

ЛИТЕРАТУРА

1. Лотов В. И. Асимптотический анализ в схеме блуждений с двумя границами.— II Вильнюсская конф. по теории вероятн. и мат. статистике. Тезисы докл. Т. 1, Вильнюс, 1977, с. 244—245.
2. Лотов В. И. Асимптотические разложения в двуграничных задачах для случайных блужданий. Автореф. канд. дис. М., 1977.
3. Лотов В. И. Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах. I.— Теор. вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, № 3, с. 475—485.
4. Боровков А. А. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых.— Сиб. мат. ж., 1962, т. 3, № 5, с. 645—694.
5. J. H. B. Kemperman. A Wiener-Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary.— Ann. Math. Stat., 1963, v. 34, N 4, p. 1168—1193.

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

А. А. МОГУЛЬСКИЙ

1. Введение

Пусть $C(\kappa, 1)$ — пространство непрерывных функций $f(t)$; $0 \leq \kappa \leq t \leq 1$, с равномерной нормой $\|f\| = \sup_{\kappa \leq t \leq 1} |f(t)|$; $C_0 \subset C(0, 1)$ — совокупность абсолютно непрерывных выходящих из нуля ($f(0) = 0$) функций $f(t)$. Для $f \in C_0$ положим

$$v(f) = 1/2 \cdot \int_0^1 \dot{f}^2(t) dt; \quad (1)$$

для множества $G \subseteq C(0, 1)$ пусть

$$V(G) = \inf_{f \in G \cap C_0} v(f);$$

если $G \cap C_0 = \emptyset$, то будем считать, по определению, $V(G) = \infty$.

Введем следующее условие:

$$0 < V(\bar{G}) = V(G) = V(G_0) < \infty, \quad (2)$$

где $\bar{G}$ — замыкание множества G ; G_0 — совокупность внутренних точек множества G . Обозначим $\omega(t)$, $0 \leq t \leq 1$, стандартный винеровский процесс. Известно [1, 2], что при $r \rightarrow \infty$ справедливо соотношение, определяющее «грубую» асимптотику вероятности $P(\omega \in r \cdot G)$: для любого множества G , удовлетворяющего (2),

$$\ln P(\omega \in r \cdot G) \sim -r^2 V(G). \quad (3)$$

В частности, рассмотрим множества G вида

$$G = G_*(g, h) = \{f \in C(0, 1); g(t) > f(t) > h(t); \kappa \leq t \leq 1\}, \quad (4)$$

где $g, h \in C(\kappa, 1)$; $\inf \{g(t) - h(t); \kappa \leq t \leq 1\} > 0$; $0 \leq \kappa \leq 1$. Довольно очевидно, что если множество G вида (4) удовлетворяет условию $V(G) > 0$ (т. е. замыкание $\bar{G}$ не содержит $f(t) \equiv 0$), то для него выполнены условия (2) и соотношение (3) имеет место.

Рассмотрим вероятность

$$P(\omega \in r \cdot G) \quad (5)$$

для множества $G = G_*(f, g)$ вида (4). При $r \rightarrow \infty$ эта вероятность стремится к 1 в случае, когда множество G содержит функцию $h(t) \equiv 0$, и к нулю, когда множество $\bar{G}$ не содержит $h(t) \equiv 0$. В первом случае естественной является задача изучения поведения $1 - P(\omega \in r \cdot G) = P(\omega \notin r \cdot G)$ при $r \rightarrow \infty$, она исчерпывающим образом решена А. А. Бо-

ровковым в [3] для винеровского процесса и для ломаных, порожденных суммами независимых одинаково распределенных случайных величин.

Настоящая работа посвящена второму случаю, т. е. изучению точного асимптотического поведения вероятности (5) при $r \rightarrow \infty$ для множеств G вида (4), удовлетворяющих условию $V(G) > 0$. Ниже мы дадим качественное описание характера поведения этой вероятности.

Функционал $v(f)$ полунепрерывен в следующем смысле: если $\|f_n - f_0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\liminf_{n \rightarrow \infty} v(f_n) \geq v(f_0)$ (см., например, [2]).

Нетрудно проверить далее, что множество $\{f \in C_0 : v(f) \leq A\}$ является компактом в $C(0, 1)$ для любого $0 < A < \infty$. Поэтому для любого открытого множества G , удовлетворяющего (2), найдется хотя бы одна функция $f \in \bar{G} \cap C_0$ такая, что $v(f) = V(G)$. Нетрудно показать, что в силу неравенств Коши и Иенсена справедливо

$$v(pf_1 + qf_2) \leq (p\sqrt{v(f_1)} + q\sqrt{v(f_2)})^2 \leq pv(f_1) + qv(f_2), \quad (6)$$

где $p > 0$; $q > 0$; $p + q = 1$; $f_1, f_2 \in C_0$; при этом равенство в первом неравенстве возможно тогда и только тогда, когда $af_1 + bf_2 = 0$ для некоторых a, b , $|a| + |b| > 0$; во втором неравенстве (6) равенство возможно тогда и только тогда, когда $v(f_1) = v(f_2)$. Из (6) следует, что для выпуклых открытых множеств, удовлетворяющих (2), найдется единственная функция $f_0 \in \bar{G} \cap C_0$ такая, что $v(f_0) = V(G)$. В частности, для криволинейной полосы $G = G_*(g, h)$ такая единственная функция f_0 существует; будем называть ее кратчайшим путем, лежащим в $\bar{G}$.

Итак, пусть $G = G_*(g, h)$ вида (4), $V(G) > 0$ и f_0 — кратчайший путь G . Функцию f_0 можно содержательно представить следующим образом. Вообразим себе на плоскости «трубочку», образованную функциями $g(t)$ и $h(t)$; любую функцию f из множества $G \cap C_0$ можно интерпретировать как «нить», закрепленную в начале координат и целиком лежащую в нашей «трубочке». Тогда кратчайшему пути f_0 будет соответствовать натянутая нить, закрепленная в начале координат и целиком лежащая в нашей «трубочке». Такая интерпретация сделает более очевидным следующие рассуждения.

Пусть $A_+ = \{t \in [\alpha, 1] : f_0(t) = g(t)\}$, $A_- = \{t \in [\alpha, 1] : f_0(t) = h(t)\}$, $A_0 = [0, 1] \setminus (A_+ \cup A_-)$. Очевидно, что при $t \in A_+$ функция f_0 выпукла вниз (т. е. $f_0(t)$ не убывает при $t \in A_+$), при $t \in A_-$ функция f_0 выпукла вверх (т. е. $f_0(t)$ не возрастает при $t \in A_-$), при $t \in A_0$ функция f_0 меняется линейно (т. е. $f_0(t) = 0$ при $t \in A_0$). При этом для любого множества $G = G_*(g, h)$ вида (4) отрезок $[0, 1]$ можно разбить на конечное число интервалов, на которых $f_0(t)$ будет либо выпукла вверх, либо выпукла вниз.

В настоящей работе излагается метод, позволяющий вычислить асимптотику вероятности (5) для класса $\mathfrak{M}$ множеств G вида (4), который можно описать так. Полоса $G_*(g, h)$ принадлежит $\mathfrak{M}$, если отрезок $[0, 1]$ можно разбить на конечное число непересекающихся интервалов $(0, t_1)$, (t_1, t_2) , ..., $(t_k, 1)$ таким образом, что кратчайший путь $f_0(t)$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$ имеет три непрерывные производные¹⁾, причем либо $f_0(t) = 0$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, либо $0 < a \leq |f_0(t)| \leq A < \infty$ для всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Таким образом, функции $f_0(t)$, $\dot{f}_0(t)$, $\ddot{f}_0(t)$ на отрезке $[0, 1]$ имеют не более конечного числа разрывов первого рода и точки разрывов приходятся на точки $t_1, \dots, t_k$. Кроме того, в основной теореме предполагается, что третья производная $\ddot{f}(t)$ меняет знак конечное число раз; это ограничение технического характера может быть исключено (что усложнит доказательство).

¹⁾ На концах интервала (t_i, t_{i+1}) производные определим по непрерывности изнутри интервала.

В этих предположениях искомая асимптотика имеет вид

$$P(\omega \in r \cdot G) \sim \frac{C}{r^{h/3}} \exp \left\{ -r^2/2 \int_0^1 \dot{f}_0^2(t) dt - \lambda r^{2/3} \int_0^1 |\bar{f}_0(t)|^{2/3} dt \right\},$$

где λ — абсолютная константа; константа C и показатель h вычисляются в основном по виду функции f_0 и множества A_0 (довольно сложным образом). При этом степенной член $Cr^{-h/3}$ получается как произведение степенных членов, соответствующих каждому интервалу (t_i, t_{i+1}) , и зависит от таких характеристик, как величины разрывов функций $\dot{f}_0(t)$ и $\bar{f}_0(t)$ в точках $t_i, i=1, \dots, k$. Поскольку формула в достаточной степени громоздкая, для простоты ограничимся случаем, когда для некоторого $0 < \kappa \leq 1$ выполняется $\dot{f}_0(t) = 0$ при $0 \leq t \leq \kappa$; $0 < a \leq -\dot{f}_0(t) \leq A < \infty$ при $\kappa \leq t \leq 1$, при этом будем рассматривать вероятность события $\{\omega(t) > rf_0(t); \kappa \leq t \leq 1\}$. Основные трудности задачи преодолеваются именно в этом случае, и переход к ситуации, когда чередуются интервалы указанного вида, достаточно прост.

2. Формулировка основного результата

Итак, будем рассматривать множество $G = G_0(g, h)$ вида (4) такое, что для некоторого $0 < \kappa < 1$ функция $f_0(t)$ линейна при $0 \leq t \leq \kappa$ и выпукла вверх при $\kappa \leq t \leq 1$; в этом случае, очевидно, при $\kappa \leq t \leq 1$ справедливо $h(t) = f_0(t)$. Нетрудно видеть, далее, что для любой функции $g_1(t), \kappa \leq t \leq 1, g_1(t) \geq g(t), g_1(t) \neq g(t)$, справедливо

$$V(G_\kappa(g_1, h)) = V(G_\kappa(g, h)) < V(G_\kappa(g, h) \setminus G_\kappa(g, h)),$$

поэтому в силу (3) справедливо

$$P(\omega \in r \cdot G_\kappa(g, h)) \sim P(\omega \in r \cdot G_\kappa(g_1, h)), \quad (7)$$

т. е. верхняя граница g полосы $G_\kappa(g, h)$ мало влияет на характер асимптотики (5). Можно, в частности, положить $g(t) = +\infty$, перейдя к однограничной задаче.

Функцией Эйри $W(x)$ называют единственное решение уравнения

$$\dot{W}(x) = xW(x), \quad (8)$$

удовлетворяющее условиям

$$W(0) = \sqrt{\pi}/3^{1/3}\Gamma(2/3); \quad \dot{W}(0) = -\sqrt{\pi}/3^{1/3}\Gamma(1/3).$$

Эта функция хорошо изучена (см., например, [3]); в решении нашей задачи функция Эйри будет играть заметную роль.

