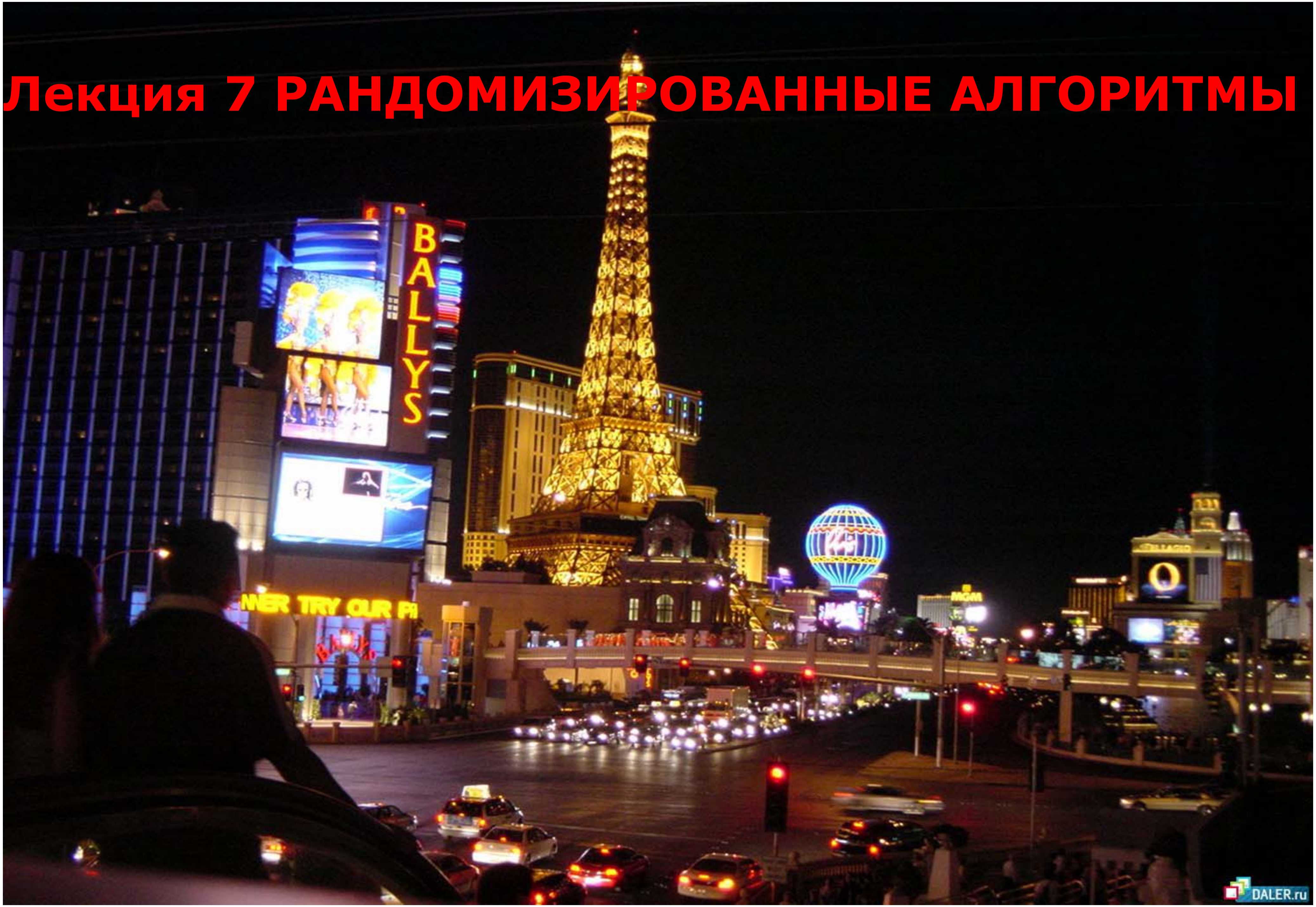
Лекция 7 РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ



Рандомизированный алгоритм – множество детерминированных алгоритмов, один из которых выбирается вероятностным способом, зависящим от заданного входа.

Классификация рандомизированных алгоритмов:

Алгоритм A для задачи F называется **алгоритмом типа Лас-Вегас**, если для любого входа x задачи F алгоритм A находит решение с вероятностью единица. При этом время работы алгоритма является случайной величиной.

