МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Н.И.Глебов, Ю.А.Кочетов, А.В.Плясунов

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие

Новосибирск

2000

УДК 519.6

ББК В.173.1/2

Глебов Н.И., Кочетов Ю.А., Плясунов А.В. Методы оптимизации. Учеб. пособие / Новосиб. ун-т. Новосибирск, 2000, 105 с.

Пособие написано на основе лекций, которые читались студентам третьего курса механико-математического факультета Новосибирского государственного университета. В нем изложен математический аппарат, необходимый для анализа и решения экстремальных задач в конечномерных пространствах.

Рецензент

кандидат технических наук, доцент Р.М. Ларин

Издается при финансовой поддержке ФЦП "Интеграция–274"

Раздел 1. Введение

В данном пособии рассматриваются задачи поиска минимума или максимума скалярной функции на множестве, расположенном в конечномерном евклидовом пространстве и определяемом конечной системой ограничений-неравенств. Наша цель — познакомиться с основами теории такого рода экстремальных задач и численными методами их решения.

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения:
R^n – n-мерное евклидово пространство.
$x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – вектор-столбец, элемент (точка) пространства R^n.
$[x, y] = \{z \mid z = (1-t)x + ty,\ 0 \le t \le 1\}$ — отрезок с концевыми точками x и y.
$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ — скалярное произведение векторов x и y; для его обозначения используется также запись $x^T y$.
$||x|| = (\langle x, x\rangle)^{1/2}$ — норма вектора x.
$\rho(x, y) = ||x - y||$ — евклидово расстояние между точками x и y.
$B(x, \varepsilon) = \{y \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$ — открытый шар радиуса ε с центром в точке x, ε-окрестность точки x.

Символ ^{T} применяется для обозначения операции транспонирования. Наряду с вектор-столбцами в дальнейшем также используются и вектор-строки, что в каждом случае такого использования отмечается особо.

Пусть $X \subset R^n$ и $x \in R^n$. Точка x называется *точкой прикосновения* множества X, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $X \cap B(x, \varepsilon)$ непусто. Множество $\overline{X}$ всех точек прикосновения называется замыканием множества X. Точка x называется *предельной* точкой множества X, если любая ε-окрестность этой точки содержит бесконечно много точек множества X. Точка x называется *внутренней* точкой множества X, если найдется $\varepsilon > 0$, для которого $B(x, \varepsilon) \subset X$. Через $intX$ обозначается множество всех внутренних точек множества X, называемое *внутренностью* множества X. Множество $\overline{X} \setminus intX$ является множеством всех граничных точек множества X.

Множество X называется *выпуклым*, если для любых двух точек x, y из X отрезок $[x, y]$ содержится в X. Пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Примеры выпуклых множеств, с которыми нам придется иметь дело в дальнейшем:
гиперплоскость : $\{x \mid \langle a, x\rangle = \alpha\}$, где $a \in R^n,\ \alpha \in R$;
полупространство (аффинное) : $\{x \mid \langle a, x\rangle \leq \alpha\}$;
неотрицательный ортант : $R^n_+ = \{x \mid x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n\}$;
линейное многогранное множество: $\{x \mid Ax \geq b\}$, где A – $(m\times n)$-матрица, $b \in R^m$, неравенство между векторами рассматривается покомпонентно, т.е. $x \geq y$ эквивалентно $x - y \in R^n_+$.

Выпуклой комбинацией точек $x^1, \ldots, x^k$ называется любая линейная комбинация вида

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_k x^k,$$

где $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1, \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, k$.

Выпуклой оболочкой множества X, обозначаемой coX, называется множество всевозможных выпуклых комбинаций точек из X. Нетрудно показать, что coX является минимальным (по включению) выпуклым множеством, содержащим X. В случае конечномерных пространств полезную роль играет

Лемма 1.1 (Каратеодори). *Если $X \subset R^n$, то любая точка из coX представима в виде выпуклой комбинации не более чем $(n+1)$-й точки множества X.*

Доказательство. Пусть $y = \lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_k x^k$, где $x^i \in X,\ \lambda_i > 0,\ i = 1, \ldots, k,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$, и $k > n + 1$. Покажем, что точку y можно представить в виде выпуклой комбинации меньшего числа точек x^i. Для этого рассмотрим семейство векторов $\{\binom{x_i}{1} \in R^{n+1} \mid i = 1, \ldots, k\}$. Поскольку число векторов в семействе больше чем их размерность, то система является линейно зависимой. Следовательно, существуют числа μ_i, не все равные нулю, такие, что $\sum_{i=1}^k \mu_i x_i = 0$ и $\sum_{i=1}^k \mu_i = 0$. Это позволяет при любом значении параметра t представить точку y в виде линейной комбинации $y = \sum_{i=1}^{k}(\lambda_i + t\mu_i)x_i$. В силу положительности λ_i при достаточно малых значениях t каждый коэффициент $\lambda_i + t\mu_i$ неотрицателен и при любом t имеет место равенство $\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i + t\mu_i) = 1$. Поскольку среди чисел μ_i есть не равные нулю, то можно выбрать такое значение t, при котором, по крайней мере, один из коэффициентов в рассматриваемом представлении станет равным нулю, а остальные останутся неотрицательными. Тем самым будет получено представление y в виде выпуклой комбинации с использованием меньшего числа точек. Отсюда, в частности, следует, что существует выпуклая комбинация, представляющая точку y, в которой число слагаемых не превосходит $n+1$. Лемма доказана.

Примером использования данной леммы может служить доказательство приводимого ниже утверждения.

Лемма 1.2 *Если $X \subset R^n$ — компактное множество, то coX — также компактное множество.*

Доказательство. Пусть $\Lambda = \{\lambda \in R^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n+1\}$. Рассмотрим непрерывное отображение $\Psi : \Lambda \times X^{n+1} \to R^n$, заданное равенством

$$\Psi(\lambda, x^1, \ldots, x^{n+1}) = \lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_{n+1} x^{n+1}.$$

По лемме Каратеодори $\Psi(\Lambda \times X^{n+1}) = coX$. Следовательно, являясь образом компактного множества при непрерывном отображении, множество coX должно быть компактным.

Крайней точкой выпуклого множества X называется точка $x \in X$, которая не может быть представлена в виде: $x = 1/2(x^1 + x^2)$, где $x^1, x^2 \in X$ и $x^1 \neq x^2$.

Функция $\phi : R^n \to R^1$ называется *выпуклой*, если для любых двух точек $x^1, x^2 \in R^n$ и $\lambda \in [0,1]$

$$\phi(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda\phi(x^1) + (1-\lambda)\phi(x^2).$$

Для выпуклой функции ϕ и любого действительного числа d множество $\{x \mid \phi(x) \leq d\}$, как нетрудно убедиться, является выпуклым.

Под *задачей оптимизации* понимается задача поиска минимума (или максимума) заданной функции $f(x)$ на некотором множестве Q. При этом нередко используется краткая форма записи одного из видов:

$$\min_{x \in Q} f(x);$$

$$f(x) \to min, \ x \in Q;$$

$$min\{f(x) \mid x \in Q\}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать преимущественно задачи минимизации, имея в виду, что задача поиска максимума функции f тривиальным образом сводится к задаче минимизации функции $g = -f$.

Задачей *математического программирования* принято называть задачу оптимизации, в которой множество Q является подмножеством пространства R^n и определяется конечной системой условий – неравенств вида $\phi_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m$, где $\phi_i(x)$ — заданные функции. При этом функция f называется *целевой функцией*, а условия $\phi_i(x) \leq 0$ называются ограничениями задачи. *Допустимым решением* задачи называют любой вектор x, удовлетворяющий всем ограничениям, т.е. любой элемент множества $Q = \{x \mid \phi_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\}$. *Оптимальным решением* задачи (минимизации) называют допустимое решение, минимизирующее $f(x)$ на множестве всех допустимых решений.

Точка $x^0 \in Q$ есть локальный минимум (оптимум) задачи, если существует такая ε-окрестность $B(x^0, \varepsilon)$, что функция $f(x)$ достигает минимума на множестве $Q \cap B(x^0, \varepsilon)$ в точке x^0.

Среди задач математического программирования важное место занимают задачи *выпуклого программирования*, в которых целевая функция f и все функции ϕ_i (а следовательно, и множество допустимых решений Q) являются выпуклыми. Задачи этого класса обладают тем полезным свойством, что любой локальный минимум является глобальным, т.е. оптимальным решением задачи. Другой не менее важный класс задач (подкласс вышеупомянутого класса) составляют задачи *линейного программирования.* В последних все функции f и ϕ_i являются линейными, так что множество допустимых решений Q оказывается выпуклым линейным многогранным множеством.

Раздел 2. Линейное программирование

Задача линейного программирования (ЛП), как уже ясно из сказанного выше, состоит в нахождении минимума (или максимума) линейной функции при линейных ограничениях. *Общая форма* задачи имеет вид:

$$\text{найти} \quad \min cx \quad \text{при условиях}$$

$$a_i x - b_i \geq 0, \ i \in I_1,$$

$$a_i x - b_i = 0, \ i \in I_2,$$

$$x_j \geq 0, \ j \in J_1,$$

где $I_1 \cup I_2 = \{1, \ldots, m\}$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $J_1 \subset \{1, \ldots, n\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$, $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $i = 1, \ldots, m$. Здесь и далее нам удобнее считать c и a_i вектор-строками, а x и $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ — вектор-столбцами.

Наряду с общей формой широко используются также *каноническая* и *стандартная* формы. Как в канонической, так и в стандартной форме $J_1 = \{1, \ldots, n\}$, т.е. все переменные в любом допустимом решении задачи должны принимать неотрицательные значения (такие переменные принято называть *неотрицательными*, в отличие от так называемых *свободных* переменных, на область значений которых подобное ограничение не накладывается). Отличие же между этими формами состоит в том, что в одном случае $I_1 = \emptyset$, а в другом — $I_2 = \emptyset$.

Задача ЛП в канонической форме:

$$w = cx \to \min \tag{2.1}$$

$$Ax = b \tag{2.2}$$

$$x \geq 0. \tag{2.3}$$

Задача ЛП в стандартной форме:

$$w = cx \to \min$$

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0.$$

В обоих случаях A есть матрица размерности $m \times n$, i-я строка которой совпадает с вектором a_i.

Задача ЛП в общей форме сводится (в определенном смысле) к задаче ЛП в канонической (стандартной) форме. Под этим понимается существование общего способа построения по исходной задаче (в общей форме) новой задачи ЛП (в нужной нам форме), любое оптимальное решение которой "легко"преобразуется в оптимальное решение исходной задачи и наоборот. (Фактически, связь между этими задачами оказывается еще более тесной). Тем самым мы получаем возможность, не теряя общности, заниматься изучением задач ЛП, представленных либо в канонической, либо в стандартной форме. Ввиду этого наши дальнейшие рассмотрения задач ЛП будут посвящены, главным образом, задачам в канонической форме.

2.1 Базисные решения

Рассматривая задачу (2.1)-(2.3), будем (временно) предполагать, что матрица A имеет ранг m, т.е. в A имеется набор из m линейно независимых столбцов. В этом случае $m \leq n$ и система линейных уравнений (2.2) является совместной и неизбыточной.

Любой набор $A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(m)}$ из m линейно независимых столбцов матрицы A будем называть *базисом*, также как и матрицу $B = [A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(m)}]$, составленную из этих столбцов. Очевидно, $(m \times m)$-матрица B является невырожденной и, следовательно, имеет обратную матрицу B^{-1}.

Пусть $S = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m)\},\ S' = \{1, \ldots, n\} \setminus S$.

Перестановкой столбцов матрицу A можно привести к виду $A = [B, N]$, где N – подматрица, составленная из столбцов $A_j,\ j \in S'$. Аналогичным образом можно поступить с вектором x и получить представление $x = \binom{x_B}{x_N}$, где $x_B = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})^T$, а x_N

образован компонентами x_j, $j \in S'$. Переменные x_j, являющиеся компонентами вектора x_B (соответственно x_N) называются *базисными* (соответственно *небазисными*).

Теперь система (2.2) может быть представлена в виде

$$Bx_B + Nx_N = b.$$

Используя невырожденность матрицы B, можно перейти к системе

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b, \tag{2.2'}$$

которая эквивалентна исходной системе (2.2). Если положить $x_N = 0$, то получим решение системы $x = \binom{x_B}{x_N} = \binom{B^{-1}b}{0}$ Полученное таким способом решение называют *базисными* решением (соответствующим базису B). Безотносительно к способу получения базисное решение может быть определено как решение, обладающее следующим характеристическим свойством:

x — базисное решение системы (2.2) тогда и только тогда, когда множество столбцов $\{A_j \mid x_j \neq 0\}$ матрицы A линейно независимо.

В самом деле, если базисное решение x соответствует базису B, то S — множество номеров базисных столбцов — содержит множество $S(x) = \{j \mid x_j \neq 0\}$ и, следовательно, множество $\{A_j \mid j \in S(x)\}$ линейно независимо. С другой стороны, если множество $\{A_j \mid j \in S(x)\}$ линейно независимо, то оно либо является базисом (в случае $|S(x)| = m$), либо может быть дополнено другими столбцами матрицы A до некоторого базиса B, которому будет соответствовать базисное решение x.

Замечание В случае $|S(x)| < m$ может быть несколько базисов, которым соответствует базисное решение x, тогда как при $|S(x)| = m$ такой базис является единственным. В любом случае число базисных решений является конечным и не может привосходить числа различных базисов, в частности, числа сочетаний из n по m, т.е. C_n^m.

Базисным допустимым решением (б.д.р.) называется любой элемент множества $Q = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$, являющийся базисным решением системы (2.2). Геометрический смысл понятия б.д.р. поясняет

Утверждение 2.1 *Вектор x является базисным допустимым решением тогда и только тогда, когда x есть крайняя точка множества Q.*

Доказательство. Пусть x — допустимое, но не базисное решение. Тогда множество столбцов $\{A_j \mid x_j > 0\}$ линейно зависимо и, следовательно, существует ненулевой вектор y, такой, что $Ay = 0$ и $y_j = 0$ в случае $x_j = 0$, т.е. $\{j \mid y_j \neq 0\} \subset \{j \mid x_j > 0\}$. При любом $t \in R$ вектор $z = x + ty$ является решением системы (2.2), а при достаточно малых t имеем $z \in Q$. Из сказанного следует, что существует $\varepsilon > 0$, при котором $x^1 = x + \varepsilon y \in Q$ и $x^2 = x - \varepsilon y \in Q$, т.е. $x = 1/2(x^1 + x^2)$, $x^1 \neq x^2$ и, следовательно, x не является крайней точкой множества Q.

Предположим теперь, что $x = 1/2(x^1 + x^2)$, $x^1 \neq x^2$ и $x^1, x^2 \in Q$, т.е. x принадлежит множеству Q и не является его крайней точкой. Тогда из $Ax^1 = Ax^2 (= b)$ следует $A(x^1 - x^2) = 0$, что свидетельствует о линейной зависимости множества столбцов $\{A_j \mid x_j^1 \neq x_j^2\}$. Отсюда далее следует линейная зависимость множества $\{A_j \mid x_j^1 + x_j^2 > 0\}$, поскольку оно содержит предыдущее множество (ввиду того, что неравенство $x_j^1 \neq x_j^2$ при условии $x_j^1, x_j^2 \geq 0$ влечет $x_j^1 + x_j^2 > 0$). Таким образом, установленная линейная зависимость означает, что x не является базисным решением. Утверждение доказано.

2.2 Критерий разрешимости задачи

Прежде чем переходить непосредственно к изложению метода решения задачи ЛП, важно установить критерий разрешимости задачи. Вполне очевидно, что для разрешимости любой задачи математического программирования, как и любой оптимизационной задачи вообще, необходимо, чтобы множество допустимых решений было непусто и целевая функция на этом множестве была ограничена снизу (в случае задачи минимизации). Ниже мы покажем, что для задач ЛП это неоходимое условие является также и достаточным.

Лемма 2.1 *Если функция $w = cx$ ограничена снизу на множестве $Q = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$, то для любого $x^0 \in Q$ существует б.д.р. $\overline{x}$, такое, что $c\overline{x} \leq cx^0$.*

Доказательство. Рассмотрим непустое множество $Q^0 = \{x \in Q \mid cx \leq cx_0\}$ и выберем в нем вектор $\overline{x}$, имеющий минимальное число ненулевых компонент. Докажем, что допустимое решение $\overline{x}$ является базисным. Если это не так, то множество $\{A_j \mid \overline{x}_j > 0\}$ столбцов матрицы A линейно зависимо, т.е. существует вектор $y \neq 0$ такой, что $Ay = 0$ и $y_j = 0$ в случае $\overline{x}_j = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $d = cy \leq 0$, поскольку в противном случае мы могли бы заменить y на $-y$. Рассмотрим однопараметрическое семейство векторов $x(t) = \overline{x} + ty$. При достаточно малых значениях t имеем $x(t) \in Q$.

Возможны два случая.

1) $y_j \geq 0$ для всех j. Тогда при любом $t \geq 0$ имеем $x(t) \in Q$ и, следовательно, $w(x(t)) = w(\overline{x}) + td \geq const$. Учитывая неравенство $d \leq 0$, отсюда следует, что $d = 0$ и $w(x(t)) = w(\overline{x})$ при любом t. Пусть $t_0 = -\min\{\overline{x}_j/y_j \mid y_j > 0\}$. Тогда $x(t_0)$ принадлежит Q^0 и имеет меньше ненулевых компонент, чем $\overline{x}$, что противоречит выбору $\overline{x}$.

2) $y_j < 0$ при некотором j. В этом случае вектор $x(t_0)$ при $t_0 = \min\{-\overline{x}_j/y_j \mid y_j < 0\}$ принадлежит Q^0 и имеет меньше ненулевых компонент, чем $\overline{x}$, т.е. снова получаем противоречие. Лемма доказана.

Следствие *Если $Q \neq \emptyset$, то существует базисное допустимое решение.*

Такое утверждение непосредственно вытекает из доказанной леммы, если, например, положить $w \equiv 0$.

Теорема 2.1 (Критерий разрешимости). *Задача ЛП (2.1)-(2.3) разрешима тогда и только тогда, когда $Q \neq \emptyset$ и целевая функция w ограничена снизу на множестве Q.*

Доказательство. Необходимость условия данной теоремы вполне очевидна. Докажем достаточность. Из условия теоремы и предыдущей леммы следует, что множество б.д.р. непусто и, как отмечалось выше, конечно. Поэтому существует элемент упомянутого множества, — б.д.р. x^*, — на котором целевая функция w принимает минимальное значение, т.е. $w(x^*) \leq w(\overline{x})$ для любого б.д.р. $\overline{x}$. Покажем, что x^* является оптимальным решением задачи. В самом деле, предположим, что существует элемент $x^0 \in Q$, для которого имеет место неравенство $w(x^0) < w(x^*)$. Тогда, по Лемме 1, будет существовать б.д.р. $\overline{x}$, такое, что $w(\overline{x}) \leq w(x^0)$ и, следовательно, $w(\overline{x}) < w(x^*)$. Полученное неравенство противоречит выбору x^*. Теорема доказана.

Из доказательства данной теоремы получаем также

Утверждение 2.2 *Если задача ЛП разрешима, то существует оптимальное базисное решение.*

Последнее свойство задачи ЛП, учитывая также конечность числа б.д.р., позволяет говорить об очевидном методе решения задачи, суть которого сводится к полному перебору б.д.р. и выделению среди них наилучшего (по значению целевой функции). Непрактичность такого способа решения станет понятной, если принять во внимание, что даже при достаточно скромных размерах задачи число б.д.р. становится астрономически большим. Тем не менее идея целенаправленного перебора, позволяющего избежать в большинстве случаев просмотра подавляющей части множества б.д.р., лежит в основе самого распространенного метода решения задачи ЛП, получившего название *симплекс-метод*.

2.3 Симплекс-таблица

В рассматриваемом ниже алгоритме симплекс-метода используется так называемая *симплекс-таблица*, которую следует рассматривать как удобную форму записи информации о текущем состоянии процесса вычислений. Для построения симплекс-таблицы, соответствующей базису $B = [A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$, требуется выполнить переход от системы уравнений (2.2) к эквивалентной системе

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \qquad (2.2')$$

и, используя эту систему для представления базисных переменных через небазисные, исключить базисные переменные из выражения целевой функции w. В результате для целевой функции будет получено представление

$$w = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N, \qquad (2.1')$$

где $c_B = (c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(m)})$, а c_N образован компонентами $c_j,\ j \in S'$, т.е. коэффициентами при небазисных переменных в исходном представлении целевой функции w.

Замечание. Функция, задаваемая равенством $(2.1')$, отличается от исходной целевой функции, если рассматривать их во всем пространстве R^n, но они совпадают на множестве решений системы (2.2), в частности, это совпадение имеет место на множестве Q.

Совместное рассмотрение соотношений $(2.1')$ и $(2.2')$ приводит к следующей системе линейных уравнений

$$-w + \sum_{j \in S'} z_{0j}x_j = z_{00} \qquad (2.1'')$$

$$x_{\sigma(i)} + \sum_{j\in S'} z_{ij}x_j = z_{i0}, \ \ i = 1,\dots,m, \tag{2.2''}$$

где

$$\left.\begin{aligned} z_{00} &= -c_B B^{-1} b, \\ (z_{10},\dots,z_{m0})^T &= B^{-1} b, \\ z_{0j} &= c_j - c_B B^{-1} A_j, \quad j = 1,\dots,n, \\ (z_{1j},\dots,z_{mj})^T &= B^{-1} A_j, \quad j = 1,\dots,n. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Коэффициенты z_{ij} данной системы, включая также правые части уравнений, и составляют симплекс-таблицу (с некоторыми дополнительными элементами в виде столбца слева от таблицы и строки над таблицей, назначение которых — повысить ее информативность):

$$\begin{array}{c|c|ccccc|} & & x_1 & \dots & x_j & \dots & x_n \\ \cline{2-7} -w & z_{00} & z_{01} & \dots & z_{0j} & \dots & z_{0n} \\ \cline{2-7} x_{\sigma(1)} & z_{10} & z_{11} & \dots & z_{1j} & \dots & z_{1n} \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\sigma(i)} & z_{i0} & z_{i1} & \dots & z_{ij} & \dots & z_{in} \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\sigma(m)} & z_{m0} & z_{m1} & \dots & z_{mj} & \dots & z_{mn} \\ \cline{2-7} \end{array} \tag{2.5}$$

Характерной особенностью такой таблицы является следующее свойство: при любом $i = 1,\dots,m$ столбец с номером $\sigma(i)$ является единичным вектором, имеющим 1 в i-й строке и 0 в остальных строках. Таким образом, в случае $\sigma(i) = i, i = 1,\dots,m$ симплекс-таблица имеет вид

		x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_n
$-w$	z_{00}	0	$\dots$	0	$\dots$	0	z_{0m+1}	$\dots$	z_{0n}
x_1	z_{10}	1	$\dots$	0	$\dots$	0	z_{1m+1}	$\dots$	z_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_i	z_{i0}	0	$\dots$	1	$\dots$	0	z_{im+1}	$\dots$	z_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	z_{m0}	0	$\dots$	0	$\dots$	1	z_{mm+1}	$\dots$	z_{mn}

В новых обозначениях базисное решение $\overline{x}$, соответствующее базису B, имеет вид $\overline{x}_B = (z_{10}, z_{20}, \dots, z_{m0})^T$, $\overline{x}_N = 0$, а целевая функция w на данном решении принимает значение $w(\overline{x}) = -z_{00}$.

