

7. Major P. Approximation of partial sums of i. i. d. r. v. s. when the summands have only two moments.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 1976, v. 35, N 3, p. 221—229.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967.
9. Борисов И. С. О скорости сходимости в «условном» принципе инвариантности.— Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. 23, № 1, с. 67—79.

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ВЫХОДОМ НЕДИСКРЕТНОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ ИЗ ИНТЕРВАЛА

В. И. ЛОТОВ

Рассматривается случайное блуждание $S_0, S_1, S_2, \dots$, порожденное последовательностью сумм независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $F(x) = P(\xi_1 < x)$. На протяжении всей работы будет предполагаться, что $F(x)$ удовлетворяет двум условиям крамеровского типа:

1) $F(x)$ имеет отличную от нуля абсолютно непрерывную компоненту;

2) $\inf \{\lambda: M e^{-\lambda \xi_1} < \infty\} < 0$, $\sup \{\lambda: M e^{-\lambda \xi_1} < \infty\} > 0$. Пусть, кроме того, $M \xi_1 = 0$. Для $a > 0$ и $b > 0$ введем $N = N(a, b) = \min \{k: S_k \notin [-a, b]\}$ и функции

$$F_n^{(0)}(x) = P(S_n < x, N > n); \quad F_n^{(1)}(x) = P(S_N < x, N = n). \quad (1)$$

Результаты работы позволяют получать полные асимптотические разложения распределений (1) в случае, когда $a = a(n) \rightarrow \infty$, $b = b(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ во всем спектре уклонений $a + b = O(n)$, $a + b \geq C \sqrt{n}$. Отметим, что та же задача была решена ранее автором в [1, 2] при дополнительных предположениях о рациональности функции $M(e^{i\lambda \xi_1}; \xi_1 < 0)$.

Исследованию распределений граничных функционалов, связанных с выходом случайного блуждания из интервала, посвящено большое количество работ (библиографию, хотя и далеко не полную, можно найти в [2]). Хорошо известны постановки задач, приводящие к исследованиям такого типа. Вспомним, например, классическую задачу о разорении игрока. В настоящей статье метод асимптотического анализа, развитый в [2, 3] для решения аналогичной задачи в схеме блужданий по решетке целых чисел, применяется к исследованию распределений в нашем случае. Изложение ведется кратко, подробности применения метода читатель найдет в [3]. Основное место в работе занимает получение асимптотических представлений для производящих функций вида $\sum z^n P(S_N \in A, N = n)$ и $\sum z^n P(S_n \in B, N > n)$ (теоремы 1—3 и следствия из них). К полученным результатам непосредственно применим асимптотический анализ [2]¹⁾, включающий модификацию метода перевала, что позволяет сразу же выписать искомые полные асимптотические разложения. Некоторые из них приведены в теоремах 4 и 5.

Обозначим $r_z(\lambda) = 1 - z M e^{i\lambda \xi_1}$;

$$Q_0(z, \lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_{-a}^b e^{i\lambda x} dF_n^{(0)}(x), \quad \text{Im } \lambda = 0, \quad |z| < 1;$$

¹⁾ Полное изложение метода содержится во второй части [3] (в печати).

$$Q_1(z, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_{-\infty}^a e^{i\lambda x} dF_n^{(1)}(x);$$

$$Q_2(z, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_b^{\infty} e^{i\lambda x} dF_n^{(1)}(x), \quad \operatorname{Im} \lambda = 0, \quad |z| \leq 1.$$

Из [5] известно, что при $|z| < 1$, $\operatorname{Im} \lambda = 0$

$$r_z(\lambda) Q_0(z, \lambda) = 1 - Q_1(z, \lambda) - Q_2(z, \lambda), \quad (2)$$

и если $r_z(\lambda) = r_{z-}(\lambda) r_{z+}(\lambda)$ — каноническая V -факторизация в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < \delta_1$ [4], то

$$Q_2(z, \lambda) = r_{z+}(\lambda) [r_{z+}^{-1}(\lambda) (1 - Q_1(z, \lambda))]^{[b, \infty)} \quad (3)$$