Например, быстрая сортировка.

Алгоритм A для задачи F называется **алгоритмом типа Монте-Карло**, если для любого входа x задачи F алгоритм A находит решение с некоторой ненулевой вероятностью.

Задача максимальная выполнимость (MAX-SAT)

Дано: набор дизъюнкций C на множестве булевых переменных $x_1,\dots,x_n$, веса дизъюнкций $\omega_c \geq 0$, $c \in C$

Найти: назначение булевых переменных с максимальным суммарным весом выполненных дизъюнкций

Обозначения:

size(c) – число литералов, входящих в дизъюнкцию c

W_c - случайная переменная, обозначающая вес, вносимый дизъюнкцией c

$W = \sum_{c \in C} W_c$ - суммарный вес выполненных дизъюнкций

$E(W_c) = \omega_c P(c = 1)$ - мат. ожидание выполнимости дизъюнкции c

MAX-*k*SAT – задача о максимальной выполнимости с *size(c)* $\leq k$, $c \in C$

Известные результаты:

MAX-SAT, MAX-2SAT ∈ NPO

2SAT ∈ P

Алгоритм Джонсона

for $i = 1$ to n do

begin

p :=Random(0,1);

if $p \le 1/2$ then $x_i \coloneqq 1$

else $x_i \coloneqq 0$;

end;

Лемма 1. *Если size(c)* $= k$*, то ожидаемый вес, вносимый дизъюнкцией* c *оценивается* $E(W_c) = \alpha_k \omega_c$*, где* $\alpha_k = 1 - 1/2^k$*,* $k \geq 1$*.*

Доказательство:

c - не выполнима $\Leftrightarrow$ все литералы в c принимают значение 0, вероятность этого события $1/2^k$.$\square$

Получаем оценку для $k \geq 1$, $\alpha_k \geq \frac{1}{2}$

$$E(W) = \sum_{c \in C} E(W_c) \geq \frac{1}{2} \sum_{c \in C} \omega_c \geq \frac{1}{2} OPT$$

Алгоритм хорош при больших значениях k

Пусть $a_1,....,a_i$ значения булевых переменных $x_1,....,x_i$.

Лемма 2. *Условные мат. ожидания* $E(W \mid x_1 = a_1,....,x_i = a_i)$, $\forall i = 1,...,n$ *могут быть вычислены за полиномиальное время.*

Доказательство. Пусть есть назначение $x_1 = a_1,....,x_i = a_i$, а φ- булева формула на оставшихся $x_{i+1},....,x_n$ переменных. Очевидно, что условное мат. ожидание выполнимости оставшихся дизъюнкций может быть вычислено за полиномиальное время случайным назначением значений переменным $x_{i+1},....,x_n$. Учитывая уже посчитанные мат. ожидания для $x_1,...,x_i$ получим оценку для исходного набора дизъюнкций. $\square$

Теорема. *Существует и может быть вычислено за полиномиальное время такое назначение истинности переменным* $x_1,\ldots.,x_n$, *что* $E(W \mid x_1 = a_1,\ldots.,x_n = a_n) \geq E(W)$.

Доказательство: т.к. x_{i+1} с равной вероятностью принимает значение 0 или 1, то

$E(W \mid x_1 = a_1,\ldots.,x_i = a_i) = \frac{1}{2} E(W \mid x_1 = a_1,\ldots.,x_i = a_i, x_{i+1} = 1) +$

$\frac{1}{2} E(W \mid x_1 = a_1,\ldots.,x_i = a_i, x_{i+1} = 0)$. Таким образом, для $E(W \mid x_1 = a_1,\ldots.,x_i = a_i, x_{i+1} = a_{i+1})$ с большим значением верно $E(W \mid x_1 = a_1,\ldots.,x_i = a_i, x_{i+1} = a_{i+1}) \geq E(W \mid x_1 = a_1,\ldots.,x_i = a_i)$. По лемме 2 назначение может быть найдено за полиномиальное время. □

В качестве назначения выбирается то, на котором мат. ожидание наибольшее.