Теорема. Пусть дана полоса $G_0(g, h)$ вида (4) и кратчайший путь f_0 удовлетворяет следующим соотношениям: 1) $\dot{f}_0(t) = 0$ при $0 \leq t \leq \kappa$; 2) $f_0(t) = h(t)$ при $\kappa \leq t \leq 1$; 3) $f_0(t)$ непрерывна при $0 \leq t \leq 1$ и $\dot{f}_0(1) = 0$; 4) $0 < a \leq -\dot{f}_0(t) \leq A < \infty$ при $\kappa \leq t \leq 1$; 5) $\ddot{h}(t)$ непрерывна на $[\kappa, 1]$ и меняет знак конечное число раз. Тогда при $r \rightarrow \infty$

$$P(\omega(t) > rh(t); \kappa \leq t \leq 1) \sim \frac{\Lambda^2 \exp \left\{ -r^2/2 \int_0^1 \dot{f}_0^2(t) dt - \lambda r^{2/3} \int_\kappa^1 |\ddot{h}(t)|^{2/3} dt \right\}}{\sqrt{2\pi\kappa} r^{1/3} |\ddot{h}(\kappa)\ddot{h}(1)|^{1/6}},$$

где $\lambda = -2^{-1/3}\lambda_0$; $\lambda_0 = -2, 3, \dots$ — максимальный нуль функции Эйри

$$W(x); \quad \Lambda^2 = \left(\int_{\lambda_0}^{\infty} W(x) dx \right)^2 \int_{\lambda_0}^{\infty} W^2(x) dx.$$

Замечание 1. Пусть $g(t)$ — непрерывная функция, и для всех $\kappa \leq t \leq 1$ выполняется $g(t) > f_0(t)$. Тогда точно так же, как и соотношение

(7), устанавливается, что при $r \rightarrow \infty$

$$P(\omega(t) > r \cdot h(t); \kappa \leq t \leq 1) \sim P(\omega \in r \cdot G_\kappa(g, h)).$$

Замечание 2. Из доказательства теоремы будет следовать, что в случае, когда при $0 \leq t < \kappa$ выполняется $f_0(t) > h(t)$ и функции $h(t)$ и $\ddot{h}$ непрерывны в некоторой окрестности точки κ , то справедливо

$$P(\omega(t) > r \cdot h(t); 0 \leq t \leq 1) \sim c \cdot P(\omega(t) > r \cdot h(t); \kappa \leq t \leq 1),$$

где $0 < c < \infty$ — некоторая абсолютная константа.

Несколько слов об идеях, лежащих в основе доказательства теоремы. Доказательство основано на последовательном применении двух абсолютно непрерывных преобразований меры, соответствующей винеровскому процессу в $C(0, 1)$. Первое преобразование (см. разд. 3) переводит, грубо говоря, винеровский процесс $\omega(t)$ в процесс $\omega(t) - rf_0(t)$; это преобразование в той или иной форме используется в большинстве работ о больших отклонениях для различных пространств (см., например, [1, 5–8]). Второе абсолютно непрерывное преобразование (см. разд. 4) переводит винеровский процесс в некий марковский (неоднородный) процесс с непрерывными траекториями и фазовым пространством $[0, \infty)$; это преобразование, использующее функции Эйри, не встречалось ранее автору; нужно отметить тем не менее, что нечто подобное можно найти в [9], где изучается грубая асимптотика вероятностей больших отклонений для локальных времен.

3. Первое абсолютно непрерывное преобразование

Напомним, то C_0 означает совокупность абсолютно непрерывных выходящих из нуля функций $f(t)$. Для винеровского процесса $\omega(t)$ при $f \in C_0$ определим, имея в виду стохастический интеграл, функционал

$$\langle \omega, f \rangle = \int_0^1 \dot{f}(t) d\omega(t) = \omega(1) - \dot{f}(1) \cdot \int_0^1 \omega(t) d\dot{f}(t). \quad (9)$$

Для неслучайной функции $g \in C(0, 1)$ функционалу (9) будет соответствовать обычный интеграл Лебега — Стильеса $\langle g, f \rangle = \int_0^1 \dot{f}(t) dg(t)$.

Очевидно, что для $f \in C_0$

$$S(f) = \ln M \exp \{ \langle \omega, f \rangle \} = 1/2 \cdot \langle f, f \rangle. \quad (10)$$

Функцию отклонений ([1]) для винеровского процесса определим как

$$v(g) = \sup_{f \in C_0} \{ \langle g, f \rangle - S(f) \}, \quad g \in C(0, 1). \quad (11)$$

Если $g \in C_0$, то [см. также (1)] $v(g)$ можно легко вычислить:

$$v(g) = \sup_{f \in C_0} \{ \langle g, f \rangle - 1/2 \cdot \langle f, f \rangle \} = 1/2 \cdot \langle g, g \rangle.$$

Если через f_g обозначить функцию из C_0 , на которой достигается $\sup$ в (11), то, очевидно, для $g \in C_0$ получается $f_g = g$.

Пусть множество $G = \{f \in C(0, 1): f(t) > h(t); \kappa \leq t \leq 1\}$ из теоремы, $f_0 \in G$ — кратчайший путь в G . Для каждого $r > 0$ определим абсолютно непрерывное преобразование меры, соответствующей винеровскому процессу в $C(0, 1)$, положив для любого измеримого множества $H \subset C(0, 1)$

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\omega \in H) &= M(\exp \{ \langle \omega, rf_0 \rangle \}; \omega \in H) / M \exp \{ \langle \omega, rf_0 \rangle \} = \\ &= \exp \{ -r^2/2 \cdot \langle f_0, f_0 \rangle \} \cdot M(\exp \{ \langle \omega, rf_0 \rangle \}; \omega \in H). \end{aligned}$$

С помощью этого преобразования искомая вероятность может быть представлена в виде

$$P(\omega \in r \cdot G) = \exp \{-r^2/2 \cdot \langle f_0, f_0 \rangle\} M(\exp \{-\langle \omega - rf_0, rf_0 \rangle\}; \omega \in r \cdot G) = \\ = \exp \{-r^2 v(f_0)\} M(\exp \{-\langle \omega - rf_0, rf_0 \rangle\}; \omega - rf_0 \in r \cdot (G - f_0)). \quad (12)$$

Нетрудно вычислить для произвольной функции $f \in C_0$, что

$$\ln M \exp \{\langle \omega - rf_0, f \rangle\} = 1/2 \langle f, f \rangle = \ln M \exp \{\langle \omega, f \rangle\};$$

поэтому процесс $\omega(t) - r \cdot f_0(t)$, $0 \leq t \leq 1$, имеет распределение $\tilde{P}$, совпадающее с распределением винеровского процесса: для любого измеримого $H \in C(0, 1)$

$$\tilde{P}(\omega - rf_0 \in H) = P(\omega \in H).$$

Легко видеть, что множество $G' = G - f_0$ будет такого вида:

$$G' = \{f \in C(0, 1) : f(t) > h(t) - f_0(t) = 0; \kappa \leq t \leq 1\}. \quad (13)$$

Таким образом, формулу (12) можно переписать в виде

$$P(\omega \in r \cdot G) = \exp \{-r^2 v(f_0)\} M(\exp \{-r \langle \omega, f_0 \rangle\}; \omega \in G'). \quad (14)$$

Далее, в силу того, что при $\kappa \leq t \leq 1$ справедливо $h(t) = f_0(t)$, а также потому, что $\dot{h}(1) = \dot{f}_0(t) = 0$ при $0 \leq t \leq \kappa$, получаем

$$\langle \omega, f_0 \rangle \equiv \int_0^1 \dot{f}_0(t) d\omega(t) = - \int_0^1 \ddot{f}_0(t) \omega(t) dt = - \int_{\kappa}^1 \ddot{h}(t) \omega(t) dt.$$

Поэтому (14) переписывается в виде

$$P(\omega \in rG) = \exp \{-r^2 v(f_0)\} M \left(\exp \left\{ -r \int_{\kappa}^1 \ddot{h}(t) | \omega(t) dt \right\}; \omega \in G' \right). \quad (15)$$

Используя явный вид множества G' [см. (13)], представим формулу (15) в виде

$$P(\omega \in rG) = \exp \{-r^2 v(f_0)\} \cdot \int_0^{\infty} p(x) N_1(x) dx, \quad (16)$$

где

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}} \exp \{-x^2/(2\kappa)\};$$

$$N_1(x) = M \left(\exp \left\{ -r \int_{\kappa}^1 \ddot{h}(t) | (x + \omega(t)) dt \right\}; \inf_{\kappa \leq t \leq 1} (x + \omega(t)) > 0 \right).$$

Обозначим далее $\rho(t) = -h(t + \kappa)$ для $0 \leq t \leq 1 - \kappa$; винеровский процесс, равный x в момент t , обозначим $\omega_t^x(u) = \omega(u - t) + x$ для $u \geq t$. В формуле, определяющей функцию $N_1(x)$, сделаем следующие несложные преобразования:

$$N_1(x) \equiv M \left(\exp \left\{ -r \int_0^{1-\kappa} \rho(t) \omega_0^x(t) dt \right\}; \inf_{0 \leq t \leq 1-\kappa} \omega_0^x(t) > 0 \right) = \\ = M \left(\exp \left\{ - \int_0^{(1-\kappa)T} \rho(t/T) \omega_0^{\sqrt{T}x}(t) dt \right\}; \inf_{0 \leq t \leq (1-\kappa)T} \omega_0^{\sqrt{T}x}(t) > 0 \right),$$

где $T = r^{2/3}$. Обозначив $T_1 = (1 - \kappa)T$;

$$N_2(x) = M \left(\exp \left\{ - \int_0^{T_1} \rho(t/T) \omega_0^x(t) dt \right\}; \inf_{0 \leq t \leq T_1} \omega_0^x(t) > 0 \right),$$

перепишем (16) в виде

$$P(\omega \in rG) = T^{-1/2} \exp \{ - r^2 v(f_0) \} \cdot \int_0^\infty p(x/\sqrt{T}) N_2(x) dx. \quad (17)$$

4. Второе абсолютно непрерывное преобразование

О функции Эйри $W(x)$ [см. (8)] известно [4], что при $x \rightarrow \infty$

$$W(x) \sim 1/2 \cdot x^{-1/4} \exp \{-s\}; \quad W(x) \sim -1/2 \cdot x^{1/4} \exp \{-s\}, \quad (18)$$

где $s = 2/3 \cdot x^{3/2}$; наибольший нуль функции $W(x)$, который мы обозначим $-\lambda_0$, равен $-2,338107\dots$. Положим при $x \geq 0$

$$z(x) = W(2^{1/3}x - \lambda_0) \left(\int_0^\infty W^2(2^{1/3}x - \lambda_0) dx \right)^{-1/2}; \quad (19)$$

функция $z(x)$, таким образом [см. (8)], удовлетворяет уравнению

$$1/2 \cdot \ddot{z}(x) = xz(x) - \lambda z(x), \quad \lambda = 2^{-1/3} \cdot \lambda_0, \quad (20)$$

и условиям

$$z(0) = z(\infty) = 0; \quad \int_0^\infty z^2(x) dx = 1. \quad (21)$$

Пусть, далее,

$$z(x, \rho) = \rho^{1/6} z(x\rho^{1/3}); \quad p(x, \rho) = z^2(x, \rho). \quad (22)$$

Нетрудно убедиться, что в силу (20) функция $z(x, \rho)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 z(x, \rho)}{\partial x^2} = \rho \cdot x \cdot z(x, \rho) - \lambda(\rho) z(x, \rho), \quad (23)$$

где $\lambda(\rho) = \lambda \cdot \rho^{2/3}$, и условиям (21).