Определение 2.1 *Симплекс-таблица (2.5) называется прямо (двойственно) допустимой, если* $z_{i0} \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, $(z_{0j} \geq 0,\ j = 1, \dots, n)$. *Базис* B, *которому эта таблица соответствует, также называется прямо (двойственно) допустимым.*

Присутствие в названиях слов "прямо"и "двойственно"станет понятным, когда ниже речь пойдет о двойственности в линейном программировании.

Следующее утверждение содержит весьма полезное достаточное условие оптимальности.

Утверждение 2.3 *Если симплекс-таблица прямо и двойственно допустима, то соответствующее базисное решение является оптимальным решением задачи (2.1)–(2.3).*

Доказательство. Непостредственно из предыдущего определения следует, что соответствующее данной симплекс–таблице базисное решение $\overline{x}$ является допустимым решением задачи (2.1)–(2.3). Из двойственной допустимости следует, что целевая функция

$$w = -z_{00} + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j$$

имеет неотрицательные коэффициенты при переменных x_j. Поскольку в любом допустимом решении $x \in Q$ все переменные имеют неотрицательные значения, то $w(x) \geq -z_{00} = w(\overline{x})$. Утверждение доказано.

Таким образом, из доказанных выше утверждений следует, что при поиске оптимального решения задачи (2.1)–(2.3) можно ограничиться рассмотрением базисных допустимых решений. Более того, достаточно найти базис, которому соответствует прямо и двойственно допустимая симплекс–таблица. При этом следует однако заметить, что вопрос о существовании такого базиса в случае, когда задача разрешима, остается в данный момент открытым и положительный ответ на него нам еще предстоит получить. Тем не менее по пути поиска прямо и двойственно допустимого базиса мы и намерены пойти (именно такой поиск и происходит при решении задачи ЛП симплекс–методом).

2.4 Элементарное преобразование базиса и симплекс-таблицы

Перебор базисов, который происходит при решении задачи симплекс-методом, производится посредством минимального изменения рассматриваемого в данный момент базиса. Таким минимальным изменением, очевидно, является замена одного из базисных столбцов на другой столбец матрицы A из числа небазисных. Подобное преобразование базиса мы и будем называть *элементарным.* Естественно, выбор того и другого столбца при этом преобразовании не является произвольным, а производится в соответствии с определенными правилами, что и делает перебор целенаправленным.

Наша ближайшая цель — проследить за изменением симплекс-таблицы при таком преобразовании базиса и установить правило, которое может быть использовано для получения симплекс-таблицы, соответствующей преобразованному базису.

Пусть в базисе $B = [A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$, которому соответствует симплекс-таблица (2.5), столбец $A_{\sigma(r)}$ решено заменить на столбец A_s, $s \in S'$. Результатом такой замены будет новый базис $B' = [A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(r-1)}, A_s, A_{\sigma(r+1)}, \dots, A_{\sigma(m)}]$, если только элемент z_{rs} симплекс-таблицы не равен 0. Это легко понять, если учесть, что согласно (2.4) $(z_{1s}, \dots, z_{ms})^T = B^{-1}A_s$, т.е. $A_s = B(z_{1s}, \dots, z_{ms})^T$ или

$$A_s = \sum_{i=1}^{m} z_{is} A_{\sigma(i)}.$$

Поскольку разложение любого вектора по векторам базиса единственно, то при $z_{rs} \neq 0$ вектор A_s не может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(r-1)}, \ A_{\sigma(r+1)}, \dots, A_{\sigma(m)}$, что означает линейную независимость столбцов в B'. В случае $z_{rs} = 0$ вышеприведенное представление вектора A_s свидетельствует о линейной зависимости столбцов матрицы B'.

Чтобы сформулировать правило, согласно которому может быть получена симплекс-таблица, соответствующая преобразованному базису B', напомним, что элементами таблицы являются коэффициенты линейной системы $(2.1''), (2.2'')$, полученной из системы (2.1), (2.2) путем приведения ее к диагональной форме относительно базисных переменных и переменной $-w$. Так как новый набор базисных переменных отличается от старого только одной переменной x_s (заменившей переменную $x_{\sigma(r)}$), то для получения элементов новой симплекс-таблицы достаточно выполнить один шаг метода исключения Гаусса–Жордана, чтобы исключить x_s из всех, кроме одного, уравнений системы $(2.1''), (2.2'')$, соответствующей старому базису B (используя для этого единственное уравнение данной системы, содержащее из числа базисных только исключаемую из базиса переменную $x_{\sigma(r)}$, т.е. r-е уравнение).

Таким образом, мы приходим к следующему правилу: разделить r-ю строку симплекс-таблицы на z_{rs} и прибавить ее, умноженную на надлежащим образом подобранные числа, к другим строкам так, чтобы 1 в позиции (r, s) осталась единственным ненулевым элементом s-го столбца. Если воспользоваться обозначением α_i для i-й вектор-строки симплекс-таблицы, то правило преобразования можно изобразить схематично следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha_i & \longleftarrow & \alpha_i - \dfrac{z_{is}}{z_{rs}}\alpha_r, \ \ i \neq r, \\ \alpha_r & \longleftarrow & \dfrac{1}{z_{rs}}\alpha_r \end{cases} \tag{2.6}$$

При этом r-я строка, s-й столбец и элемент z_{rs} называются *ведущими*.

2.5 Алгоритм симплекс-метода

Имея описание элементарного преобразования симплекс-таблицы, мы можем теперь сформулировать основные шаги алгоритма симплекс-метода.

0) Начать с прямо допустимой симплекс-таблицы.
1) Если симплекс-таблица двойственно допустима, т.е. $z_{0j} \geq 0, \ j = 1, \ldots, n$, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение).
2) Выбрать ведущий столбец $s : z_{os} < 0, \ s \geq 1$.
3) Если $\{i \mid z_{is} > 0\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r:

$$\frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min\{ \ \frac{z_{i0}}{z_{is}} \ \mid \ z_{is} > 0\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).
4) Преобразовать симплекс-таблицу, положить $\sigma(r) := s$ и перейти на шаг 1.

Далее под итерацией будем понимать однократное выполнение шагов с 1-го по 4-й.

Замечания

1. Выполнение шага 0 предполагает нахождение прямо допустимого базиса, что представляет собой достаточно трудную задачу, и об этом речь пойдет чуть позже.

2. Если на шаге 3 имеем $z_{is} \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$, то это свидетельствует о неразрешимости задачи ввиду неограниченности целевой функции снизу на множестве допустимых решений. В самом деле, вектор x^t, имеющий компоненты $x_j = 0$ при $j \in S' \setminus \{s\}$, $x_s = t$ и $x_{\sigma(i)} = z_{i0} - z_{is}t$, $i = 1, \ldots, m$, является решением системы $(2.2'')$ при любом t. Так как $z_{i0} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ (ввиду того, что симплекс-таблица прямо допустима), то при $t \geq 0$ все компоненты x^t неотрицательны, т.е. x^t — допустимое решение задачи. Кроме того, из $(2.1'')$ имеем $w(x^t) = -z_{00} + z_{0s}t$, так что $w(x^t) \to -\infty$ при $t \to +\infty$.

3. Для корректной работы алгоритма необходимо, чтобы на каждой итерации симплекс-таблица была прямо допустимой. Поэтому нам следует убедиться, что это свойство таблицы при выполнении элементарного преобразования на шаге 4 сохраняется. Согласно правилу преобразования (2.6) в новой симплекс-таблице элементы нулевого столбца будут равны $z'_{i0} = z_{i0} - \frac{z_{is}}{z_{rs}} z_{r0}$ при $i \neq r$ и $z'_{r0} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}}$. Неотрицательность z'_{r0} следует непосредственно из неравенств $z_{r0} \geq 0$ и $z_{rs} > 0$. Для доказательства неравенств $z'_{i0} \geq 0$ $(i \neq r, i \geq 1)$ рассмотрим два случая:

а) если $z_{is} \leq 0$, то $z'_{i0} = z_{i0} - \frac{z_{is}}{z_{rs}} z_{r0} \geq z_{i0} \geq 0$,

б) если $z_{is} > 0$, то в силу правила выбора ведущей строки имеем $\frac{z_{i0}}{z_{is}} \geq \frac{z_{r0}}{z_{rs}}$ и, следовательно, $z'_{i0} = z_{is}(\frac{z_{i0}}{z_{is}} - \frac{z_{r0}}{z_{rs}}) \geq 0$.

4. При выполнении шагов 2 и 3 могут возникать ситуации, когда выбор s и(или) r в соответствие с данными правилами оказывается неоднозначным. Для устранения (частичного или полного) этой неоднозначности существуют различные уточняющие

правила такие, например, как

а) правило Данцига: выбрать s с минимальным z_{0s};

б) правило Блэнда: из числа возможных в соответствии с основным правилом выбрать сначала минимальный номер s, а затем — r с минимальным $\sigma(r)$.

2.6 О конечности симплекс-метода

Вопрос, касающийся конечности числа итераций симплекс-алгоритма, решается по-разному в зависимости от используемого уточнения правила выбора ведущего элемента z_{rs} и от такой особенности задачи, как *вырожденность*.

Задача ЛП считается *вырожденной*, если у нее существуют базисные допустимые решения x такие, что $|\{j \mid x_j \neq 0\}| < m$. Решение x в таком случае тоже называется *вырожденным*.

В случае невырожденной задачи в каждой прямо допустимой симплекс-таблице все элементы нулевого столбца, кроме, быть может, z_{00}, положительны: $z_{i0} > 0$ для любого $i \geq 1$. Тогда при каждом преобразовании симплекс-таблицы элемент z_{00} увеличивается:

$$z_{00} - z_{0s}\frac{z_{r0}}{z_{rs}} > z_{00},$$

т.е. значение целевой функции w при переходе к новому б.д.р. уменьшается. Это гарантирует неповторяемость перебираемых в ходе работы алгоритма базисов и, как следствие, конечность числа итераций. При этом нетрудно видеть, что полученный вывод не зависит от используемого уточнения правила выбора ведущего элемента.

В случае вырожденной задачи среди элементов z_{i0}, $i = 1, \ldots, m$, могут быть равные нулю. В частности, равным нулю может оказаться элемент z_{r0}. Преобразование базиса в такой ситуации не приводит к изменению базисного решения. В результате выполнения некоторого числа подобных преобразований (не сопровождаемых изменением базисного решения) мы можем прийти к уже встречавшемуся базису. Это означает, что алгоритм будет далее неограниченно выполнять один и тот же цикл преобразований (при условии, что выбор ведущего элемента является детерминированным).

Для некоторых уточненных правил выбора ведущего элемента возможность подобного зацикливания исключается. К таким, например, относится упоминавшееся выше правило Блэнда, тогда как правило Данцига (и ряд других) зацикливания не устраняют. Предотвратить зацикливание можно также путем применения лексикографической процедуры для выбора ведущей строки на шаге 3. Это приводит нас к *лексикографическому варианту симплекс-метода.*

2.7 Лексикографический симплекс-метод

Пусть $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1}$ — вектор-строка. Будем говорить, что вектор α *лексикографически больше* нуля и писать $\alpha \succ 0$, если первая отличная от нуля компонента положительна: $a_p > 0$, где $p = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$. Если $\alpha', \alpha'' \in R^{n+1}$, то считаем, что вектор α' лексикографически больше вектора α'', $\alpha' \succ \alpha''$, если $\alpha' - \alpha'' \succ 0$. Тем самым на R^{n+1} определено отношение линейного порядка, так что в любой конечной совокупности векторов $\{\alpha^i\}$ имеется лексикографически минимальный вектор, обозначаемый $lexmin\{\alpha^i\}$.

Симплекс-таблицу (2.5) будем называть *нормальной*, если ее строки $\alpha_i, i = 1, \dots, m$, лексикографически положительны. Очевидно, нормальная симплекс-таблица является прямо допустимой и, наоборот, прямо допустимая симплекс-таблица, в которой столбцы с номерами от 1 до m соответствуют базисным переменным, является нормальной. Таким образом, любую прямо допустимую симплекс-таблицу можно преобразовать в нормальную путем перенумерации переменных (с соответствующей перестановкой столбцов).

Отличие лексикографического симплекс-метода от обычного касается 0-го и 3-го шагов (шаги 1-й, 2-й и 4-й остаются без изменений).

$0')$ Начать с нормальной симплекс-таблицы.

$3')$ Если $\{i \mid z_{is} > 0\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r:

$$\frac{1}{z_{rs}}\alpha_r = lexmin\{\frac{1}{z_{is}}\alpha_i \mid z_{is} > 0\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).

Чтобы доказать конечность данного варианта симплекс-метода, прежде всего покажем, что преобразование симплекс-таблицы на шаге 4 сохраняет ее нормальность. В самом деле, строка r остается лексикографически положительной, так как она получается путем умножения лексикографически положительного вектора α_r на положительное число $1/z_{rs}$. Для доказательства лексикографической положительности остальных строк α_i' $(i \neq r, i \geq 1)$ рассмотрим два случая:

а) если $z_{is} \leq 0$, то $\alpha_i' = \alpha_i - (\frac{z_{is}}{z_{rs}})\alpha_r \succeq \alpha_r \succ 0$;

б) если $z_{is} > 0$, то согласно правила выбора ведущей строки $\frac{1}{z_{is}}\alpha_i \succ \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r$ и, следовательно, $\alpha_i' = z_{is}[(\frac{1}{z_{is}})\alpha_i - (\frac{1}{z_{rs}})\alpha_r] \succ 0$.

Из нормальности симплекс-таблиц следует, что на каждой итерации ведущая строка α_r лексикографически положительна, что с учетом неравенств $z_{0s} < 0$ и $z_{rs} > 0$ влечет

$$\alpha_0 - (\frac{z_{os}}{z_{rs}})\alpha_r \succ \alpha_0,$$

т.е. лексикографическое возрастание нулевой строки. Следовательно, в ходе работы алгоритма симплекс-таблицы, а значит и базисы, не повторяются, что гарантирует конечность лексикографического симплекс-метода.

Несмотря на столь важное свойство, на практике данный алгоритм не применяется из-за относительно более сложного правила выбора ведущей строки. Нам же установленное свойство лексикографического симплекс-метода позволяет теперь вернуться к оставленному без ответа вопросу о существовании прямо и двойственно допустимого базиса.

Утверждение 2.4 *Если задача ЛП (2.1)–(2.3) разрешима, то у нее существует прямо и двойственно допустимый базис.*

Доказательство. Из разрешимости задачи следует существование допустимых решений, т.е. $Q \neq \emptyset$, что согласно Следствию (Леммы 1) влечет существование базисного допустимого решения. Симплекс-таблица, соответствующая этому б.д.р., будучи прямо допустимой, в случае необходимости (т.е. если она не является нормальной) может быть посредством перенумерации переменных (с соответствующей перестановкой столбцов) преобразована в нормальную. Начав вычисления с этой симплекс-таблицы, лексикографический симплекс-метод через конечное число итераций завершит работу, обнаружив на шаге 1 заключительной итерации, что текущая симплекс-таблица является двойственно допустимой. В силу разрешимости задачи окончание работы на шаге 3 невозможно. Базис, которому соответствует полученная симплекс-таблица, и будет являться прямо и двойственно допустимым.

Теперь остается рассмотреть последний существенный вопрос, касающийся работы симплекс-алгоритма — это нахождение начальной прямо допустимой симплекс-таблицы.

2.8 Выполнение 0-го шага

Для поиска прямо допустимого базиса задачи (2.1)–(2.3) и соответствующей прямо допустимой симплекс-таблицы рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to min$$

$$a_i x + x_{n+i} = b_i, \ i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n+m.$$

Переменные x_j, $j = n+1, \ldots, n+m$, принято называть *искусственными*. Без ограничения общности можно считать, что $b_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$. В таком случае вектор $\overline{x} \in R^{n+m}$ с компонентами $\overline{x}_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, и $\overline{x}_{n+i} = b_i$, $i = 1, \ldots, m$, является базисным допустимым решением задачи, которое соответствует "искусственному"базису $B = I$ (т.е. $\sigma(i) = n+i$, $i = 1, \ldots, m$). Кроме того, на множестве допустимых решений целевая функция ξ ограничена снизу нулем. Следовательно, задача разрешима и $\min \xi \geq 0$. Ее решение может быть получено симплекс-методом (с привлечением, при необходимости, "незацикливающихся"вариантов этого метода), используя в качестве начального прямо допустимый искусственный базис ("метод искусственного базиса").

Возможны два случая:

1) $\min \xi > 0$. Это означает, что исходная задача (2.1)–(2.3) не имеет допустимых решений, т.е. ограничения этой задачи несовместны и задача неразрешима;

2) $\min \xi = 0$. В таком случае в полученном оптимальном решении все искусственные переменные равны нулю. При этом не исключается, что некоторые из них остаются в числе базисных. Из полученной на заключительной итерации прямо допустимой симплекс-таблицы может быть получена начальная прямо допустимая симплекс-таблица для исходной задачи (2.1)–(2.3).

Для этого прежде всего удалим из таблицы все столбцы, соответствующие искусственным переменным, а элементы нулевой строки временно положим равными 0. Дальнейшие действия будут зависить от присутствия искусственных переменных в числе базисных.

Пусть переменная x_j, где $j > n$, является базисной и соответствует r-й строке симплекс-таблицы. Тогда $z_{r0} = 0$, поскольку в базисном решении $x_j = z_{r0}$ и все искусственные переменные в оптимальном решении равны 0.

Если $z_{rj} = 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$, то мы имеем нулевую строку, которую из таблицы можно просто удалить. Наличие такой строки свидетельствует о линейной зависимости уравнений системы (2.2), что делает возможным удаление части уравнений без ущерба для существа дела. Подобная ситуация по необходимости будет возникать, если в совместной исходной системе ограничений (2.2)–(2.3) ранг матрицы A меньше числа уравнений, $rangA < m$.

Остается рассмотреть случай, когда в r-й строке имеются ненулевые элементы. Пусть $z_{rs} \neq 0$, $1 \leq s \leq n$. Выполним элементарное преобразование таблицы с ведущим элементом z_{rs}, т.е. один шаг метода исключения Гаусса-Жордана. Ввиду того, что $z_{r0} = 0$, при этом преобразовании элементы нулевого столбца не изменяются, в частности, сохраняется их неотрицательность. Роль базисной переменной, соответствующей r-й строке, будет теперь выполнять переменная основной задачи x_s, т.е. $\sigma(r)$ полагается равным s, а искусственная переменная x_j из числа базисных (и вообще из рассмотрения) оказывается исключенной.

Действия, подобные описанным выше, проделаем в отношении всех искусственных переменных, оставшихся базисными. После этого в нулевой строке таблицы записываем коэффициенты целевой функции исходной задачи, выраженной только через небазисные переменные. На этом процесс построения начальной прямо допустимой симплекс-таблицы для основной задачи (2.1)–(2.3), а вместе с ним и 0-й шаг симплекс-алгоритма, можно считать завершенным.

Вышеописанный способ выполнения 0-го шага обычно называют *первым этапом* симплекс-метода, а метод в целом — *двухэтапным* симплекс-методом.

2.9 Модифицированный симплекс-метод

При реализации симплекс-алгоритма непосредственно в том виде, как это описано выше, нам на каждой итерации требовалось бы пересчитывать всю симплекс-таблицу размера $(m+1) \times (n+1)$. При внимательном анализе алгоритма легко заметить, что этого можно избежать, если хранить и соответствующим образом преобразовывать матрицу меньшего размера $(m+1)\times(m+1)$ (при условии $m \ll n$, что на практике бывает довольно часто).

Пусть $\overline{A}$ — расширенная матрица условий задачи:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & c_B & c_N \\ \hline b & B & N \end{array} \right),$$

где B — базис. Тогда симплекс-таблица T, соответствующая базису B, имеет вид

$$T = \left(\begin{array}{c|cc} -c_B B^{-1} b & 0 & c_N - c_B B^{-1} N \\ \hline B^{-1} b & I & B^{-1} N \end{array} \right).$$

Легко проверить, что

$$T = M\overline{A}, \tag{2.7}$$

где

$$M = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -c_B B^{-1} \\ \hline 0 & B^{-1} \end{array} \right)$$

— матрица, обратная к расширенной базисной

$$\overline{B} = \left(\begin{array}{cc} 1 & c_B \\ 0 & B \end{array} \right).$$

Таким образом, согласно (2.7) для вычисления элементов симплекс-таблицы наряду с $\overline{A}$ достаточно знать матрицу M. Симплекс-таблица T', получаемая в результате преобразования текущей таблицы T на шаге 4 ввиду замены одного из базисных столбцов $\sigma(r) := s$, связана с ней соотношением $T' = M_{rs} T$, где

$$M_{rs} = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \dots & \mu_{0r} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \mu_{1r} & \dots & 0 \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ 0 & 0 & \dots & \mu_{mr} & \dots & 1 \end{array} \right)$$

$\mu_{ir} = -z_{is}/z_{rs}$, при $i \neq r$, $\mu_{rr} = 1/z_{rs}$, z_{is} — элементы ведущего столбца симплекс-таблицы T. (Здесь предполагается, что нумерация строк и столбцов матрицы M_{rs}, как и других матриц этого пункта, начинается с 0). Следовательно, $T' = M'\overline{A}$, где

$$M' = M_{rs}M. \tag{2.8}$$

Таким образом, вместо вычисления всей симплекс-таблицы T можно ограничиться пересчетом на каждой итерации лишь матрицы M в соответствие с формулой (2.8) и хранением матрицы $\overline{A}$, прибегая к формуле (2.7) для вычисления тех или иных элементов симплекс-таблицы лишь по мере необходимости.

Реальные преимущества подобной модификации ощутимо проявляются в тех случаях, когда в задаче число переменных n значительно больше числа ограничений m и матрица A, как принято говорить, является сильно разреженной, т.е. содержит относительно мало ненулевых элементов, что позволяет хранить ее в очень компактном виде.

2.10 Двойственность в линейном программировании

В задаче ЛП есть интересные аспекты, связанные с понятием двойственности и имеющие важное теоретическое и практическое значение. К рассмотрению этого понятия мы и перейдем.

Для задачи линейного программированния (2.1)-(2.3) в канонической форме рассмотрим функцию Лагранжа $w\prime = cx + u(b - Ax)$, которая при фиксированном векторе-строке $u = (u_1, \ldots, u_m)$ совпадает на множестве допустимых решений Q с целевой функцией $w = cx$. Следовательно, при $x \in Q$ и $c - uA \geq 0$ имеем $w = cx + u(b - Ax) = ub + (c - uA)x \geq ub$, т.е. величина ub является в этом случае оценкой снизу для оптимального значения целевой функции задачи (2.1)-(2.3). Поиск наилучшей нижней оценки приводит к задаче

$$z = ub \longrightarrow \max_u \tag{Д}$$

$$uA \leq c,$$

которая представляет собой задачу ЛП относительно $u \in R^m$. Полученная таким образом задача ($Д$) называется *двойственной* к исходной задаче (2.1)–(2.3), которая в свою очередь называется *прямой*. Если исходная (прямая) задача ЛП дана в общей форме, то двойственная задача определяется следующим образом:

Прямая задача		Двойственная задача
$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$		$\max \sum_{i=1}^{m} b_i u_i$
$a_i x \geq b_i$	$i \in I_1$	$u_i \geq 0$
$a_i x = b_i$	$i \in I_2$	$u_i -$ своб.
$x_j \geq 0$	$j \in J_1$	$uA_j \leq c_j$
$x_j -$ своб.	$j \in J_2$	$uA_j = c_j$

где $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ — i-я строка матрицы A,
$A_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T$ — j-й столбец матрицы A,
$I_1 \cup I_2 = \{1, \ldots, m\},\ I_1 \cap I_2 = \emptyset;\ J_1 \cup J_2 = \{1, \ldots, n\},\ J_1 \cap J_2 = \emptyset$.

