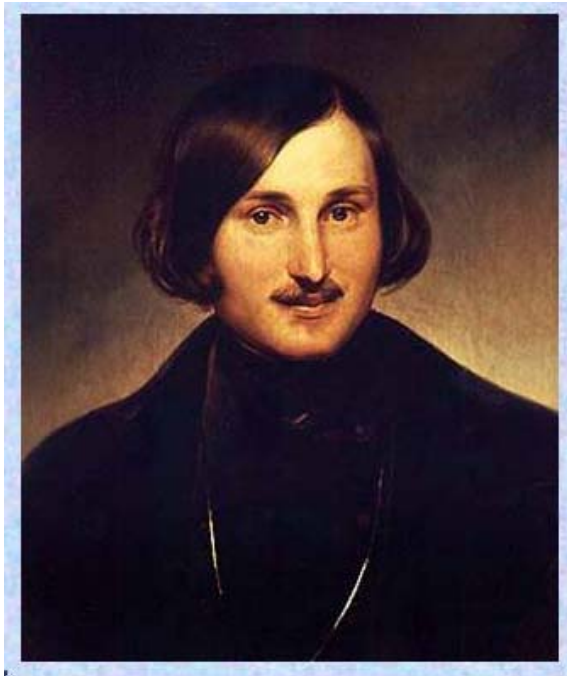


# Многокритериальная оптимизация



*Агафья Тихоновна: “Если бы губы Никанора Ивановича да приставить к носу Ивана Кузьмича, да взять сколько-нибудь развязности, какая у Балтазара Балтазарыча, да, пожалуй, прибавить к этому еще дородности Ивана Павловича — я бы тогда тотчас же решилась.”*

Н.В. Гоголь. «Женитьба». 1833

## Пример

### *Покупка автомобиля*

	VW Golf	Opel Astra	Ford Focus	Toyota Corolla
Цена (1000 Euro)	16.2	14.9	14.0	15.2
Расход топлива (на 100 км)	7.2	7.0	7.5	8.2
Мощность (kW)	66.0	62.0	55	71

Какой автомобиль выбрать, чтобы он был мощным, недорогим,  
с малым расходом топлива?

## Пример

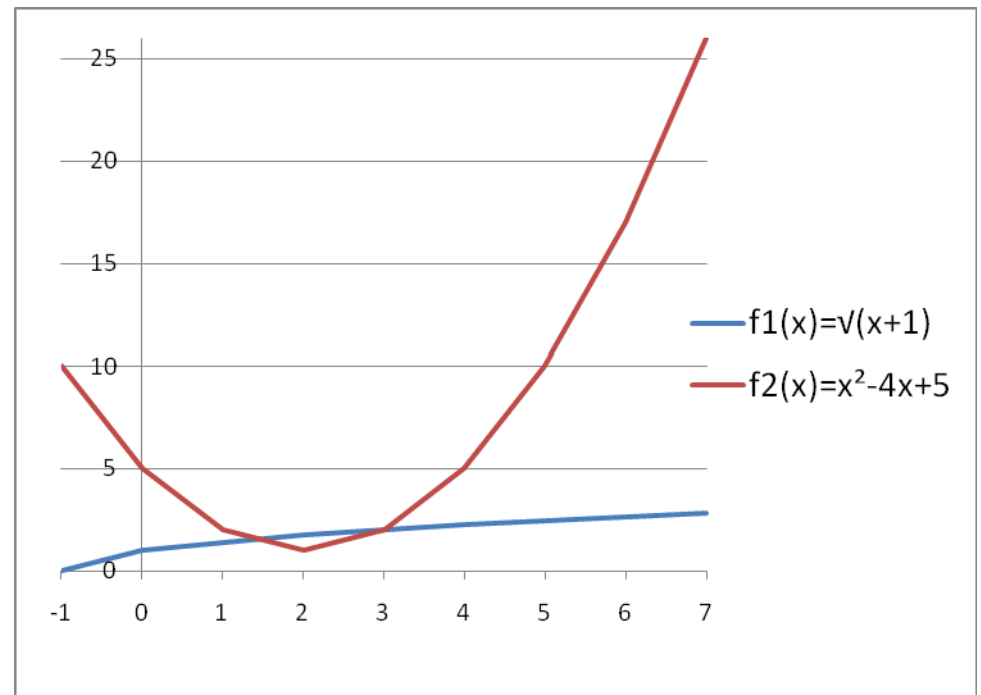
### минимизация пары функций

$$\min_{x \geq 0} f_1(x) = \sqrt{x+1}$$

$$\min_{x \geq 0} f_2(x) = x^2 - 4x + 5$$

минимум  $f_1$  в точке  $x_1 = 0$

минимум  $f_2$  в точке  $x_2 = 2$



# Задача многокритериальной оптимизации

$$\min(f_1(x), \dots, f_p(x))$$

при условии  $x \in X$ .

Допустимое решение  $\tilde{x} \in X$  называется *эффективным по Парето* или *Парето-оптимальным*, если не существует другого решения  $x \in X$  такого, что  $f_k(x) \leq f_k(\tilde{x})$  для всех  $k = 1, \dots, p$ , и  $f_i(x) < f_i(\tilde{x})$  хотя бы для одного  $i = 1, \dots, p$ .