и аналогично

$$Q_1(z, \lambda) = r_{z-}(\lambda) [r_{z-}^{-1}(\lambda) (1 - Q_2(z, \lambda))]^{(-\infty, -a)}. \quad (4)$$

Здесь, по определению,

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dv(x) \right]^A = \int_A e^{i\lambda x} dv(x) \quad (\operatorname{var} v < \infty, \operatorname{Im} \lambda = 0).$$

Подставляя (4) в (3) и обозначая для $f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dv(x)$ ($\operatorname{var} v < \infty$, $\operatorname{Im} \lambda = 0$)

$$Af(\lambda) = r_{z-}(\lambda) [r_{z-}^{-1}(\lambda) f(\lambda)]^{(-\infty, -a)}, \quad Bf(\lambda) = r_{z+}(\lambda) [r_{z+}^{-1}(\lambda) f(\lambda)]^{[b, \infty)},$$

получим

$$Q_2(z, \lambda) = Be(\lambda) - BAe(\lambda) + BAQ_2(z, \lambda), \quad (5)$$

где $e(\lambda) \equiv 1$.

В дальнейшем будут использоваться следующие факты [4]. Пусть $\lambda_1(z)$ и $\lambda(z)$ — нули функции $r_z(\lambda)$, определенные в некоторой δ -окрестности точки $z = 1$, разрезанной по лучу $z > 1$, такие, что $\lambda_1(1) = \lambda(1) = 0$ и для $1 - \delta < z < 1$ $\lambda_1(z)$ и $\lambda(z)$ лежат на мнимой оси, причем $\operatorname{Im} \lambda_1(z) > 0 > \operatorname{Im} \lambda(z)$. Для $z \in \mathcal{D}_\delta = \{|z - 1| < \delta\} \setminus \{z \geq 1\}$ можно выписать разложения (везде имеются в виду главные значения $(z - 1)^{1/2}$):

$$i\lambda(z) = -\psi_1 i(z - 1)^{1/2} + \psi_2(z - 1) - \dots; \quad i\lambda_1(z) = \psi_1 i(z - 1)^{1/2} + \dots; \quad \psi_1 = \sqrt{2/D\xi_1} > 0.$$

Существует $\delta_1 > 0$ такое, что положительная компонента $r_{z+}(\lambda)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > -\delta_1$ и непрерывна на границе. Функции $u_z^{\pm 1}(\lambda) = \left(\frac{r_{z+}(\lambda)}{\lambda - \lambda(z)} \right)^{\pm 1}$ аналитичны при $\operatorname{Im} \lambda > -\delta_1$ и непрерывны на границе, $|z - 1| < \delta$. Кроме того, функции $v_z(\lambda)$ и $(v_z(\lambda)(\lambda + i))^{-1}$ являются преобразованиями Фурье — Стильеса функций ограниченной вариации, все изменение которых сосредоточено на $[0, \infty)$. Точно так же отрицательная компонента $r_{z-}(\lambda)$ аналитична при $\operatorname{Im} \lambda < \delta_1$, функции $u_z^{\pm 1}(\lambda) = \left(\frac{r_{z-}(\lambda)}{\lambda - \lambda_1(z)} \right)^{\pm 1}$ аналитичны при $\operatorname{Im} \lambda < \delta_1$, непрерывны на границе, и функции $u_z(\lambda)$, $(u_z(\lambda)(\lambda - i))^{-1}$ являются преобразованиями Фурье — Стильеса функций ограниченной вариации, все изменение которых сосредоточено на $(-\infty, 0)$.

Буквы γ , δ , δ_1 означают везде достаточно малые (д. м.) положительные числа, возможно разные в различных формулировках.