Важной чертой отношения двойственности является симметрия, выражающаяся в том, что задача, двойственная к двойственной задаче ЛП, совпадает с прямой задачей ЛП. В самом деле, запишем двойственную задачу в виде

$$\min \sum_{i=1}^{m} (-b_i) u_i$$

$$(-A_j^T) u^T \geq -c_j,\ j \in J_1,$$

$$(-A_j^T) u^T = -c_j,\ j \in J_2,$$

$$u_i \geq 0,\ i \in I_1,$$

$$u_i - \text{ своб.},\ i \in I_2$$

и, рассматривая ее как прямую, воспользуемся приведенными выше правилами и сформулируем двойственную к ней задачу:

$$\max \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$$

$$x_j \geq 0, \ j \in J_1,$$

$$x_j - \text{ своб.}, \ j \in J_2,$$

$$x^T(-a_i^T) \leq -b_i, \ i \in I_1,$$

$$x^T(-a_i^T) = -b_i, \ i \in I_2.$$

Нетрудно видеть, что полученная задача совпадает с исходной прямой задачей. Таким образом, можно считать, что все задачи ЛП разбиваются на пары взаимно двойственных задач. Из простых, но достаточно важных свойств взаимно двойственных задач отметим следующие.

Свойство 2.1 *Если x и u – допустимые решения соответственно прямой и двойственной задачи, то $w(x) \geq z(u)$.*

В частном случае, когда прямая задача дана в канонической форме, приведенное выше неравенство использовалось фактически для определения двойственной задачи. В общем случае оно также легко проверяется:

$$w(x) = cx \geq \sum_{j=1}^{n} (uA_j) x_j = \sum_{i=1}^{m} u_i (a_i x) \geq ub = z(u).$$

Свойство 2.2 *Если $\overline{x}$ и $\overline{u}$ — допустимые решения соответственно прямой и двойственной задачи и $w(\overline{x}) = z(\overline{u})$, то $\overline{x}$ и $\overline{u}$ – оптимальные решения соответствующих задач.*

Доказательство. Пусть x – произвольное допустимое решение прямой задачи. Тогда, учитывая Свойство 2.1, имеем $w(x) \geq$

$z(\overline{u}) = w(\overline{x})$, что и означает оптимальность $\overline{x}$. Аналогичным образом устанавливается оптимальность $\overline{u}$.

Фундаментальный характер имеют две рассматриваемые ниже теоремы двойственности.

Теорема 2.2 *(Первая теорема двойственности.) Прямая и двойственная к ней задачи либо одновременно разрешимы, либо одновременно неразрешимы. При этом в первом случае оптимальные значения целевых функций этих задач совпадают, а во втором случае, по крайней мере, одна из задач неразрешима в силу несовместности ее ограничений.*

Доказательство. Без органичения общности можно считать, что прямая задача представлена в канонической форме (2.1)–(2.3), а двойственная к ней имеет вид (Д). Пусть задача (2.1)–(2.3) разрешима и B – ее прямо и двойственно допустимый базис, существование которого гарантируется Утверждением 5. Согласно определению прямой и двойственной допустимости имеют место неравенства $B^{-1}b \geq 0$ и $c_N - c_B B^{-1} N \geq 0$. Первое из этих неравенств, как известно, свидетельствует о том, что базисное решение $\overline{x}$ с компонентами $\overline{x}_B = B^{-1}b$, $\overline{x}_N = 0$ является допустимым решением задачи (2.1)–(2.3). Из второго неравенства следует, что вектор $\overline{u} = c_B B^{-1}$ является допустимым решением двойственной задачи (Д), поскольку $\overline{u}B = c_B$, $c_N - \overline{u}N \geq 0$ и, следовательно, $\overline{u}A \leq c$.

Для указанных допустимых решений $\overline{x}$ и $\overline{u}$ соответственно прямой и двойственной задачи имеют место равенства

$$w(\overline{x}) = c_B \overline{x}_B = c_B B^{-1} b = \overline{u} b = z(\overline{u}),$$

что согласно Свойству 2.2 означает оптимальность этих решений. Таким образом, предположив разрешимость прямой задачи, мы доказали разрешимость двойственной к ней задачи и совпадение оптимальных значений целевых функций этих задач. В виду симметричности ситуации из разрешимости двойственной задачи аналогичным образом следует разрешимость прямой задачи и совпадение оптимальных значений целевых функций.

Для завершения доказательства теоремы остается лишь показать, что задачи разрешимы, если их ограничения совместны. Последнее легко следует из Свойства 2.1 и критерия разрешимости задачи ЛП. В самом деле, пусть $\overline{u}$ — некоторое допустимое решение двойственной задачи (Д). Тогда по Свойству 2.1 для любого допустимого решения x задачи (2.1)–(2.3) имеет место неравенство $w(x) \geq z(\overline{u})$, т.е. целевая функция прямой задачи ограничена снизу на (непустом) множестве допустимых решений, что согласно Теореме 2.1 влечет разрешимость задачи (2.1)–(2.3). Из этого далее следует разрешимость и двойственной задачи. Теорема доказана.

В формулировке следующей теоремы мы предполагаем, что прямая и двойственная задачи заданы в общей форме.

Теорема 2.3 *(Вторая теорема двойственности или теорема о дополняющей нежесткости). Допустимые решения $\overline{x}$ и $\overline{u}$ соответственно прямой и двойственной задачи оптимальны тогда и только тогда, когда*

$$\overline{u}_i(a_i\overline{x} - b_i) = 0 \quad \textit{для всех} \quad i, \tag{2.9}$$

$$(c_j - \overline{u}A_j)\overline{x}_j = 0 \quad \textit{для всех} \quad j. \tag{2.10}$$

Доказательство. Введем обозначения $\tau_i = \overline{u}_i(a_i\overline{x} - b_i)$, $\sigma_j = (c_j - \overline{u}A_j)x_j$ и заметим, что из допустимости решений $\overline{x}$ и $\overline{u}$ следует неравенство $\tau_i \geq 0$ для всех i и $\sigma_j \geq 0$ для всех j. Отсюда в свою очередь следует, что равенство

$$\sum_i \tau_i + \sum_j \sigma_j = 0$$

имеет место, если и только если выполняются равенства (2.9) и (2.10). С другой стороны, $c\overline{x} - \overline{u}b = 0$ в том и только в том случае, если $\overline{x}$ и $\overline{u}$ – оптимальные решения задач. Наконец, чтобы завершить доказательство, к сказанному достаточно добавить, что справедливо равенство

$$\sum_i \tau_i + \sum_j \sigma_j = c\overline{x} - \overline{u}b,$$

проверяемое непосредственно. Теорема доказана.

Полезным (и вполне очевидным) следствием последней теоремы является, например, следующее утверждение. Если некоторая неотрицательная переменная прямой (соответственно, двойственной) задачи принимает положительное значение в каком-нибудь оптимальном решении данной задачи, то соответствующее ограничение-неравенство двойственной (соответственно, прямой) задачи выполняется в виде равенства для любого оптимального решения этой задачи.

Возвращаясь к первой теореме двойственности и ее доказательству, мы видим, что, решая задачу (2.1)–(2.3) симплекс-методом, мы одновременно с ее оптимальным решением получаем также и оптимальное решение двойственной задачи (Д) или устанавливаем неразрешимость обеих задач. Это позволяет определить другой метод решения задачи ЛП, а именно, *двойственный* симплекс-метод. В связи с этим исходный симплекс-метод принято называть *прямым*.

2.11 Двойственный симплекс-метод

В приведенном ниже описании алгоритма этого метода предполагается, что используется та же самая форма симплекс-таблицы и то же самое ее элементарное преобразование. Под $\sigma(i)$, $i = 1, \ldots, m$, как и прежде, понимается набор номеров базисных столбцов (переменных).

0) Начать с двойственно допустимой симплекс-таблицы.

1) Если симплекс-таблица прямо допустима, т.е. $z_{i0} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение).

2) Выбрать ведущую строку $r: \ z_{r0} < 0, \ r \geq 1$.

3) Если $\{j \mid z_{rj} < 0, \ j \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущий столбец s:

$$\frac{z_{0s}}{|z_{rs}|} = \min\left\{ \frac{z_{0j}}{|z_{rj}|} \mid z_{rj} < 0, \ j \geq 1 \right\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).

4) Преобразовать симплекс-таблицу, положить $\sigma(r) := s$ и перейти на шаг 1.

Замечания.

1. Доказательство того, что двойственная допустимость симплекс-таблицы в результате ее преобразования на шаге 4 сохраняется, может быть выполнено аналогично тому, как проводилось ранее доказательство сохранения прямой допустимости в случае прямого симплекс-метода. Таким образом, если в прямом симплекс-методе идет целенаправленный перебор прямо допустимых базисов, то в двойственном симлекс-методе — двойственно допустимых базисов. Цель в обоих случаях одна и та же — найти прямо и двойственно допустимый базис.

2. Если на шаге 3 имеем $z_{rj} \geq 0, \ j = 1, \ldots, n$, то это означает, что задача неразрешима ввиду несовместности ограничений. В самом деле, r-й строке симплекс-таблицы соответствует уравнение системы $(2.2'')$

$$\sum_{j=1}^{n} z_{rj} x_j = z_{r0},$$

из которого при $x \geq 0$ следует $z_{r0} \geq 0$. С другой стороны, согласно правилу выбора ведущей строки $z_{r0} < 0$. Эти два противоречащих другу неравенства свидетельствуют об отсутствии у системы $(2.2'')$ неотрицательных решений, т.е. о несовместности ограничений задачи (2.1)–(2.3).

3. По поводу выполнения шага 0 мы не будем приводить общих рецептов, а ограничимся указанием на ряд случаев, когда

вопрос о нахождении двойственно допустимого базиса решается достаточно просто.

а) Предположим, что требуется решить задачу ЛП $\min\{cx \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ с неотрицательным вектором c. С помощью введения дополнительных переменных $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$ задача может быть преобразована в каноническую форму $\min\{cx \mid Ax + y = b, x \geq 0, y \geq 0\}$. Очевидно, базис, образованный последними m столбцами матрицы $[A, I]$ системы ограничений новой задачи, является двойственно допустимым и итерации двойственного симплекс-метода можно начинать с симплекс-таблицы

$$\left[\begin{array}{c|cc} 0 & c & 0 \\ \hline b & A & I \end{array}\right].$$

б) Может сложиться такая ситуация, когда после получения оптимального решения задачи (2.1)–(2.3) и соответсвующего прямо и двойственно допустимого базиса B мы хотели бы получить оптимальное решение задачи с измененными правыми частями b' системы ограничений (2.2). Нетрудно видеть, что для измененной задачи базис B является также двойственно допустимым и может быть использован в качестве начального для решения задачи двойственным симплекс-методом.

в) Прием, использованный в случае а) для получения двойственно допустимой симплекс-таблицы, может быть распространен на ситуации, когда к ограничениям задачи ЛП, для которой известна некоторая двойственно допустимая симплекс-таблица, добавляются новые ограничения. Эта возможность используется при решении задач целочисленного линейного программирования методами отсечения (о чем более подробно речь будет идти позже).

4. По поводу конечности двойственного симплекс-алгоритма могут быть, фактически, повторены с естественными поправками все высказывания, сделанные ранее по вопросу о конечности прямого симплекс-метода. В частности, если двойственная задача (Д) невырожденна, то алгоритм конечен при любом уточнении

правил выбора ведущего элемента. Отметим при этом, что в случае невырожденной задачи (Д) в каждой двойственно допустимой симплекс-таблице элементы z_{0j} для номеров j небазисных переменных должны быть положительными, т.е. $|\{j \mid z_{0j} > 0, \ j \geq 1\}| = n - m$.

В случае вырожденной задачи конечность двойственного симплекс-метода может быть обеспечена за счет использования тех же способов, что и в случае прямого симплекс-метода, в частности, за счет некоторого аналога правила Блэнда или за счет лексикографической процедуры.

Раздел 3. Задачи нелинейного программирования

В данном разделе рассматриваются задачи поиска экстремума произвольной функции на множестве точек, удовлетворяющих системе ограничений, все или часть из которых задаются нелинейными функциями. Будут получены необходимые условия локального экстремума, которые являются следствием общей теории локальных экстремумов. Для задач выпуклого программирования будут доказаны необходимые и достаточные условия глобального экстремума.

Теория локальных экстремумов применима для исследования оптимизационных задач как в конечномерном случае, так и для задач поиска экстремума в функциональных пространствах. Мы ограничимся конечномерными задачами. Условия экстремума для задач с ограничениями будут получены с помощью теоремы Дубовицкого-Милютина, для доказательства которой понадобятся элементарные сведения из теории выпуклых множеств. Краткое изложение этой теории дано в первых параграфах настоящего раздела.

3.1 Теоремы отделимости

В теории экстремальных задач фундаментальную роль играют теоремы отделимости. Основное содержание этих теорем сводится к тому, что для двух выпуклых множеств X и Y утверждается существование гиперплоскости, такой, что множество X находится в одном из полупространств, определяемых этой гиперплоскостью, а множество Y — в другом. В этом случае говорят, что данная гиперплоскость отделяет эти множества друг от друга.

Теорема 3.1 *Пусть X – выпуклое множество, $x_0 \notin \overline{X}$. Тогда существуют число $\epsilon > 0$ и ненулевой вектор $a \in R^n$ такие, что*

$$\langle a, x\rangle \leq \langle a, x_0\rangle - \epsilon \tag{3.1}$$

для всех x из X.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x' \in \overline{X}$ и рассмотрим множество

$$X' = \overline{X} \cap \{x \in R^n \mid \ \|x - x_0\| \leq \|x' - x_0\|\}.$$

Это множество непусто (так как оно содержит x'), замкнуто и ограничено. Поэтому непрерывная функция $f(x) = \|x - x_0\|$ достигает на нем своего минимума. Другими словами, существует точка $z \in X' \subset \overline{X}$ такая, что из условия $x \in X'$ следует

$$\|x - x_0\| \geq \|z - x_0\|.$$

Понятно, что это неравенство справедливо и для точек x из множества $\overline{X} \setminus X'$, так как для них по построению множества X' имеем

$$\|x - x_0\| > \|x' - x_0\| \geq \|z - x_0\|.$$

Пусть x – некоторая точка из множества $\overline{X}$. Тогда при любом $\lambda \in [0,1]$ точка $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$ принадлежит $\overline{X}$ и, как мы установили выше,

$$\|y - x_0\|^2 \geq \|z - x_0\|^2.$$

Это неравенство можно переписать так:

$$\|z - x_0\|^2 \leq \|\lambda(x - z) + z - x_0\|^2 =$$

$$= \lambda^2\|x - z\|^2 + 2\lambda\langle x - z, z - x_0\rangle + \|z - x_0\|^2.$$

Тогда для любого $\lambda \in [0,1]$ справедливо соотношение

$$\lambda^2\|x - z\|^2 + 2\lambda\langle x - z, z - x_0\rangle \geq 0.$$

Это возможно лишь, если $\langle x - z, z - x_0\rangle \geq 0$. Положим $a = x_0 - z$ (рис. 1) и $\epsilon = \|a\|^2$. По условию $x_0 \notin \overline{X}$, поэтому $a \neq 0$. Так как $\langle a, x - z\rangle \leq 0$, то $\langle a, x\rangle + \langle a, x_0 - z\rangle - \langle a, x_0\rangle \leq 0$ и $\langle a, x\rangle \leq \langle a, x_0\rangle - \epsilon$. Теорема доказана.

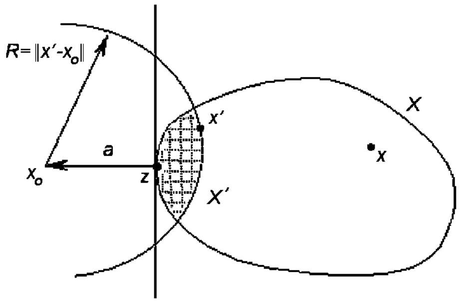

Рис. 1. Точка x_0 сильно отделена от множества X

Установленный факт называют сильной отделимостью выпуклого множества X от не принадлежащей его замыканию точки x_0. Термин отделимость отражает геометрическую суть неравенства (3.1), которое показывает, что можно так провести гиперплоскость, что точка x_0 и множество X окажутся лежащими по разные стороны от нее. А сильная отделимость означает, что расстояние между точками множества X и точкой x_0 больше некоторого положительного числа.

Если точка x_0 находится на границе выпуклого множества X, то ее нельзя сильно отделить от X. В этом случае можно построить гиперплоскость, проходящую через x_0 так, что все множество X окажется по одну сторону от указанной гиперплоскости. Это утверждение основывается на том, что для выпуклого множества X справедливо равенство $int\overline{X} = intX$. В силу этого, если точка x_0 — граничная для множества X, то x_0 не может быть внутренней точкой для множества $\overline{X}$.

Теорема 3.2 *Пусть X – выпуклое множество, $x_0 \notin X$. Тогда существует ненулевой вектор $a \in R^n$ такой, что $\langle a, x\rangle \le \langle a, x_0\rangle$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Покажем сначала, что для любого выпуклого множества X верно включение: $int\overline{X} \subset X$. Пусть $z \in int\overline{X}$. Тогда существует симплекс, внутри которого находится точка z, а вершины симплекса $a^1, \ldots, a^{n+1}$ принадлежат множеству $int\overline{X}$. Ввиду непрерывности расстояний от точки z до граней симплекса, как функций координат его вершин, найдется $\varepsilon > 0$, такое, что изменение положения вершин в пределах окрестностей $B(a^k, \varepsilon)$ не приводит к "выходу"точки z за пределы "смещенного"симплекса. В каждой из указанных окрестностей может быть выбрана точка b^k, принадлежащая множеству X, поскольку $a^k \in \overline{X}$. В силу выпуклости, множество X содержит весь симплекс с вершинами в точках b^k и, следовательно, точку z. Таким образом мы показали, что $int\overline{X} \subset X$.

По условию $x_0 \notin X$. Следовательно, $x_0 \notin int\overline{X}$ и каждая окрестность точки x_0 содержит точки, не принадлежащие множеству $\overline{X}$. Поэтому найдется последовательность точек $\{x^k\}$ такая, что $x^k \to x_0$ и $x^k \notin \overline{X}$. Из теоремы 1 вытекает, что для каждого k найдется ненулевой вектор a^k такой, что $\langle a^k, x\rangle < \langle a^k, x^k\rangle$ для любого $x \in X$. Без ограничения общности можно считать, что для всех k справедливо $\|a^k\| = 1$. Из теоремы Вейерштрасса следует, что существует подпоследовательность $\{a^{k_l}\}$, сходящаяся к некоторому вектору a, $\|a\| = 1$. Так как $\langle a^{k_l}, x\rangle < \langle a^{k_l}, x^{k_l}\rangle$ при всех $x \in X$, то при $l \to \infty$ в пределе получим $\langle a, x\rangle \leq \langle a, x_0\rangle$ для всех $x \in X$. Теорема доказана.

Теорема 3.3 *Пусть X и Y – выпуклые множества, не имеющие общих точек. Тогда существует ненулевой вектор $a \in R^n$ такой, что $\langle a, x\rangle \leq \langle a, y\rangle$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $Z = X - Y$ точек вида $z = x - y$, где $x \in X$ и $y \in Y$. Легко показать, что оно выпукло. По условию теоремы у множеств X и Y нет общих точек. Это значит, что множество Z не содержит точки 0. Поэтому в силу теоремы 3.2 точку 0 можно отделить от множества Z, то есть найдется ненулевой вектор a такой, что

$$\langle a, z\rangle \leq \langle a, 0\rangle = 0 \text{ для всех } z \in Z.$$

Из определения множества Z получаем

$$\langle a, x\rangle \leq \langle a, y\rangle \text{ для всех } x \in X \text{ и } y \in Y.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.4 *Пусть X, Y – выпуклые замкнутые множества, пересечение которых пусто,и множество X ограничено. Тогда существуют число $\epsilon > 0$ и ненулевой вектор $a \in R^n$ такие, что $\langle a, x\rangle \leq \langle a, y\rangle - \epsilon$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$.*

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, рассмотрим выпуклое множество $Z = X - Y$. Покажем, что оно замкнуто. Действительно, пусть $z^k = x^k - y^k \to z_0$ при $k \to \infty$, где $x^k \in X, y^k \in Y$. Убедимся, что $z_0 \in Z$. Так как множество X – компакт, то можно считать, что $x^k \to x_0$ при $k \to \infty$, и, следовательно, $y^k \to y_0 = x_0 - z_0$ при $k \to \infty$. Отсюда, поскольку множества X и Y замкнуты и точка x_0 принадлежит первому, а y_0 – второму из них, следует, что z_0 принадлежит Z. Таким образом, множество Z содержит свои предельные точки, то есть является замкнутым. Поскольку множества X и Y не имеют общих точек, то выпуклое замкнутое множество Z не содержит нуля. Тогда по теореме 3.1

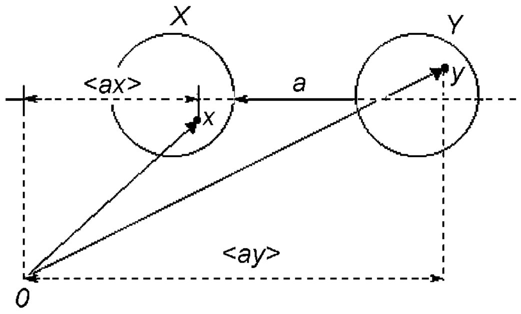

Рис. 2. Множества X и Y сильно отделены друг от друга

найдутся ненулевой вектор a и число $\epsilon > 0$ такие, что

$$\langle a, z\rangle \leq \langle a, 0\rangle - \epsilon = -\epsilon$$

для любого $z \in Z$ или $\langle a, x\rangle \leq \langle a, y\rangle - \epsilon$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$ (рис. 2). Теорема доказана.

Следующий пример (рис. 3) показывает, что если множества X и Y неограничены, то сильно отделяющей гиперплоскости может не существовать, а множество $Z = X - Y$ может оказаться открытым. Пусть $X = \{x \in R^2 \mid x_2 \geq 1/x_1, x_1 > 0\}$, $Y = \{x \in R^2 \mid x_2 = 0\}$. В этом случае $Z = \{x \in R^2 \mid x_2 > 0\}$ и требуемая гиперплоскость отсутствует.