Если  $\tilde{x}$  — эффективное решение, то  $\tilde{y} = f(\tilde{x})$  называется *недоминируемой точкой*. Множество всех недоминируемых точек называется *недоминируемым множеством* и обозначается  $Y_N$ . Множество всех эффективных решений называется *эффективным множеством* и обозначается  $X_E$ .

# Пространство решений и пространство критериев

Пример Opel и Ford эффективный выбор или Парето\*-оптимальные решения

$$X = \{VW, Opel, Ford, Toyota\}$$

допустимое множество

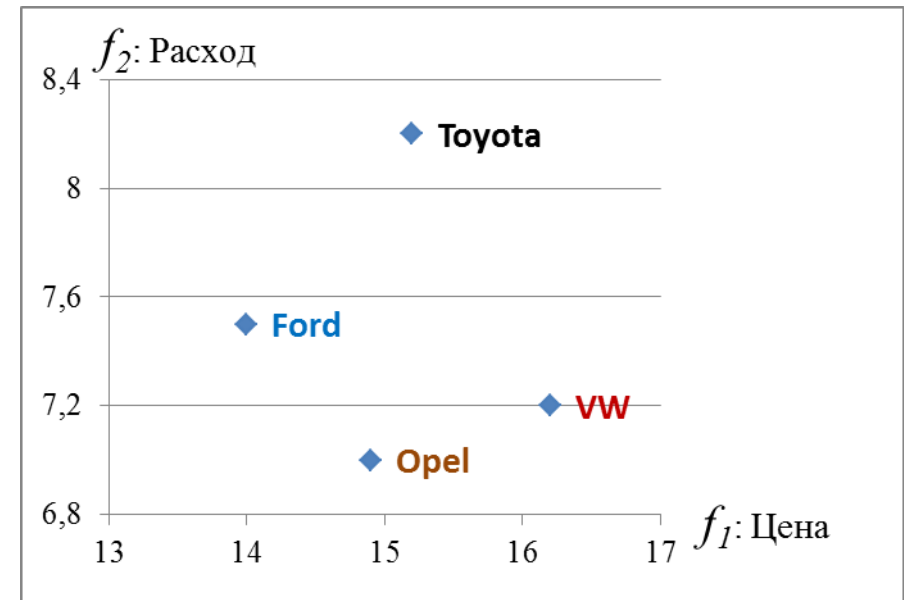
$$f_i : X \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$$

критерии оптимизации  $f = (f_1, f_2)$

$$Y := f(X) := \{y \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \text{ для } x \in X\}$$

образ множества  $X$  или допустимое множество в пространстве критериев

$$\min_{x \in X} (f_1(x), f_2(x))$$



\*Вильфредо Парето, 1848-1923 итальянский экономист

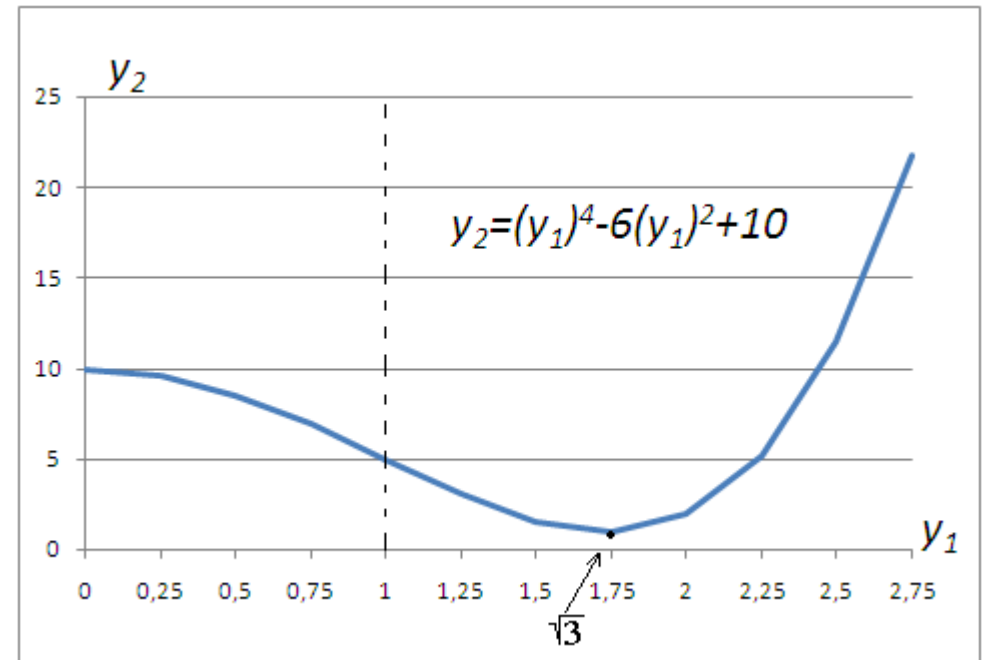
# Пространство решений и пространство критериев