Пусть $F(\omega)$ — некоторый функционал от винеровского процесса; $H \subseteq C(0, 1)$ — измеримое множество; условимся через $M'(F(\omega_0^x); \omega_0^x \in H, \omega_0^x(t) = y)$ обозначить плотность

$$\frac{d}{dy} M(F(\omega_0^x); \omega_0^x \in H, \omega_0^x(t) < y).$$

Это обозначение будет использоваться в тех случаях, когда очевидно (или доказано), что такая непрерывная плотность существует; если $F = 1$, то будем обозначать

$$P(\omega_0^x \in H, \omega_0^x(t) = y) = M(1; \omega_0^x \in H, \omega_0^x(t) = y).$$

Так, для $0 < \rho < \infty$ положим

$$M^p(t; x, y) = M' \left(\exp \left\{ - \int_0^t \rho \omega_0^x(u) du + \lambda \rho^{2/3} t \right\}; \inf_{0 \leq u \leq t} \omega_0^x(u) > 0, \omega_0^x(t) = y \right),$$

$$M^p(t) = z^{-1}(x, \rho) M^p(t; x, y) z(y, \rho). \quad (24)$$

В силу леммы 7.1 функции $M^p(t; x, y)$ и $M^p(t; x, y)$ непрерывны по совокупности $x > 0, y > 0$. Эти функции можно интерпретировать как переходные плотности (см. гл. 2 в [10]), например:

$$\tilde{M}^p(t+u; x, y) = \int_0^\infty \tilde{M}^p(t; x, x') \tilde{M}^p(u; x', y) dx'.$$

Инфинитезимальный оператор, соответствующий переходной плотности $\tilde{M}^p(t; x, y)$, имеет вид

$$A^p f(x) = \left[-\rho x - \lambda \rho^{2/3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 z(x, \rho)}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{z(x, \rho)} \right] f(x) + \\ + \frac{1}{2} \ddot{f}(x) + \dot{f}(x) \frac{\partial \ln z(x, \rho)}{\partial x}.$$

Поскольку функция $f(x) \equiv 1$ принадлежит области определения A^p и в силу (23) справедливо $A^p 1 \equiv 0$, то (см. лемму 2.3 в гл. 2 работы [10]) переходная плотность $\tilde{M}^p(t; x, y)$ консервативна, т. е. для $t > 0, x > 0$

$$\int_0^\infty \tilde{M}^p(t; x, y) dy \equiv 1. \quad (25)$$

Заметим, что $M^p(t; x, y) = M^p(t; y, x)$; из последнего и из (25) немедленно получаем, что для $y > 0, t > 0$

$$p(y, \rho) = \int_0^\infty p(x, \rho) \tilde{M}^p(t; x, y) dx. \quad (26)$$

Таким образом, семейство $\tilde{M}^p$ является переходной плотностью некоторого однородного марковского процесса $X^p(t)$ с непрерывными траекториями и стационарной плотностью $p(y, \rho)$.

Пусть, как и прежде, $\rho(t) = -\dot{h}(t + \kappa)$ для $0 \leq t \leq 1 - \kappa$. Положим для $x > 0, T > 0, T_1 = (1 - \kappa)T, 0 \leq t \leq T_1$

$$A(x, t) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho^{2/3}(t)} \cdot x \cdot \frac{\dot{z}(x \rho^{1/3}(t))}{z(x \rho^{1/3}(t))}. \quad (27)$$

На множестве траекторий винеровского процесса $\omega_x^t(u), t \leq u \leq s \leq T_1$, которые в момент t выходят из точки $x > 0$ и до момента s не опускаются ниже нуля, определим функционал

$$\gamma^x(t, s) = 1/T \cdot \int_t^s A(\omega_t^x(u), u/T) du. \quad (28)$$

В силу (18) найдется $C < \infty$ такое, что для всех $x > 0, 0 \leq t \leq T_1$ выполняется $|A(x, t/T)| \leq Cx^{3/2}$.

Обозначим далее для λ из (20) $x > 0, 0 \leq t \leq s \leq T_1$

$$\alpha^x(t, s) = - \int_t^s \rho(u/T) \omega_t^x(u) du, \quad \beta(t, s) = \lambda \cdot \int_t^s \rho^{2/3}(u/T) du; \quad (29)$$

и для $x > 0, y > 0, 0 \leq t \leq s \leq T_1, -1 \leq \mu \leq 1$ введем семейство функций

$$\tilde{M}(t, s; x, y; \mu) = z^{-1}(x, \rho(t, \rho(t/T))) \cdot z(y, \rho(s/T)) M'(\exp\{\alpha^x(t, s) + \\ + \beta(t, s) + \mu \gamma^x(t, s)\}; \inf_{t \leq u \leq s} \omega_t^x(u) > 0, \omega_t^x(s) = y). \quad (30)$$

В силу того, что $|A(x, t)| \leq C \cdot x^{3/2}$, для всех достаточно больших T для семейства $\tilde{M}$ выполнены условия леммы 15; поэтому функции $\tilde{M}(t, s; x, y; \mu)$ непрерывны по $x > 0, y > 0$. Семейство (30) можно считать переходными (неоднородными) плотностями:

$$\tilde{M}(t, s; x, y; \mu) = \int_0^\infty \tilde{M}(t, r; x, x'; \mu) \tilde{M}(r, s; x', y; \mu) dx'$$

для $t < r < s$. Следующее утверждение является аналогом (24) и (25) для неоднородного случая, когда $\rho(t) \neq \rho$.

Лемма 1. Для $T_1 = (1 - \kappa)T$, $0 \leq t < s \leq T_1$, $x > 0, y > 0$ справедливо

$$\int_0^\infty \tilde{M}(t, s; x, y; -1) dy = 1; \quad (31)$$

$$\int_0^\infty p(x, \rho(t/T)) \tilde{M}(t, s; x, y; 1) dx = p(y, \rho(s/T)). \quad (32)$$

Доказательство. Пусть (см. также разд. 7)

$$\overset{\circ}{\omega}(u) = \overset{\circ}{\omega}_{t,s}^{x,y}(u) \equiv \omega_t^x(u) - (\omega_t^x(s) - y) \cdot (u - t)/(s - t), \quad t \leq u \leq s,$$

— условный винеровский процесс, выходящий из x в момент t и равный y в момент s . Функцию $\tilde{M}(t, s; x, y; \mu)$ (30) можно переписать в виде (см. разд. 7)

$$\tilde{M}(t, s; x, y; \mu) = \tilde{M}^0(t, s; x, y; \mu) \cdot P'(\omega_t^x(s) = y),$$

где $\tilde{M}^0$ определяется так же, как $\tilde{M}$, с заменой в (30) [и соответственно в (28) и (29)] процесса ω процессом $\overset{\circ}{\omega}$. Пусть $\rho_n(u) = \rho(k/n)$ для $k/n \leq u < (k+1)/n$. Положим далее

$$\begin{aligned} \alpha_n^x(t, s) &= - \int_t^s \rho_n(u/T) \omega_t^x(u) du, \\ \beta_n(t, s) &= \lambda \cdot \int_t^s \rho_n^{2/3}(u/T) du; \\ \gamma_n^x(t, s) &= \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \ln \frac{z(\omega_t^x(k/n), \rho((k+1)/n))}{z(\omega_t^x(k/n), \rho(k/n))}, \end{aligned} \quad (33)$$

где $k_1 = \sup \{k : k/n \leq t\}$; $k_2 = \sup \{k : k/n < s\}$.

Пусть функции $\tilde{M}_n(t, s; x, y; \mu)$ определяются, как $\tilde{M}(t, s; x, y; \mu)$, с заменой в (30) функционалов α, β, γ соответственно функционалами $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$; если, далее, в определении $\tilde{M}_n(t, s; x, y; \mu)$ [и в (33)] заменить процесс ω процессом $\overset{\circ}{\omega}$, то получим определение функций $\tilde{M}_n^0(t, s; x, y, \mu)$. При этом, очевидно,

$$\tilde{M}_n(t, s; x, y; \mu) = \tilde{M}_n^0(t, s; x, y; \mu) P'(\omega_t^x(s) = y).$$

Если в определениях (28), (29) и (33) функционалов $\alpha, \gamma; \alpha_n, \gamma_n$ процесс $\overset{\circ}{\omega}$ заменить процессом ω , то получим определения функционалов $\alpha, \gamma; \alpha_n, \gamma_n$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \tilde{M}^0(t, s; x, y; \mu) &= z^{-1}(x, \rho(t/T)) \cdot z(y, \rho(s/T)) M(\exp \{ \overset{\circ}{\alpha}^x(t, s) + \beta(t, s) + \\ &\quad + \mu \overset{\circ}{\gamma}^x(t, s) \}; \inf_{t \leq u \leq s} \overset{\circ}{\omega}_{t,s}^{x,y}(u) > 0); \end{aligned} \quad (34)$$

$$\tilde{M}_n^0(t, s; x, y; \mu) = z^{-1}(x, \rho(t/T)) \cdot z(y, \rho(s/T)) M(\exp\{\alpha_n^x(t, s) + \beta_n(t, s) + \mu \cdot \gamma_n^x(t, s)\}; \inf_{t \leq u \leq s} \omega_{t,s}^{x,y}(u) > 0), \quad (35)$$

где, напомним, функции $z(x, \rho)$ определены (22).

Функционалы α_n и γ_n , заданные на непрерывных процессах $\omega(u) = \omega_{t,s}^{x,y}(u)$, $t \leq u \leq s$, очевидно, с вероятностью 1 сходятся при $n \rightarrow \infty$

к функционалам α и γ ; очевидно, далее, $\beta_n \rightarrow \beta$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому с вероятностью 1 случайные величины, стоящие под знаком математического ожидания в определении (35) функции $\tilde{M}_n^0$ сходятся к случайным величинам, стоящим под знаком математического ожидания в определении (34) функции M^0 . Для сходимости

$$\tilde{M}_n^0(t, s; x, y; \mu) \rightarrow \tilde{M}^0(t, s; x, y; \mu) \quad (36)$$

при $n \rightarrow \infty$ достаточно (в силу теоремы Лебега) иметь равномерную по n мажорируемость. Установим, что найдутся числа $C_1, C_2 < \infty$ такие, что для $|\mu| \leq 1, n = 1, 2, \dots$

$$\exp\{\alpha_n^x(t, s) + \beta_n(t, s) + \mu \gamma_n^x(t, s)\} \leq C_1 \exp\left\{C_2 \sup_{t \leq u \leq s} |\omega_{t,s}^{x,y}(u)|^{3/2}\right\} = \eta(x, y). \quad (37)$$

Очевидно, что в пояснении нуждается только оценка $\exp\{\mu \gamma_n^x(t, s)\}$. Из (18) следует, что при $x \rightarrow \infty$

$$\ln z(x) \sim -2/3 \cdot x^{3/2}, (\ln z(x))' \sim -x^{3/2}.$$

Из последнего и из того, что при $x \rightarrow 0$ справедливо $z(x) \sim c \cdot x$, $0 < c < \infty$, легко следует нужное неравенство для $\exp\{\mu \gamma_n^x(t, s)\}$.

Поскольку, очевидно, величина $\eta(x, y)$, стоящая в правой части неравенства (37), имеет конечное математическое ожидание, требуемая ограниченность получена; сходимость (36) доказана.

Вспоминая, как связаны функции $\tilde{M}_n$ и $\tilde{M}_n^0$, $\tilde{M}$ и из M^0 , получаем, что для любых $x > 0, y > 0, |\mu| \leq 1$ при $n \rightarrow \infty$ справедливо

$$\tilde{M}_n(t, s; x, y; \mu) \rightarrow \tilde{M}(t, s; x, y; \mu). \quad (38)$$

Далее, непосредственно из (25) следует, что

$$\int_0^\infty \tilde{M}_n(t, s; x, y; -1) dy = 1, \quad (39)$$

поэтому в силу сходимости (38) для доказательства (31) достаточно убедиться, что можно переходить к пределу под знаком интеграла в (39). В силу (37) имеем

$$z(x, \rho_n(t/T)) \tilde{M}_n(t, s; x, y; -1) \leq M \eta(x, y) \cdot z(y, \rho_n(s/T)) \cdot P'(\omega_t^x(s) = y),$$

и потому достаточно доказать, что правая часть последнего неравенства интегрируема по y в пределах от 0 до ∞ равномерно по n . Легко видеть, что

$$\int_0^\infty M \eta(x, y) z(y, \rho_n(s/T)) P'(\omega_t^x(s) = y) dy \leq M C_1 \exp\left\{\sup_{t \leq u \leq s} C_2 |\omega_t^x(u)|^{3/2}\right\} \times \\ \times z(|\omega_t^x(s)|, \rho_n(s/T)) \leq A \cdot C_1 M \exp\left\{\sup_{t \leq u \leq s} C_2 |\omega_t^x(u)|^{3/2}\right\},$$

где $A = \sup_{0 < x < \infty} \sup_{0 < s < T_1} \sup_{n=1,2,\dots} z(x, \rho_n(s/T)) < \infty$. Поэтому требуемая равномерная интегрируемость в (39) установлена, соотношение (31) доказано. Поскольку (32) доказывается аналогично, лемма 1 доказана.