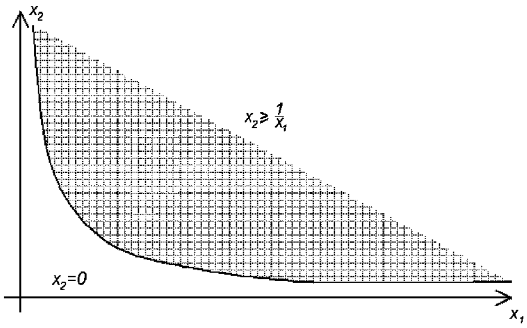

Рис. 3. Контрпример

3.2 Выпуклые конусы

Особую роль в теории экстремальных задач при наличии ограничений играют выпуклые множества специального вида — выпуклые конусы. Ниже приводятся определения и основные свойства выпуклых конусов.

Определение 3.1 *Конусом называется множество K, содержащее вместе с любой своей точкой x все точки λx при $\lambda > 0$.*

Если такое множество выпукло, его называют выпуклым конусом, если замкнуто – замкнутым конусом. Пересечение конусов является конусом. Все пространство R^n, как и любое подпространство, является конусом. Очевидно, что конусами являются множества $\{x \in R^n \mid Ax \leq 0\}$ и $\{y \in R^n \mid y = Ax, x \geq 0\}$. Все эти конусы являются выпуклыми и замкнутыми множествами.

Определение 3.2 *Множество $K^* = \{a \in R^n \mid \langle a, x\rangle \geq 0, \forall x \in K\}$ назовем сопряженным к множеству K.*

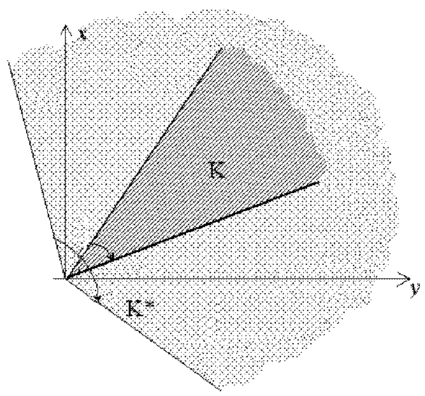

Рис. 4. Сопряженные конусы

Легко проверить, что множество K^* является конусом для любого множества K. Поэтому в дальнейшем K^* будем называть сопряженным конусом. Очевидно, что конус K^* является выпуклым независимо от того, обладает этим свойством исходные множество или нет (рис. 4).

Лемма 3.1 *Пусть K произвольный конус. Тогда K^* – замкнутый конус.*

Доказательство. Рассмотрим сходящуюся последовательность $\{a^k\}$, $a^k \in K^*$. Пусть вектор a является пределом этой последовательности. Тогда из неравенств $\langle a^k, x\rangle \geq 0$ при любых k и $x \in K$ и непрерывности скалярного произведения следует неравенство $\langle a, x\rangle \geq 0$ при $x \in K$. Лемма доказана.

Лемма 3.2 *Пусть K произвольный конус. Тогда $K^* = (\overline{K})^*$.*

Доказательство. Включение $(\overline{K})^* \subseteq K^*$ непосредственно следует из определения сопряженного конуса. Обратное включение $K^* \subseteq (\overline{K})^*$, как и в лемме 3.1, следует из непрерывности скалярного произведения. Лемма доказана.

Лемма 3.3 *Пусть K произвольный конус. Если для любого $x \in K$ выполняется неравенство $\langle a, x\rangle \geq const$, то $a \in K^*$.*

Доказательство. Предположим, что $a \notin K^*$. Тогда для некоторого $x_0 \in K$ должно выполняться неравенство $\langle a, x_0\rangle < 0$. Из определения конуса получаем, что $\langle a, \lambda x_0\rangle < 0$ для любого $\lambda > 0$ и $\langle a, \lambda x_0\rangle \to -\infty$ при $\lambda \to +\infty$. Поскольку по условию леммы $\langle a, x\rangle \geq const$ для всех $x \in K$, то получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3.4 *Пусть K произвольный выпуклый конус. Тогда $K^{**} = \overline{K}$.*

Доказательство. Легко проверить, что любая точка из $\overline{K}$ принадлежит K^{**}. Действительно, возьмем произвольную точку x из $\overline{K}$. По определению сопряженного конуса $(\overline{K})^*$ для любой точки $a \in (\overline{K})^*$ справедливо $\langle a, x\rangle \geq 0$. Но это и означает, что x содержится в конусе $\overline{K}^{**}$. Отсюда и леммы 3.2 вытекает, что x

принадлежит K^{**}.

Покажем теперь, что никаких иных точек, кроме принадлежащих $\overline{K}$, конус K^{**} содержать не может. Допустим, что существует $x_0 \in K^{**} \setminus \overline{K}$. Поскольку множество $\overline{K}$ выпукло и замкнуто, то по теореме 3.1 найдутся вектор $a \neq 0$ и число $\epsilon > 0$ такие, что $\langle a, x \rangle \leq \langle a, x_0 \rangle - \epsilon$ при любых $x \in \overline{K}$. Тогда для вектора $\overline{a} = -a$ получим $\langle \overline{a}, x \rangle \geq const$ для $x \in \overline{K}$. Отсюда, в силу леммы 3.3, вытекает $\overline{a} \in \overline{K}^* = K^*$. Следовательно, для x_0 как точки конуса K^{**} должно выполнятся неравенство $\langle \overline{a}, x_0 \rangle \geq 0$. Так как конус $\overline{K}$ замкнут и, значит, включает точку 0, то, полагая $x = 0$, получим $\langle \overline{a}, x_0 \rangle \leq -\epsilon < 0$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3.5 *Если K_1 и K_2 – выпуклые конусы, то $K_1 + K_2$ – выпуклый конус и $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$.*

Доказательство. Выпуклость конуса $K_1 + K_2$ легко следует из определений.

Покажем, что выполняется включение $(K_1 + K_2)^* \subseteq K_1^* \cap K_2^*$. Пусть $a \in (K_1 + K_2)^*$. Это значит, что

$$\langle a, x_1 + x_2 \rangle \geq 0 \text{ при любых } x_1 \in K_1, x_2 \in K_2.$$

Рассмотрим пары точек $(\lambda x_1, x_2)$ и $(x_1, \lambda x_2)$. Тогда при $\lambda \to 0$ из предыдущего неравенства получим

$$\langle a, x_1 \rangle \geq 0,\ \langle a, x_2 \rangle \geq 0 \text{ при всех } x_1 \in K_1, x_2 \in K_2,$$

т. е. $a \in K_1^* \cap K_2^*$.

Покажем обратное включение. Пусть $a \in K_1^* \cap K_2^*$. Тогда для любых $x_1 \in K_1, x_2 \in K_2$ выполнены неравенства

$$\langle a, x_1 \rangle \geq 0,\ \langle a, x_2 \rangle \geq 0.$$

Складывая их, получим $\langle a, x_1 + x_2 \rangle \geq 0$. Следовательно, a принадлежит конусу $(K_1 + K_2)^*$. Лемма доказана.

Лемма 3.6 *Если K_1 и K_2 – выпуклые замкнутые конусы, то* $(K_1 \cap K_2)^* = \overline{K_1^* + K_2^*}$.

Доказательство. Рассмотрим конус $(K_1 \cap K_2)^*$. В силу леммы 3.4 и замкнутости K_1 и K_2 он совпадает с конусом $(K_1^{**} \cap K_2^{**})^*$. По лемме 3.5 этот конус представим в виде $((K_1^* + K_2^*)^*)^*$. Наконец, применяя лемму 3.4, получим требуемое равенство. Лемма доказана.

Следующая теорема имеет первостепенное значение и потребуется в дальнейшем при доказательстве необходимых условий экстремума. Она сводит условие пустоты пересечения выпуклых конусов к существованию нетривиального решения некоторого линейного уравнения для векторов из сопряженных конусов.

Теорема 3.5 (Дубовицкого – Милютина) *Пусть $K_1, \ldots, K_m$ – непустые выпуклые конусы.*
1. Если $\bigcap_{i=1}^m K_i = \emptyset$, то существуют векторы $a_i \in K_i^*$, не все равные нулю и удовлетворяющие равенству

$$a_1 + ... + a_m = 0. \tag{3.2}$$

2. Если существуют векторы $a_i \in K_i^*$, не все равные нулю и удовлетворяющие равенству (3.2), то

$$K_1 \cap int K_2 \cap \ ... \ \cap int K_m = \emptyset.$$

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Рассмотрим пространство $(R^n)^m$, элементами которого являются векторы вида $(x_1, \ldots, x_m)$, где $x_i \in R^n$. По определению скалярного произведения векторов имеем

$$\langle (a_1, ..., a_m), (x_1, ..., x_m) \rangle = \langle a_1, x_1 \rangle + ... + \langle a_m, x_m \rangle.$$

Пусть

$$\widetilde{K} = K_1 \times ... \times K_m, \ \ \widetilde{P} = \{(\overbrace{x, ..., x}^{m}) | x \in R^n\}.$$

Множество $\widetilde{P}$ является диагональю пространства $(R^n)^m$. Очевидно, что множества $\widetilde{K}$, $\widetilde{P}$ — выпуклые конусы в $(R^n)^m$ и $\widetilde{K} \cap \widetilde{P} = \emptyset$. В силу теоремы 3.3 существуют векторы $a_1, \ldots, a_m \in R^n$, не все равные нулю, такие, что

$$\langle a_1, x\rangle + ... + \langle a_m, x\rangle \leq \langle a_1, x_1\rangle + ... + \langle a_m, x_m\rangle$$

для всех $x \in R^n$ и $x_i \in K_i$, $i = 1, \ldots, m$. Фиксируя $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m$ получим $\langle a_i, x_i\rangle \geq const$ для $x_i \in K_i$. В силу леммы 3.3 это означает, что $a_i \in K_i^*$. С другой стороны, очевидно, что

$$\langle a_1 + ... + a_m, x\rangle \leq const \text{ для } x \in R^n.$$

Это неравенство возможно лишь в том случае, когда

$$a_1 + ... + a_m = 0,$$

что и требовалось доказать.

Докажем вторую часть теоремы. Предположим, что существует вектор $\widetilde{x} \in K_1 \cap int K_2 \cap \ \ldots \ \cap int K_m$. Тогда $\langle a_1 + ... + a_m, \widetilde{x}\rangle = 0$ и в силу определения a_i выполнены неравенства $\langle a_i, \widetilde{x}\rangle \geq 0$ для $i = 1, \ldots, m$. Отсюда следует, что $\langle a_i, \widetilde{x}\rangle = 0$ для $i = 1, \ldots, m$. По условию не все a_i равны нулю, следовательно, по крайней мере два из них не нулевые. Следовательно, хотя бы один из них лежит в одном из сопряженных конусов $K_2^*, \ldots, K_m^*$. Без ограничения общности можно считать, что это вектор a_2. Тогда $\langle a_2, x\rangle \geq 0$ для всех $x \in K_2$ и $\langle a_2, \widetilde{x}\rangle = 0$. Так как $\widetilde{x} \in int K_2$, то минимум линейной функции $\langle a_2, \cdot\rangle$, не равной тождественно нулю, достигается во внутренней точке K_2. Получили противоречие. Теорема доказана.

3.3 Необходимые условия экстремума

В этом параграфе приводится необходимое условие минимума функции $f(x)$ на некотором множестве допустимых решений

Q, которое является пересечением конечного набора подмножеств пространства R^n. Никаких других дополнительных ограничений на функцию $f(x)$ и множество Q не накладывается. Поэтому необходимое условие, о котором идет речь, имеет чрезвычайно общий характер. Однако, при наличии дополнительных предположений, на его основе удается построить более содержательные варианты необходимых условий минимума для многих классов задач с нелинейными ограничениями в виде неравенств и равенств.

Пусть $G \subset R^n$, $x, x_0 \in R^n$, $x \neq 0$.

Определение 3.3 *Вектор x – внутреннее направление для множества G из точки x_0, если существуют открытая окрестность V_x вектора x и число $\epsilon > 0$ такие, что при всех $x' \in V_x$ и $\epsilon' \in (0, \epsilon)$ точка $x_0 + \epsilon' x'$ принадлежит G.*

Исходя из определения конуса и определения 3.3, легко доказать следующие свойства.

Свойство 3.1 *Если вектор x — внутреннее направление для множества G из точки x_0 и V_x — открытая окрестность вектора x из определения 3.3, то*

1) Для любого $\lambda > 0$ вектор λx является внутренним направлением для множества G из точки x_0.

2) Любой вектор x' из окрестности V_x является внутренним направлением для множества G из точки x_0.

3) Множество $intG$ не пусто.

Свойство 3.2 *Если V_x — открытое выпуклое множество, то $K' = \{\lambda x' \mid \lambda > 0, x' \in V_x\}$ — открытый выпуклый конус. Если $x' \in K'$, то вектор x' — внутреннее направление для множества G из точки x_0.*

Свойство 3.3 *Если вектор x — внутреннее направление для множества G из точки x_0, то существует открытый выпукл-*

ый конус K, содержащий x, и окрестность нуля $B(0, \epsilon)$ такие, что $x_0 + K \cap B(0, \epsilon) \subseteq G$.

Свойство 3.4 *Пусть K — открытый выпуклый конус, содержащий вектор x, и $B(0, \epsilon)$ — окрестность нуля. Если $x_0 + K \cap B(0, \epsilon) \subseteq G$, то вектор x — внутреннее направление для множества G из точки x_0.*

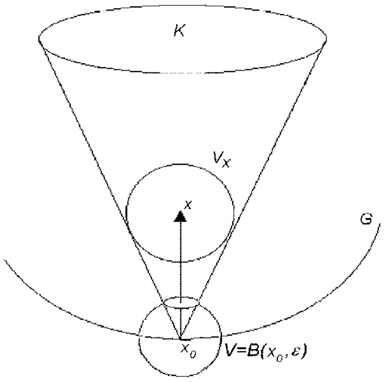

Рис. 5. Вектор x — внутреннее направление для G из точки x_0

Таким образом, x — внутреннее направление для множества G из точки x_0 тогда и только тогда, когда существует открытый выпуклый конус K, содержащий вектор x, и окрестность нуля V такие, что $x_0 + K \cap V \subseteq G$ (рис. 5).

Определение 3.4 *Вектор x – предельное направление для множества G из точки x_0, если для любой окрестности V_x точки x и числа $\epsilon > 0$ найдутся $x' \in V_x$ и ϵ' из интервала $(0, \epsilon)$ такие, что $x_0 + \epsilon' x' \in G$.*

Свойство 3.5 *Если вектор x — предельное направление для множества G из точки x_0, то*

1) для любого $\lambda > 0$ вектор λx также предельное направление для множества G из точки x_0.

2) для любого открытого конуса K, содержащего точку x, и любой окрестности нуля V, среди точек множества $x_0 + K \cap V$ есть точки из множества G.

Свойство 3.6 *Если для любого открытого конуса K, содержащего точку x, и любой окрестности нуля V, среди точек множества $x_0 + K \cap V$ есть точки из множества G, то вектор x — предельное направление для множества G из точки x_0.*

Свойство 3.7 *Если вектор x — внутреннее направление для множества G из точки x_0, то x также является и предельным направлением для множества G из точки x_0.*

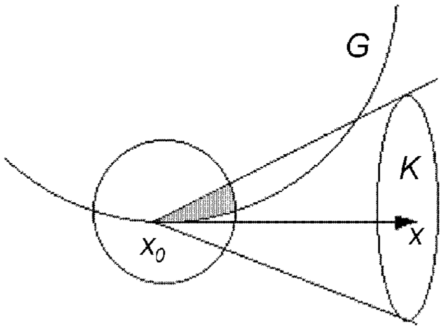

Рис. 6. Вектор x — предельное направление для G из точки x_0.

Из свойств 3.5 и 3.6 следует, что вектор x — предельное направление для множества G из точки x_0 тогда и только тогда, когда для любого открытого конуса K, содержащего точку x, и любой окрестности нуля V, среди точек множества $x_0 + K \cap V$ есть точки из множества G (рис. 6).

Пусть G_i, $i = 1, \ldots, m+1$, непустые подмножества пространства R^n. Рассмотрим задачу:

$$\min_{x \in Q} f(x), \quad Q = \bigcap_{i=1}^{m+1} G_i. \tag{3.3}$$

Задавая множество допустимых решений Q подобным образом, мы получим необходимое условие минимума для задачи (3.3) в форме, удобной для применения к задачам с ограничениями в виде неравенств и равенств.

Пусть $G_0 = \{x \mid f(x) < f(x_0)\}$, Γ_i – множество внутренних направлений для G_i из точки x_0, $i = 0, 1, \ldots, m$. Очевидно, что внутренние направления для G_i из точки x_0 могут существовать (но не обязательно существуют) только в том случае, когда непусто множество $intG_i$. Если множество Γ_i не пусто, то из Свойства 3.1 следует, что оно является открытым конусом. Более того, когда $x_0 \in intG_i$, конус Γ_i совпадает с пространством R^n. Обозначим через Γ_{m+1} – множество предельных направлений для G_{m+1} из точки x_0. Как следует из свойства 3.5, множество Γ_{m+1} также является конусом.

Теорема 3.6 (Необходимое условие экстремума) *Если x_0 — оптимальное решение задачи* (3.3)*, то* $\bigcap\limits_{i=0}^{m+1} \Gamma_i = \emptyset$.

Доказательство. Предположим, что теорема не верна, то есть существует элемент e, принадлежащий множеству $\cap_{i=0}^{m+1}\Gamma_i$. Тогда по определению внутреннего направления для множеств $G_i, i = 0, \ldots, m$, существуют открытые конусы K_i, каждый из которых содержит вектор e, и окрестности нуля V_i такие, что $x_0 + K_i \cap V_i \subset G_i$ для каждого $i = 0, \ldots, m$. Поэтому

$$x_0 + (\cap_{i=0}^{m} K_i) \cap (\cap_{i=0}^{m} V_i) \subset (\cap_{i=0}^{m} G_i).$$

Таким образом, существуют открытый конус $K = \cap_{i=0}^{m} K_i$, содержащий вектор e, и окрестность нуля $V = \cap_{i=0}^{m} V_i$ такие, что

$$x_0 + K \cap V \subset (\cap_{i=0}^{m} G_i).$$

Так как e также элемент и конуса Γ_{m+1}, то $(x_0 + K \cap V) \cap G_{m+1} \neq \emptyset$. Выберем $x' \in (x_0 + K \cap V) \cap G_{m+1}$. Тогда $x' \in G_i, i = 0, \ldots, m+1$, и, в частности, $x' \in G_0$, то есть $f(x') < f(x_0)$. Но это невозможно, так как x_0 — оптимальное решение задачи (3.3).

3.4 Обобщенное правило множителей Лагранжа

Более содержательные необходимые условия минимума могут быть получены, когда x_0 — локальный экстремум задачи (3.3), для которого конусы $\Gamma_i,\ i = 0, 1, \ldots, m+1$, непусты и выпуклы. Тогда по теореме Дубовицкого-Милютина существуют не равные нулю одновременно векторы $c_i \in \Gamma_i^*,\ i = 0, 1, \ldots, m+1$, такие, что $c_0 + \ldots + c_{m+1} = 0$. Это достаточно общее условие экстремума для задач с ограничениями уточняется в данном параграфе.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\min f(x), \tag{3.4}$$

$$\varphi_i(x) \le 0, \qquad i = 1, \ldots, s, \tag{3.5}$$

$$\varphi_i(x) = 0, \quad i = s+1, \ldots, k, \tag{3.6}$$

$$x \in G \subset R^n. \tag{3.7}$$

Считаем, что функции f, φ_i – непрерывно дифференцируемы, G – выпуклое, замкнутое множество, $intG \neq \emptyset$. Как правило, множество G имеет простую структуру. Например, $G = \{x \mid x_i \ge 0, i = 1, \ldots, n\}$.

Покажем, что при этих предположениях можно воспользоваться необходимым условием экстремума из теоремы 3.6 и теоремой Дубовицкого-Милютина. Для этого представим задачу (3.4)-(3.7) в виде задачи (3.3), введя следующие множества $G_0 = \{x \mid f(x) < f(x_0)\}$, $G_i = \{x \mid \varphi_i(x) \le 0\}, i = 1, \ldots, s$, $G_m = G, G_{m+1} = \{x \mid \varphi_i(x) = 0, i = s+1, \ldots, k\}$, где $m = s+1$ и x_0 — допустимое решение задачи (3.4)-(3.7). Доказательство непустоты и выпуклости конусов $\Gamma_i,\ i = 0, \ldots, m+1$, основывается на следующих утверждениях.

Лемма 3.7 *Пусть $f(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда конус Γ_0 является открытым выпуклым множеством и*

$$\Gamma_0 = \{e \in R^n \mid \langle f'(x_0), e\rangle < 0\}.$$

Лемма 3.8 *Пусть* $\varphi_i(x)$ *— непрерывно-дифференцируемая функция, для которой справедливо либо* $\varphi_i(x_0) < 0$, *либо* $\varphi_i'(x_0) \neq 0$. *Тогда конус* Γ_i *является открытым выпуклым множеством и*

$$\Gamma_i = \begin{cases} R^n, & \text{если } \varphi_i(x_0) < 0, \\ \{e \in R^n \mid \langle \varphi_i'(x_0), e \rangle < 0\}, & \text{если } \varphi_i(x_0) = 0. \end{cases}$$

Лемма 3.9 *Пусть* G *— выпуклое множество из* R^n, $intG \neq \emptyset$ *и* $x_0 \in G$. *Тогда конус* Γ_m *является открытым выпуклым множеством и*

$$\Gamma_m = \{e \in R^n \mid e = \nu(x - x_0), \nu > 0, x \in intG\}.$$

Заметим, что если $x_0 \in intG$, то $\Gamma_m = R^n$.

Лемма 3.10 *Пусть* $\varphi_i(x), i = s+1, \ldots, k,$ *— непрерывно-дифференцируемые функции. Тогда конус* Γ_{m+1} *является замкнутым выпуклым множеством и*

$$\Gamma_{m+1} = \{e \in R^n \mid \langle \varphi_i'(x_0), e \rangle = 0, i = s+1, \ldots, k\}.$$

Доказательство лемм 3.7-3.10 можно найти в [1].

Теорема 3.7 (Обобщенное правило множителей Лагранжа) *Пусть* x_0 *— оптимальное решение задачи (3.4)-(3.7). Тогда существуют величины* $\lambda_i^0, i = 0, \ldots, k$, *не все равные нулю, такие, что*

$$\lambda_i^0 \geq 0, \ \ i = 0, \ldots, s,$$

$$\lambda_i^0 \varphi_i(x_0) = 0, \ \ i = 1, \ldots, s,$$

$$\langle \lambda_0^0 f'(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^0 \varphi_i'(x_0), x - x_0 \rangle \geq 0$$

для любого x *из* G. *(Величины* λ_i^0 *принято называть множителями Лагранжа.)*

Доказательство. Убедимся сначала, что без ограничения общности можно предполагать выполненными следующие условия:

1) $f'(x_0) \neq 0$,

2) для любого $i = 1, \ldots, s$, либо $\varphi_i(x_0) < 0$, либо $\varphi_i'(x_0) \neq 0$.

Действительно, пусть $f'(x_0) = 0$. Тогда теорема верна при $\lambda_0^0 = 1, \lambda_i^0 = 0, i \geq 1$. Предположим теперь, что $\varphi_i(x_0) = 0$ и $\varphi_i'(x_0) = 0$ при некотором $i = 1, \ldots, s$. Тогда теорема верна при $\lambda_i^0 = 1, \lambda_j^0 = 0, j \neq i$.