## Пример минимизации двух функций

допустимое множество

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

допустимое множество в пространстве критериев  $Y$  состоит из части графика, расположенной справа от вертикальной линии  $y_1 = 1$



недоминируемые точки:  $1 \leq y_1 \leq \sqrt{3}$ ,  $1 \leq y_2 \leq 5$ , соответствующие решениям  $x \in [0, 2]$

# Линейная свертка критериев

Вместо исходной многокритериальной задачи

$$\min_{x \in X} (f_1(x), \dots, f_p(x))$$

будем решать задачу с одним взвешенным критерием

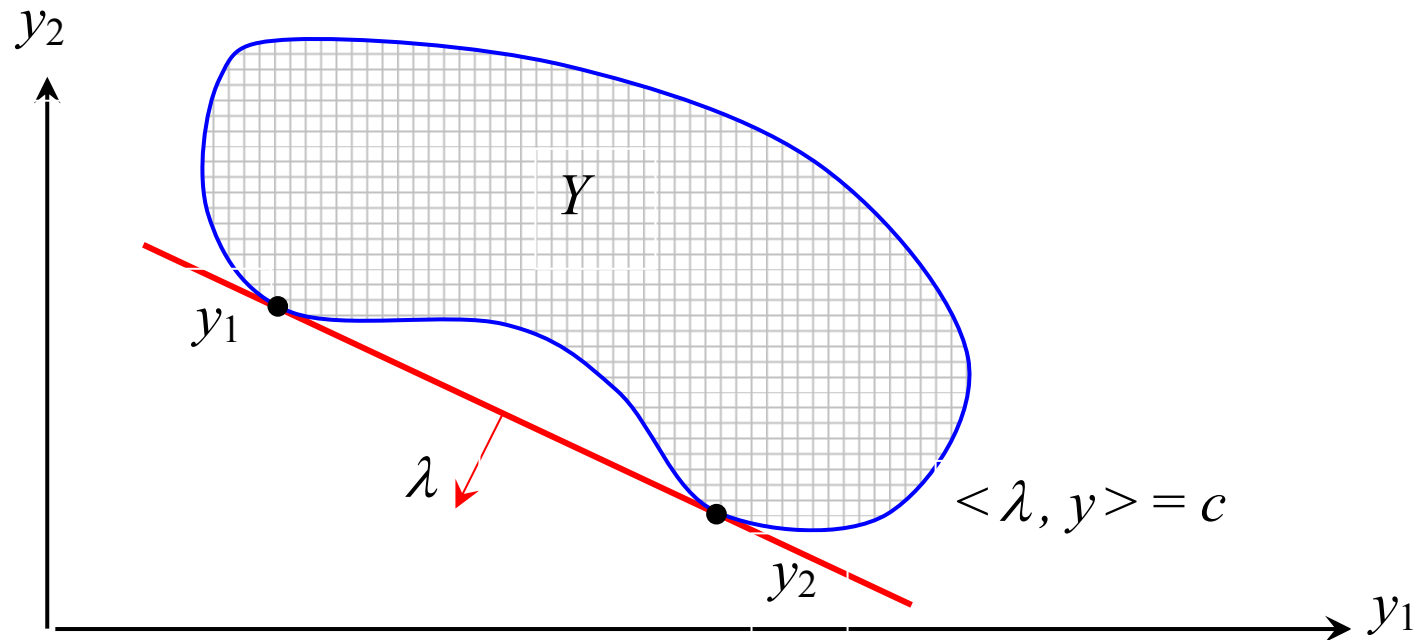
$$\min_{x \in X} \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x)$$

при разных значениях  $\lambda_k \geq 0$  и  $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1$ .

# Графическая интерпретация

При заданных  $\lambda$  ищем элементы множества

$$S(\lambda, Y) = \{\tilde{y} \in Y : \langle \lambda, \tilde{y} \rangle = \min_{y \in Y} \langle \lambda, y \rangle\}$$



1. Всегда ли такой процесс дает недоминируемые точки?
2. Если да, то все ли точки можно получить, меняя  $\lambda$ ?



## Эффективность по Джеоффриону

Допустимое решение  $\tilde{x} \in X$  называется *эффективным по Джеоффриону*, если  $\tilde{x}$  является эффективным и существует такое положительное число  $M$ , что для любого  $x \in X$ , удовлетворяющего условию

$$f_i(x) < f_i(\tilde{x}) \quad \text{для некоторого } i,$$

найдется такой индекс  $j$ , что  $f_j(\tilde{x}) < f_j(x)$  и выполнено неравенство