Теорема 1. Существуют δ и γ такие, что при $z \in \mathcal{P}_\delta = \{|z| < 1, |z-1| < \delta\}$, $\text{Im } \lambda = 0$ и достаточно больших (д. б.) a и b

$$Q_2(z, \lambda) = \frac{e^{i\lambda b} v_z(\lambda) (1 - H_1(z) \mu^a(z))}{e^{i\lambda(z)b} v_z(\lambda(z)) (1 - H_2(z) \mu^{a+b}(z))} + \int_b^\infty e^{i\lambda x} d\rho_z(x),$$

где равномерно в $\mathcal{P}_\delta \left| \int_x^\infty d\rho_z(y) \right| = O(e^{-\gamma x})$, $x \geq b$;

$$\mu(z) = e^{i(\lambda_1(z) - \lambda(z))}; \quad H_1(z) = \frac{u_z(\lambda(z))}{u_z(\lambda_1(z))}; \quad H_2(z) = \frac{v_z(\lambda_1(z)) H_1(z)}{v_z(\lambda(z))}.$$

Для доказательства понадобятся две леммы.

Лемма 1. Пусть при $\text{Im } \lambda = 0$ определена функция $f(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda x} dv(x)$,

$\text{var } v < \infty$, кроме того, при некотором $\delta_1 > 0$ $f(\lambda)$ аналитична в полосе $0 < \text{Im } \lambda < \delta_1$ и непрерывна на границе. Тогда найдутся γ , δ и $C > 0$ такие, что

$$Af(\lambda) = \frac{u_z(\lambda) e^{i\lambda_1(z)a} f(\lambda_1(z))}{e^{i\lambda a} u_z(\lambda_1(z))} + (\lambda - \lambda_1(z)) \int_{-\infty}^{-a} e^{i\lambda x} d\theta_z(x), \quad \text{Im } \lambda = 0, \quad z \in \mathcal{P}_\delta,$$

где равномерно по $x < -a$ и $z \in \mathcal{P}_\delta$

$$\left| \int_{-\infty}^x d\theta_z(y) \right| \leq C e^{\gamma x}. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть для вещественных λ

$$\frac{f(\lambda) u_z^{-1}(\lambda)}{\lambda - i} = \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda x} dw_z(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} [r_z^{-1}(\lambda) f(\lambda)]^{(-\infty, -a)} &= \left[\frac{\lambda - i}{\lambda - \lambda_1(z)} \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda x} dw_z(x) \right]^{(-\infty, -a)} = \\ &= \int_{-\infty}^{-a} e^{i\lambda x} dw_z(x) + i(\lambda_1(z) - i) \left[\int_{-\infty}^0 e^{i(\lambda - \lambda_1(z))x} dx \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda x} dw_z(x) \right]^{(-\infty, -a)} = \\ &= \int_{-\infty}^{-a} e^{i\lambda x} dw_z(x) + i(\lambda_1(z) - i) \int_{-\infty}^{-a} e^{i(\lambda - \lambda_1(z))x} \left[\frac{u_z^{-1}(\lambda_1(z)) f(\lambda_1(z))}{\lambda_1(z) - i} - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^x e^{i\lambda_1(z)t} dw_z(t) \right] dx = \frac{e^{i\lambda_1(z)a} f(\lambda_1(z))}{e^{i\lambda a} u_z(\lambda_1(z)) (\lambda - \lambda_1(z))} + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{-a} e^{i\lambda x} \left(dw_z(x) - i(\lambda_1(z) - i) \int_{-\infty}^x e^{i\lambda_1(z)(t-x)} dw_z(t) dx \right). \end{aligned}$$

Если при $\text{Im } \lambda = 0$

$$u_z(\lambda) \int_{-\infty}^{-a} e^{i\lambda x} \left(dw_z(x) - i(\lambda_1(z) - i) \int_{-\infty}^x e^{i\lambda_1(z)(t-x)} dw_z(t) dx \right) = \int_{-\infty}^{-a} e^{i\lambda x} d\theta_z(x),$$

$$Af(\lambda) = \frac{u_z(\lambda) e^{i\lambda_1(z)a} f(\lambda_1(z))}{e^{i\lambda a} u_z(\lambda_1(z))} + (\lambda - \lambda_1(z)) \int_{-\infty}^{-a} e^{i\lambda x} d\theta_z(x).$$