В более общем случае, когда назначения не равновероятны

$$E(W \mid x_1 = a_1, \dots, x_i = a_i) =$$

$$E(W \mid x_1 = a_1, \dots, x_i = a_i, x_{i+1} = 1)\, P(x_{i+1} = 1 \mid x_1 = a_1, \dots, x_i = a_i) +$$
$$E(W \mid x_1 = a_1, \dots, x_i = a_i, x_{i+1} = 0)\, P(x_{i+1} = 0 \mid x_1 = a_1, \dots, x_i = a_i)$$

Если эти вероятности и условные ожидания могут быть найдены за полиномиальное время, то применима вышеописанная техника.

MAX-SAT в виде задачи целочисленного линейного программирования

Пусть S_c^+ (S_c^-) – множество переменных, входящих в дизъюнкцию $c \in C$ без(с) отрицания(ем).

Переменные:

$$y_i = \begin{cases} 1, \textit{если } x_i = 1 \\ 0, \textit{если } x_i = 0 \end{cases} \qquad z_c = \begin{cases} 1, \textit{если с выполнима} \\ 0 \textit{ иначе} \end{cases}$$

Математическая модель:

$$\sum_{c \in C} \omega_c z_c \to \max$$

$$\sum_{i \in S_c^+} y_i + \sum_{i \in S_c^-} (1 - y_i) \geq z_c \quad \forall c \in C$$

$$z_c \in \{0,1\} \, \forall c \in C; \;\; y_i \in \{0,1\} \, \forall i \in \{1,\ldots,n\}$$

LP-релаксация или

модель линейного программирования для MAX-SAT

$$\sum_{c \in C} \omega_c z_c \to \max$$

$$\sum_{i \in S_c^+} y_i + \sum_{i \in S_c^-} (1 - y_i) \geq z_c \quad \forall c \in C$$

$$0 \leq z_c \leq 1 \quad \forall c \in C$$

$$0 \leq y_i \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Вероятностный алгоритм Джонсона:

Найти (y^*, z^*) - оптимальное решение LP-релаксации

for $i = 1$ to n do

begin

p :=Random(0,1);

if $p \le y_i^*$ then $x_i := 1$

else $x_i := 0$;

end;

Лемма 3. *Если size(c)=k, тогда* $E(W_c) \geq \beta_k \omega_c z_c^*$, *где* $\beta_k = 1-(1-\frac{1}{k})^k$, *для* $k \geq 1$.

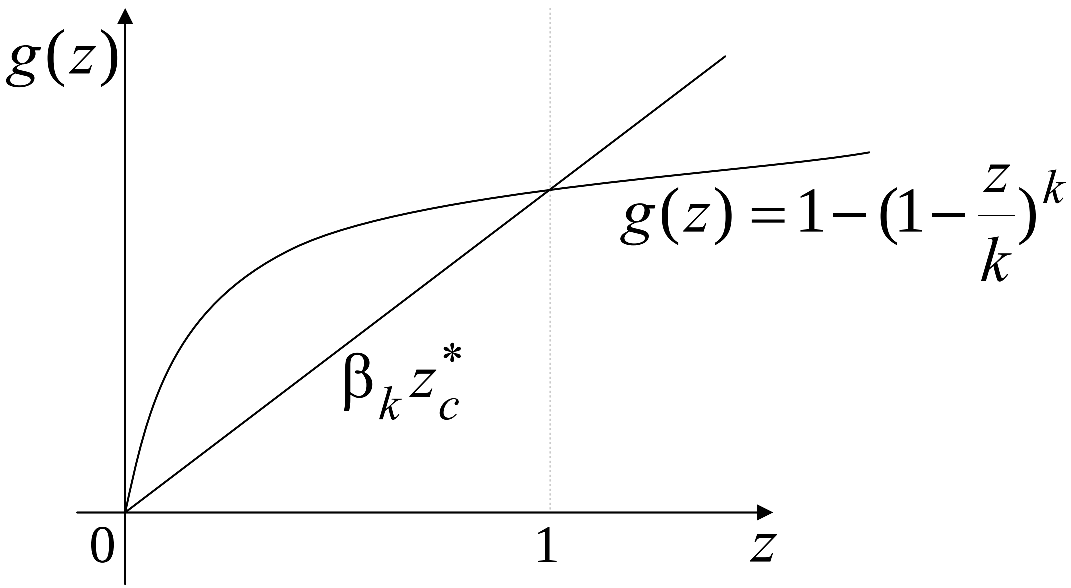
Доказательство: можно считать, что все переменные входят в дизъюнкции без отрицания, иначе сделать замену.

