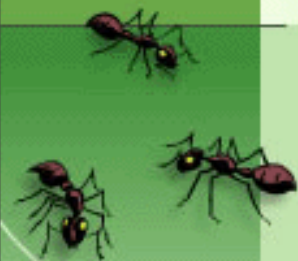
This page contains a number of interesting links to activities around Ant Colony Optimization and to related fields.

- [The Metaheuristics Network](#)

The **Metaheuristics Network** is a project sponsored by the [Improving Human Potential](#) program of the **European Community** (HPRN-CT-1999-00106), aimed to study various **metaheuristics** on different **combinatorial optimization problems**.

- [Swarm-bots Projects](#)

Swarm-bots is a project sponsored by the [Future and Emerging Technologies](#) program of the **European Community** (IST-2000-31010), aimed to study new approaches to the **design and implementation** of **self-organizing** and **self-assembling** artifacts.



Задача о p -центрах

Предположим, что p постов ГАИ уже выбрано, и каждый опасный участок прикреплен к ближайшему посту. Обозначим через d_{ij} расстояние между участком j и постом i . Для выбранного набора постов $S \subset I$, $|S| = p$ обозначим через D максимальное расстояние между постом и участками

$$D = \max_{j \in J} \min_{i \in S} d_{ij}.$$



Величина D связана с задержкой при выезде из поста i на участок j . Задача минимизации этой задержки называется задачей о p -центрах:

$$\max_{j \in J} \min_{i \in S} d_{ij} \rightarrow \min_{S \subset I, |S|=p}.$$

Задача о p -центрах сводится к решению не более $m \cdot n$ задач о минимальном покрытии (как?).

Задача о многократных покрытиях

Пусть величина D задает радиус ответственности поста, т. е. все участки на расстоянии D от поста находятся в зоне его ответственности. Зоны могут пересекаться. Пусть $r_j \geq 1$ — минимальное число постов, которые должны контролировать участок j , $b_j > 0$ — среднее число аварий на участке j .

Требуется выбрать p постов так, чтобы каждый участок контролировался не менее r_j постами, и число предотвращенных аварий было бы максимальным:



при условиях

$$\max \sum_{j \in J} b_j \sum_{i \in I} a_{ij} x_i$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p,$$

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq r_j, j \in J,$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i \in I.$$

Вероятностная постановка задачи

Вызовы с участков происходят случайным образом и независимо друг от друга,

$q > 0$ — вероятность того, что пост не может откликнуться на вызов;

$p_k = 1 - q^k$ — вероятность того, что хотя бы один из k постов откликнется;

$p_k - p_{k-1} = (1 - q^k) - (1 - q^{k-1}) = (1 - q) q^{k-1}$ — прирост вероятности при добавлении одного пункта.

Переменные:

$y_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если участок } j \text{ контролируется как минимум } k \text{ постами,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Математическая модель:

$$\max \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^{n_j} b_j (1-q) q^{k-1} y_{jk}$$

при ограничениях
$$\sum_{k=1}^{n_j} y_{jk} \leq \sum_{i \in I} a_{ij} x_i, \quad j \in J,$$

$$\sum_{i \in I} x_i \leq p,$$

$$x_i, y_{jk} \in \{0,1\},$$

где $n_j = \sum_{i \in I} a_{ij}, \quad j \in J, \quad i \in I.$

Замечание. В оптимальном решении

$$y_{jk} \leq y_{j,k-1} \text{ для всех } j \in J, 1 < k \leq n_j.$$