Оценка (6) следует из аналитичности функций $u_z(\lambda)$ и $(u_z(\lambda)(\lambda - i))^{-1}f(\lambda)$ при $0 < \operatorname{Im} \lambda < \delta_1$ и леммы 2 в [4]. Лемма доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 2. Пусть при $\operatorname{Im} \lambda = 0$ определена функция $f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dv(x)$, $\operatorname{var} v < \infty$; кроме того, при некотором $\delta_1 > 0$ $f(\lambda)$ аналитична в полосе $-\delta_1 < \operatorname{Im} \lambda < 0$ и непрерывна на границе. Тогда найдутся $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$Bf(\lambda) = \frac{v_z(\lambda) e^{i(\lambda - \lambda(z))b} f(\lambda(z))}{v_z(\lambda(z))} + (\lambda - \lambda(z)) \int_b^{\infty} e^{i\lambda x} d\varphi_z(x), \quad \operatorname{Im} \lambda = 0, \quad z \in \mathcal{L}_\delta,$$

и равномерно по $x \geq b$ и $z \in \mathcal{L}_\delta$

$$\left| \int_x^{\infty} d\varphi_z(y) \right| = O(e^{-\gamma x}).$$

Доказательство теоремы 1. Из (5) и лемм 1, 2 выводим

$$Q_2(z, \lambda) = \frac{e^{i(\lambda - \lambda(z))b} v_z(\lambda)}{v_z(\lambda(z))} (1 - \mu^a(z) H_1(z) + \mu^a(z) H_1(z) Q_2(z, \lambda_1(z))) + \\ + (\lambda - \lambda(z)) \int_b^{\infty} e^{i\lambda x} d\varphi_z^{(1)}(x) + (\lambda(z) - \lambda_1(z)) \int_b^{\infty} e^{i\lambda x} d\varphi_z^{(2)}(x), \quad (7)$$

где равномерно по $x \geq b$ и $z \in \mathcal{L}_\delta$

$$\left| \int_x^{\infty} d\varphi_z^{(1)}(y) \right| = O(e^{-\gamma x}); \quad \left| \int_x^{\infty} d\varphi_z^{(2)}(y) \right| = O(e^{-\gamma(x-b+a)}).$$

Значение $Q_2(z, \lambda_1(z))$ находится из (7) при $\lambda = \lambda_1(z)$. Имеем равномерно в $\mathcal{L}_\delta$

$$Q_2(z, \lambda_1(z)) = \frac{\mu^b(z) v_z(\lambda_1(z)) (1 - \mu^a(z) H_1(z))}{v_z(\lambda(z)) (1 - \mu^{a+b}(z) H_2(z))} + O(e^{-\gamma a} + e^{-\gamma b}). \quad (8)$$

Необходимая при получении (8) ограниченность в $\mathcal{L}_\delta$ функции $(\lambda_1(z) - \lambda(z))(1 - \mu^{a+b}(z) H_2(z))^{-1}$ при некотором $\delta > 0$ и д. б. $a + b$ доказывается, как и в [2]. Подстановка (8) в (7) завершает доказательство теоремы.