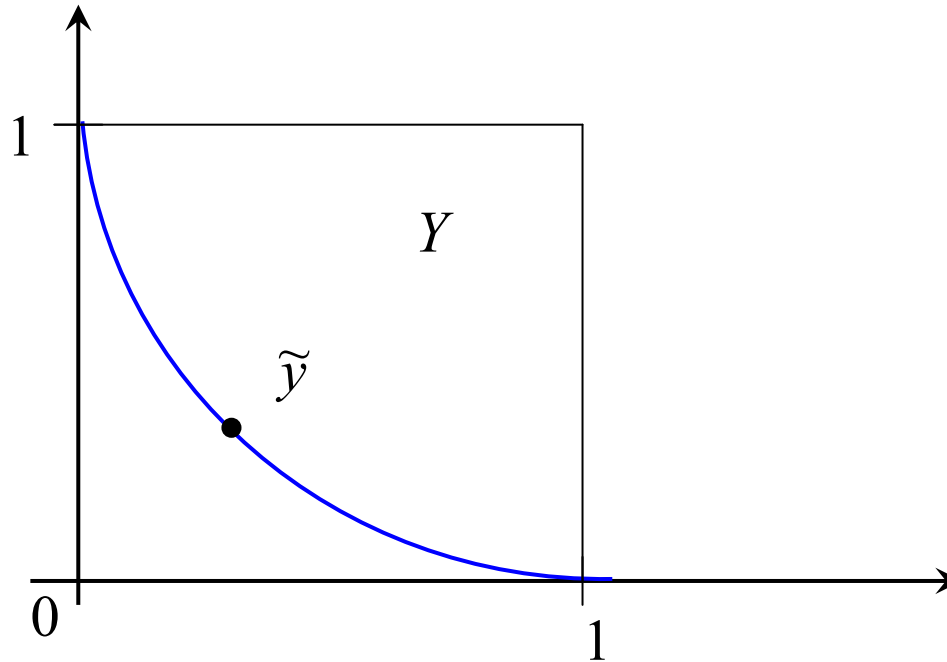
$$\frac{f_i(\tilde{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\tilde{x})} \leq M.$$

Точка  $\tilde{y} = f(\tilde{x})$  называется *недоминируемой по Джеоффриону*.

### Пример.

$$X = \{(x_1, x_2) \in R^2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1, \ 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$$

$$Y = X$$



$\tilde{y}$  — недоминируемая точка

$x = (0, 1)$  не является эффективным по Джеоффриону.

**Теорема.** Пусть положительные величины  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, p$  удовлетворяют равенству  $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1$ . Если  $\tilde{x}$  — оптимальное решение линейной свертки, то  $\tilde{x}$  — эффективное решение по Джеоффриону.

**Доказательство.** Покажем, что  $\tilde{x}$  — эффективное решение. Пусть  $x' \in X$ ,  $f(x') \leq f(\tilde{x})$  и существует индекс  $i$  такой, что  $f_i(x') < f_i(\tilde{x})$ . Т.к.  $\lambda_k > 0$ , то

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x') < \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(\tilde{x}),$$

что противоречит оптимальности  $\tilde{x}$  в линейной свертке.

Покажем эффективность по Джеоффриону. Положим  $M := (p-1) \max_{ij} \frac{\lambda_j}{\lambda_i}$ .

Предположим, существует  $x \in X$  и такой индекс  $i \leq p$ , что  $f_i(x) < f_i(\tilde{x})$  и  $f_i(\tilde{x}) - f_i(x) > M(f_j(x) - f_j(\tilde{x}))$  для всех индексов  $j$ , где  $f_j(\tilde{x}) < f_j(x)$ .

Тогда по выбору  $M$  получаем

$$f_i(\tilde{x}) - f_i(x) > \frac{p-1}{\lambda_i} \lambda_j (f_j(x) - f_j(\tilde{x})).$$

Заметим, что неравенство верно для всех  $j \neq i$ , т.к. при  $f_j(\tilde{x}) \geq f_j(x)$  оно тривиально. Умножим это неравенство на  $\frac{\lambda_i}{(p-1)}$  и сложим по всем  $j \neq i$ :