Второе абсолютно непрерывное преобразование в соответствии с утверждением леммы 1 определим так:

$$\tilde{P}'(\omega_i^x(s) = y) = \tilde{M}(t, s; x, y; -1), \quad (40)$$

где, напомним, функция $\tilde{M}$ определяется формулой (30). В этих обозначениях функция $N_2(x)$ из (17) представится как

$$N_2(x) = \exp \left\{ -\lambda \int_0^{T_1} \rho^{2/3}(u/T) du \right\} \times \\ \times \int_0^\infty z(x, \rho(0)) \tilde{M}(0, T_1; x, y; 0) z^{-1}(y, \rho(1-\kappa)) dy,$$

где $T = z^{2/3}$, $T_1 = (1-\kappa)T$. Соотношение (17) перепишется в виде

$$P(\omega \in r \cdot G) = \exp \left\{ -r^2 v(f_0) - \lambda \int_0^{T_1} \rho^{2/3}(u/T) du \right\} \times \\ \times 1/\sqrt{T} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty p\left(\frac{x}{\sqrt{T}}\right) z(x, \rho(0)) \tilde{M}(0, T_1; x, y; 0) z^{-1}(y, \rho(1-\kappa)) dx dy. \quad (41)$$

Следующие нестрогие рассуждения наметят путь дальнейшего следования. Представляется очевидным, что $p(x/\sqrt{T}) \sim 1/\sqrt{2\pi\kappa}$ при $T \rightarrow \infty$. Далее, в силу (32) естественно ожидать, что

$$\tilde{M}(0, T_1; x, y; 0) \sim p(y; \rho(1-\kappa)), \quad (42)$$

поэтому подынтегральная функция в (41) сходится к функции

$$1/\sqrt{2\pi\kappa} \cdot z(x, \rho(0)) \cdot z(y, \rho(1-\kappa)).$$

Доказательству (42) и обоснованию предельного перехода в (41) и посвящена оставшаяся часть работы. При этом доказательство (42) разбивается на ряд этапов. Предполагаем, не ограничивая общности, что при $\kappa \leq t \leq 1$ либо $\ddot{h}(t) \leq 0$, либо $\ddot{h}(t) \geq 0$; случай, когда $\ddot{h}(t)$ несколько раз на отрезке $[\kappa, 1]$ меняет знак, сводится к предыдущему разбиением $[\kappa, 1]$ на интервалы, где третья производная знакопостоянна.

Обратимся к очевидному соотношению

$$\tilde{M}(0, T_1; x, y; 0) = \int_{x'=0}^\infty \int_{y'=0}^\infty \tilde{M}(0, T_1^{1/3}; x, x'; 0) \tilde{M}(T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}; x', y'; 0) \tilde{M}(T_1 - T_1^{1/3}, T_1; y', y; 0) dx' dy'. \quad (43)$$

В разделе 5 будет доказано, что при $T \rightarrow \infty$

$$\int_{x'=0}^\infty \int_{y'=0}^\infty p(x', \rho(T_1^{1/3}/T)) \tilde{M}(T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}; x', y'; 0) dx' dy' \sim 1. \quad (44)$$

Отметим, что именно при доказательстве (44) (и только здесь) будет использоваться техническое ограничение, состоящее в том, что $\ddot{h}(t)$ меняет знак конечное число раз. В этом же разделе устанавливается (лем-

ма 2), что

$$\begin{aligned}\tilde{M}(0, T_1^{1/3}; x, x'; 0) &\sim p(x', \rho(T_1^{1/3}/T)); \\ \tilde{M}(T_1 - T_1^{1/3}; T_1; y', y; 0) &\sim p(y, \rho(T_1/T));\end{aligned}\quad (45)$$

при доказательстве (45) используется лемма 16' из раздела 7. Применяя далее формально (44) и (45) к формуле (43), можно получить (42). Раздел 6 посвящен обоснованию предельных переходов как в (43), так и в (41).

5. Доказательство соотношения (44)

Обозначим

$$\tilde{M}^t \exp\{\mu\gamma(t, s)\} \equiv \int_0^\infty p(x, \rho(t/T)) \int_0^\infty \tilde{M}(t, s; x, y; \mu - 1) dx dy.$$

Верхний индекс t означает, что в момент t винеровский процесс $\omega_t^a(u)$ начинается в случайной точке a , распределение которой задается плотностью $p(x, \rho(t/T))$; волна над знаком математического ожидания указывает на то, что выполнено второе абсолютно непрерывное преобразование. В соответствии с утверждениями леммы 1 справедливо

$$\tilde{M}^t \exp\{\mu\gamma(t, s)\} = 1$$

при $\mu = 0$ и $\mu = 2$. В этих обозначениях соотношение (44) записывается как

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} \tilde{M}^{T_1^{1/3}} \exp\{\gamma(T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3})\} = 1, \quad (46)$$

где, как и ранее, $T_1 = (1 - \kappa)T$. Обозначим

$$N(u, v) = \left. \frac{\partial \tilde{M}^u \exp\{\mu\gamma(u, v)\}}{\partial \mu} \right|_{\mu=2}; \quad (47)$$

убедимся, что соотношение

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} N(T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}) = 0 \quad (48)$$

влечет (46). Действительно, функция

$$\tilde{M}^{T_1^{1/3}} \exp\{\mu\gamma(T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3})\}$$

выпукла по μ (ведь это преобразование Лапласа случайного функционала $\gamma(T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3})$, который задан на траекториях процесса $\omega_{T_1^{1/3}}^a(u)$,

где случайная величина a имеет плотность $p(x, \rho(T_1^{1/3}/T))$, поэтому целиком лежит выше касательной, проведенной в точке $\mu = 2$; с другой стороны, при $0 \leq \mu \leq 2$ эта функция не превосходит 1. Поскольку (48) означает, что производная в точке $\mu = 2$ стремится к нулю, т. е. касательная в этой точке приближается к функции $f(\mu) = 1$, то (46) имеет место.

Доказательство (48) получим с помощью нескольких лемм. Как уже отмечалось в конце предыдущего раздела, можно, не ограничивая общности, считать, что при $0 \leq t \leq 1 - \kappa$ функция $\rho(t)$ не меняет знак; для определенности будем считать, что $\rho(t) \geq 0$ при $0 \leq t \leq 1 - \kappa$. Случай, когда $\rho(t) \leq 0$, сводится к предыдущему, если рассматривать обращен-

ный процесс $\omega^*(t) = \omega(T_1 - t)$, которому будет соответствовать функция $\rho^*(t) = \rho(1 - \kappa - t)$ с $\rho^*(t) \geq 0$.

Лемма 2. Для любых чисел $0 < a \leq A < \infty$, $\varepsilon > 0$, $0 \leq u \leq T_1 - T_1^{1/3}$ найдется T_0 такое, что для всех $T_1 \geq T_0$, $a \leq x$, $y \leq A$, $|\mu| \leq 1$ выполняется

$$|\tilde{M}(u, u + T_1^{1/3}; x, y; \mu) - p(y, \rho(u/T))| < \varepsilon,$$

где функции $\tilde{M}$ и p определены соответственно (30) и (22).

Доказательство. В силу (18) найдутся $0 < c \leq C < \infty$ такие, что для всех $x > 0$ справедливо

$$\sup_{0 < t \leq 1 - \kappa} |A(x, t)| \leq cx^{3/2} + C,$$

где функция $A(x, t)$ определена (27). Поэтому найдутся числа $\rho_+ = \rho_+(u, T_1)$ и $\rho_- = \rho_-(u, T_1)$ такие, что для некоторого $C_1 < \infty$ выполняется

$$\delta = |\rho_+^{2/3} - \rho_-^{2/3}| \leq C_1/T_1^{2/3}$$

и справедливо [см. (28) и (29)] для $|\mu| \leq 1$

$$\begin{aligned} -C/T_1^{1/6} - \rho_+ \int_u^{u+T_1^{1/3}} \omega_u^x(t) dt &\leq \alpha^x(u, u + T_1^{1/3}) + \mu \gamma^x(u, u + T_1^{1/3}) \leq \\ &\leq -\rho_- \int_u^{u+T_1^{1/3}} \omega_u^x(t) dt + C/T_1^{1/6} \end{aligned}$$

на множестве $\{0 < \omega_u^x(t) < T_1^{1/3}; u \leq t \leq u + T_1^{1/3}\}$. Поэтому имеют место неравенства

$$\begin{aligned} A_+ e^{-\delta T_1^{1/3}} \tilde{M}^{\rho_+}(T_1^{1/3}; x, y) &\leq \tilde{M}(u, u + T_1^{1/3}; x, y; \mu) \leq \\ &\leq A_- e^{\delta T_1^{1/3}} \tilde{M}^{\rho_-}(T_1^{1/3}; x, y), \end{aligned}$$

где функция $\tilde{M}^{\rho}$ определена формулой (24)

$$A_{\pm} = z(x, \rho(u/T)) \cdot z^{-1}(x, \rho_{\pm}) \cdot z^{-1}(y, \rho(u + T_1^{1/3}/T)) z(y, \rho_{\pm}).$$

Поскольку при $T_1 \rightarrow \infty$ $A_{\pm} \rightarrow 1$ равномерно по $x, y \in [a, A]$, и в силу леммы 16' при $T_1 \rightarrow \infty$ выполняется

$$\tilde{M}^{\rho_{\pm}}(T_1^{1/3}; x, y) \sim p(y, \rho_{\pm})$$

равномерно по $x, y \in [a, A]$, наконец,

$$p(y, \rho_{\pm}) \sim p(y, \rho(u/T))$$

равномерно по $y \in [a, A]$, то лемма 2 доказана.

Лемма 3. Для любых $0 \leq u < v \leq T_1$

$$N(u, v) = 1/T \cdot \int_{t=u}^v \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} q(x, t/T) \tilde{M}(t, v; x, y; 1) dx dy dt,$$

где функция N определена (47); $q(y, t/T) = p(y, \rho(t/T)) \cdot A(y, t/T)$; функция A определена (27).

Доказательство. Отправляясь от определения (47) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$N(u, v) = \int_0^{\infty} p(x, \rho(u/T)) \tilde{M} \left(\exp \left\{ 2/T \cdot \int_u^v A(\omega_u^x(t), t/T) dt \right\} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times 1/T \cdot \int_u^v A(\omega_u^x(t'), t'/T) dt' \Big) dx = 1/T \cdot \int_u^v \int_0^\infty \int_0^\infty p(x, \rho(u/T)) \times \\
& \times \tilde{M}' \left(\exp \left\{ 2/T \cdot \int_u^{t'} A(\omega_u^x(t), t/T) dt \right\}; \omega_u^x(t') = x' \right) A(x', t'/T) \times \\
& \times \tilde{M}' \left(\exp \left\{ 2/T \cdot \int_{t'}^v A(\omega_{t'}^{x'}(t), t/T) dt \right\}; \omega_{t'}^{x'}(v) = y \right) dy dx' dx dt' = \\
& = 1/T \cdot \int_u^v \int_0^\infty \int_0^\infty p(x, \rho(u/T)) \tilde{M}(u, t'; x, x'; 1) \times \\
& \quad \times A(x', t'/T) \tilde{M}(t', v; x', y; 1) dy dx' dx dt.
\end{aligned}$$

Далее, в силу (32) интеграл по x равен $p(x', \rho(t'/T))$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Для любых $0 \leq t \leq T_1$ справедливо $\int_0^\infty q(x, t/T) dx = 0$, где функция q определена в лемме 3.