Обозначим для $A \subset [0, \infty)$

$$T(z, A) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n P(S_N - b \in A, N = n).$$

Следствие 1. Существуют $\delta > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что равномерно по $z \in \mathcal{L}_\delta$ и д. б. a и b

$$T(z, A) = \frac{b(z, A) (1 - H_1(z) \mu^a(z))}{e^{i\lambda(z)b} (1 - H_2(z) \mu^{a+b}(z))} + O(e^{-\gamma a} + e^{-\gamma b}) \int_A e^{-\gamma x} dx,$$

$$\partial \partial e \int_0^{\infty} e^{i\lambda x} b(z, dx) = v_z(\lambda) v_z^{-1}(\lambda(z)), \operatorname{Im} \lambda = 0.$$

Следствие 2.

$$P(S_N - b \in A) = \frac{b(1, A)(a + v_1/2\psi_1)}{a + b + \eta_1/2\psi_1} + O(e^{-\gamma a} + e^{-\gamma b}) \int_A e^{-\gamma x} dx,$$

$$\partial \partial e \ v_1 = \left[\frac{H_1(z) - 1}{i(z-1)^{1/2}} \right]_{z=1}; \quad \eta_1 = \left[\frac{H_2(z) - 1}{i(z-1)^{1/2}} \right]_{z=1}.$$

Из теоремы 1 и (4) следует

Теорема 2. Для $z \in \mathcal{L}_\delta$ при некотором δ , $\operatorname{Im} \lambda = 0$ и ∂ . б. а и b

$$Q_1(z, \lambda) = \frac{u_z(\lambda) e^{i(\lambda_1(z) - \lambda)a} (1 - H_3(z) \mu^b(z))}{u_z(\lambda_1(z)) (1 - H_2(z) \mu^{a+b}(z))} + \int_{-\infty}^{-a} e^{i\lambda x} d\varepsilon_z(x),$$

где равномерно по $x < -a$ и $z \in \mathcal{L}_\delta$

$$\left| \int_{-\infty}^x d\varepsilon_z(y) \right| = O(e^{\gamma x}), \quad H_3(z) = \frac{H_2(z)}{H_1(z)} = \frac{v_z(\lambda_1(z))}{v_z(\lambda(z))}.$$

Следствие 3. Пусть для $A \subset (-\infty, 0)$

$$T(z, A) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n P(S_N + a \in A, N = n),$$

тогда равномерно по $z \in \mathcal{L}_\delta$ при ∂ . б. а и b

$$T(z, A) = \frac{\beta(z, A) e^{i\lambda_1(z)a} (1 - H_3(z) \mu^b(z))}{1 - H_2(z) \mu^{a+b}(z)} + O(e^{-\gamma a} + e^{-\gamma b}) \int_A e^{\gamma x} dx,$$

$$\partial \partial e \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda x} \beta(z, dx) = u_z(\lambda) u_z^{-1}(\lambda_1(z)), \operatorname{Im} \lambda = 0.$$

Из теорем 1, 2 и соотношения (2) непосредственно следует при $z \in \mathcal{L}_\delta$ и $\operatorname{Im} \lambda = 0$

$$\begin{aligned} Q_0(z, \lambda) = & \frac{1}{r_z(\lambda)} - \frac{e^{i(\lambda_1(z) - \lambda)a} (1 - H_3(z) \mu^b(z))}{r_{z+}(\lambda) (\lambda - \lambda_1(z)) u_z(\lambda_1(z)) (1 - H_2(z) \mu^{a+b}(z))} - \\ & - \frac{e^{i(\lambda - \lambda(z))b} (1 - H_1(z) \mu^a(z))}{r_{z-}(\lambda) (\lambda - \lambda(z)) v_z(\lambda(z)) (1 - H_2(z) \mu^{a+b}(z))} - \\ & - \frac{1}{r_z(\lambda)} \left(\int_b^{\infty} e^{i\lambda x} d\rho_z(x) + \int_{-\infty}^{-a} e^{i\lambda x} d\varepsilon_z(x) \right). \quad (9) \end{aligned}$$

Пусть для таких z и λ

$$V_z^{(1)}(\lambda) = r_z^{-1}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dP_z^{(1)}(x); \quad V_z^{(2)}(\lambda) = \frac{r_{z+}^{-1}(\lambda)}{\lambda - \lambda_1(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dP_z^{(2)}(x);$$

$$V_z^{(3)}(\lambda) = \frac{r_{z-}^{-1}(\lambda)}{\lambda - \lambda(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dP_z^{(3)}(x);$$

$$\frac{1}{r_z(\lambda)} \left(\int_b^{\infty} e^{i\lambda x} d\rho_z(x) + \int_{-\infty}^{-a} e^{i\lambda x} d\varepsilon_z(x) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\psi_z(x).$$