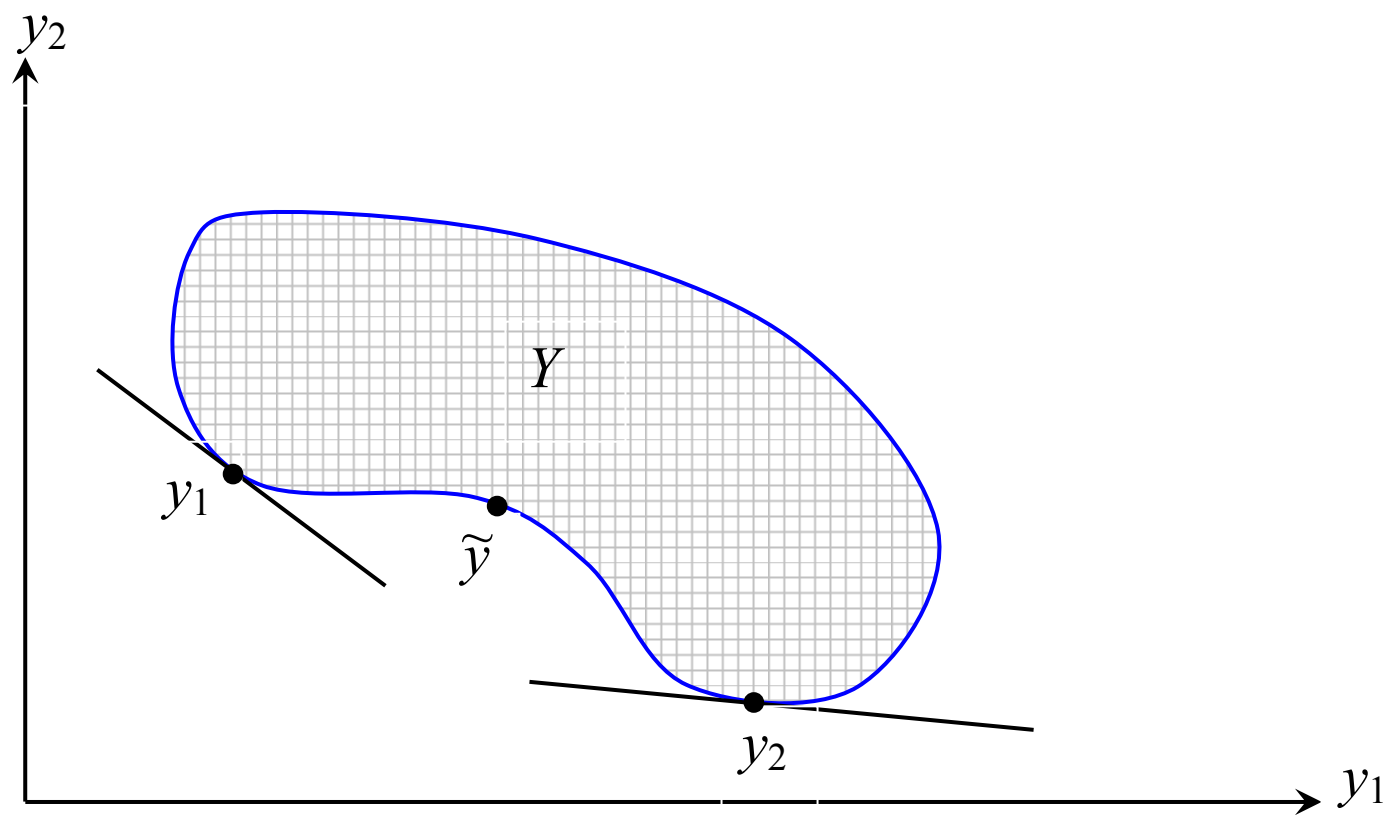
$$\lambda_i (f_i(\tilde{x}) - f_i(x)) > \sum_{j \neq i} \lambda_j (f_j(x) - f_j(\tilde{x}))$$

$$\text{Тогда } \lambda_i f_i(\tilde{x}) - \lambda_i f_i(x) > \sum_{j \neq i} \lambda_j f_j(x) - \sum_{j \neq i} \lambda_j f_j(\tilde{x}),$$

$$\text{группируем } \lambda_i f_i(\tilde{x}) + \sum_{j \neq i} \lambda_j f_j(\tilde{x}) > \lambda_i f_i(x) + \sum_{j \neq i} \lambda_j f_j(x).$$

$$\text{Получаем } \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(\tilde{x}) > \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x), \text{ что противоречит оптимальности } \tilde{x}. \blacksquare$$

Верно ли обратное утверждение?



$\tilde{y}$  — недоминируемая точка

**Лемма (о свойствах выпуклых функций).** Пусть  $X \subset R^n$  — выпуклое множество и все функции  $h_k: R^n \rightarrow R$  выпуклые  $k = 1, \dots, p$ . Если система  $h_k(x) < 0$ ,  $k = 1, \dots, p$ , не имеет решений  $x$  из множества  $X$ , то существуют такие неотрицательные величины  $\lambda_k$ , в сумме равные 1,  $\left( \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0 \right)$ , что

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k h_k(x) \geq 0 \quad \text{для всех } x \in X.$$

Без доказательства.

**Теорема.** Пусть  $X \subset R^n$  — выпуклая область и все функции  $f_k : R^n \rightarrow R$  выпуклые,  $k = 1, \dots, p$ . Тогда  $\tilde{x} \in X$  является эффективным решением по Джеоффриону, если и только если  $\tilde{x}$  — оптимальное решение линейной свертки с положительными весами  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ .

**Доказательство.** Проверим необходимость. Достаточность следует из предыдущей теоремы.

Пусть  $\tilde{x}$  — эффективное решение по Джеоффриону. Из определения следует, что существует  $M > 0$ , для которого при любом  $i = 1, \dots, p$  система

$$f_i(x) < f_i(\tilde{x})$$

$$f_i(x) + Mf_j(x) < f_i(\tilde{x}) + Mf_j(\tilde{x}), \quad j \neq i$$

не имеет решений.