Вероятность того, что дизъюнкция c выполнена:

$$1-\prod_{i=1}^{k}(1-y_i) \overset{(1)}{\geq} 1-\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}(1-y_i)}{k}\right)^k = 1-\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{k}(y_i)}{k}\right)^k \overset{(2)}{\geq} 1-\left(1-\frac{z_c^*}{k}\right)^k$$

(1): $\frac{a_1+\ldots+a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1\cdot\ldots\cdot a_k}$

(2): $y_1+\ldots+y_k \geq z_c$



$g(z)$ - вогнутая, $g(0)=0$,

$g(1)=\beta_k$, следовательно, $z\in[0,1]$, $g(z)\ge\beta_k z$, следовательно

$P(c\ \textit{выполнена})\ge\beta_k z_c^*$.□

β_k - убывающая функция по *k*

$$E(W)=\sum_{c\in C}E(W_c)\ge\beta_k\sum_{c\in C}\omega_c z_c^*=\beta_k OPT_f\ge\beta_k OPT,$$

OPT_f - оптимум LP-релаксации и $OPT_f\ge OPT$.

Заметим, $\forall k \in Z^{+}\ (1-\frac{1}{k})^{k} > \frac{1}{e}$

Дерандомизированный вероятностный алгоритм является $(1-\frac{1}{e})$-приближенным алгоритмом для решения MAX-SAT.

алгоритм Гойманса и Уильямсона для решения MAX-SAT

1. Найти назначение дерандомизированным алгоритмом с оценкой ½
2. Найти назначение дерандомизированным алгоритмом с оценкой $(1-1/e)$
3. В качестве ответа предъявить лучшее из двух назначений

Теорема. *Алгоритм Гойманса и Уильямсона является детерминированным приближенным алгоритмом с оценкой ¾.*

Доказательство. Пусть с равной вероятностью выполняется либо алгоритм Джонсона $(b=0)$, либо вероятностный алгоритм $(b=1)$. Пусть z^* - оптимальное решение LP-релаксации, *size(c)=k*.

По лемме 2: $E(W_c \mid b=0)=\alpha_k \omega_c \geq \alpha_k \omega_c z_c^*$, $z_c^* \leq 1$.

По лемме 3: $E(W_c \mid b=1) \geq \beta_k \omega_c z_c^*$.

$\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2=3/2$, для $k \geq 3$, $\alpha_k+\beta_k \geq 7/8+(1-1/e) \geq 3/2$.

$$E(W_c)=\frac{1}{2}(E(W_c \mid b=0)+E(W_c \mid b=1)) \geq \omega_c z_c^* \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}$$

$$E(W)=\sum_{c \in C} E(W_c) \geq \frac{3}{4} \sum_{c \in C} \omega_c z_c^* = \frac{3}{4} OPT_f \geq \frac{3}{4} OPT. \square$$

Пример, что оценка ¾ точная для LP.

Дано: $C = \{(x_1 \vee x_2), (\bar{x}_1 \vee x_2), (x_1 \vee \bar{x}_2), (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\}$, $\omega_c = 1$

Оптимальное решение LP- релаксации: $y_i = \frac{1}{2}$, $\forall i$, $z_c = 1, \forall c$, $OPT_f = 4$;

$OPT = 3$.

Пример, показывающий, что оценка алгоритма Гойманса и Уильямсона точна.

Дано: $C = \{(x_1 \vee x_2), (x_1 \vee \bar{x}_2), (\bar{x}_1 \vee x_3)\}$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 2 + \varepsilon$.

$x_i = 1$ с вероятностью $\frac{1}{2}$ назначаются алгоритмами с оценкой $(1 - 1/e)$ и

$1/2$, тогда $E(W \mid x_1 = 1) = 3 + \frac{\varepsilon}{2}$, $E(W \mid x_1 = 0) = 3 + \varepsilon$, следовательно, $x_1 = 0$ и общий вес равен $(3 + \varepsilon)$, хотя, полагая $x_1 = 1$ можно получить вес $(4 + \varepsilon)$.

Литература:

1. V. Vazirani. Approximation Algorithms. Springer-Verlag Berlin 2001.

2. Juraj Hromković. Algorithmics for Hard Problems. Introduction to combinatorial optimization, randomization, approximation, and heuristics. Second edition, Springer-Verlag Berlin 2001, 2003