Доказательство. Обратимся к определению функции q . Для доказательства леммы 4 достаточно убедиться, что для любого $\rho > 0$

$$\int_0^\infty z^2(y\rho) dy + 2\rho \int_0^\infty yz(y\rho) z(y\rho) dy = 0.$$

Последнее устанавливается интегрированием по частям. Лемма доказана.

Лемма 5. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $a' > 0$ такое, что для всех $0 \leq t \leq T_1$, $0 < a \leq a'$

$$\int_{x=0}^a q(x, t/T) \int_{y=0}^\infty \tilde{M}(t, T_1 - T_1^{1/3}; x, y; 1) dx dy < \varepsilon.$$

Доказательство. В силу условия $\rho(u) \geq 0$ при $0 \leq u \leq 1 - \kappa$ найдется $C < \infty$ такое, что для всех $x > 0$

$$\gamma^x(t, T_1 - T_1^{1/3}) \leq C. \quad (49)$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
& \int_{x=0}^{a'} q(x, t/T) \int_{y=0}^\infty \tilde{M}(t, T_1 - T_1^{1/3}; x, y; 1) dx dy \leq e^{2C} \int_{x=0}^{a'} q(x, t/T) \times \\
& \times \int_{y=0}^\infty \tilde{M}(t, T_1 - T_1^{1/3}; x, y; -1) dx dy = e^{2C} \int_0^{a'} q(x, t/T) dx,
\end{aligned}$$

где последнее равенство справедливо в силу леммы 1. Выбирая далее $a' > 0$ достаточно малым, получаем требуемое.

Лемма 6. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $0 < a' \leq A' < \infty$ и T_0 такие, что для всех $T_1 \geq T_0$, $0 < a \leq a' \leq A' \leq A < \infty$

$$\begin{aligned}
N(T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}) \leq \varepsilon + 1/T \cdot \int_{T_1^{1/3}}^{T_1 - T_1^{1/3}} \int_{x=a}^A \int_{y=0}^\infty q(x, t/T) \tilde{M}(t, T_1 - \\
- T_1^{1/3}; x, y; 1) dy dx dt.
\end{aligned}$$

Доказательство. В силу леммы 5 найдется $a' > 0$ такое, что для всех достаточно больших T_1 , $0 < a \leq a'$

$$N(T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}) \leq \varepsilon + 1/T \cdot \int_{T_1^{1/3}}^{T_1 - T_1^{1/3}} \int_{x=a}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} q(x, t/T) \tilde{M}(t, T_1 - T_1^{1/3}; x, y; 1) dy dx dt. \quad (50)$$

Из условия $\rho(u) \geq 0$ при $0 \leq u \leq 1 - \kappa$ следует, что найдется $A' < \infty$ такое, что для всех $x \geq A'$, $0 \leq t \leq T_1$ справедливо $q(x, t/T) \leq 0$; функция $\tilde{M}(t, T_1 - T_1^{1/3}; x, y; 1)$ положительна, поэтому, сократив в (50) область интегрирования по x до $[a, A]$, $A' \leq A < \infty$, мы только увеличим правую часть (50). Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Для любых чисел $\varepsilon > 0$, $0 < a \leq A < \infty$ найдутся числа $0 < b \leq B < \infty$ такие, что для всех $0 \leq t \leq T_1 - 2T_1^{1/3}$ выполняется

$$K \equiv \int_{x=a}^A q(x, t/T) \left(\int_{y'=0}^b + \int_{y'=B}^{\infty} \right) \int_{y=0}^{\infty} \tilde{M}(t, t + T_1^{1/3}; x, y'; 1) \times \\ \times \tilde{M}(t + T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}; y', y; 1) dy dy' dx < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть

$$C_1 = C_1(a, A) \equiv \sup_{0 \leq t \leq T_1} \left[\sup_{a \leq x \leq A} q(x, t/T) / \inf_{a \leq x \leq A} p(x, \rho(t/T)) \right]. \quad (51)$$

Легко видеть, что $C_1 < \infty$ и

$$K \leq C_1 \int_{x=a}^A p(x, \rho(t/T)) \left(\int_{y'=0}^b + \int_{y'=B}^{\infty} \right) \int_{y=0}^{\infty} \tilde{M}(t, t + T_1^{1/3}; x, y'; 1) \tilde{M}(t + T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}; y', y; 1) dy dy' dx.$$

В силу утверждения леммы 1 интеграл по x не превосходит $p(y', \rho(\frac{t + T_1^{1/3}}{T}))$, поэтому в силу (49)

$$K \leq C_1 \left(\int_{y'=0}^b + \int_{y'=B}^{\infty} \right) p(y', \rho(t + T_1^{1/3}/T)) \times \\ \times \int_{y=0}^{\infty} \tilde{M}(t + T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}; y', y; 1) dy dy' \leq \\ \leq C_1 e^{2C} \left(\int_{y'=0}^b + \int_{y'=B}^{\infty} \right) p(y', \rho(t + T_1^{1/3}/T)) dy'$$

Выбирая b и B , получаем требуемое. Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству (48). Из лемм 6 и 7 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $0 < a' \leq A' < \infty$ и для любых $0 < a \leq a' \leq A' \leq A < \infty$ найдутся $0 < b \leq B < \infty$, $T_0 < \infty$ такие, что для всех $T_1 \geq T_0$ выполняется

$$N(T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}) \leq \varepsilon + I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = 1/T \cdot \int_{T_1 - 2T_1^{1/3}}^{T_1 - T_1^{1/3}} \int_{x=a}^A \int_{y=0}^{\infty} q(x, t/T) \tilde{M}(t, T_1 - T_1^{1/3}; x, y; 1) dy dx dt;$$

$$I_2 = 1/T \cdot \int_0^{T_1 - 2T_1^{1/3}} \int_{x=a}^A \int_{y'=b}^B \int_{y=0}^{\infty} q(x, t/T) \tilde{M}(t, t + T_1^{1/3}; x, y'; 1) \times \\ \times \tilde{M}(t + T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}; y', y; 1) dy dy' dx dt.$$

Используя обозначение (51), оценим I_1 так:

$$I_1 \leq C_1(a, A)/T \cdot \int_{T_1 - 3T_1^{1/3}}^{T_1 - T_1^{1/3}} \int_{x=a}^A p(x, \rho(t/T)) \int_{y=0}^{\infty} \tilde{M}(t, T_1 - T_1^{1/3}; x, y; 1) dy dx dt;$$

Поскольку интеграл по x в силу леммы 1 не превосходит $p(y, \rho(T_1 - T_1^{1/3}/T))$, то

$$I_1 \leq C_1(a, A)/T \cdot \int_{T_1 - 2T_1^{1/3}}^{T_1 - T_1^{1/3}} dt = \frac{C_1(a, A) \cdot T_1^{1/3}}{T} = C_1(a, A)/(1 - \kappa) \cdot T_1^{-2/3}.$$

Обратимся к третьему слагаемому. В силу леммы 2

$$\delta = \delta(a, A) \equiv \sup_{\substack{a \leq x \leq A \\ b \leq y' \leq B}} \left| \tilde{M}(t, t + T_1^{1/3}; x, y'; 1) - p\left(y', \rho\left(\frac{t + T_1^{1/3}}{T}\right)\right) \right| \rightarrow 0$$

при $T_1 \rightarrow \infty$. Поэтому $I_2 \leq I_{2,1} + I_{2,2}$, где

$$I_{2,1} = 1/T \cdot \int_0^{T_1 - 2T_1^{1/3}} \int_{x=a}^A \int_{y'=b}^B |q(x, t/T)| \delta \int_{y=0}^{\infty} \tilde{M}(t + T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}; y', y; 1) dt dy dy' dx;$$

$$I_{2,2} = 1/T \cdot \int_0^{T_1 - 2T_1^{1/3}} \int_{x=a}^A \int_{y'=b}^B q(x, t/T) p(y', \rho(t + T_1^{1/3}/T)) \times \\ \times \int_{y=0}^{\infty} \tilde{M}(t + T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}; y', y; 1) dy dy' dx dt.$$

В силу неравенства (49) интеграл по y' и y в определении $I_{2,1}$ не превосходит e^{2c} , поэтому

$$I_{2,1} \leq 1/T e^{2c} \delta \int_0^{T_1 - 2T_1^{1/3}} \int_{x=a}^A |q(x, t/T)| dx dt \leq \delta e^{2c} D,$$

где $D = \sup_{0 \leq t \leq T_1} \int_0^{\infty} |q(x, t/T)| dx < \infty$. Далее, в силу леммы 1 интеграл по y, y' в определении $I_{2,2}$ не превосходит 1, вследствие чего

$$I_{2,2} \leq 1/T \int_0^{T_1 - 2T_1^{1/3}} \int_{x=a}^A q(x, t/T) dx dt.$$

Таким образом,

$$N(T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}) \leq \varepsilon + I_1 + I_{2,1} + I_{2,2} \leq \varepsilon + \frac{C_1(a, A)}{1 - \kappa} T_1^{-2/3} + \\ + e^{2c} \cdot \delta(a, A) \cdot D + 1/T \int_0^{T_1} \int_{x=a}^A q(x, t/T) dx dt.$$

Выбором $a'(\leq a')$ и $A(\geq A')$ (см. лемму 4) можно сделать четвертое слагаемое в правой части последнего неравенства меньше ε ; для этих a и A второе и третье слагаемые выбором T_1 можно сделать как угодно малыми. Соотношение (48) [т. е. (44)] установлено.

6. Обоснование предельных переходов

Сформулируем сначала два утверждения.

Лемма 8. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $0 < a' \leq A' < \infty$ и $T_0 < \infty$ такие, что для всех $T_1 \geq T_0$, $0 < a \leq a' \leq A' \leq A < \infty$ выполняется

$$\left| \int_a^A \int_a^A p(x, \rho(T_1^{1/3}/T)) \tilde{M}(T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}; x, y; 0) dx dy - 1 \right| < \varepsilon. \quad (52)$$

Лемма 9. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $0 < a \leq A < \infty$, $T_0 < \infty$ такие, что для всех $T_1 \geq T_0$

$$\left| \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty - \int_a^A \int_a^A \int_a^A \int_a^A p(x/\sqrt{T}) M_1(x, x') M_2(x', y') M_3(y', y) dx dx' dy dy' \right| < \varepsilon, \quad (53)$$

где

$$M_1(x, y) = M(0, T_1^{1/3}; x, y; 0); \quad M_2(x, y) = M(T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}; x, y; 0); \\ M_3(x, y) = M(T_1 - T_1^{1/3}, T_1; x, y; 0),$$

где функция $M(t, s; x, y; \mu)$ определяется как

$$M(t, s; x, y; \mu) = z(t, \rho(t/T)) \tilde{M}(t, s; x, y; \mu) z^{-1}(y, \rho(s/T)), \quad (54)$$

где, наконец, $\tilde{M}$ и z определяются соответственно формулами (30) и (22).

Используя эти две леммы, закончим доказательство теоремы. Обратимся к (41) и обозначим константу в (41)

$$K \equiv \int_0^\infty \int_0^\infty p(x/\sqrt{T}) \tilde{M}(0, T_1; x, y; 0) z(x, \rho(0)) \cdot z^{-1}(y, \rho(1-\kappa)) dx dy.$$

В силу леммы 9 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $0 < a \leq A < \infty$ такие, что для достаточно больших T выполняется

$$\left| K - \int_a^A \int_a^A \int_a^A \int_a^A p(x/\sqrt{T}) M_1(x, x') M_2(x', y') M_3(y', y) dx dx' dy dy' \right| < \varepsilon,$$

где использованы обозначения для леммы 9. Далее, в силу леммы 2 справедливы соотношения

$$M_1(x, x') \sim z(x, \rho(0)) z(x', \rho(T_1^{1/3}/T)), \\ M_3(y', y) \sim z(y', \rho(T_1 - T_1^{1/3}/T)) \cdot z(y, \rho(1-\kappa))$$

равномерно по x, x' и $y, y' \in [a, A]$. Очевидно, далее, что

$$p(x/\sqrt{T}) \sim 1/\sqrt{2\pi\kappa}$$

равномерно по $x \in [a, A]$. Поэтому можно утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $0 < a' \leq A' < \infty$ и $T_0 < \infty$ такие, что для всех

$0 < a \leq a' \leq A' \leq A < \infty$, $T_1 \geq T_0$ выполняется

$$\left| K - 1/\sqrt{2\pi\kappa} \cdot \int_a^A \int_a^A \int_a^A \int_a^A z(x, \rho(0)) p(x', \rho(T_1^{1/3}/T)) \times \right. \\ \left. \times \tilde{M}(T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}; x', y'; 0) z(y, \rho(1 - \kappa)) dx dx' dy' dy \right| < \varepsilon.$$

Применяя к последнему соотношению лемму 8, завершаем доказательство теоремы.