Тогда по лемме о выпуклых функциях для  $i$ -й системы найдутся величины  $\lambda_k^i \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, p$  в сумме равные 1, т.е.  $\sum_{k=1}^p \lambda_k^i = 1$  при которых для любого

$x \in X$  верно неравенство:

$$\lambda_i^i f_i(x) + \sum_{k \neq i} \lambda_k^i (f_i(x) + M f_k(x)) \geq \lambda_i^i f_i(\tilde{x}) + \sum_{k \neq i} \lambda_k^i (f_i(\tilde{x}) + M f_k(\tilde{x})).$$

Открываем скобки:

$$\lambda_i^i f_i(x) + \sum_{k \neq i} \lambda_k^i f_i(x) + M \sum_{k \neq i} \lambda_k^i f_k(x) \geq \lambda_i^i f_i(\tilde{x}) + \sum_{k \neq i} \lambda_k^i f_i(\tilde{x}) + M \sum_{k \neq i} \lambda_k^i f_k(\tilde{x}).$$

Заносим в сумму первое слагаемое в обеих частях неравенства:

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k^i f_i(x) + M \sum_{k \neq i} \lambda_k^i f_k(x) \geq \sum_{k=1}^p \lambda_k^i f_i(\tilde{x}) + M \sum_{k \neq i} \lambda_k^i f_k(\tilde{x}).$$



Пользуясь равенством  $\sum_{k=1}^p \lambda_k^i = 1$ , получаем:

$$f_i(x) + M \sum_{k \neq i} \lambda_k^i f_k(x) \geq f_i(\tilde{x}) + M \sum_{k \neq i} \lambda_k^i f_k(\tilde{x}).$$

Итак, для каждого  $i = 1, \dots, p$  получили неравенство. Складывая их по  $i$ , по-

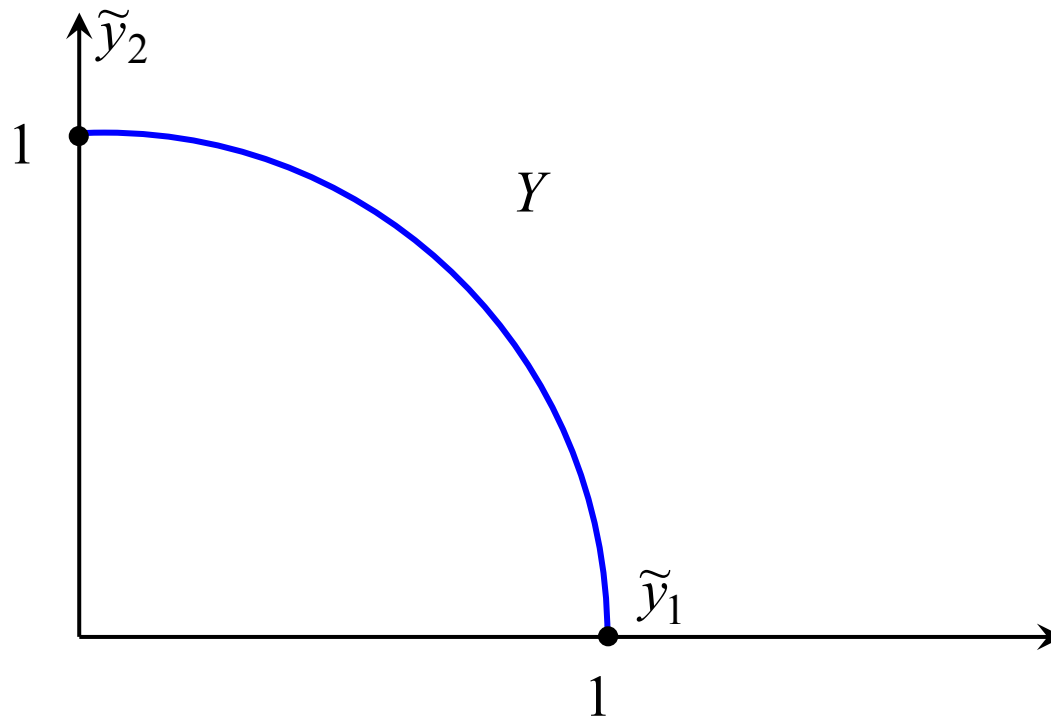
лучаем: 
$$\sum_{i=1}^p f_i(x) + M \sum_{i=1}^p \sum_{k \neq i} \lambda_k^i f_i(x) \geq \sum_{i=1}^p f_i(\tilde{x}) + M \sum_{i=1}^p \sum_{k \neq i} \lambda_k^i f_i(\tilde{x}).$$

Отсюда следует, что 
$$\sum_{k=1}^p \left( 1 + M \sum_{i \neq k} \lambda_k^i \right) f_k(x) \geq \sum_{k=1}^p \left( 1 + M \sum_{i \neq k} \lambda_k^i \right) f_k(\tilde{x})$$
 верно для

всех  $x \in X$ . Поделив обе части на  $\sum_{k=1}^p \left( 1 + M \sum_{i \neq k} \lambda_k^i \right)$ , получаем нормированный

вектор  $\lambda > 0$ , указанный в теореме, при котором  $\tilde{x}$  — оптимальное решение в линейной свертке. ■

Пример.  $X = \{x \in R_{\geq}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$   $f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_2$



$X_E = \{x \in X \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  — решения, эффективные по Парето.

При любых  $\lambda \geq 0$  линейная свертка дает только  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ !

## Метод уступок

Для  $\varepsilon \in R^p$  рассмотрим задачу с одним критерием

$$\min_{x \in X} f_j(x) \quad (*)$$

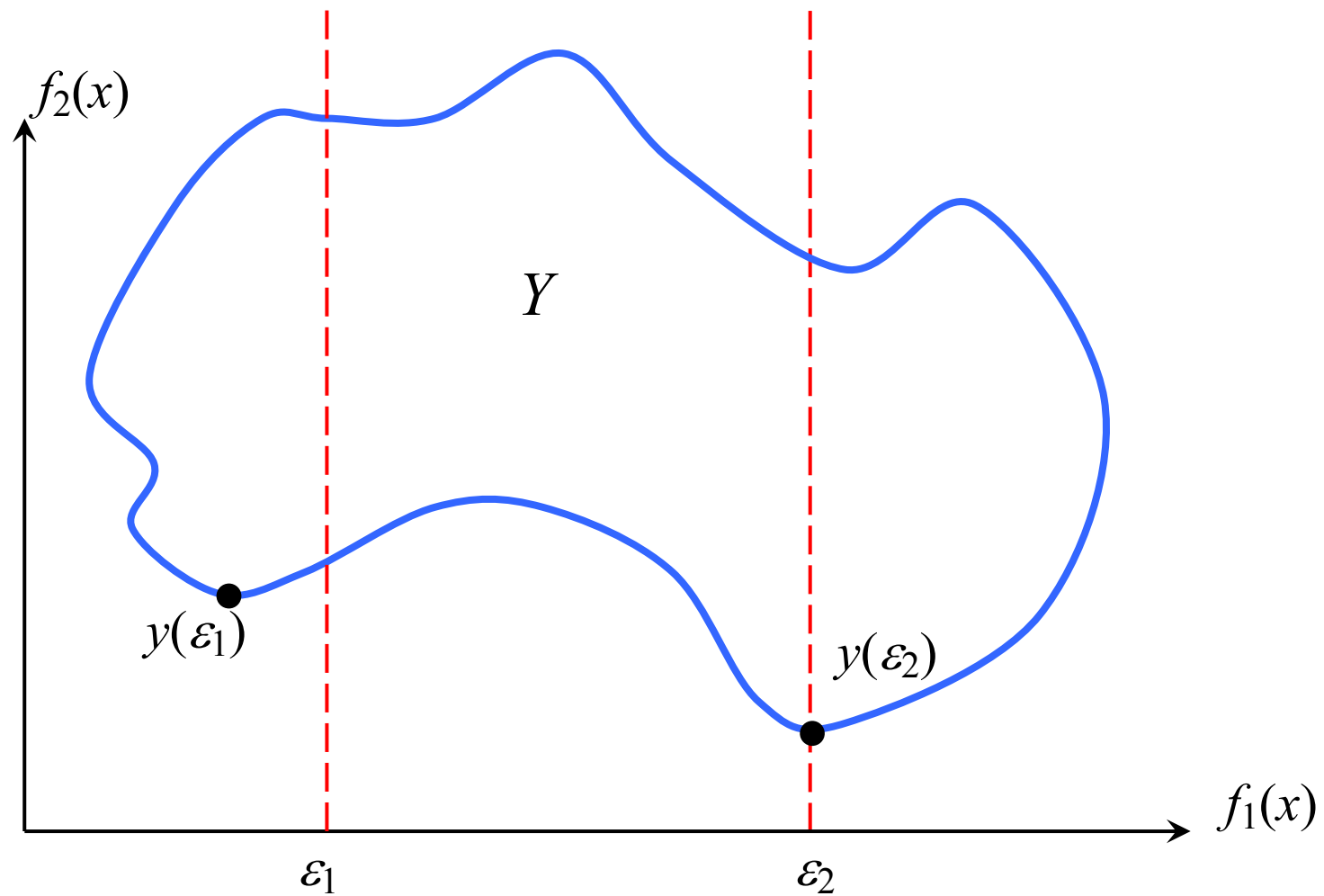
при условии  $f_k(x) \leq \varepsilon, \quad k \neq j$

**Теорема.** Допустимое решение  $\tilde{x} \in X$  является эффективным по Парето  $\Leftrightarrow \exists \varepsilon \in R^p$ , при котором  $\tilde{x}$  — оптимальное решение (\*) для всех  $j = 1, \dots, p$ .

**Доказательство.**  $\Rightarrow$  Положим  $\tilde{\varepsilon} = f(\tilde{x})$  и предположим, что  $\tilde{x}$  не является оптимальным решением для некоторого  $j$ . Тогда найдется  $x \in X$ , для которого  $f_j(x) < f_j(\tilde{x})$  и  $f_k(x) \leq \tilde{\varepsilon}_k = f_k(\tilde{x}), k \neq j$ , т.е.  $\tilde{x}$  не является эффективным по Парето.

$\Leftarrow$  Предположим, что  $\tilde{x} \notin X_E$ . Тогда  $\exists j$  и решение  $x \in X$ , для которых  $f_j(x) < f_j(\tilde{x})$  и  $f_k(x) \leq f_k(\tilde{x}), k \neq j$ . Поэтому  $\tilde{x}$  не может быть оптимальным решением ни при каком  $\varepsilon$ , если  $\tilde{x}$  — допустимое решение для этого  $\varepsilon$ . ■

## Пример



# Устные вопросы до экзамена

3 курс, ФИТ НГУ, летняя сессия, 2013 г.