Из лемм 3.7-3.10 следует, что конусы внутренних и предельных направлений из точки x_0 выглядят следующим образом:

$$\Gamma_0 = \{e \in R^n \mid \langle f'(x_0), e\rangle < 0\},$$

для любого i=1,...,s

$$\Gamma_i = \begin{cases} R^n, & \text{если } \varphi_i(x_0) < 0, \\ \{e \in R^n \mid \langle \varphi_i'(x_0), e\rangle < 0\}, & \text{если } \varphi_i(x_0) = 0, \end{cases}$$

$$\Gamma_m = \{e \in R^n \mid e = \nu(x - x_0), \nu > 0, x \in intG\},$$

$$\Gamma_{m+1} = \{e \in R^n \mid \langle \varphi_i'(x_0), e\rangle = 0, i = s+1, \ldots, k, \}.$$

Все эти конусы непусты и выпуклы. Так как x_0 — оптимальное решение задачи (3.4)-(3.7), то $\cap_{i=0}^{m+1}\Gamma_i = \emptyset$. Тогда из теоремы Дубовицкого-Милютина следует, что существуют не равные нулю одновременно векторы $c_i \in \Gamma_i^*, i = 0, \ldots, m+1$ такие, что $c_0 + c_1 + ... + c_{m+1} = 0$.

Посмотрим, что представляют собой в рассматриваемом случае сопряженные конусы. Прежде всего покажем, что

$$\Gamma_0^* = \{c_0 \mid c_0 = -\lambda_0 f'(x_0), \lambda_0 \geq 0\}.$$

Из определения сопряженного конуса следует, что c_0 принадлежит Γ_0^* тогда и только тогда, когда для любого $e \in \Gamma_0$ верно $\langle c_0, e\rangle \geq 0$. Отсюда получаем, что конус Γ_0^* содержит всевозможные векторы вида $-\lambda_0 f'(x_0)$, где $\lambda_0 \geq 0$.

Покажем, что

$$\Gamma_0^* \subseteq \{c_0 \mid c_0 = -\lambda_0 f'(x_0), \lambda_0 \geq 0\}.$$

Пусть вектор c не принадлежит выпуклому замкнутому множеству $\{c_0 \mid c_0 = -\lambda_0 f'(x_0), \lambda_0 \geq 0\}$. Тогда по первой теореме отделимости существует ненулевой вектор e такой, что $\langle -\lambda_0 f'(x_0), e\rangle > \langle c, e\rangle$ при любом $\lambda_0 \geq 0$. Полагая $\lambda_0 = 0$, получим $\langle c, e\rangle < 0$. Будучи поделенным на $\lambda_0 > 0$ при $\lambda_0 \to \infty$ неравенство дает $\langle f'(x_0), e\rangle \leq 0$. Значит, c не принадлежит конусу Γ_0^*.

Точно так же

$$\Gamma_i^* = \{c_i \mid c_i = -\lambda_i \varphi_i'(x_0), \lambda_i \geq 0\}$$

для тех $i \leq s$, при которых $\varphi_i(x_0) = 0$. Если же $\varphi_i(x_0) < 0$, то $\Gamma_i^* = \{0\}$. Следовательно, при всех $i \leq s$ имеем

$$\Gamma_i^* = \{c_i \mid c_i = -\lambda_i \varphi_i'(x_0),\ \lambda_i \geq 0,\ \lambda_i \varphi_i(x_0) = 0\}.$$

Легко проверить, что

$$\Gamma_{m+1}^* = \{c_{m+1} \mid c_{m+1} = -\sum_{i=s+1}^{k} \lambda_i \varphi_i'(x_0)\}.$$

Таким образом, учитывая полученные представления сопряженных конусов и равенство $c_0 + c_1 + ... + c_{m+1} = 0$ получаем:

$$c_m = \lambda_0^0 f'(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^0 \varphi_i'(x_0) \in \Gamma_m^*,$$

$$\lambda_i^0 \geq 0,\ i = 0, \ldots, s,$$

$$\lambda_i^0 \varphi_i(x_0) = 0,\ i = 1, \ldots, s,$$

где $\lambda_i^0,\ i = 0, \ldots, k,$ – некоторые множители, которые не должны быть равны нулю одновременно (условие нетривиальности набора векторов $c_i, 0 \leq i \leq m+1$).

По определению конус Γ_m^* состоит из векторов c, удовлетворяющих неравенству $\langle c, \nu(x - x_0)\rangle \geq 0$ при всех $\nu > 0$ и любых $x \in intG$. Так как любая точка выпуклого множества G является предельной точкой множества $intG$, то для $c \in \Gamma_m^*$ при всех $x \in G$ выполняется $\langle c, x - x_0\rangle \geq 0$ и, следовательно,

$$\langle \lambda_0^0 f'(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^0 \varphi_i'(x_0), x - x_0\rangle \geq 0$$

для любого x из G. Теорема доказана.

Необходимые условия оптимальности теоремы 3.7 называются обобщенным правилом множителей Лагранжа, а величины λ_i^0, $i = 0, \ldots, k$, — множителями Лагранжа. В теореме 3.7 нельзя исключить случай, когда множитель λ_0^0 при градиенте целевой функции $f'(x_0)$ равен нулю, и тогда необходимые условия экстремума не зависят от оптимизируемой функции. Такие задачи назовем вырожденными в точке x_0. Один из способов, позволяющих выделять классы невырожденных задач, дает теорема Дубовицкого-Милютина. Если $\lambda_0^0 = 0$, то $c_0 = 0$ и $c_1 + ... + c_{m+1} = 0$. Из лемм 3.7-3.10 следует, что конусы $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ — открытые множества. Следовательно, по теореме Дубовицкого-Милютина имеем

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap ... \cap \Gamma_{m+1} = \emptyset.$$

Значит, если пересечение данного множества конусов непусто, то равенство $\lambda_0^0 = 0$ исключается. Наиболее просто условия, гарантирующие отличие λ_0^0 от нуля в обобщенном правиле множителей Лагранжа, получаются для тех задач (3.4)-(3.7), в которых $G = R^n$.

Теорема 3.8. (Необходимые условия Куна-Таккера) *Пусть x_0 – оптимальное решение задачи (3.4)-(3.7), $G = R^n$ и множество $\{\varphi_i'(x_0) \mid \varphi_i(x_0) = 0\}$ – линейно независимо. Тогда существуют множители $\lambda_i^0, i = 1, \ldots, k$, такие, что:*

$$\lambda_i^0 \geq 0, i = 1, \ldots, s, \tag{3.8}$$

$$\lambda_i^0 \varphi_i(x_0) = 0, i = 1, \ldots, s, \tag{3.9}$$

$$f'(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^0 \varphi_i'(x_0) = 0. \tag{3.10}$$

Доказательство. Из условия $G = R^n$ следует, что неравенство $\langle c, x - x_0 \rangle \geq 0$ может быть выполнено для всех $x \in G$ только при $c = 0$. Следовательно, по теореме 3.7 имеем

$$\lambda_0^0 f'(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^0 \varphi_i'(x_0) = 0. \tag{3.11}$$

Если $\lambda_0^0 = 0$, то $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^0 \varphi_i'(x_0) = \sum\{\lambda_i^0 \varphi_i'(x_0) \mid \varphi_i(x_0) = 0\} = 0$, что противоречит условию теоремы о линейной независимости множества $\{\varphi_i'(x_0) \mid \varphi_i(x_0) = 0\}$. Поэтому обе части равенства (3.11) можно разделить на $\lambda_0^0 > 0$. Понятно, что множители $\lambda_i^0/\lambda_0^0,\ i = 1, \ldots, s$, удовлетворяют необходимым условиям (3.8)-(3.10). Теорема доказана.

Рассмотрим равенства (3.9), (3.10) и ограничения $\varphi_i(x_0) = 0,\ i = s+1, \ldots, k$. Они образуют систему из $k+n$ уравнений с $k+n$ неизвестными $\lambda_i^0,\ i = 1, \ldots, k;\ x_j,\ j = 1, \ldots, n$. Используя какой-нибудь численный метод решения подобных систем, можно найти решение (λ^0, x_0). Однако, в силу того, что условия (3.8)-(3.10) не являются достаточными условиями оптимальности, точка x_0 может даже не быть локальным экстремумом задачи (3.4)-(3.7). Необходимые и достаточные условия оптимальности удается получить для более узких классов нелинейных задач. Например, для задач выпуклого программирования, которые рассматриваются ниже.

3.5 Необходимые и достаточные условия экстремума

Рассмотрим задачу выпуклого программирования вида

$$\min f(x), \tag{3.12}$$

$$\varphi_i(x) \le 0, \quad i = 1, ..., m, \tag{3.13}$$

$$x \in G \subset R^n, \tag{3.14}$$

где G – выпуклое замкнутое множество, имеющее внутренние точки, f, φ_i – выпуклые функции. Предположим, что $x_0 \in G$ и для каждой из функций $f(x) - f(x_0)$, $\varphi_i(x)$, $i = 1, ..., m$, существуют непустые подмножества пространства R^n, на которых они принимают отрицательные значения. Конусы внутренних направлений из точки x_0 для множеств $G_0 = \{x \in R^n \mid f(x) < f(x_0)\}$, $G_i = \{x \in R^n \mid \varphi_i(x) \le 0\}, i = 1, \ldots, m$, и G в данном случае выглядят следующим образом:

$$\Gamma_0 = \{e \mid e = \nu(x - x_0), \nu > 0, f(x) < f(x_0)\},$$

$$\Gamma_i = \begin{cases} R^n, & \text{если } \varphi_i(x_0) < 0, \\ \{e \mid e = \nu(x - x_0), \nu > 0, \varphi_i(x) < 0\}, & \text{если } \varphi_i(x_0) = 0, \end{cases}$$

$$\Gamma = \{e \mid e = \nu(x - x_0), \nu > 0, x \in intG\}.$$

Конус предельных направлений при отсутствии ограничений – равенств есть все пространство R^n.

Определение 3.5 *Вектор $h \in R^n$ называется субградиентом функции f в точке x_0, если для любого $x \in R^n$ справедливо неравенство $f(x) - f(x_0) \ge \langle h, x - x_0 \rangle$.*

Множество всех субградиентов функции f в точке x_0 будем обозначать $\partial f(x_0)$ и называть субдифференциалом f в точке x_0.

Лемма 3.11 *Конусы $\Gamma_0^*, \Gamma_i^*, i = 1, \ldots, m$, задаются равенствами*

$$\Gamma_0^* = \{c_0 \mid c_0 = -\lambda_0 h, h \in \partial f(x_0), \lambda_0 \ge 0\},$$

$$\Gamma_i^* = \{c_i \mid c_i = -\lambda_i h, h \in \partial\varphi_i(x_0), \lambda_i \ge 0, \lambda_i\varphi_i(x_0) = 0\}, \; i = 1, \ldots, m.$$

Доказательство. Включение " $\supseteq$ " легко следует из определения сопряженного конуса и субградиента. Покажем обратное включение. Пусть $c_0 \in \Gamma_0^*$. Тогда по определению сопряженного конуса для всех x, удовлетворяющих неравенству $f(x) < f(x_0)$, и всех $\nu > 0$ справедливо

$$\nu\langle c_0, x - x_0\rangle \geq 0.$$

Следовательно, для любого $c_0 \in \Gamma_0^*$ из неравенства $f(x) < f(x_0)$ следует

$$\langle c_0, x - x_0\rangle \geq 0.$$

Рассмотрим в пространстве R^2 множество

$$Y = \{(y^1, y^2) \mid \exists x \in R^n : y^1 = \langle c_0, x - x_0\rangle, y^2 \geq f(x) - f(x_0)\}.$$

Из выпуклости функции f следует выпуклость множества Y. Так как $c_0 \in \Gamma_0^*$, то множество Y не пересекается с отрицательным ортантом

$$R^2_- = \{\alpha \in R^2 \mid \alpha^1 < 0, \alpha^2 < 0\}.$$

По теореме 3.2 существует ненулевой вектор $\mu \in R^2$ такой, что при всех $\alpha \in R^2_-$ и всех $y \in Y$ (рис. 7) справедливо

$$\mu^1\alpha^1 + \mu^2\alpha^2 \leq \mu^1 y^1 + \mu^2 y^2.$$

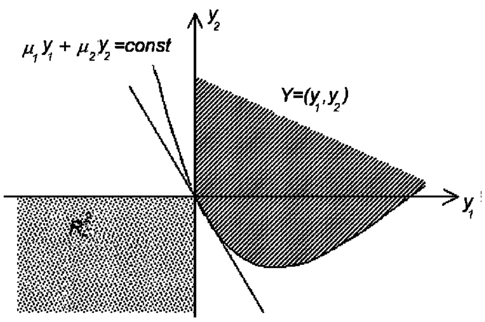

Рис. 7. Множества Y, R^2_- и отделяющая гиперплоскость

Положим $y^1 = \langle c_0, x - x_0\rangle, y^2 = f(x) - f(x_0)$. Тогда при любых $x \in R^n, \alpha^1 < 0, \alpha^2 < 0$ верно

$$\mu^1\alpha^1 + \mu^2\alpha^2 \le \mu^1\langle c_0, x - x_0\rangle + \mu^2(f(x) - f(x_0)).$$

Это возможно лишь в том случае, когда $\mu^1 \ge 0, \mu^2 \ge 0$ и для всех $x \in R^n$

$$\mu^1\langle c_0, x - x_0\rangle + \mu^2(f(x) - f(x_0)) \ge 0.$$

Если $c_0 \ne 0$, то это неравенство может выполняться для всех $x \in R^n$ только при $\mu^2 > 0$. Следовательно,

$$f(x) - f(x_0) \ge \langle -\mu^1/\mu^2\ c_0, x - x_0\rangle$$

для всех $x \in R^n$. Это означает, что вектор $h = -\mu^1/\mu^2\ c_0$ принадлежит $\partial f(x_0)$. Так как существуют точки x, в которых $f(x) < f(x_0)$, то $\mu^1 > 0$. Поэтому

$$c_0 = -\lambda_0 h,$$

где $\lambda_0 = \mu^2/\mu^1 > 0$.

Аналогично устанавливается, что

$$\Gamma_i^* = \{c_i \mid c_i = -\lambda_i h, h \in \partial\varphi_i(x_0), \lambda_i \ge 0\}$$

в том случае, если $\varphi_i(x_0) = 0$ при $i \le m$. Учитывая, что из условия $\varphi_i(x_0) < 0$ вытекает равенство $\Gamma_i^* = \{0\}$, получаем

$$\Gamma_i^* = \{c_i \mid c_i = -\lambda_i h, h \in \partial\varphi_i(x_0), \lambda_i \ge 0, \lambda_i\varphi_i(x_0) = 0\}$$

для любого $i = 1, ..., m$. Лемма доказана.

Определение 3.6 *Функции*

$$L(x, \lambda) = f(x) + \langle\lambda, \varphi(x)\rangle = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\varphi_i(x) \tag{3.15}$$

и

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \langle \lambda, \varphi(x) \rangle = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x) \qquad (3.16)$$

называются соответственно функцией Лагранжа и обобщенной функцией Лагранжа для задачи (3.12)-(3.14).

Определение 3.7 *Пару* (x_0, λ^0), *где* $x_0 \in G$, $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0) \geq 0$, *назовем седловой точкой функции Лагранжа, если для любых* $x \in G, \lambda \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$L(x, \lambda^0) \geq L(x_0, \lambda^0) \geq L(x_0, \lambda).$$

Как следует из определения 3.7, седловая точка (x_0, λ^0) доставляет минимум функции Лагранжа по переменным x при фиксированном значении $\lambda = \lambda_0$ и максимум по переменным λ при фиксированном значении $x = x_0$ (рис. 8).

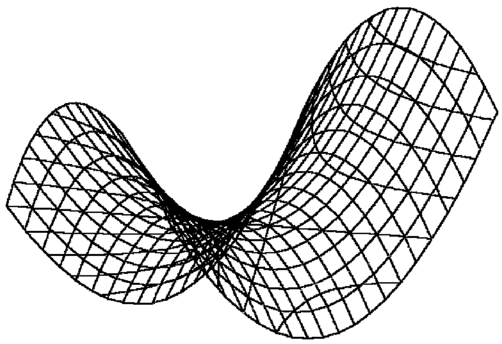

Рис. 8. Седловая точка функции Лагранжа

Условие Слейтера. *Говорят, что для задачи (3.12)-(3.14) выполнено условие Слейтера, если существует* $x' \in G$ *такое, что*

$$\varphi_i(x') < 0 \text{ для всех } i = 1, \dots, m.$$

Если условие Слейтера выполняется, то множество допустимых решений содержит внутреннюю точку. Обратное, вообще говоря, не верно (рис. 9).

Теорема 3.9 (Куна-Таккера) *Пусть выполнено условие Слейтера и $x_0 \in G$. Тогда x_0 — решение задачи (3.12)-(3.14) в том и только в том случае, когда существуют неотрицательные множители $\lambda_i^0 \geq 0$, $i = 1, ..., m$, такие, что пара (x_0, λ^0) есть седловая точка функции Лагранжа L.*

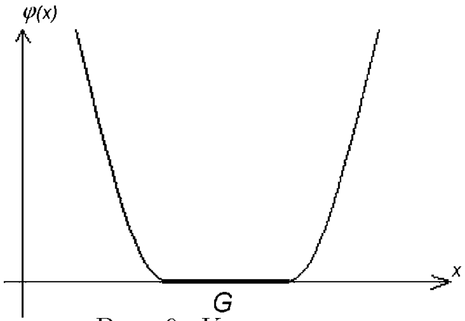

Рис. 9. Контрпример

Доказательство. Необходимость. Пусть x_0 — оптимальное решение задачи (3.12)-(3.14). Тогда $\cap_{i=0}^m \Gamma_i \cap \Gamma = \emptyset$ и по теореме Дубовицкого-Милютина существуют не все равные нулю векторы $c_i \in \Gamma_i^*, i = 0, \ldots, m, c \in \Gamma^*$ такие, что $c_0 + c_1 + ... + c_m + c = 0$. Следовательно, $c = -\sum_{i=0}^m c_i$. Теперь, из представления конусов $\Gamma_0^*, \Gamma_i^*, \ i = 1, \ldots, m,$, найденного в лемме 3.11, следует, что существуют не все равные нулю множители $\lambda_i^0 \geq 0, \ i = 0, \ldots, m$, и не все равные нулю векторы $h_i, \ i = 0, \ldots, m$, такие, что

$$\lambda_i^0 \geq 0, \ i = 0, \ldots, m,$$

$$\lambda_i^0 \varphi_i(x_0) = 0, \ i = 1, ..., m,$$

$$h_0 \in \partial f(x_0), h_i \in \partial \varphi_i(x_0), \ i = 1, ..., m,$$

$$\langle \lambda_0^0 h_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 h_i, x - x_0 \rangle \geq 0$$

для любого x из G. Вектор $\lambda_0^0 h_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 h_i$ является субградиентом функции $L(x, \lambda_0, \lambda^0)$ в точке x_0 и с учетом предыдущих неравенств имеем:

$$L(x, \lambda_0^0, \lambda^0) - L(x_0, \lambda_0^0, \lambda^0) \geq \langle \lambda_0^0 h_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 h_i, x - x_0 \rangle \geq 0,$$

при всех $x \in G$. Из последнего неравенства следует, что для всех $x \in G$ справедливо

$$L(x, \lambda_0^0, \lambda^0) \geq L(x_0, \lambda_0^0, \lambda^0).$$

Так как x_0 — оптимальное решение задачи (3.12)-(3.14), то из равенств $\lambda_i^0 \varphi_i(x_0) = 0, i = 1, \ldots, m$, следует $\lambda_0^0 f(x_0) \geq \lambda_0^0 f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_0)$ для любого $\lambda \geq 0$. Следовательно,

$$L(x, \lambda_0^0, \lambda^0) \geq L(x_0, \lambda_0^0, \lambda^0) \geq L(x_0, \lambda_0^0, \lambda)$$

при любых $x \in G, \lambda \geq 0$. Если $\lambda_0^0 \neq 0$, то, поделив эти неравенства на λ_0^0, получаем требуемое. Докажем, что $\lambda_0^0 \neq 0$. В силу условия Слейтера найдется $x' \in G$ такое, что $\varphi_i(x') < 0$ для $i = 1, ..., m$. Подстановка $x = x'$ в неравенство $L(x, \lambda_0^0, \lambda^0) \geq L(x_0, \lambda_0^0, \lambda^0)$ дает

$$\lambda_0^0 f(x_0) \leq \lambda_0^0 f(x') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \varphi_i(x'),$$

откуда при $\lambda_0^0 = 0$ в силу неравенств $\lambda_i^0 \geq 0, \varphi_i(x') < 0, \ i = 1, \ldots, m$ следовало бы, что множители $\lambda_i^0, \ i = 1, \ldots, m$ тоже равны нулю. Это невозможно, так как среди чисел $\lambda_i^0, \ i = 0, \ldots, m$ должны быть положительные.

Достаточность. Покажем, что существование седловой точки (x_0, λ^0) функции Лагранжа $L(x, \lambda)$ достаточно для оптимальности x_0 в задаче (3.12)-(3.14). По определению седловой точки имеем

$$L(x_0, \lambda) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_0) \leq$$

$$\leq f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \varphi_i(x_0) = L(x_0, \lambda^0)$$

для всех $\lambda \geq 0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_0) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \varphi_i(x_0). \tag{3.17}$$

Заметим, что $\varphi_i(x_0) \leq 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$. В противном случае $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_0)$ неограничена сверху на множестве неотрицательных λ, что противоречит неравенству (3.17). Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \varphi_i(x_0) \leq 0, \tag{3.18}$$

и x_0 — допустимое решение задачи. Положим в неравенстве (3.17) $\lambda = 0$. Тогда $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \varphi_i(x_0) \geq 0$. Учитывая (3.18), получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \varphi_i(x_0) = 0. \tag{3.19}$$

Из неравенства $L(x, \lambda^0) \geq L(x_0, \lambda^0)$ и (3.19) следует, что

$$L(x_0, \lambda^0) = f(x_0) \leq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \varphi_i(x)$$

для всех $x \in G$. Если точка x является допустимым решением задачи (3.12)-(3.14), то

$$f(x_0) \leq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \varphi_i(x) \leq f(x).$$

Теорема доказана.

Раздел 4. Численные методы нелинейного программирования

Рассмотрим численные методы решения задачи поиска безусловного минимума функции $f(x)$, заданной на всем пространстве R^n. Релаксационными называются методы, в которых строится последовательность векторов $x^0, x^1, \ldots, x^k, \ldots$, удовлетворяющая условию

$$f(x^0) \geq f(x^1) \geq ... \geq f(x^k) \geq \ldots .$$

В этих методах векторы x^k вычисляются по формуле

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k,$$

где p^k — направление спуска, α_k — длина шага вдоль этого направления.

Важнейшей характеристикой численных методов является их скорость сходимости. При оценке качества метода говорят о линейной скорости сходимости, если для $k = 0, 1, \ldots$

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq q \; \|x^k - x^*\|$$

или о сходимости со скоростью геометрической прогрессии

$$\|x^k - x^*\| \leq q^k \; \|x^0 - x^*\|,$$

где x^* — минимум функции $f(x)$, а q — некоторая константа, $0 < q < 1$. Скорость сходимости сверхлинейна, если

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq q_k \; \|x^k - x^*\|,$$

где $q_k \to 0$ при $k \to \infty$, и квадратична, если

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq C \; \|x^k - x^*\|^2, C \geq 0.$$

Алгоритмы безусловной минимизации принято делить на классы, в зависимости от максимального порядка вычисляемых производных минимизируемой функции. Методы, использующие только значения самой целевой функции, относят к методам нулевого порядка. Если требуется вычисление первых производных, то мы имеем дело с методами первого порядка и так далее.