Тогда для любого борелевского $A \subset [-a, b)$ имеем из (9)

$$S(z, A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(S_n \in A, N > n) = \int_A dP_z^{(1)}(x) - \frac{\int_A dP_z^{(2)}(x+a) e^{i\lambda_1(z)a} (1 - H_3(z) \mu^b(z))}{u_z(\lambda_1(z)) (1 - H_2(z) \mu^{a+b}(z))} - \frac{\int_A dP_z^{(3)}(x-b) e^{-i\lambda(z)b} (1 - H_1(z) \mu^a(z))}{v_z(\lambda(z)) (1 - H_2(z) \mu^{a+b}(z))} - \int_A d\psi_z(x). \quad (10)$$

Выделением особенностей функций $V_z^{(i)}(\lambda)$ и использованием леммы 2 [4] нетрудно далее получить равномерно по $z \in \mathcal{L}_\delta$ следующие асимптотические представления ($i = 1, 2, 3$):

$$P_z^{(i)}(x) = p_1^{(i)}(z) + \frac{e^{-i\lambda(z)x}}{\lambda(z) \left(\frac{1}{V_z^{(i)}} \right)'(\lambda(z))} + O(e^{-\gamma x}), \quad x \rightarrow \infty; \quad (11)$$

$$P_z^{(i)}(x) = p_2^{(i)}(z) - \frac{e^{-i\lambda_1(z)x}}{\lambda_1(z) \left(\frac{1}{V_z^{(i)}} \right)'(\lambda_1(z))} + O(e^{\gamma x}), \quad x \rightarrow -\infty;$$

кроме того, равномерно по множествам $A \subset [-a, b)$ и $z \in \mathcal{L}_\delta$

$$\left| (\lambda_1(z) - \lambda(z)) \int_A d\psi_z(x) \right| = O(e^{-\gamma a} + e^{-\gamma b}). \quad (12)$$

Функции $p_1^{(i)}(z)$ и $p_2^{(i)}(z)$ от x не зависят. Соотношения (10)–(12) позволяют получать асимптотические представления производящих функций $S(z, A)$ при любых ограничениях на $A \subset [-a, b)$.

Теорема 3. Существуют $\delta > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что равномерно по $A \subset [-a, b)$ и $z \in \mathcal{L}_\delta$ при д. б. a и b

$$S(z, A) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(S_n \in A) - \frac{i \int_A e^{-i\lambda(z)x} dx \mu^a(z) (1 - H_3(z) \mu^b(z))}{u_z(\lambda_1(z)) v_z(\lambda(z)) (\lambda_1(z) - \lambda(z)) (1 - H_2(z) \mu^{a+b}(z))} - \frac{i \int_A e^{-i\lambda_1(z)x} dx \mu^b(z) (1 - H_1(z) \mu^a(z))}{u_z(\lambda_1(z)) v_z(\lambda(z)) (\lambda_1(z) - \lambda(z)) (1 - H_2(z) \mu^{a+b}(z))} + \frac{O(e^{-\gamma a} + e^{-\gamma b})}{\lambda_1(z) - \lambda(z)}, \quad z \in \mathcal{L}_\delta. \quad (13)$$

Если $\sup_{x \in A} |x|$ растет вместе с $a + b$, то слагаемое $\sum_{n=0}^{\infty} z^n P(S_n \in A) =$

$= \int_A dP_z^{(1)}(x)$ в (13) целесообразно для дальнейшего анализа заменять его асимптотическим представлением в соответствии с (11).