Таким образом, нам осталось доказать леммы 8 и 9. При доказательстве будет использоваться неравенство

$$M(t, s; x, y; 0) \leq M^{1/2}(t, s; x, y; 1) \cdot M^{1/2}(t, s; x, y; -1), \quad (55)$$

которое вытекает из неравенства Коши, и два соотношения, которые следуют из леммы 1:

$$\int_{x=0}^{\infty} z(x, \rho(t/T)) M(t, s; x, y; 1) dx = z(y, \rho(s, T)); \\ \int_{y=0}^{\infty} M(t, s; x, y; -1) z(y, \rho(s/T)) dy = z(x, \rho(t/T)). \quad (56)$$

Доказательство леммы 8. В силу уже доказанного соотношения (44) достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $0 < a' \leq A' < \infty$ такие, что для всех T_1 , $0 < a \leq a' \leq A' \leq A < \infty$

$$\left[\left(\int_{x=0}^a + \int_{x=A}^{\infty} \right) \int_{y=0}^{\infty} + \int_{x=0}^{\infty} \left(\int_{y=0}^a + \int_{y=A}^{\infty} \right) \right] p(x, \rho(T_1^{1/3}/T)) \times \\ \times \tilde{M}(T_1^{1/3}, T_1 - T_1^{1/3}; x, y; 0) dx dy < \varepsilon. \quad (67)$$

Оценим первое слагаемое в (57). Из определения (30) и из (55) следует, что первое слагаемое (57) не больше, чем

$$\left[\left(\int_{x=0}^a + \int_{x=A}^{\infty} \right) \int_{y=0}^{\infty} z(x, \rho(t/T)) M(t, s; x, y; 1) z(y, \rho(s/T)) dx dy \right]^{1/2} \times \\ \times \left[\left(\int_{x=0}^a + \int_{x=A}^{\infty} \right) \int_{y=0}^{\infty} z(x, \rho(t/T)) M(t, s; x, y; -1) z(y, \rho(s/T)) dx dy \right]^{1/2},$$

где $t = T_1^{1/3}$, $s = T_1 - T_1^{1/3}$. В силу (56) первый сомножитель не больше 1, второй сомножитель равен

$$\left[\left(\int_{x=0}^a + \int_{x=A}^{\infty} \right) z^2(x, \rho(t/T)) dx \right]^{1/2}.$$

Таким образом, первое слагаемое (57) оценено нужным образом; поскольку второе слагаемое оценивается аналогично, то лемма 8 доказана.

Лемма 10.

А. Найдется число $C < \infty$ такое, что для всех T_1 , $0 \leq t \leq t+1 \leq \leq s \leq T_1$, $x > 0$, $y > 0$

$$\int_{x=0}^{\infty} M(t, s; x, y; 0) dx + \int_{y=0}^{\infty} M(t, s; x, y; 0) dx dy < C.$$

Б. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $0 < a \leq A < \infty$, $T_0 < \infty$ такие, что для всех $T_1 \geq T_0$, $0 \leq t < s \leq T_1$

$$\left[\left(\int_{x=0}^a + \int_{x=A}^{\infty} \right) \int_{y=0}^{\infty} + \int_{x=0}^{\infty} \left(\int_{y=0}^a + \int_{y=A}^{\infty} \right) \right] M(t, s; x, y; 0) dx dy < \varepsilon.$$

Доказательство леммы 9. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $T_0 < \infty$, $0 < a \leq A < \infty$ такие, что для $T_1 \geq T_0$

$$\begin{aligned} & \left[\int_{x=0}^{\infty} \int_{x'=0}^{\infty} \int_{y'=0}^{\infty} \left(\int_{y=0}^a + \int_{y=A}^{\infty} \right) + \int_{x=0}^{\infty} \int_{x'=0}^{\infty} \left(\int_{y'=0}^a + \int_{y'=A}^{\infty} \right) \int_{y=0}^{\infty} + \right. \\ & \quad \left. + \int_{x=0}^{\infty} \left(\int_{x'=0}^a + \int_{x'=A}^{\infty} \right) \int_{y'=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} + \left(\int_{x=0}^a + \int_{x=A}^{\infty} \right) \int_{x'=0}^{\infty} \int_{y'=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} \right] \times \\ & \quad \times M_1(x, x') M_2(x', y') M_3(y', y) dx dx' dy' dy < \varepsilon, \end{aligned}$$

где функции M_1, M_2, M_3 введены в формулировке леммы 9. Малость каждого из четырех слагаемых следует из леммы 10. Например, первое слагаемое равно

$$\int_{x=0}^{\infty} \left(\int_{y=0}^a + \int_{y=A}^{\infty} \right) M(0, T_1; x, y; 0) dx dy,$$

и оно оценивается с помощью второго слагаемого в пункте Б леммы 10. Поскольку остальные три слагаемых оцениваются аналогично с помощью леммы 10, лемма 9 доказана. Нам осталось провести

Доказательство леммы 10. Пусть $\rho^*(t) = \rho(1 - \kappa - t)$, $0 \leq t \leq 1 - \kappa$ и пусть семейство функций $M^*(t, s; x, y; \mu)$ — это семейство функций $M(t, s; x, y; \mu)$ [см. (54)] для функции ρ^* . Очевидно, что

$$M(t, s; x, y; 0) = M^*(t^*, s^*; y, x; 0),$$

где $t^* = T_1 - s$; $s^* = T_1 - t$, так что $0 \leq t^* < s^* \leq T_1$. Поэтому если получена нужная оценка для одного слагаемого в пункте А леммы 10, то тем самым оценено и другое слагаемое в этом же пункте; это верно и для пункта Б. Таким образом, достаточно оценить одно из слагаемых в каждом пункте.

Лемма 11. Найдется непрерывная функция $C(u)$, $u > 0$, такая, что для всех T_1 , $0 \leq t < t + 2 \leq s \leq T_1$, $x > 0$, $y > 0$

$$M(t, s; x, y; 0) \leq C(x) \cdot C(y). \quad (58)$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} M(t, s; x, y; 0) &= \int_{x'=0}^{\infty} \int_{y'=0}^{\infty} M(t, t+1; x, x'; 0) M(t+1, s-1; x', y'; 0) \times \\ &\quad \times M(s-1, s; y', y; 0) dx' dy'. \end{aligned}$$

В силу (18) найдется непрерывная функция $C(u)$, $u > 0$, такая, что

$$M(t, t+1; x, x'; 0) \leq C(x) z(x', \rho((t+1)/T)),$$

$$M(s-1, s; y', y; 0) \leq C(y) z(y', \rho((s-1)/T)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} M(t, s; x, y; 0) &\leq C(x) \cdot C(y) \int_{x'=0}^{\infty} \int_{y'=0}^{\infty} z(x', \rho((t+1)/T)) M(t+1, s-1; \\ &\quad x', y'; 0) z(y', \rho((s-1)/T)) dx' dy'; \end{aligned}$$

интеграл в правой части последнего соотношения не больше 1 (что доказывается точно так же, как лемма 8), поэтому лемма 11 доказана.

Лемма 12. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $T_0 < \infty$, $A < \infty$, $t_0 < \infty$ такие, что для всех $T_1 \geq T_0$, $0 \leq t \leq t + t_0 \leq s \leq T_0$, $y > 0$

$$\int_A^\infty M(t, s; x, y; 0) dx \leq C(y) \cdot \varepsilon,$$

где функция $C(y)$ определена в лемме 11.

Доказательство. Пусть $A_0 = 2\lambda\rho_+^{2/3}/\rho_-$, где $\rho_+ = \max_{0 \leq t \leq 1-\kappa} \rho(t)$; $\rho_- = \min_{0 \leq t \leq 1-\kappa} \rho(t)$. Для $x > A_0$ положим $\eta_t^x = \inf\{u \geq t: \omega_t^x(u) = A_0\}$ — момент первого попадания процесса $\omega_t^x(u)$ в точку A_0 . Очевидно, что для $x > A_0$, $\delta > 0$

$$M \exp\{-\delta\eta_t^x\} = \exp\{-\psi(\delta)(x - A_0)\}, \quad (59)$$

где $\psi(\delta) > 0$. Пусть $A > A_0$, $0 \leq t \leq t + 2 \leq s \leq T_1$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \int_A^\infty M(t, s; x, y; 0) dx &\leq P'(\omega_t^x(s) = y) \exp\{-1/2A_0\rho_-(s - t)\} + \\ &+ \int_{x=A}^\infty \int_{u=t}^{s-2} \exp\{-1/2A_0\rho_-u\} P(\eta_t^x \in du) M(u, s; A_0, y; 0) dx. \end{aligned}$$

Используя лемму 11 и (59), получаем

$$\begin{aligned} \int_A^\infty M(t, s; x, y; 0) dx &\leq P'(\omega_t^x(s) = y) \exp\{-1/2A_0\rho_-(s - t)\} + \\ &+ C(A_0)C(y) \int_{x=A}^\infty M \exp\{-1/2A_0\rho_-\eta_t^x\} dt \leq P'(\omega_t^x(s) = y) \times \\ &\times \exp\{-1/2A_0\rho_-(s - t)\} + C(A_0)C(y) \int_A^\infty \exp\{-\psi(1/2A_0\rho_-)(x - A_0)\} dx. \end{aligned}$$

Лемма 12, таким образом, доказана.

Лемма 13. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $a > 0$, $T_0 < \infty$, $t_0 < \infty$ такие, что для всех $T_1 \geq T_0$, $0 \leq t \leq t + t_0 \leq s \leq T_1$, $y > 0$

$$\int_0^a M(t, s; x, y; 0) dx \leq \varepsilon \cdot C(y),$$

где функция $C(y)$ определена в лемме 11.

Доказательство аналогично доказательству леммы 11. Здесь нужно использовать функционал

$$\xi_t^x = \inf\left\{u \geq t: \omega_t^x(u) = a_0, \inf_{t \leq s \leq u} \omega_t^x(s) > 0\right\}$$

для $0 < x \leq a_0/2$, где $a_0 > 0$ достаточно мало. При этом роль (59) будет играть неравенство (см., например, [11])

$$P(\xi_t^x > u) \leq P\left(\sup_{t \leq s \leq u} |\omega_t^0(s)| \leq 2a_0\right) \leq \exp\{-c(u - t)/a_0^2\},$$

где $c > 0$ — абсолютная константа.

Используя утверждения лемм 11—13, получаем для некоторого $C < \infty$ и для всех T_1 , $0 \leq t < s \leq T_1$, $y > 0$

$$\int_{x=0}^{\infty} M(t, s; x, y; 0) dx \leq C \cdot C(y), \quad (60)$$

где функция $C(y)$ определена в лемме 11. Переходя далее к функциям $M^*(t, s; x, y; 0)$, из (60) получаем, что для всех T_1 , $0 \leq t < s \leq T_1$,

$$\int_{y=0}^{\infty} M(t, s; x, y; 0) dy \leq C \cdot C(x), \quad (61)$$

где число C и функция $C(y)$ определены в (60).

Используя соотношение (61) и повторяя доказательства лемм 12 и 13, можно доказать следующее утверждение.