4.1 Градиентные методы

Вектор $-f'(x_k)$ является направлением наискорейшего убывания функции $f(x)$ и называется антиградиентом. Выбирая в качестве направления спуска p^k антиградиент функции $f(x)$ в точке x_k, приходим к итерационному процессу вида

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k f'(x_k), \alpha_k \geq 0.$$

Все итерационные процессы, в которых направление движения на каждом шаге совпадает с антиградиентом (градиентом) функции, называются градиентными методами и отличаются друг от друга способами выбора длины шага α_k. Существует много различных способов выбора длины шага α_k, но наиболее распространены три из них. Первый называется методом с постоянным шагом: $\alpha_k = \alpha$. Второй — метод с дроблением шага. Он связан с проверкой на каждом шаге неравенства

$$f(x^k - \alpha_k\ f'(x^k)) - f(x^k) \leq -\epsilon\ \alpha_k\ \|f'(x^k)\|^2,$$

где ϵ — некоторая константа из интервала $(0, 1)$.

В третьем методе при переходе из точки x^k в точку x^{k+1} минимизируется по α функция $f(x^k - \alpha\ f'(x^k))$:

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha \geq 0} f(x^k - \alpha\ f'(x^k)).$$

Это метод наискорейшего спуска.

Следующая теорема содержит достаточные условия сходимости метода с постоянным шагом.

Теорема 4.1 (Первая теорема сходимости) *Пусть функция f дифференцируема в R^n, ограничена снизу $f(x) \geq f^* > -\infty$, выполняется условие Липшица для градиента $f'(x)$:*

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq L \; \|x - y\|$$

и длина шага α удовлетворяет условию $0 < \alpha < 2/L$. Тогда

$$f'(x^k) \to 0 \text{ при } k \to \infty \text{ и } f(x^{k+1}) \leq f(x^k),$$

при любом выборе начального приближения x_0.

Доказательство. Воспользуемся формулой конечных приращений

$$f(x+y) = f(x) + \int\limits_0^1 \langle f'(x+\tau y), y\rangle \, d\tau,$$

которую перепишем в следующем виде:

$$f(x+y) = f(x) + \langle f'(x), y\rangle + \int\limits_0^1 \langle f'(x+\tau y) - f'(x), y\rangle \, d\tau.$$

Сделаем подстановки $x = x^k, y = -\alpha f'(x^k)$. Тогда из неравенства Коши - Буняковского $|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \; \|b\|$ и условия Липшица получим

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle f'(x^k), -\alpha f'(x^k)\rangle +$$

$$+ \int\limits_0^1 |\langle f'(x^k - \tau\alpha f'(x^k)) - f'(x^k), -\alpha f'(x^k)\rangle| d\tau \leq$$

$$\leq f(x^k) - \alpha \; \|f'(x^k)\|^2 +$$

$$+ \int\limits_0^1 \|f'(x^k - \tau\alpha f'(x^k)) - f'(x^k)\| \|\alpha f'(x^k)\| d\tau \leq$$

$$\leq f'(x^k) - \alpha \, \|f'(x^k)\|^2 + \int\limits_0^1 L\|\tau\alpha f'(x^k)\| \, \|\alpha f'(x^k)\| d\tau =$$

$$= f(x^k) - \alpha \, \|f'(x^k)\|^2 + L\alpha^2 \, \|f'(x^k)\|^2 \int\limits_0^1 \tau d\tau \; =$$

$$= f(x^k) - \alpha(1 - L\alpha/2)\|f'(x^k)\|^2 = f(x^k) - \gamma\|f'(x^k)\|^2,$$

где $\gamma = \alpha(1 - L\alpha/2)$. Из условий теоремы следует, что $\gamma > 0$ и, следовательно,

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k).$$

Кроме того, для любого s выполняется неравенство:

$$f(x^{s+1}) \leq f(x^0) - \gamma \sum_{k=0}^{s} \|f'(x^k)\|^2.$$

Поэтому, учитывая ограниченность функции f на множестве R^n, получаем оценку сверху для частичных сумм:

$$\sum_{k=0}^{s} \|f'(x^k)\|^2 \leq (f(x^0) - f(x^{s+1}))/\gamma \leq (f(x^0) - f^*)/\gamma.$$

Откуда и следует сходимость к нулю градиента $f'(x^k)$ при $k \to \infty$. Теорема доказана.

В условиях теоремы 4.1 градиентный метод обеспечивает сходимость последовательности $\{f(x^k)\}$ либо к точной нижней грани $\inf_x f(x)$ (если функция $f(x)$ не имеет минимума), либо к значению $f(x^*)$, где $x^* = \lim_{k\to\infty} x^k$ и $f'(x^*) = 0$ (если такой предел существует). Существуют примеры, когда в точке x^* реализуется седло, а не минимум. Тем не менее, на практике методы градиентного спуска обычно обходят седловые точки и находят локальные минимумы целевой функции. Для оценки скорости сходимости метода предположений теоремы 4.1 недостаточно. Сделаем это в случае, когда $f(x)$ — сильно выпуклая функция.

Определение 4.1 *Дифференцируемая функция f называется сильно выпуклой (с константой $l > 0$), если для любых x и y из R^n справедливо*

$$f(x+y) \geq f(x) + \langle f'(x), y\rangle + l\|y\|^2/2. \qquad (4.1)$$

Лемма 4.1 *Если функция f является сильно выпуклой (с константой $l > 0$), то она имеет глобальный минимум на R^n.*

Доказательство. Из условия (4.1) и неравенства Коши - Буняковского следует

$$f(x+y) \geq f(x) - \|f'(x)\|\|y\| + l\|y\|^2/2.$$

Пусть $r = 2\|f'(x)\|/l$. Если $\|y\| > r$, то

$$f(x+y) \geq f(x) + \|y\|(l\|y\|/2 - \|f'(x)\|) > f(x). \qquad (4.2)$$

Рассмотрим шар $B(x,r)$ с центром в точке x и радиуса r. По теореме Вейерштрасса непрерывная функция f достигает своего минимума на шаре $B(x,r)$ в некоторой точке x^*. Из неравенства (4.2) следует, что x^* — минимум на всем R^n. Лемма доказана.

Лемма 4.2 *Если функция f является сильно выпуклой (с константой $l > 0$) и x^* — ее глобальный минимум, то для любого $x \in R^n$ выполняется неравенство*

$$\|f'(x)\|^2 \geq 2l(f(x) - f(x^*)). \qquad (4.3)$$

Доказательство. Так как функция f сильно выпуклая, то подстановка $y = x^* - x$ в (4.1) дает следующее неравенство

$$f(x) - f(x^*) + \langle f'(x), x^* - x\rangle + l\|x^* - x\|^2/2 \leq 0.$$

Так как

$$\langle f'(x)/\sqrt{2l} + \sqrt{l/2}(x^* - x), f'(x)/\sqrt{2l} + \sqrt{l/2}(x^* - x)\rangle =$$

$$= \|f'(x)/\sqrt{2l} + \sqrt{l/2}(x^* - x)\|^2 \geq 0,$$

то

$$\|f'(x)\|^2/2l + \langle f'(x), x^* - x\rangle + l\|x^* - x)\|^2/2 \geq 0 \geq$$
$$\geq f(x) - f(x^*) + \langle f'(x), x^* - x\rangle + l\|x^* - x\|^2/2.$$

После приведения подобных членов получим требуемое неравенство. Лемма доказана.

Теорема 4.2 (Вторая теорема сходимости) *Пусть функция f дифференцируема в R^n, является сильно выпуклой, выполняется условие Липшица для градиента $f'(x) : \|f'(x) - f'(y)\| \leq L\ \|x - y\|$ и длина шага α удовлетворяет условию $0 < \alpha < 2/L$. Тогда*

$$x^k \to x^* \text{ при } k \to \infty \text{ и } \|x^k - x^*\| \leq Cq^k,\ 0 \leq q < 1.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством, полученным при доказательстве теоремы 4.1:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \alpha(1 - L\alpha/2)\|f'(x^k)\|^2.$$

По лемме 4.1 существует глобальный минимум x^* функции f. Используя (4.3), получим

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - l\alpha(2 - L\alpha)(f(x^k) - f(x^*)).$$

Вычитая из обеих частей неравенства величину $f(x^*)$, получим

$$f(x^{k+1}) - f(x^*) \leq (1 - l\alpha(2 - L\alpha))(f(x^k) - f(x^*)). \qquad (4.4)$$

Обозначим через q_1 коэффициент при выражении $(f(x^k) - f(x^*))$. Понятно, что

$$f(x^{k+1}) - f(x^*) \leq q_1^{k+1}(f(x^0) - f(x^*)). \qquad (4.5)$$

Проверим, что $q_1 \geq 0$. Функция f является сильно выпуклой. Значит, она не может быть константой и имеется возможность выбрать начальную точку x^0 так, чтобы $f(x^0) > f(x^*)$. Из неравенства (4.4) при $k = 0$ имеем

$$0 \leq f(x^1) - f(x^*) \leq q_1(f(x^0) - f(x^*)),$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Так как $q_1 < 1$, то $f(x^k) \to f(x^*)$. Учитывая, что $f'(x^*) = 0$, из (4.1) при подстановках $y = x^k - x^*$ и $x = x^*$ получим

$$(f(x^k) - f(x^*)) \geq l\|x^k - x^*\|^2/2.$$

Следовательно,

$$\|x^k - x^*\|^2 \leq 2q_1^k \ (f(x^0) - f(x^*))/l.$$

Последнее неравенство влечет линейную оценку скорости сходимости метода

$$\|x^k - x^*\| \leq Cq^k,$$

где $C = \sqrt{2(f(x^0) - f(x^*))/l}$, $q = \sqrt{q_1}$, а также сходимость последовательности $\{x^k\}$ к единственной точке минимума x^*. Теорема доказана.

4.2 Метод Ньютона

Перейдем к изложению метода второго порядка, использующего вторые частные производные минимизируемой функции $f(x)$. Этот метод является прямым обобщением метода Ньютона для отыскания решения системы уравнений $\varphi(x) = 0$, где $\varphi : R^n \to R^n$. Возьмем линейную аппроксимацию функции $\varphi(x)$ в окрестности точки x^k и перепишим уравнение в следующем виде:

$$\varphi(x) = \varphi(x^k) + \varphi'(x^k)(x - x^k) + o(\|x - x^k\|) = 0.$$

Отбрасывая последний член в этом разложении, получим линейную систему уравнений относительно нового приближения x^{k+1}.

Таким образом, метод Ньютона отыскания решения системы уравнений описывается следующей формулой:

$$x^{k+1} = x^k - (\varphi'(x^k))^{-1}\ \varphi(x^k).$$

Рассмотрим теперь случай, когда функция $\varphi(x)$ является градиентом некоторой функции $f(x)$. Формула метода Ньютона для решения уравнения $f'(x) = 0$ выглядит так:

$$x^{k+1} = x^k - (f''(x^k))^{-1}\ f'(x^k).$$

В этом случае метод Ньютона можно интерпретировать как поиск точки минимума квадратичной аппроксимации функции $f(x)$ в окрестности точки x^k.

Лемма 4.4 *Пусть f — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Если f — сильно выпуклая функция с константой l, то выполняется следующее неравенство:*

$$\|[f''(x)]^{-1}\| \leq l^{-1}.$$

Доказательство. Пользуясь теоремой о среднем, получим следующие формулы для конечных приращений функции f:

$$f(x+y) - f(x) = \int\limits_0^1 \langle f'(x+ty), y\rangle dt = \langle f'(x+\tau_1 y), y\rangle =$$

$$= \langle f'(x), y\rangle + \langle f''(x+\tau_2 y)y, y\rangle/2,$$

где $0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq 1$. Воспользуемся условием сильной выпуклости

$$\langle f''(x+\tau_2 y)y, y\rangle/2 = f(x+y) - f(x) - \langle f'(x), y\rangle \geq l\|y\|^2/2.$$

Заменяя y на ty, получим:

$$\langle f''(x+\tau_2 ty)ty, ty\rangle \geq l\|ty\|^2.$$

Следовательно,

$$t^2\langle f''(x+\tau_2 ty)y, y\rangle \geq t^2 l\|y\|^2.$$

Поделив на t^2 и устремляя t к нулю, будем иметь

$$\langle f''(x)y, y\rangle \geq l\|y\|^2.$$

Положим $y = (f''(x))^{-1}z$ и, используя неравенство Коши-Буняковского, получим $l\|(f''(x))^{-1}z\| \leq \|z\|$ для любого z. Это означает, что

$$\|[f''(x)]^{-1}\| \leq l^{-1}.$$

Лемма доказана.

Пусть последовательность $\{x^k\}$ получена с помощью метода Ньютона и точка x^* — глобальный минимум функции f. Нижеследующая теорема устанавливает условия квадратичной скорости сходимости метода.

Теорема 4.3 *Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция f сильно выпукла (с константой $l > 0$), вторая производная удовлетворяет условию Липшица*

$$\|f''(x) - f''(y)\| \leq L\ \|x - y\|, \text{ для любых } x, y \in R^n,$$

и $q = L\|f'(x^0)\|/2l^2 < 1$. Тогда $x^k \to x^*$ при $k \to \infty$ и метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости

$$\|x^k - x^*\| \leq (2l/L)q^{2^k}.$$

Доказательство. Воспользуемся следующей формулой конечных приращений:

$$g(x+y) = g(x) + \langle g'(x), y\rangle + \int_0^1 (g'(x+\tau y) - g'(x))d\tau.$$

Подставим вместо g производную функции f и, применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\|f'(x+y) - f'(x) - \langle f''(x), y\rangle\| \le L\|y\|^2/2.$$

Тогда для $x = x^k$ и $y = -[f''(x^k)]^{-1} f'(x^k)$ имеем

$$\|f'(x^{k+1})\| \le (L/2)\|[f''(x^k)]^{-1}\|^2 \|f'(x^k)\|^2.$$

Применяя лемму 4.4, получим

$$\|f'(x^{k+1})\| \le (L/2l^2)\|f'(x^k)\|^2.$$

Итерируя это неравенство по k, приходим к неравенству

$$\|f'(x^{k+1})\| \le (2l^2/L)\ (\underbrace{L\|f'(x^0)\|/2l^2}_{q})^{2^{k+1}}.$$

Остается показать, что

$$\|f'(x^{k+1})\| \ge l\|x^{k+1} - x^*\|.$$

Из определения 4.1 сильной-выпуклости имеем

$$\langle f'(x) - f'(y), x - y\rangle \ge l\|x - y\|^2.$$

Тогда при подстановке $y = x^*, x = x^{k+1}$, учитывая равенство $f'(x^*) = 0$, получим

$$l\|x^{k+1} - x^*\|^2 \le \langle f'(x^{k+1}), x^* - x^{k+1}\rangle \le$$

$$\le \|f'(x^{k+1})\|\ \|x^* - x^{k+1}\|,$$

откуда и следует требуемое неравенство. Теорема доказана.

4.3 Метод возможных направлений

Представленный ниже алгоритм предназначается для поиска экстремума при наличии ограничений только типа неравенств. Рассмотрим задачу

$$\min f(x) \tag{4.6}$$

$$\varphi_i(x) \le 0 \quad i = 1, ..., m, \tag{4.7}$$

$$x \in R^n, \tag{4.8}$$

где $f(x), \varphi_i(x)$ – гладкие выпуклые функции. Вводя дополнительные переменную и ограничение, можно сделать функционал задачи линейным:

$$\min y \tag{4.9}$$

$$f(x) \le y \tag{4.10}$$

$$\varphi_i(x) \le 0 \quad i = 1, ..., m, \tag{4.11}$$

$$x \in R^n, \tag{4.12}$$

Поэтому без ограничения общности будем считать, что $f(x) = \langle c, x\rangle$. Пусть, как и прежде, $Q = \{x \mid \varphi_i(x) \le 0, i = 1, \dots, m\}$ — множество допустимых решений задачи (4.6)-(4.8), $J(x) = \{i \mid \varphi_i(x) = 0\}$, и выполняется условие Слейтера.

Ненулевой вектор p назовем возможным направлением для множества Q из точки x, если найдется $\alpha_0 > 0$ такое, что для всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$ точка $x + \alpha p$ принадлежит Q.

Ненулевой вектор p называется направлением спуска для множества Q из точки x, если p возможное направление из этой точки и $\langle c, p\rangle < 0$.

Для фиксированной точки $x \in Q$ рассмотрим вспомогательную задачу линейного программирования

$$\xi^* = \min \xi \tag{4.13}$$

$$\langle c, p\rangle \le \xi \tag{4.14}$$

$$\langle \varphi_i'(x), p\rangle \le \xi \qquad \text{для всех } i \in J(x), \tag{4.15}$$

$$| p_l | \le 1, \quad \text{для всех } l = 1, \dots, n. \tag{4.16}$$

Условия (4.16) называются условиями нормировки. Из условий (4.16) и (4.14) следует, что целевая функция (4.13) ограничена снизу на множестве допустимых решений. Тогда из критерия разрешимости для задач линейного программирования следует, что найдется хотя бы одно оптимальное решение (p^*, ξ^*) задачи (4.13)-(4.16). Нулевое решение $p = 0, \xi = 0$ является допустимым решением вспомогательной задачи и, значит, $\xi^* \leq 0$.

Предположим, что $\xi^* < 0$. Тогда $\langle c, p^* \rangle \leq \xi^* < 0$ и $\langle \varphi_i'(x), p^* \rangle \leq \xi^* < 0, i \in J(x)$. Следовательно, $p^* \neq 0$ и для любого номера $i \in J(x)$ имеем

$$\varphi_i(x + \alpha p^*) = \varphi_i(x + \alpha p^*) - \varphi_i(x) = \langle \varphi_i'(x), p^* \rangle \alpha +$$

$$+ o(\alpha) \leq \alpha(\xi^* + o(\alpha)/\alpha) < 0$$

для всех достаточно малых $\alpha > 0$. Если $i \notin J(x)$, то есть $\varphi_i(x) < 0$, то в силу непрерывности функции φ_i неравенство $\varphi_i(x + \alpha p^*) < 0$ будет выполняться для всех достаточно малых $\alpha > 0$. Поэтому найдется $\alpha_0 > 0$ такое, что $x + \alpha p^* \in Q$ для всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$, и, следовательно, вектор p^* является возможным направлением для множества Q из точки x. Из неравенства (4.14) получим, что p^* является также и направлением спуска. Следовательно,

$$f(x + \alpha p^*) - f(x) = \langle c, p^* \rangle \alpha \leq \xi^* \alpha < 0.$$

Если $\xi^* = 0$, то нельзя утверждать, что p^* будет возможным направлением или направлением спуска в точке x. Например, может оказаться, что $\langle c, p^* \rangle = 0$ или $\varphi_i'(x) = 0$ для некоторого номера $i \in J(x)$.

В случае общей задачи нелинейного программирования без дополнительных условий типа выпуклости равенство $\xi^* = 0$ является лишь необходимым условием минимума. Для задачи выпуклого программирования (4.6)-(4.8) при выполнении условия Слейтера последнее равенство является также и достаточным условием оптимальности.

Теорема 4.4 (Критерий оптимальности) *Пусть (p^*, ξ^*) оптимальное решение вспомогательной задачи для $x^* \in Q$. Тогда $\xi^* = 0$ в том и только в том случае, когда x^* — оптимальное решение задачи (4.6)-(4.8).*

Доказательство. Покажем достаточность. Пусть x^* — оптимальное решение задачи (4.6)-(4.8) и предположим, что $\xi^* < 0$. Тогда $p^* \neq 0$. Рассмотрим вектор $x^* + \alpha p^*$ и выберем значение $\alpha = \alpha^*$ следующим образом.

Если $i \in J(x^*)$, то $\langle \varphi_i'(x^*), p^* \rangle < 0$. Следовательно, $\varphi_i(x^* + \alpha p^*) < 0$ при всех $\alpha \in (0, \alpha_i)$ для достаточно малого $\alpha_i > 0$.

Если $i \notin J(x^*)$, то есть $\varphi_i(x^*) < 0$, то в силу непрерывности функции $\varphi_i(x)$ неравенство $\varphi_i(x^* + \alpha p^*) < 0$ сохранится при всех $\alpha \in (0, \alpha_i)$ для достаточно малого $\alpha_i > 0$. Положим $\alpha^* = \min_{i=1,\ldots,m}\{\alpha_i\}$. Тогда для любого $\alpha \in (0, \alpha^*)$ вектор $x^* + \alpha p^*$ является допустимым решением задачи (4.6)-(4.8). Из условия $\langle c, p^* \rangle \leq \xi^* < 0$ получим $f(x^* + \alpha p^*) < f(x^*)$, при $\alpha \in (0, \alpha^*)$, что противоречит оптимальности x^*.

Докажем необходимость. Пусть x^* не является оптимальным решением задачи (4.6)-(4.8). Тогда существует $x \in Q$, для которого

$$f(x) - f(x^*) = \langle c, x - x^* \rangle < 0.$$

Пусть $p = x - x^*$. Тогда $\langle c, p \rangle < 0$. Если $\varphi_i(x^*) = 0$, то есть $i \in J(x^*)$, то из следующего неравенства для гладких выпуклых функций

$$\varphi_i(x) \geq \varphi_i(x^*) + \langle \varphi_i'(x^*), x - x^* \rangle$$

получим

$$\langle \varphi_i'(x^*), p \rangle \leq 0. \tag{4.17}$$

Из условия Слейтера следует существование вектора $\widetilde{x}$, для которого $\varphi_i(\widetilde{x}) < 0, i = 1, \ldots, m$. Пусть $\widetilde{p} = \widetilde{x} - x^*$. Если $i \in J(x^*)$, то аналогично (4.17) имеем

$$\langle \varphi_i'(x^*), \widetilde{p} \rangle < 0.$$

Выберем $p^* = p + \alpha \widetilde{p}$. Тогда при достаточно малом α справедливо $\langle c, p^* \rangle < 0$ и $\langle \varphi_i'(x^*), p^* \rangle < 0$ для $i \in J(x^*)$. Отсюда непосредственно вытекает, что $\xi^* < 0$. Теорема доказана.

Если в решении (p^*, ξ^*) задачи (4.13)-(4.16) величина $\xi^* < 0$ мала по абсолютной величине, то это может привести к замедлению скорости сходимости метода возможных направлений. Чтобы избежать этих трудностей, следует изменить множество номеров $J(x)$ в ограничении (4.15). Опишем один из таких подходов, в котором используется следующее множество номеров $\{i \mid -\delta < \varphi_i(x) \leq 0\}$, где δ—положительное число. Другими словами, это множество номеров ограничений задачи (4.6)-(4.8), которые в точке x выполняются как равенства с точностью до $\delta > 0$.