Асимптотические разложения распределений (1) получаются теперь непосредственным применением теоремы 4 ([2]) и ее следствий к асимп-

тотическим представлениям производящих функций, содержащимся в утверждениях следствий 1, 3 и теоремы 3. Для примера приведем некоторые из асимптотических разложений.

Теорема 4. Пусть $a = x_1 \sqrt{n}$, $b = x_2 \sqrt{n}$, $0 < C_1 \leq x_1$, $x_2 \leq C_2 < \infty$, $A_1 \subset [0, \infty)$, $A_2 \subset (-\infty, 0)$, тогда при любом целом $q \geq 1$

$$P(S_N - b \in A_1, N = n) = \sum_{i=0}^{q-1} \frac{1}{n^{i+1/2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n^{r/2}} \times \\ \times P_{ri}(1, 0, 0, 0, b(\cdot, A_1)) + O\left(\frac{1}{n^{q+1/2}}\right).$$

$$P(S_N + a \in A_2, N = n) = \sum_{i=0}^{q-1} \frac{1}{n^{i+1/2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n^{r/2}} \times \\ \times P'_{ri}(0, 0, 1, 0, \beta(\cdot, A_2)) + O\left(\frac{1}{n^{q+1/2}}\right);$$

функции $P_{ri}(k_1, k_2, k_3, k_4, F)$ и $P'_{ri}(k_1, k_2, k_3, k_4, F)$ введены в [2];

$$P_{00}(1, 0, 0, 0, b(\cdot, A_1)) = P'_{00}(0, 0, 1, 0, \beta(\cdot, A_2)) = 0;$$

$$P_{10}(1, 0, 0, 0, b(\cdot, A_1)) = b(1, A_1) \sqrt{\frac{2}{\pi \sigma^2}} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left[x_1 \left(s + \frac{1}{2} \right) + x_2 s \right] \times \right. \\ \times e^{-\frac{2}{\sigma^2} \left[x_1 \left(s + \frac{1}{2} \right) + x_2 s \right]^2} - \left[x_1 \left(s + \frac{1}{2} \right) + x_2 (s+1) \right] e^{-2/\sigma^2 [x_1(s+1/2) + x_2(s+1)]^2} \Big\}, \\ P'_{10}(0, 0, 1, 0, \beta(\cdot, A_2)) = \beta(1, A_2) = \sqrt{\frac{2}{\pi \sigma^2}} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left[x_1 s + x_2 \left(s + \frac{1}{2} \right) \right] \times \right. \\ \times e^{-2/\sigma^2 [x_1 s + x_2(s+1/2)]^2} - \left[x_1 (s+1) + x_2 \left(s + \frac{1}{2} \right) \right] e^{-2/\sigma^2 [x_1(s+1) + x_2(s+1/2)]^2} \Big\},$$

$$\sigma^2 = D\xi_1.$$

Теорема 5. Пусть $a = x_1 \sqrt{n}$, $b = x_2 \sqrt{n}$, $0 < C_1 \leq x_1$, $x_2 \leq C_2 < \infty$, $A \subset [-a, b]$ и $\sup_A |x| < C < \infty$ равномерно по n , тогда при любом целом $q \geq 1$

$$P(S_n \in A, N \leq n) = \sum_{i=0}^{q-1} \frac{1}{n^{i+1/2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n^{r/2}} (P_{ri}(1, 0, 1, 0, F_A^{(1)}) + \\ + P'_{ri}(1, 0, 1, 0, F_A^{(2)})) + O\left(\frac{1}{n^{q+1/2}}\right);$$

$$F_A^{(1)}(z) = \frac{i \int_A e^{-i\lambda_1(z)x} dx}{(\lambda_1(z) - \lambda(z)) u_z(\lambda_1(z)) v_z(\lambda(z))}; \quad F_A^{(2)}(z) = F_A^{(1)}(z) \frac{\int_A e^{-i\lambda(z)x} dx}{\int_A e^{-i\lambda_1(z)x} dx};$$