Лемма 14. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $0 < a \leq A < \infty$, $T_1 < \infty$ такие, что для всех $T_1 \geq T_0$

$$\left(\int_{x=0}^a + \int_{x=A}^{\infty} \right) \int_{y=0}^{\infty} M(t, s; x, y; 0) dx dy < \varepsilon. \quad (62)$$

Продолжим доказательство леммы 10. Так как левая часть в (62) есть в точности первое слагаемое в пункте «б» леммы 10, то пункт «б» доказан. Для доказательства пункта «а» воспользуемся очевидным соотношением

$$\int_{y=0}^{\infty} M(t, s; x, y; 0) dy = \int_{x'=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} M(t, t+1; x, x'; 0) \times \\ \times M(t+1, s; x', y; 0) dx' dy. \quad (63)$$

Поскольку из (62) и (61) следует, что для некоторого $C_1 < \infty$ справедливо

$$\int_{x'=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} M(t+1, s; x', y; 0) dx' dy < C_1,$$

где T_1 — любое, $0 \leq t+1 < s \leq T_1$, и для всех x, x', t справедливо

$$M(t, t+1; x, x'; 0) \leq \exp \{ \lambda \rho_+^{2/3} \} / \sqrt{2\pi},$$

то правая часть (63) не больше

$$C = C_1 \cdot \exp \{ \lambda \rho_+^{2/3} \} / \sqrt{2\pi}.$$

Таким образом, получена оценка для второго слагаемого пункта «а» леммы 10. Лемма 10 доказана.

7. Вспомогательные леммы

Пусть задана неотрицательная непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция $\rho(t)$ и пусть для $x > 0$, $y > 0$ задана функция

$$A(x, y) = M \left(\exp \left\{ - \int_0^1 \rho(t) \omega_0^x(t) dt \right\}; \right. \\ \left. \inf_{0 \leq t \leq 1} \omega_0^x(t) > 0, \omega_0^x(1) < y \right).$$

Лемма 15. Функция $A(x, y)$ абсолютно непрерывна по y ; плотность

$$B(x, y) = \partial A(x, y) / \partial y$$

может быть выбрана непрерывной по совокупности x, y и представляется в виде

$$B(x, y) = B_0(x, y) \cdot P'(\omega_0^x(1) = y), \quad (64)$$

где

$$B_0(x, y) = M \left(\exp \left\{ - \int_0^1 \rho(t) \overset{\circ}{\omega}_{0,1}^{x,y}(t) dt \right\}; \inf_{0 \leq u < t} \overset{\circ}{\omega}_{0,1}^{x,y}(u) > 0 \right),$$

где $\overset{\circ}{\omega}_{0,1}^{x,y}(t) = \omega_0^x(t) - (\omega_0^x(1) - y)t$, $0 \leq t \leq 1$ — условный винеровский процесс, который в момент $t=0$ равен x и в момент $t=1$ равен y .

Доказательство. При $0 < y_1 < y_2$

$$A(x, y_2) - A(x, y_1) \leq P(\omega_0^x(1) \in [y_1, y_2)).$$

Поэтому по теореме Радона — Никодима функция $A(x, y)$ абсолютно непрерывна по y . Правую часть (64), очевидно, можно выбрать в качестве плотности $B(x, y)$; поскольку функция $P'(\omega_0^x(1) = y)$ непрерывна по (x, y) , осталось доказать, что функция $B_0(x, y)$ непрерывна по (x, y) .

Пусть фиксированы $x_0 > 0$ и $y_0 > 0$. Для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, $\delta \leq 1/2 \cdot \min(x_0, y_0)$ найдутся числа $0 < a \leq A < \infty$ такие, что для всех x, y таких, что $|x - x_0| + |y - y_0| < \delta$,

$$M \left(\exp \left\{ - \int_0^1 \rho(t) \overset{\circ}{\omega}_{0,1}^{x,y}(t) dt \right\}; \inf_{0 \leq t < 1} \overset{\circ}{\omega}_{0,1}^{x,y}(t) > 0; \right. \\ \left. (A_+(A) \cup A_-(a)) \right) < \varepsilon, \quad (65)$$

где события $A_{\pm}$ определяются как

$$A_+(A) = \left\{ \sup_{0 \leq t < 1} \overset{\circ}{\omega}_{0,1}^{x,y}(t) > A \right\}; \\ A_-(a) = \left\{ \inf_{0 \leq t < 1} \overset{\circ}{\omega}_{0,1}^{x,y}(t) < a \right\}.$$

Далее, для любых $\varepsilon > 0$, $0 < a \leq A < \infty$ найдется $\delta > 0$ такое, что на множестве $A_-(a) \cap A_+(A)$ из $|x - x_0| < \delta/2$, $|y - y_0| < \delta/2$ будет следовать

$$\left| \exp \left\{ - \int_0^1 \rho(t) \overset{\circ}{\omega}_{0,1}^{x,y}(t) dt \right\} - \exp \left\{ - \int_0^1 \rho(t) \overset{\circ}{\omega}_{0,1}^{x_0,y_0}(t) dt \right\} \right| < \varepsilon. \quad (66)$$

Из (65) и (66) легко получается требуемая непрерывность функции $B_0(x, y)$ в точке (x_0, y_0) . Лемма 15 доказана.

Пусть функция $z(y)$ определена (19), $p(y) = z^2(y)$; обозначим [см. (24)]

$$p(t; x, y) = \tilde{M}^1(t; x, y) \equiv \\ \equiv z^{-1}(x) M' \left(\exp \left\{ - \int_0^t \omega_0^x(u) du + \lambda t \right\}; \inf_{0 \leq u < t} \omega_0^x(u) > 0, \omega_0^x(1) = y \right) \cdot z(y).$$

В силу (25) функцию $p(t; x, y)$ можно считать переходной плотностью некоторого однородного марковского процесса $X_u^x(t)$, выходящего в момент u из x , с фазовым пространством $(0, \infty)$ и непрерывными траекториями; в силу (26) функция $p(y)$ является инвариантной плотностью для $X_u^x(t)$:

$$\int_0^\infty p(x) p(t; x, y) dx = p(y). \quad (67)$$

Следующая лемма утверждает, что переходная плотность $p(t; x, y)$ процесса $X_u^x(t)$ при $t \rightarrow \infty$ сходится к стационарной плотности $p(y)$ равномерно по $0 < x, y \leq A < \infty$.

Лемма 16. Для любых $\varepsilon > 0$, $A < \infty$ найдется $t_0 < \infty$ такое, что для всех $t \geq t_0$, $0 < x, y \leq A$

$$|p(t; x, y) - p(y)| < \varepsilon.$$

Поскольку переход от функции M^1 к функции M^0 осуществляется очевидной заменой, из леммы 16 следует

Лемма 16'. Для любых чисел $\varepsilon > 0$, $0 < a \leq A < \infty$ и любой функции $\rho(t)$, $0 \leq t < \infty$, такой, что $a \leq \rho(t) \leq A$, найдется $t_0 < \infty$ такое, что для всех $t \geq t_0$, $x \in [a, A]$, $y \in [a, A]$

$$\left| \frac{\tilde{M}^{\rho(t)}(t; x, y)}{p(y, \rho(t))} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Доказательство леммы 16. Пусть $\alpha = (1, 2 \cdot 2^{1/3}/\lambda_0)^{1/2}$; введем функционал

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0 : X_0^{2\alpha}(t) = 2\alpha, \sup_{0 \leq u \leq t} |X_0^{2\alpha}(u) - 2\alpha| \geq \alpha \right\}$$

— момент первого возвращения процесса $X_0^{2\alpha}(t)$ в точку 2α после выхода из интервала $(\alpha, 3\alpha)$. Доказательство следующей леммы приведем в конце доказательства леммы 16.

Лемма 17. Найдутся числа $0 < c \leq C < \infty$ такие, что $P(\tau > t) \leq Ce^{-ct}$. Обозначим

$$F(t) = P(\tau < t); H(t) = \sum_{h=0}^{\infty} F^{(*h)}(t);$$

$$h(t, y) = P'(X_0^{2\alpha}(t) = y, \tau > t).$$

Поскольку справедливо

$$p(t; 2\alpha, y) = h(t, y) + \int_0^t p(t-u; 2\alpha, y) F(du),$$

то [12, с. 425]

$$p(t; 2\alpha, y) = \int_0^t h(t-u, y) H(du). \quad (68)$$

Обозначим

$$\tilde{p}(y) = 1/a \cdot \int_0^{\infty} h(t, y) dt,$$

где $a = M\tau < \infty$; меняя порядок интегрирования, можно показать, что $\tilde{p}(y)$ является плотностью. В силу леммы 17 и теоремы 3 (см. [13], с. 323)

$$H(t) = t/a + M\tau^2/(2a^2) + R(t),$$

где функция $R(t)$ удовлетворяет условию $\varlimsup_{t \rightarrow \infty} R \leq Ce^{-ct}$ для некоторых $0 < c \leq C < \infty$. Поэтому из (68) получаем

$$\begin{aligned} |p(t; 2\alpha, y) - \tilde{p}(y)| &\leq 1/a \cdot \int_t^{\infty} h(u, y) du + \left| \int_0^t h(t-u, y) R(du) \right| \leq \\ &\leq 1/a \cdot \int_t^{\infty} h(u, y) du + \sup_{t/2 \leq u < \infty} h(u, y) \varlimsup_{[0, \infty)} R + \sup_{0 \leq u < \infty} h(u, y) \varlimsup_{[t/2, \infty)} R. \end{aligned} \quad (69)$$

Для любого множества $S \in [0, \infty)$ рассмотрим два условия:

$$1_S: \sup_{t \geq 0} \sup_{y \in S} p(t; 2\alpha, y) < \infty;$$

$$2_S: \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{y \in S} |p(t; 2\alpha, y) - \tilde{p}(y)| = 0.$$

Из (69) следует, что достаточными для 1_S и 2_S будут условия:

$$3_S: \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{y \in S} \int_t^\infty h(u, y) du = 0;$$

$$4_S: \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{y \in S} h(t, y) = 0;$$

$$5_S: \sup_{0 \leq t < \infty} \sup_{y \in S} h(t, y) < \infty.$$

В свою очередь, условия 3_S — 5_S следуют из 6_S : найдется функция $\Pi(t)$ такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pi(t) = 0, \quad \sup_{0 \leq t < \infty} \Pi(t) < \infty, \quad \int_0^\infty \Pi(t) dt < \infty,$$

и такая, что для $0 \leq t < \infty$

$$\sup_{y \in S} h(t, y) \leq \Pi(t).$$

Докажем, что для $S = [0, 2\alpha - \varepsilon] \cup [2\alpha + \varepsilon, A]$ (числа $\varepsilon > 0$, $A < \infty$ — произвольные) условие 6_S выполнено. Для $t \geq 1$ справедливо

$$h(t, y) = \mathbf{P}'(X_0^{2\alpha}(t) = y; \tau > t) \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \mathbf{P}(X_0^{2\alpha}(t-1) \in dx, \tau > t-1) \cdot \mathbf{P}'(X_{t-1}^x(t) = y) \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{0 < x < \infty \\ y \in S}} \mathbf{P}'(X_{t-1}^x(t) = y) \cdot \mathbf{P}(\tau > t-1).$$

Поскольку, очевидно,

$$\sup_{x > 0, y \in S} \mathbf{P}'(X_{t-1}^x(t) = y) < \infty,$$

то в силу леммы 17 для $t \geq 1$ $h(t, y) \leq Ce^{-ct}$. Для $0 \leq t \leq 1$ справедливо

$$h(t, y) \leq \mathbf{P}'(X_0^{2\alpha}(t) = y, \tau > t) \leq \mathbf{P}'(X_0^{2\alpha}(t) = y) \leq C \cdot \mathbf{P}'(\omega_0^{2\alpha}(t) = y),$$

поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C_1 < \infty$ такое, что для $|y - 2\alpha| > \varepsilon$, $0 \leq t \leq 1$ справедливо $h(t, y) \leq C_1$.