Пусть $\delta_0 > 0$ и $x_0 \in Q$ – некоторое начальное приближение. Допустим, что известно k–е приближение $x^k \in Q$ и $\delta_k > 0$. Введем множества номеров

$$J^k = J(x^k, \delta_k) = \{i \mid -\delta_k < \varphi_i(x^k) \leq 0\},$$

$$J_0^k = \{i \mid \varphi_i(x^k) = 0\}.$$

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\xi_k = \min \xi \tag{4.18}$$

$$\langle c, p \rangle \leq \xi \tag{4.19}$$

$$\langle \varphi_j'(x^k), p \rangle \leq \xi, \qquad \text{для всех } j \in J^k, \tag{4.20}$$

$$\mid p_l \| mid \leq 1, \quad \text{для всех } l = 1, \ldots, n. \tag{4.21}$$

Обозначим эту задачу $P(x^k, J^k)$. Приведем описание одной итерации метода возможных направлений. Пусть (p^k, ξ_k) — оптимальное решение задачи $P(x^k, J^k)$. Рассмотрим три случая:

1) Если $\xi_k \leq -\delta_k$, то полагаем $\delta_{k+1} = \delta_k$.

2) Если $-\delta_k < \xi_k < 0$, то полагаем $\delta_{k+1} = \delta_k/2$.

3) Если $\xi_k = 0$, то найдем решение $(\overline{p}^k, \overline{\xi}_k)$ задачи $P(x^k, J_0^k)$. При $\overline{\xi}_k = 0$ вектор x^k согласно критерию оптимальности является

оптимальным решением задачи (4.6)-(4.8). Если же $\overline{\xi}_k < 0$, то полагаем

$$\delta_{k+1} = \delta_k/2, \ p^k = \overline{p}^k.$$

Как уже упоминалось выше, в случае $\xi_k = 0$ нельзя утверждать, что вектор p^k является направлением спуска. Поэтому, решив задачу $P(x^k, J_0^k)$, на основании теоремы 4.4 можно оценить оптимально или нет текущее приближение x^k. Если $\overline{\xi}_k < 0$, то в качестве направления спуска выбирается вектор $\overline{p}^k$.

Длина шага α_k определяется по следующей схеме. Пусть α_{ki} – наименьший положительный корень уравнения $\varphi_i(x^k + \alpha\ p^k) = 0$. Тогда полагаем $\alpha_k = \min_i \alpha_{ki}$ и

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k\ p^k, \ J^{k+1} = J(x^{k+1}, \delta_{k+1}).$$

Теорема 4.5 *Пусть $\varphi_i(x)$ – гладкие выпуклые функции, выполнено условие Слейтера и множество Q ограничено. Тогда*
1) последовательность $\{f(x^k)\}$ сходится к величине
$f^* = \min_{x\in Q} f(x)$, то есть $f(x^k) = \langle c, x^k\rangle \to f^*$ при $k \to \infty$;
2) любая предельная точка x^* последовательности $\{x^k\}$ есть точка минимума функции $f(x)$ на множестве допустимых решений Q.

Доказательство. По построению последовательность $\{f(x^k)\}$ невозрастающая и, в виду ограниченности множества Q, существует предел $\hat{f} = \lim_k f(x^k)$ и

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \ \to 0 \text{ при } k \to \ \infty. \tag{4.22}$$

Величина δ_k на каждом шаге либо делится пополам, либо остается без изменений. Покажем, что $\delta = \lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$. Предположим противное, то есть $\delta > 0$. Тогда найдется K_0 такое, что $\delta_k = \delta$ и $\xi_k \leq -\delta$ для всех $k > K_0$. Другими словами, начиная с номера K_0 в алгоритме всегда реализуется первый случай $\delta_k = \delta$. Выберем некоторую сходящуюся подпоследовательность $\{x^{k_i}, p^{k_i}\} \to (x^*, p^*)$. Такая подпоследовательность существует в виду ограниченности множества Q и условия нормировки (4.21). Пусть

$$J^* = J(x^*, \delta) = \{j \mid -\delta < \varphi_j(x^*) \le 0\}.$$

Тогда при некотором $K_1 > K_0$ для всех $k_i > K_1$ справедливо $-\delta = -\delta_{k_i} < \varphi_j(x^{k_i}) \le 0$ для $j \in J^*$. Это означает, что $J^* \subseteq J^{k_i}$ для достаточно больших k_i. Следовательно,

$$\langle c, p^{k_i} \rangle \le \xi_{k_i} \le -\delta,$$

$$\langle \varphi_j'(x^{k_i}), p^{k_i} \rangle \le \xi_{k_i} \le -\delta, \text{ для } j \in J^*.$$

Тогда из непрерывности функций $\varphi_j'(x)$ следует $\langle \varphi_j'(x^*), p^* \rangle \le -\delta$ для $j \in J^*$. С другой стороны, $\varphi_j(x^*) \le -\delta$ для $j \notin J^*$. Отсюда вытекает, что существует $\alpha^* > 0$ такое, что $\varphi_j(x^* + \alpha^* \ p^*) < 0$ для всех j. С учетом непрерывности функций φ_j это означает, что $\varphi_j(x^{k_i} + \alpha^* \ p^{k_i}) < 0$ для достаточно больших k_i и всех j. Таким образом, отсюда следует, что $\alpha_{k_i} > \alpha^*$. Тогда $f(x^{k_i}) - f(x^{k_i+1}) = -\alpha_{k_i} \langle c, p^{k_i} \rangle > \alpha^* \delta > 0$, что противоречит (4.22). Следовательно, $\delta = 0$.

Покажем, что $\hat{f} = f^*$. Пусть $t_1 < t_2 < \ldots < t_i < \ldots$ – номера тех итераций, когда происходит дробление величины δ_k. Из неравенств $-\delta_{t_i} < \xi_{t_i} \le 0$ следует, что $\lim_{t_i \to \infty} \xi_{t_i} = 0$. Можно считать, что $x^{t_i} \to x^*$. Пусть $\hat{f} = f(x^*) > f^*$. Тогда из критерия оптимальности следует, что существуют $p^*, \xi^* < 0$ такие, что

$$\langle c, p^* \rangle \le \xi^*,$$

$$\langle \varphi_j'(x^*), p^* \rangle \le \xi^*, \text{ для } j \in J_0^* = \{i \mid \varphi_i(x^*) = 0\}.$$

С другой стороны, найдется $\sigma > 0 : \varphi_j(x^*) < -\sigma$ для всех $j \notin J_0^*$. Из непрерывной дифференцируемости функций $\varphi_j(x)$ следует, что найдется номер K такой, что для всех $t_i > K$

$$\langle c, p^* \rangle < \xi^*/2, \tag{4.23}$$

$$\langle \varphi_j'(x^{t_i}), p^* \rangle < \xi^*/2, \text{ для всех } j \in J_0^*, \tag{4.24}$$

$$\varphi_j(x^{t_i}) < -\sigma, \text{ для всех } j \notin J_0^*. \tag{4.25}$$

Кроме того, из сходимости к 0 последовательности $\{\delta_k\}$ следует неравенство $-\sigma \leq -\delta_{t_i}$ для достаточно больших t_i. Из последнего неравенства и неравенства (4.25) имеем $J^{t_i} \subseteq J_0^*$ для всех t_i больших некоторого $K_1 > K$. Отсюда, с учетом неравенств (4.23), (4.24) и выбора p^*, получаем

$$\langle c, p^* \rangle < \xi^*/2,$$

$$\langle \varphi_j'(x^{t_i}), p^* \rangle < \xi^*/2, \text{ для всех } j \in J^{t_i},$$

$$\|p_l^*\| \leq 1, \text{ для всех } l = 1, \ldots, n.$$

Таким образом,

$$\xi_{t_i} < \xi^*/2 < 0,$$

для любого $t_i > K_1$, что противоречит сходимости последовательности $\{\xi_{t_i}\}$ к нулю. Следовательно,

$$\hat{f} = f(x^*) = f^* = \min_{x \in Q} f(x).$$

Поскольку $f(x^k) > f(x^{k+1})$, то для любой предельной точки $\overline{x}$ последовательности $\{x^k\}$ имеет место равенство

$$f(\overline{x}) = f(x^*).$$

Теорема доказана.

4.4 Метод штрафных функций

Помимо метода возможных направлений существуют иные методы поиска условного экстремума. Одним из них является метод штрафных функций. Основная идея метода заключается в сведении исходной задачи

$$f(x) \to \min_{x \in Q} \tag{4.26}$$

$$Q = \{x \in R^n \mid \varphi_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., m\} \tag{4.27}$$

к последовательности задач минимизации

$$F_k(x) \to \min_{x \in R^n}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.28}$$

где $F_k(x)$ — некоторая вспомогательная функция, которая подбирается так, чтобы с ростом номера k она мало отличалась от исходной функции $f(x)$ на множестве Q и быстро возрастала на множестве $R^n \setminus Q$. Быстрый рост функции $F_k(x)$ вне Q приводит к тому, что при больших k нижняя грань этой функции на R^n будет достигаться в точках, близких к множеству Q, и решение задачи (4.28) будет приближаться при определенных условиях к решению исходной задачи (4.26)-(4.27). При этом имеется достаточно большой произвол в выборе функций $F_k(x)$. Это позволяет подобрать наиболее удобный вид минимизируемой функции $F_k(x)$ и применить более простые методы безусловной оптимизации.

Определение 4.2 *Функция $P_k(x)$ называется штрафной функцией множества Q, если $P_k(x) \geq 0$ для любых $k = 1, 2, \ldots$, $x \in R^n$ и*

$$\lim_{k \to \infty} P_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in Q \\ +\infty, & \text{если } x \notin Q. \end{cases}$$

Из этого определения видно, что при больших номерах k за нарушение условия $x \in Q$ приходится *платить* большой штраф, в то время как при $x \in Q$ этот штраф стремится к нулю с ростом k (рис. 10).

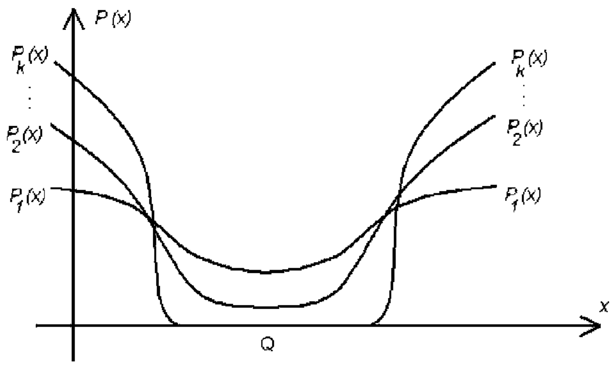

Рис. 10. Штрафные функции

Для любого множества Q можно указать сколь угодно много штрафных функций. Пусть $[a]_+ = \max(0, a)$ и

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(x)]_+.$$

Теперь множество допустимых решений представимо в виде

$$Q = \{x \in R^n \mid g(x) \leq 0\},$$

и штрафными функциями являются, например, следующие:

$$kg(x), \quad kg(x)^2, \quad e^{kg(x)}/k, \quad (1 + g(x))^k - 1.$$

Пусть штрафная функция $P_k(x)$ уже выбрана. Положим

$$F_k(x) = f(x) + P_k(x), \; k = 1, 2, \ldots$$

и будем считать, что

$$\inf_{x \in R^n} F_k(x) > -\infty, \quad \text{для всех } k = 1, 2, \ldots \tag{4.29}$$

Тогда для каждого k можно постараться найти решение задачи (4.28) и получить последовательность оптимальных решений.

К сожалению, нижняя грань в (4.29) может достигаться не при всех k. Поэтому зададимся последовательностью $\epsilon(k)$ такой, что $\epsilon(k) > 0,\ k = 1, 2, \dots$ и $\epsilon(k) \to 0$ при $k \to \infty$ и с помощью какого-либо метода безусловной оптимизации найдем точки $x^k,\ k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условию

$$F_k^* = \inf_{x \in R^n} F_k(x) \le F_k(x^k) \le F_k^* + \epsilon(k). \qquad (4.30)$$

Другими словами, вместо точного решения x^* будем искать приближенное решение x^k с погрешностью, не превосходящей $\epsilon(k)$. Отметим, что, вообще говоря, x^k может и не принадлежать Q. Дальнейшее изложение уже не зависит от того, каким именно методом будет найдена точка x^k. Поэтому мы ограничимся предположением о существовании такого метода и перейдем к исследованию сходимости метода штрафных функций.

Пусть штрафные функции $P_k(x)$ задаются с помощью вспомогательных функций $\Phi_k(g)$ равенствами $P_k(x) = \Phi_k(g(x))$ и функции $\Phi_k(g)$ таковы, что
a) $\Phi_k(g)$ определены и непрерывны для всех $k = 1, 2, \dots;$
b) $\Phi_k(g)$ положительны, монотонно возрастают по g и
$\lim\limits_{k \to \infty} \Phi_k(g) = +\infty$ для $g > 0$;
c) $\Phi_k(g)$ сходятся к 0 равномерно при $k \to \infty$ в области $g \le 0$.
Тогда следующая теорема дает достаточные условия сходимости метода штрафных функций.

Теорема 4.6 *Пусть функции f, g определены и непрерывны на R^n, $\inf_{x \in R^n} f(x) > -\infty$, штрафные функции удовлетворяют условиям a) b) c) и последовательность $\{x^k\}$ определяется соотношениями (4.30). Тогда*
1) $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} f(x^k) \le f^* = \inf\limits_{x \in Q} f(x)$ *и* $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} g(x^k) \le 0;$
2) если x^* принадлежит множеству $Lim\{x^k\}$ предельных точек последовательности $\{x^k\}$, то $x^* \in Q$ и $f(x^*) = f^*$;
3) если множество $Q_{\delta_0} = \{x \in R^n \mid g(x) \le \delta_0\}$ ограничено для

некоторого $\delta_0 > 0$, *то* $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = f^*$ *и*

$$\rho(x^k, Q) = \inf_{x\in Q} \|x^k - x\| \to 0 \text{ \textit{при} } k \to \infty.$$

Доказательство. 1) По определению f^* существует последовательность $\{y^m\}, y^m \in Q$, для которой $f(y^m) \to f^*$ при $m \to \infty$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдутся номера m_0, k_0 такие, что

$$f(y^m) \le f^* + \epsilon, \quad \epsilon(k) < \epsilon$$

при $m \ge m_0, k \ge k_0$. Учитывая $g(y^m) \le 0$ и условие c), можно считать, что

$$P_k(y^m) = \Phi_k(g(y^m)) \le \epsilon$$

при $m \ge m_0, k \ge k_0$. Из этих неравенств и условий теоремы имеем

$$f(x^k) \le F_k(x^k) \le F_k^* + \epsilon(k) \le$$

$$\le F_k(y^m) + \epsilon = f(y^m) + P_k(y^m) + \epsilon \le f^* + 3\epsilon.$$

Следовательно, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} f(x^k) \le f^*$.

Заметим, что при $k \ge k_0$ справедливо неравенство

$$\Phi_k(g(x^k)) = F_k(x^k) - f(x^k) \le f^* + 3\epsilon - \inf_{x\in R^n} f(x) < \infty.$$

Покажем, что отсюда следует неравенство $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} g(x^k) \le 0$. Предположим, что верно обратное неравенство. Тогда существует последовательность $\{x^{k_s}\}$, для которой $g(x^{k_s}) \ge \alpha > 0$ для всех s, больших некоторого s_0. Из условия b) имеем $0 < \Phi_{k_s}(\alpha) \le \Phi_{k_s}(g(x^{k_s})) \to +\infty$ при $s \to \infty$. Противоречие.

2) Пусть $x^* \in Lim\{x^k\}$. Тогда существует подпоследовательность $\{x^{k_s}\}$ сходящаяся к x^*. Функция $g(x)$ непрерывна и, как доказано ранее, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} g(x^k) \le 0$. Поэтому $\lim\limits_{s\to\infty} g(x^{k_s}) = g(x^*) \le 0$. Следовательно, $x^* \in Q$. Из условий теоремы имеем $f^* \le f(x^*) =$

$\lim\limits_{s\to\infty} f(x^{k_s})$, а из определения верхнего предела следует обратное неравенство $\lim\limits_{s\to\infty} f(x^{k_s}) \le \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} f(x^k) \le f^*$. Поэтому $f(x^*) = f^*$.

3) Докажем, что из установленного неравенства $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} g(x^k) \le 0$ следует $\rho(x^k, Q) \to 0$ при $k \to \infty$. Предположим, что существует $\overline{r} > 0$ такое, что для любого $s > 0$ найдется номер $k_s \ge s$, для которого $\rho(x^{k_s}, Q) > \overline{r}$. Рассмотрим подпоследовательность $\{x^{k_s}\}$. Из условия $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} g(x^k) \le 0$ следует, что существует номер N_0 такой, что для любого $k_s \ge N_0$ справедливо $g(x^{k_s}) \le \delta_0$. Так как множество Q_{δ_0} компактно, то без ограничения общности можно считать, что подпоследовательность $\{x^{k_s}\}$ сходится к точке $x_0 \in Q_{\delta_0}$. Из непрерывности функции $g(x)$ получим $g(x_0) \le 0$ и, следовательно, $x_0 \in Q$. Учитывая компактность множества Q, с помощью неравенства треугольника легко доказать, что для любых точек x' и x'' справедливо неравенство

$$|\rho(x', Q) - \rho(x'', Q)| \le \|x' - x''\|.$$

Следовательно, функция $\rho(x, Q)$ — непрерывна. Тогда

$$\rho(x^{k_s}, Q) \to \rho(x_0, Q) \text{ при } s \to \infty.$$

Поэтому справедливо неравенство $\rho(x_0, Q) \ge \overline{r} > 0$. В то же время выше было доказано, что $x_0 \in Q$. Получили противоречие. Мы показали, что из неравенства $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} g(x^k) \le 0$ следует $\rho(x^k, Q) \to 0$ при $k \to \infty$. Аналогичным образом можно показать, что из неравенства $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} g(x^k) \le 0$ следует $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = f^*$. Теорема доказана.

В заключение заметим, что метод штрафных функций в некотором смысле близок к методу множителей Лагранжа. В самом деле, при составлении функции Лагранжа ограничения задачи заносятся в целевую функцию с неизвестными множителями, что можно рассматривать как штраф за нарушение соответствующих ограничений. Достоинством метода множителей Лагранжа является то, что в нем отсутствуют неограниченно растущие коэффициенты типа штрафных коэффициентов. В то же время метод множителей Лагранжа предполагает существование седловой точки, а метод штрафных функций может использоваться для более широких классов задач и является более универсальным.

Раздел 5. Целочисленное линейное программирование

До сих пор нами рассматривались задачи, для которых наличие у множества допустимых решений нескольких компонент связности (в частности, изолированных точек) фактически считалось явлением аномальным, и потому рассмотренные методы решения на подобные ситуации не были рассчитаны. Однако в различных приложениях возникают задачи, в которых часть переменных (или все) обязаны принимать значения из некоторого дискретного (часто конечного) множества. Это приводит к необходимости разработки специальных методов для решения подобных задач.

В этом разделе будут рассмотрены задачи *целочисленного линейного программирования (ЦЛП)*, отличающиеся от обычных (непрерывных) задач ЛП наличием требования целочисленности переменных. Одна из возможных общих формулировок задачи ЦЛП такова:

$$cx \to \max \tag{5.1}$$

$$Ax = b \tag{5.2}$$

$$x \geq 0 \tag{5.3}$$

$$x_j \text{ — целое}, \ j = 1, \ldots, n. \tag{5.4}$$

Под *ЛП-релаксацией* задачи (5.1)–(5.4) будем понимать задачу ЛП (5.1)–(5.3), получаемую из исходной задачи ЦЛП путем отбрасывания условий целочисленности переменных.

Очевидную идею округления непрерывного (т.е. нецелочисленного) оптимального решения ЛП-релаксации для получения решения задачи ЦЛП нельзя признать подходящей для всех ситуаций. Прежде всего, далеко не всегда ясно, как провести округление до допустимого целочисленного решения. Кроме того, легко построить примеры, для которых целочисленный оптимум будет сколь угодно далек от непрерывного как по расстоянию в R^n, так и по значению целевой функции.

Как и в случае задач ЛП, для решения задач ЦЛП имеются конечные алгоритмы, однако общая задача ЦЛП оказывается существенно труднее и известные алгоритмы для нее значительно менее эффективны. В настоящее время известны два основных семейства методов решения задач ЦЛП: методы ветвей и границ и методы отсечения. Мы познакомимся здесь с методами отсечения, поскольку они представляют собой дальнейшее развитие уже известных нам методов линейного программирования.

5.1 Общая характеристика методов отсечения

Предположим, что мы решили ЛП-релаксацию данной задачи ЦЛП, например, с помощью какого-либо варианта симплекс-метода и нашли оптимальное базисное решение x^0. Если полученное решение удовлетворяет условию целочисленности, то оно и является оптимальным решением рассматриваемой задачи ЦЛП. Если же не все компоненты x^0 целочисленны, то формируется новая задача ЛП путем добавления нового ограничения. Добавляемое ограничение (называемое *отсечением*) выбирается так, что x^0 этому ограничению не удовлетворяет (отсекается), в то время как все допустимые решения задачи ЦЛП остаются допустимыми решениями новой задачи ЛП. Затем решается новая задача ЛП и выше указанные шаги повторяются до тех пор, пока не будет получено решение задачи ЦЛП, либо не обнаружится ее неразрешимость. В общем случае конечность такого процесса не гарантируется. Исторически первым алгоритмом рассматриваемого типа, конечность которого при достаточно общих предположениях установлена, был *первый* (или *циклический*) алгоритм Гомори. Сама идея метода принадлежит Данцигу.

5.2 Способ построения отсечений

Свойство метода отсечения быть или не быть конечным решающим образом зависит от способа получения отсечений. Приведем схему построения дополнительных ограничений, которая используется в излагаемых далее алгоритмах Гомори. В ее описании посредством $\lfloor h \rfloor$ обозначается целая часть числа h, т.е. наибольшее целое, не превосходящее h.

Пусть линейная функция

$$\xi = d_0 - \sum_j d_j x_j \tag{5.5}$$

принимает целые неотрицательные значения на множестве допустимых решений задачи (5.1)–(5.4) и $h \neq 0$. Если h — целое, то неотрицательности ξ не требуется. Тогда для любого x, являющегося допустимым решением задачи (5.1)–(5.4), имеют место следующие соотношения:

$$h\xi + \textstyle\sum_j hd_j x_j = hd_0, \tag{5.5$'$}$$

$$\lfloor h \rfloor \xi + \sum_j \lfloor hd_j \rfloor x_j \leq hd_0, \tag{5.6}$$

$$\lfloor h \rfloor \xi + \sum_j \lfloor hd_j \rfloor x_j \leq \lfloor hd_0 \rfloor, \tag{5.7}$$

$$\sum_j (\lfloor hd_j \rfloor - \lfloor h \rfloor d_j) x_j \leq \lfloor hd_0 \rfloor - \lfloor h \rfloor d_0. \tag{5.8}$$

Наконец, если

$$u = (\lfloor hd_0 \rfloor - \lfloor h \rfloor d_0) - \sum_j (\lfloor hd_j \rfloor - \lfloor h \rfloor d_j) x_j, \tag{5.9}$$

то

$$u \geq 0, \tag{5.10}$$

$$u \text{ — целое.} \tag{5.11}$$

Приведем некоторые пояснения к вышесказанному. При переходе от (5.5′) к (5.6) используется неотрицательность x_j и ξ. При этом в случае $\lfloor h \rfloor = h$ знак ξ не имеет значения, так как первые слагаемые в (5.5′) и (5.6) совпадают. Неравенство (5.8) получено из (5.7) путем исключения ξ с использованием (5.5). Неравенство (5.10) эквивалентно (5.8). По поводу (5.11) достаточно заметить, что u представляет собой разность двух целых чисел, а именно, левой и правой части неравенства (5.7).