$$P_{00}(1, 0, 1, 0, F_A^{(1)}) + P'_{00}(1, 0, 1, 0, F_A^{(2)}) = \\ = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \sum_{s=0}^{\infty} \left(e^{-2/\sigma^2 [x_1(s+1) + x_2 s]^2} + e^{-2/\sigma^2 [x_1 s + x_2(s+1)]^2} - \right. \\ \left. - 2e^{-2/\sigma^2 [x_1(s+1) + x_2(s+1)]^2} \right), \quad \sigma^2 = D\xi_1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лотов В. И. Асимптотический анализ в схеме блуждений с двумя границами.— II Вильнюсская конф. по теории вероятн. и мат. статистике. Тезисы докл. Т. 1, Вильнюс, 1977, с. 244—245.
2. Лотов В. И. Асимптотические разложения в двуграничных задачах для случайных блужданий. Автореф. канд. дис. М., 1977.
3. Лотов В. И. Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах. I.— Теор. вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, № 3, с. 475—485.
4. Боровков А. А. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых.— Сиб. мат. ж., 1962, т. 3, № 5, с. 645—694.
5. J. H. B. Kemperman. A Wiener-Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary.— Ann. Math. Stat., 1963, v. 34, N 4, p. 1168—1193.

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

А. А. МОГУЛЬСКИЙ

1. Введение

Пусть $C(\kappa, 1)$ — пространство непрерывных функций $f(t)$; $0 \leq \kappa \leq t \leq 1$, с равномерной нормой $\|f\| = \sup_{\kappa \leq t \leq 1} |f(t)|$; $C_0 \subset C(0, 1)$ — совокупность абсолютно непрерывных выходящих из нуля ($f(0) = 0$) функций $f(t)$. Для $f \in C_0$ положим

$$v(f) = 1/2 \cdot \int_0^1 \dot{f}^2(t) dt; \quad (1)$$

для множества $G \subseteq C(0, 1)$ пусть

$$V(G) = \inf_{f \in G \cap C_0} v(f);$$

если $G \cap C_0 = \emptyset$, то будем считать, по определению, $V(G) = \infty$.

Введем следующее условие:

$$0 < V(\bar{G}) = V(G) = V(G_0) < \infty, \quad (2)$$

где $\bar{G}$ — замыкание множества G ; G_0 — совокупность внутренних точек множества G . Обозначим $\omega(t)$, $0 \leq t \leq 1$, стандартный винеровский процесс. Известно [1, 2], что при $r \rightarrow \infty$ справедливо соотношение, определяющее «грубую» асимптотику вероятности $P(\omega \in r \cdot G)$: для любого множества G , удовлетворяющего (2),

$$\ln P(\omega \in r \cdot G) \sim -r^2 V(G). \quad (3)$$

В частности, рассмотрим множества G вида

$$G = G_*(g, h) = \{f \in C(0, 1); g(t) > f(t) > h(t); \kappa \leq t \leq 1\}, \quad (4)$$

где $g, h \in C(\kappa, 1)$; $\inf \{g(t) - h(t); \kappa \leq t \leq 1\} > 0$; $0 \leq \kappa \leq 1$. Довольно очевидно, что если множество G вида (4) удовлетворяет условию $V(G) > 0$ (т. е. замыкание $\bar{G}$ не содержит $f(t) \equiv 0$), то для него выполнены условия (2) и соотношение (3) имеет место.

Рассмотрим вероятность

$$P(\omega \in r \cdot G) \quad (5)$$

для множества $G = G_*(f, g)$ вида (4). При $r \rightarrow \infty$ эта вероятность стремится к 1 в случае, когда множество G содержит функцию $h(t) \equiv 0$, и к нулю, когда множество $\bar{G}$ не содержит $h(t) \equiv 0$. В первом случае естественной является задача изучения поведения $1 - P(\omega \in r \cdot G) = P(\omega \notin r \cdot G)$ при $r \rightarrow \infty$, она исчерпывающим образом решена А. А. Бо-