Таким образом, мы доказали, что условие 6_S (а значит, и условия 1_S и 2_S) выполнено для множества $S = [0, 2\alpha - \varepsilon] \cup [2\alpha + \varepsilon, A]$, где $\varepsilon > 0$, $A < \infty$ — произвольные.

Для любого $x > 0$ введем функционал

$$\eta_x = \inf \{t > 0: X_0^x(t) = 2\alpha\}$$

и обозначим

$$v(t; x, y) = \mathbf{P}'(X_0^x(t) = y; \eta_x > t), \quad F(t, x) = \mathbf{P}(\eta_x < t).$$

Легко видеть, что

$$p(t; x, y) = v(t; x, y) + \int_0^t p(t-u; 2\alpha, y) F(du, x)$$

поэтому

$$|p(t; x, y) - \tilde{p}(y)| \leq v(t; x, y) + \tilde{p}(y)(1 + F(t, x)) + \\ + \int_0^{t/2} |p(t-u; 2\alpha, y) - \tilde{p}(y)| F(du, x) + \\ + \left[\tilde{p}(y) + \sup_{0 \leq u < \infty} p(u; 2\alpha, y) \right] (1 - F(t/2, x)).$$

Из последнего следует, что для того, чтобы при $t \rightarrow \infty$ $|\tilde{p}(y) - p(t; x, y)| \rightarrow 0$ равномерно по $x, y \in S$, достаточно, чтобы были выполнены условия $1_s, 2_s, 7_s, 8_s$, где

$$7_s: \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x, y \in S} v(t; x, y) = 0;$$

$$8_s: \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} (1 - F(t, x)) = 0.$$

Поскольку условия 1_s и 2_s уже проверены, обратимся к условиям 7_s и 8_s . Легко видеть, что

$$v(t; x, y) \equiv P'(X_0^x(t) = y, \eta_x > t) \leq \\ \leq \int_{x'=0}^{\infty} P(X_0^x(t-1) \in dx', \eta_x > t-1) P'(X_{t-1}^{x'}(t) = y) \leq C P(\eta_x > t-1).$$

Последнее неравенство получено в силу того, что для некоторого $C < \infty$

$$\sup_{\substack{0 < x' < \infty \\ y \in S}} P'(X_{t-1}^{x'}(t) = y) \leq C.$$

Таким образом, 7_s следует из 8_s ; для доказательства 8_s достаточно повторить рассуждения доказательства леммы 17, что проведено несколько позже.

Итак, мы доказали, что при $t \rightarrow \infty$

$$|p(t; x, y) - \tilde{p}(y)| \rightarrow 0 \quad (70)$$

равномерно по $x, y \in S = [0, 2\alpha - \varepsilon] \cup [2\alpha + \varepsilon, A]$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Поскольку рассмотренную конструкцию можно повторить для $\alpha' \neq \alpha$, где $\delta = \alpha' - \alpha$ достаточно мало, тем самым доказано, что (70) имеет место равномерно по $x, y \in A$.

Убедимся теперь, что $p(y) = \tilde{p}(y)$. Из (70) следует, что для любых $0 < a \leq A < \infty$

$$\left| \int_a^A p(x) p(t; x, y) dx - \int_a^A p(x) dx \tilde{p}(y) \right| \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$. Из последнего и из (67) следует, что для всех $y > 0$ выполняется $p(y) \geq \tilde{p}(y)$. Поскольку обе функции являются плотностями, то они совпадают.

Осталось провести

Доказательство леммы 17. Пусть $\alpha = (1, 2 \cdot 2^{1/3} / \lambda_0)^{1/2}$. Число α выбрано так, что $2\alpha < \lambda < 3\alpha$, где $\lambda \leq 2^{-1/3} \cdot \lambda_0$ [см. (20)], и для некоторых чисел c, C таких, что $\lambda < c \leq C < \infty$, выполняется

$$P\left(\sup_{0 \leq u \leq t} \omega_0^\beta(u) \leq \alpha, \inf_{0 \leq u \leq t} \omega_0^\beta(u) > -\alpha\right) \leq C e^{-ct}, \quad (71)$$

где $0 \leq \beta \leq (3\alpha + \lambda)/2 - 2\alpha$ [41].

Утверждение леммы 17 эквивалентно тому, что для некоторого $\delta > 0$ выполняется

$$M e^{\delta t} < \infty. \quad (72)$$

Для чисел $x > 0$, $y > 0$, множества $S \subseteq R^1$ введем случайную величину

$$\tau(x, y; S) = \inf \{t > 0 : X_0^x(t) = y; X_0^x(u) \in S \text{ для } 0 \leq u \leq t\},$$

которая, разумеется, определена только на тех траекториях процесса $X_0^x(u)$, которые до момента попадания в y не выходят из множества S . Функции распределения таких функционалов могут быть несобственными и преобразования Лапласа могут в нуле быть меньше 1. Положим

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau(2\alpha, 3\alpha; (\alpha, 3\alpha)), & \tau_2 &= \tau(2\alpha, \alpha; (\alpha, 3\alpha)); \\ \tau_3 &= \tau(\alpha, 2\alpha; (0, 2\alpha)), & \tau_4 &= \tau(3\alpha, 3\alpha + \lambda/2; (3\alpha + \lambda/2, \infty)); \\ \tau_5 &= \tau(3\alpha + \lambda/2, 3\alpha; (2\alpha, 3\alpha)), & \tau_6 &= \tau(3\alpha + \lambda/2, 2\alpha; (2\alpha, 3\alpha)). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$Me^{\delta\tau} = Me^{\delta\tau_2} \cdot Me^{\delta\tau_3} + Me^{\delta\tau_1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (Me^{\delta\tau_4} \cdot Me^{\delta\tau_5})^k Me^{\delta\tau_6}. \quad (73)$$

Первое слагаемое соответствует тем траекториям процесса $X_0^{2\alpha}(u)$, которые до пересечения уровня α не поднялись до уровня 3α ; k -й член суммы второго слагаемого (73) — тому, что процесс $X_0^{2\alpha}(t)$ попал в точку 3α , не заходя в точку α , затем k раз впервые попадал из точки 3α в точку $3\alpha + \lambda/2$ с заходом в точку $(3\alpha + \lambda)/2$, не опускаясь при этом до уровня 2α , и, наконец, впервые попал в точку 2α . Поскольку

$$Me^{\delta\tau_4} \cdot Me^{\delta\tau_5} \Big|_{\delta=0} = P(\tau_4 < \infty) \cdot P(\tau_5 < \infty) < 1,$$

то (73) перепишется в виде

$$Me^{\delta\tau} = Me^{\delta\tau_2} \cdot Me^{\delta\tau_3} + \frac{Me^{\delta\tau_1} \cdot Me^{\delta\tau_4} \cdot Me^{\delta\tau_5} \cdot Me^{\delta\tau_6}}{1 - Me^{\delta\tau_4} \cdot Me^{\delta\tau_5}}.$$

Лемма будет доказана, если мы докажем, что (72) имеет место для τ_i , $i = 1, \dots, 6$. Функционалы τ_i , $i = 1, \dots, 6$, определены так, что до момента $t = \tau_i$ размах траектории процесса $X_0^x(t)$, т. е. разность между максимумом и минимумом на отрезке $[0, \tau_i]$, не больше, чем 2α ; поэтому в силу (71)

$$P(\tau_i > t) \leq Ce^{\lambda t} P\left(\sup_{0 \leq u \leq t} \omega(u) - \inf_{0 \leq u \leq t} \omega(u) \leq 2\alpha\right) \leq Ce^{-\varepsilon t}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Наконец, функционал τ_4 устроен так, что при $0 \leq t \leq \tau_4$ выполняется $X_0^{3\alpha}(u) \geq (3\alpha + \lambda)/2$; поэтому

$$P(\tau_4 > t) \leq Ce^{-\varepsilon t},$$

где $\varepsilon > 0$. Лемма 17 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А. А. Граничные задачи для случайных блужданий и большие отклонения в функциональных пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, № 4, с. 635—654.
2. Могульский А. А. Большие отклонения для траекторий многомерных случайных блужданий. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. 21, № 2, с. 309—323.
3. Боровков А. А. Анализ больших отклонений в граничных задачах с произвольными границами. I, II. — Сиб. мат. ж., 1964, т. 5, № 2, с. 253—289; № 4, с. 750—767.
4. Яковлева Г. Д. Таблицы функций Эйри и их производных. М.: Наука, 1969. 377 с.
5. Крамер Г. Об одной новой предельной теореме теории вероятностей. — Усп. мат. наук, 1944, т. 10, с. 166—184.
6. Вентцель А. Д. Грубые предельные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов. I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. 21, № 2, с. 235—252; № 3, с. 512—526.

7. Гертнер Ю. Большие отклонения от инвариантной меры.— Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 21, № 1, с. 27—42.
8. Боровков А. А., Могульский А. А. О вероятностях больших отклонений в топологических пространствах. I.— Сиб. мат. ж., 1978, т. 19, № 5, с. 988—1004.
9. Donsker M. D., Varadhan S. R. S. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. I—Comm. Pure Appl. Math., 1975, v. 28, N 6, p. 1—47.
10. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963, с. 859.
11. Могульский А. А. Малые отклонения в пространстве траекторий.— Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, № 4, с. 755—765.
12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967, с. 752.
13. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972. 367 с.

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С РАЗРЫВАМИ

И. Ф. ПИНЕЛИС

1. Введение и формулировка основных результатов

Скорость сходимости в граничных задачах была предметом исследования многих авторов (см. [1]). С. В. Нагаев [1] предложил метод определения скорости сходимости в граничных задачах, позволивший получить оценку скорости сходимости «правильного» порядка $1/\sqrt{n}$ для областей весьма общего вида.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины с общей функцией распределения F , $M\xi_1 = 0$, $M\xi_1^2 = 1$, $c_3 = M|\xi_1|^3 < \infty$.

Рассмотрим случайное блуждание в R^2 , определенное так, что если $(t, x) \in R^2$ есть положение блуждающей точки в момент времени t , то в следующий момент времени $t+1$ она оказывается на луче $\{t+1/n\} \times \times (-\infty, y)$ с вероятностью $F((y-x)\sqrt{n})$. Обозначим

$$\xi_n(t, x, m) = (\xi_n^{(1)}(t, x, m), \xi_n^{(2)}(t, x, m))$$

положение блуждающей точки в момент времени t при условии, что блуждание началось в момент времени 0 в точке (t, x) .

Пусть $[x]$ — целая часть x , $|x| = -[-x]$. Пусть $\xi(t)$ — стандартный (непрерывный) винеровский процесс на $[0, \infty)$. Для произвольного $D \subseteq R^2$ положим

$$D(t) = \{x : (t, x) \in D\} (-\infty < t < \infty).$$

Пусть

$$P_n(t, x, D, b) = P(\xi_n(t, x, m) \in D(0 \leq m \leq [n(b-t)]));$$

$$P(t, x, D, b) = P(\xi(u) + x \in D(t+u)(0 \leq u \leq b-t)),$$

если эти вероятности определены. Иначе говоря, $P_n(t, x, D, b)(P(t, x, D, b))$ есть вероятность того, что траектория случайного блуждания (винеровского процесса), начавшегося в нулевой момент времени в точке (t, x) , будет лежать в D в интервале $[0, b-t]$.

Из [1] вытекает, что если

$$D = \{(t, x) : 0 \leq t \leq 1, g_2(t) < x < g_1(t)\},$$

где g_1, g_2 удовлетворяют условию Липшица с постоянной K , то

$$(P_n - P)(0, 0, D, 1) = O((K+1)c_3^2/\sqrt{n}). \quad (1)$$

Здесь и далее постоянная в $O(\cdot)$ предполагается абсолютной; как обычно, значения разности функций равны разности значений функций.