Таким образом, добавление условий (5.9)–(5.11) к ограничениям задачи (5.1)–(5.4) порождает задачу ЦЛП того же вида и эквивалентную исходной. К новой задаче ЦЛП, в свою очередь, может быть применен тот же самый способ порождения дополнительных ограничений. Построение указанных ограничений должно быть конкретизировано так, чтобы можно было получить в конечном счете задачу ЦЛП, ЛП-релаксация которой имела бы целочисленное оптимальное базисное решение (при условии, что исходная задача ЦЛП разрешима).

Решение возникающих в ходе такого процесса ЛП-релаксаций целесообразно проводить двойственным симплекс-методом. Это связано с тем, что очередная задача ЛП получается путем добавления некоторого ограничения после того как будет найдено оптимальное решение предыдущей задачи. В этой ситуации не возникает каких-либо затруднений с нахождением начального двойственно допустимого базиса для новой задачи. При этом с целью обеспечения конечности процесса решения каждой из ЛП-релаксаций и, в конце концов, самой задачи ЦЛП нам придется воспользоваться лексикографическим вариантом двойственного симплекс-метода.

5.3 Лексикографический двойственный симплекс-метод (LD-метод)

Описание метода начнем с симплекс-таблицы, форма которой в данном случае будет отличаться от использовавшейся ранее (см. раздел 2).

Пусть для рассматриваемого базиса B множество номеров небазисных переменных есть $S' = \{\tau(1), \ldots, \tau(l)\}$, $l = n - m$; множество номеров базисных переменных — $S = \{1, \ldots, n\} \setminus S'$. Представление целевой функции (обозначаемой посредством x_0) и базисных переменных через небазисные (по существу, речь идет о системе $(2.1'')$, $(2.2'')$ из раздела 2) будем записывать следующим образом:

$$x_i = z_{i0} + \sum_{j=1}^{l} z_{ij}(-x_{\tau(j)}), \quad i \in S \cup \{0\}. \tag{5.12}$$

К этим уравнениям добавим также тождественные соотношения вида $x_i = x_i$ для небазисных переменных

$$x_i = (-1)(-x_i), \quad i \in S'. \tag{5.13}$$

Симплекс-таблица будет представлять собой матрицу коэффициентов z_{ij} правых частей уравнений системы (5.12)–(5.13). В этой таблице количество строк равно $n+1$, по одной строке для каждой переменной, включая и целевую функцию x_0. Число столбцов равно $l+1$, из которых 0-й содержит свободные члены уравнений, а остальные находятся во взаимно однозначном соответствии с небазисными переменными, так что j-му столбцу соответствует переменная $x_{\tau(j)}$ (со знаком минус). Например, в случае $\tau(j) = m + j$, $j = 1, \ldots, l$, симплекс-таблица имеет вид

	1	$-x_{m+1}$	$\ldots$	$-x_n$
x_0	z_{00}	z_{01}	$\ldots$	z_{0l}
.	.	.	$\ldots$	.
x_i	z_{i0}	z_{i1}	$\ldots$	z_{il}
.	.	.	$\ldots$	.
x_{m+1}	0	-1	$\ldots$	0
.	.	.	$\ldots$	.
x_n	0	0	$\ldots$	-1

Посредством β_j обозначим j-й столбец симплекс-таблицы, т.е.

$$\beta_j = (z_{0j}, z_{1j}, \ldots, z_{nj})^T, \; j = 0, 1, \ldots, l.$$

Тогда система уравнений (5.12),(5.13) может быть представлена одним векторным уравнением

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n)^T = \beta_0 + \sum_{j=1}^{l} \beta_j(-x_{\tau(j)}). \tag{5.14}$$

Если $z_{rs} \neq 0, r \in S, \; s \geq 1$, то может быть выполнено элементарное преобразование базиса, при котором базисная переменная x_r и небазисная переменная $x_{\tau(s)}$ поменяются ролями. При этом правая часть уравнения (5.14) должна быть преобразована и выражена через новый набор небазисных переменных. Для этого выразим переменную $x_{\tau(s)}$ из r-го уравнения системы

$$x_{\tau(s)} = \frac{1}{z_{rs}}(z_{r0} + \sum_{j \neq s} z_{rj}(-x_{\tau(j)}) - x_r)$$

и исключим ее из правой части в (5.14). После подстановки и приведения подобных получаем

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n)^T = (\beta_0 - \frac{z_{ro}}{z_{rs}}\beta_s) +$$

$$\sum_{j \neq s}(\beta_j - \frac{z_{rj}}{z_{rs}}\beta_s)(-x_{\tau(j)}) + (\frac{-1}{z_{rs}}\beta_s)(-x_r).$$

Таким образом, элементарное преобразование базиса, которому соответствует замена небазисной переменной $x_{\tau(s)}$ на x_r, т.е. $\tau(s) := r$, (или, что то же самое, замена базисной переменной x_r на $x_{\tau(s)}$) влечет преобразование симплекс-таблицы, описываемое схемой:

$$\begin{cases} \beta_j & \longleftarrow & \beta_j - \dfrac{z_{rj}}{z_{rs}}\beta_s, \; j \neq s, \\ \beta_s & \longleftarrow & (\dfrac{-1}{z_{rs}})\beta_s. \end{cases} \tag{5.15}$$

Симплекс-таблицу будем называть *нормальной*, если каждый ее столбец $\beta_j,\ j = 1, \ldots, l$ лексикографически больше нуля.

5.4 Описание LD-метода

0) Начать с нормальной симплекс-таблицы.
1) Если симплекс-таблица прямо допустима, т.е. $z_{i0} \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение).
2) Выбрать ведущую строку $r : z_{r0} < 0,\ r \geq 1$.
3) Если $\{j \mid z_{rj} < 0, j \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущий столбец s:

$$\frac{1}{|z_{rs}|}\beta_s = lexmin\{\ \frac{1}{|z_{rj}|}\beta_j\ \mid\ z_{rj} < 0,\ j \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).
4) Преобразовать симплекс-таблицу, положить $\tau(s) := r$ и перейти на шаг 1.

Замечания.

1) При выполнении преобразования (5.15) сохраняется нормальность симплекс-таблицы, что может быть доказано, по существу, тем же способом, что и в случае лексикографического варианта прямого симплекс-метода.

2) Нулевой столбец симплекс-таблицы при каждом ее преобразовании лексикографически уменьшается:

$$\beta_0 - \frac{z_{r0}}{z_{rs}}\beta_s \prec \beta_0,$$

так как $z_{r0} < 0,\ z_{rs} < 0$ и $\beta_s \succ 0$. Это свойство влечет невозможность повторения базисов, что обеспечивает конечность числа итераций.

3) Достаточно общий способ получения нормальной симплекс-таблицы на шаге 0 состоит в следующем. Пусть в полученной тем

или иным способом симплекс-таблице столбец $\beta_s = lexmin\{\beta_j \mid j \geq 1\}$ лексикографически отрицателен и для всех допустимых решений задачи выполняется неравенство $\sum_{j \in S'} x_j \leq M$. Тогда добавление ограничения $x_{n+1} = M + \sum_{j \in S'}(-x_j) \geq 0$ не изменяет множества допустимых решений. Дополнив (временно) симплекс-таблицу новой $(n+1)$-й строкой $(M, 1, \ldots, 1)$, соответствующей переменной x_{n+1}, и произведя преобразование с ведущим столбцом s и ведущей строкой $r = n+1$, мы получим нормальную симплекс-таблицу. После этого добавленную строку можно удалить.

5.5 Описание первого алгоритма Гомори

0) Начать с нормальной симплекс-таблицы (для задачи (5.1)–(5.3)). Положить $\nu := 0$.
1) Если симплекс-таблица прямо допустима и все элементы z_{i0}, $i = 1, \ldots, n$, целые, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение задачи (5.1)–(5.4)).
2) Если симплекс-таблица прямо допустима, то выбрать минимальное $p \geq 1$, такое, что z_{p0} — нецелое, положить $\nu := \nu + 1$. Строку с номером p считать *производящей*. Этой строке соответствует уравнение

$$x_p = z_{p0} - \sum_{j=1}^{l} z_{pj} x_{\tau(j)},$$

по которому строится дополнительное ограничение согласно описанному выше способу при $h = 1$ (роль ξ играет x_p):

$$x_{n+\nu} = -f_{p0} - \sum_{j=1}^{l} (-f_{pj}) x_{\tau(j)} \geq 0,$$

где f_{pj} — дробная часть числа z_{pj} $(z_{pj} = \lfloor z_{pj} \rfloor + f_{pj},\ 0 \leq f_{pj} < 1)$.

К симплекс-таблице добавляется $(n+1)$-я строка,
соответствующая дополнительному ограничению
(базисной переменной $x_{n+\nu}$).

3) Выбрать ведущую строку $r: \ z_{r0} < 0, \ r \geq 1$.

4) Если $\{j \mid z_{pj} < 0, \ j \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущий столбец s :

$$\frac{1}{|z_{rs}|}\beta_s = lexmin\{ \ \frac{1}{|z_{rj}|}\beta_j \ \mid \ z_{rj} < 0, \ j \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (текущая задача ЛП,
а следовательно, и исходная задача ЦЛП,
неразрешима ввиду несовместности ее ограничений).

5) Преобразовать симплекс-таблицу;
положить $\tau(s) := n+\nu$ и отбросить $(n+1)$-ю строку,
если таковая имелась, иначе $\tau(s) := r$;
перейти на шаг 1.

Замечания.

1) Базисное решение $x^0 = (z_{10}, \ldots, z_{n0})^T$, соответствующее текущей симплекс-таблице в момент введения дополнительного ограничения, является допустимым решением задачи (5.1)–(5.3) (и оптимальным решением соответствующей ЛП-релаксации). Ввиду того, что z_{p0} — нецелое, имеем $f_{p0} > 0, \ x_{n+\nu}(x^0) = -f_{p0} < 0$ и, следовательно, x^0 дополнительному ограничению не удовлетворяет, т.е. отсекается.

2) Если на шаге 2 было введено дополнительное ограничение, то на шаге 3 в качестве ведущей будет выбрана единственно возможная $(n+1)$-я строка и в преобразованной симплекс-таблице элемент из производящей строки и нулевого столбца примет значение $z^{н}_{p0} = z_{p0} - \frac{z_{ps}}{(-f_{ps})}(-f_{p0})$. В случае $z_{ps} > 0$ имеем $z_{ps}/f_{ps} \geq 1$ и $z^{н}_{p0} \leq z_{p0} - f_{p0} = \lfloor z_{p0} \rfloor$, т.е. $z^{н}_{p0} \leq \lfloor z_{p0} \rfloor \leq z_{p0}$. Поскольку $z_{ps} \neq 0$ и $\beta_s \succ 0$, то последнее условие $z_{ps} > 0$ будет выполнено, если $z_{is} = 0$ при $i < p$.

3) В результате выполнения итерации, на 2-м шаге которой вводилось дополнительное ограничение, вновь введенная переменная $x_{n+\nu}$ становится небазисной, а соответствующая ей строка из симплекс-таблицы удаляется. Это фактически означает, что на последующих итерациях в случае перехода переменной $x_{n+\nu}$ в разряд базисных, соответствующее этой переменной дополнительное ограничение $x_{n+\nu} \geq 0$ перестает учитываться, т.е. оно отбрасывается. Таким образом, максимальное число учитываемых дополнительных ограничений не превосходит числа небазисных переменных l.

5.6 Конечность первого алгоритма Гомори

Доказательство конечности алгоритма будет проведено при следующих предположениях:

1) Известна некоторая (условная) нижняя граница M для оптимального значения целевой функции x_0 (состоятельность которой имеет место в случае существования оптимума). Это дает возможность прекращать вычисления, если в какой-то момент окажется, что $z_{00} < M$.

2) Целевая функция x_0 принимает целочисленные значения на множестве допустимых решений задачи (5.1)–(5.4). В этом случае нулевая строка наравне с другими строками симплекс-таблицы может (и будет) использоваться в качестве производящей.

Условимся относительно терминологии. Как уже делалось выше, однократное последовательное выполнение шагов 1)–5) будем называть итерацией. Целесообразно различать итерации двух типов. К первому типу отнесем итерации, на которых не вводится дополнительное ограничение. Это *обычные* итерации LD-метода или *LD-итерации*. При выполнении итераций второго типа вводится дополнительное ограничение. Такие итерации будем называть *особыми* или *итерациями Гомори*.

Предположим, что в процессе решения задачи данным алгоритмом выполняется бесконечная последовательность итераций.

Элементы и столбцы симплекс-таблицы, полученной в результате выполнения первых t итераций, будем обозначать z_{ij}^t и β_j^t соответственно (z_{ij}^0 – элементы начальной симплекс-таблицы). При выполнении итерации любого типа нулевой столбец симплекс-таблицы лексикографически уменьшается (см. замечание 2 к LD-методу), т.е.

$$\beta_0^0 \succ \beta_0^1 \succ \beta_0^2 \succ \ldots \succ \beta_0^t \succ \beta_0^{t+1} \succ \ldots . \qquad (5.16)$$

Если бы в рассматриваемой бесконечной последовательности итераций было конечное число особых итераций, то это противоречило бы доказанной ранее конечности LD-метода, так как в этом случае начиная с некоторого момента решалась бы LD-методом одна и та же задача ЛП. Поэтому можно считать, что особых итераций в нашей последовательности бесконечно много. Пусть $t_\nu + 1$, $\nu = 1, 2, \ldots$, — порядковые номера этих итераций. Из (5.16) следует

$$z_{00}^0 \geq z_{00}^1 \geq z_{00}^2 \geq \ldots \geq z_{00}^t \geq z_{00}^{t+1} \geq \ldots . \qquad (5.17)$$

Кроме того, по сделанному нами допущению относительно ограниченности оптимального значения x_0, $z_{00}^t \geq M$.

Рассмотрим подпоследовательность

$$z_{00}^{t_1},\ z_{00}^{t_2},\ \ldots,\ z_{00}^{t_\nu},\ \ldots , \qquad (5.18)$$

образованную элементами z_{00} симплекс-таблиц, являющихся входными для особых итераций. Если $z_{00}^{t_\nu}$ — нецелое, то согласно правилам алгоритма нулевая строка на итерации $t_\nu + 1$ станет производящей и будем иметь $z_{00}^{t_\nu+1} \leq \lfloor z_{00}^{t_\nu} \rfloor < z_{00}^{t_\nu}$ (см. замечание 2 к описанию алгоритма). Поскольку $z_{00}^{t_{\nu+1}} \leq z_{00}^{t_\nu+1}$, отсюда следует, что в каждом открытом интервале вида $(z, z+1)$, где z — целое число, может располагаться не более одного члена последовательности (5.18). Учитывая монотонность и ограниченность этой последовательности, из сказанного вытекает, что начиная с некоторого места все члены последовательностей (5.18) и (5.17) будут равны одному и тому же целому числу $\overline{z}_{00}$, т.е. последовательность (5.17) стабилизируется. Отсюда, в частности, следует, что начиная с этого момента на всех последующих итерациях элемент z_{0s} из ведущего столбца и нулевой строки будет равняться нулю. (Последнее свойство обеспечивает применимость упоминавшегося выше замечания 2 к той ситуации, когда первая строка оказывается производящей).

Обозначим через T_0 номер итерации, начиная с которой для всех последующих итераций t имеет место равенство $z_{00}^t = \overline{z}_{00}$. Тогда, учитывая (5.16), будем иметь

$$z_{10}^{T_0} \geq z_{10}^{T_0+1} \geq \ldots \geq z_{10}^{t} \geq z_{10}^{t+1} \geq \ldots . \tag{5.19}$$

Проведя далее рассуждения, аналогичные вышеприведенным, мы придем к выводу о том, что найдется номер $T_1 \geq T_0$, начиная с которого, т.е. при $t \geq T_1$, будет выполняться равенство $z_{10}^t = \overline{z}_{10}$, где $\overline{z}_{10}$ — некоторое неотрицательное целое число. (Ограниченность последовательности (5.19) и неотрицательность $\overline{z}_{10}$ следует из того, что $z_{10}^{t_\nu} \geq 0$ ввиду прямой допустимости симплекс-таблиц с номерами t_ν).

Продолжая рассуждения, мы в конечном счете докажем существование такого номера T_n, что при всех $i = 1, \ldots, n$ и $t \geq T_n$ будут иметь место равенства $z_{i0}^t = \overline{z}_{i0}$, где $\overline{z}_{i0}$ — неотрицательные целые числа. Подобный вывод противоречит сделанному нами допущению о бесконечности числа итераций. Тем самым доказана конечность первого алгоритма Гомори.

5.7 Полностью целочисленный алгоритма Гомори

Неизбежные при машинной реализации ошибки округления делают описанный выше алгоритм неустойчивым, поскольку приходится строго отличать целые числа от нецелых. Один из способов устранить операции округления, а вместе с тем и неустойчивость алгоритма, — это попытаться иметь дело с симплекс-таблицами, все элементы которых целочисленны. Именно это и делается в полностью целочисленном алгоритме Гомори.

Нетрудно видеть, что целочисленность симплекс-таблицы при ее преобразовании на отдельной итерации алгоритма сохранится, если ведущий элемент z_{rs} этого преобразования равен -1. Весь вопрос в том, как обеспечить указанное равенство.

5.8 Описание полностью целочисленного алгоритма

0) Начать с нормальной целочисленной симплекс-таблицы. Положить $\nu := 0$.
1) Если симплекс-таблица прямо допустима, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение задачи).
2) Выбрать минимальное $p \geq 1$, такое, что $z_{p0} < 0$. Если $\{j \mid z_{pj} < 0,\ j \geq 1\} = \emptyset$, то КОНЕЦ (задача неразрешима ввиду несовместности ограничений). Строку с номером p считать *производящей*; $\nu := \nu + 1$. По уравнению

$$x_p = z_{p0} - \sum_{j=1}^{l} z_{pj} x_{\tau(j)},$$

соответствующему этой строке, вводится дополнительное ограничение согласно описанному выше способу при специально выбранном h, $0 < h \leq 1$ (правило выбора h формулируется отдельно):

$$x_{n+\nu} = \lfloor h z_{p0} \rfloor - \sum_{j=1}^{l} \lfloor h z_{pj} \rfloor x_{\tau(j)} \geq 0.$$

(При $h = 1$ дополнительное ограничение совпадает с производящим, поскольку z_{pj} — целые). К симплекс-таблице добавляется $(n+1)$-я строка, соответствующая введенному ограничению (базисной переменной $x_{n+\nu}$).

3) Выбрать $(n+1)$-ю строку в качестве ведущей, $r := n+1$.

4) Выбрать ведущий столбец s :

$$\frac{1}{|z_{rs}|}\beta_s = lexmin\{ \frac{1}{|z_{rj}|}\beta_j \mid z_{pj} < 0,\ j \geq 1\}.$$

5) Преобразовать симплекс-таблицу;
положить $\tau(s) := n+\nu$ и отбросить $(n+1)$-ю строку;
перейти на шаг 1.

Правило выбора h должно быть нацелено на обеспечение равенства $z_{rs} = -1$, т.е. $\lfloor hz_{ps} \rfloor = -1$. Пусть $J_p = \{j \mid z_{pj} < 0,\ j \geq 1\}$. Тогда нужное нам h должно удовлетворять при некотором $s \in J_p$ следующим требованиям:

а) $\lfloor hz_{ps} \rfloor = -1$,

б) $\beta_s \prec \frac{1}{|\lfloor hz_{pj} \rfloor|}\beta_j,\ j \in J_p \setminus \{s\}$.

Так как $|\lfloor hz_{pj} \rfloor| \geq 1$ при $h > 0$ и $j \in J_p$, то условие б) может выполняться только в случае $\beta_s = lexmin\{\beta_j \mid j \in J_p\}$. Это означает, что ведущий столбец, определяемый на шаге 4, может быть указан до построения дополнительного ограничения (до выбора h) сразу после того, как станет известна производящая строка.

Если определить натуральные числа $\mu_j,\ j \in J_p$, положив $\mu_s = 1$ и $\mu_j = \max\{\mu \mid \mu\beta_s \prec \beta_j,\ \mu$ — целое $\}$ при $j \in J_p \setminus \{s\}$, то сформулированные выше требования будут эквивалентны следующим:

$$\lfloor hz_{pj} \rfloor \geq -\mu_j,\ j \in J_p.$$

В силу целочисленности μ_j последние неравенства эквивалентны

$$hz_{pj} \geq -\mu_j,\ j \in J_p$$

или, учитывая отрицательность z_{pj},

$$h \leq -\mu_j/z_{pj},\ j \in J_p.$$

Естественно положить

$$h = \min\{-\mu_j/z_{pj} \mid j \in J_p\},$$

выбрав из всех допустимых значений максимальное. Такой выбор является достаточно обоснованным, поскольку бо́льшим значениям h, как нетрудно убедиться, соответствует более сильное лексикографическое уменьшение нулевого столбца в результате преобразования симплекс-таблицы.

Таким образом, правило выбора h может быть сформулировано следующим образом:

1) Определить номер s:

$$\beta_s = lexmin\{\beta_j \mid j \in J_p\}.$$

2) Определить натуральные числа $\mu_j, \; j \in J_p$:

$$\mu_s = 1,$$

$$\mu_j = \max\{\mu \mid \mu\beta_s \prec \beta_j, \mu \text{ — целое }\}, j \in J_p \setminus \{s\}.$$

3) Положить

$$h = \min\{-\mu_j / z_{pj} \mid j \in J_p\}.$$

Доказательство конечности алгоритма проводится практически при тех же предположениях, которые были сделаны в случае первого алгоритма Гомори, с той лишь разницей, что в данном случае целочисленность значений целевой функции является следствием более сильного допущения о целочисленности начальной симплекс-таблицы.

Опираясь на лексикографическую монотонность последовательности $\{\beta_0^t\}$, как и прежде, приходим к выводу о стабилизации значений z_{00}^t, т.е. $z_{00}^t = \overline{z}_{00}$ при $t \geq T_0$.

Для доказательства стабилизации последующих компонент вектора β_0^t достаточно заметить, что в результате выполнения итерации элемент z_{p0} возрастает (здесь p — номер производящей строки). Отсюда, в частности, следует, что в случае $z_{i0}^{t+1} = z_{i0}^t$ при $i = 0, 1, \ldots, k-1$, k-я строка на $(t+1)$-й итерации не могла быть производящей, так как в противном случае мы бы имели

$\beta_0^{t+1} \succ \beta_0^t$. Значит, $z_{k0}^t \geq 0$ на всех итерациях после стабилизации компонент вектора β_0^t с номерами, меньшими k. Учитывая далее лексикографическую монотонность последовательности $\{\beta_0^t\}$ и целочисленность величин z_{k0}^t, методом индукции по k доказывается стабилизация всех компонент вектора β_0^t. Это и завершает доказательство конечности полностью целочисленного алгоритма Гомори.

Список литературы

[1] *Васильев В.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

[2] *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1986.

[3] *Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю.* Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.

[4] *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990.

[5] *Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М.* Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.

[6] *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

[7] *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.

СОДЕРЖАНИЕ