1. Приближенные алгоритмы с гарантированной относительной точностью. Модифицированный жадный алгоритм для задачи о рюкзаке и алгоритм с точностью  $\frac{3}{4}$ .
2. Аппроксимационные схемы, полиномиальные и полностью полиномиальные схемы для задачи о рюкзаке.
3. Задача упаковки в контейнеры. Алгоритмы NF, FF, BF, FFD, отрицательный результат об аппроксимируемости.
4. Нижние оценки Martello и Toth.
5. Метод генерации столбцов для задачи упаковки в контейнеры.
6. Задача календарного планирования. Критические работы, пути и критическое время проекта.
7. Задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами.
8. Алгоритм Гимади для задачи со складываемыми ресурсами.

9. Задача коммивояжера. Теорема о погрешности приближенных полиномиальных алгоритмов и алгоритмов локального спуска.
10. Задача коммивояжера с неравенством треугольника. Алгоритм с гарантированной оценкой точности 2.
11. Нижние оценки в задаче коммивояжера
12. Алгоритм Лаулера для задачи  $1 \mid prec \mid f_{max}$
13. Алгоритм решения задачи  $P \mid pmtn \mid C_{max}$
14. Алгоритм решения задачи  $P \mid pmtn, r_i \mid L_{max}$
15. Алгоритм решения задачи  $F2 \parallel C_{max}$
16. Задачи о покрытии, алгоритм Чватала
17. Задача размещения в условиях конкуренции «безнадежный» пример.
18. Матричные игры. Определение седловой точки.
19. Теорема Фон-Неймана.
20. Бескоалиционные игры, равновесие по Нэшу.
21. Многокритериальная оптимизация. Эффективные решения по Парето и Джеоффриону. Метод уступок.

# Вопросы к экзамену

3 курс, ФИТ НГУ, летняя сессия, 2013 г.

1. Метод динамического программирования на примере распределительной задачи.
2. Модель размещения капитала, верхняя оценка оптимума, свойство оптимального решения линейной релаксации, алгоритм округления дробного решения.
3. Классическая задача о рюкзаке, теорема об алгоритмах с гарантированной абсолютной точностью.
4. Жадные алгоритмы для классической задачи о рюкзаке, свойства LP-релаксации
5. Приближенные алгоритмы с гарантированной относительной точностью. Модифицированный жадный алгоритм для задачи о рюкзаке и алгоритм с точностью  $\frac{3}{4}$ .
6. Аппроксимационные схемы, полиномиальные и полностью полиномиальные схемы для задачи о рюкзаке.

7. Замена оборудования. Алгоритм динамического программирования для конечного планового периода.
8. Задача упаковки в контейнеры. Алгоритмы NF, FF, BF, FFD и их свойства, отрицательный результат об аппроксимируемости.
9. Нижние оценки Martello и Toth.
10. Метод генерации столбцов для задачи упаковки в контейнеры.
11. Задача двумерной упаковки, кодировки решений, алгоритм имитации отжига.
12. Задача календарного планирования. Критические работы, пути и критическое время проекта.
13. Постановка задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами.
14. Т–поздние расписания. Алгоритм вычисления Т–поздних расписаний.
15. Доказательство оптимальности Т\*–позднего расписания. Алгоритм Гимади.
16. Задачи календарного планирования с переменными длительностями работ. Сведение к линейному программированию.
17. Задача коммивояжера. Теорема о погрешности приближенных полиномиальных алгоритмов и алгоритмов локального спуска.



18. Задача коммивояжера с неравенством треугольника. Алгоритм с гарантированной оценкой точности 2. Доказательство оценки и ее неулучшаемости.
19. Нижние оценки в задаче коммивояжера: примитивная оценка, оценка линейного программирования, оценка задачи о назначениях и минимальные 1-деревья.
20. Алгоритм решения задачи о назначениях.
21. Метод ветвей и границ для задачи коммивояжера.
22. Классификация задач теории расписаний.
23. Алгоритм Лаулера для задачи  $1 | prec | f_{max}$
24. Алгоритм решения задачи  $1 | prec, pmtn, r_i | f_{max}$
25. Алгоритм решения задачи  $P | pmtn | C_{max}$
26. Алгоритм решения задачи  $P | pmtn, r_i | L_{max}$
27. Алгоритм решения задачи  $Q | pmtn | C_{max}$
28. Алгоритм решения задачи  $F2 || C_{max}$
29. Задачи о покрытии, алгоритм Чватала, оценка его погрешности и экстремальный пример.

30. Задачи размещения. Генетический алгоритм для задачи размещения производства.
31. Задача размещения в условиях конкуренции, математическая модель, «безнадежный» пример, точный метод.
32. Матричные игры. Определение седловой точки.
33. Необходимые и достаточные условия равенства верхней и нижней цен игры в чистых стратегиях. Теорема Фон-Неймана. Дилемма заключенных.
34. Бескоалиционные игры, равновесие по Нэшу, пример игры без равновесий.
35. Многокритериальная оптимизация. Эффективные решения по Парето и Джеоффриону. Линейные свертки и их свойства. Метод уступок.