

ОБ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ

А. И. САХАНЕНКО

1. Введение

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — последовательность независимых случайных величин таких, что $M\xi_i = 0$, $\Sigma D\xi_i = 1$. (Здесь и далее, если не оговорено противное, суммы произведения и максимумы берутся по переменной i , пробегающей значения от 1 до n). Обозначим

$$t_i = \sum_{j=1}^i D\xi_j, \quad t_0 = 0, \quad L_s = \Sigma M|\xi_i|^s, \quad s > 2,$$

и построим на отрезке $[0, 1]$ непрерывную ломаную ξ с вершинами в точках $(t_i, \xi(t_i) = \sum_{j=1}^i \xi_j)$. Цель данной работы — исследование оценок близости между распределениями в $C(0, 1)$, порожденными процессом ξ и стандартным винеровским процессом w . Для случая оценок, выраженных в терминах отношения Ляпунова L_s , далее будут доказаны и усилены объявленные в [1] результаты.

Предположим, что пространство $C(0, 1)$ непрерывных функций на $[0, 1]$ снабжено нормой $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$, которая порождает в нем σ -алгебру борелевских множеств, а через $B^{(\varepsilon)}$ обозначим ε — окрестность множества B . Определим расстояние Леви — Прохорова $\lambda(\xi, w)$ между распределениями процессов ξ и w в пространстве $C(0, 1)$, полагая $\lambda(\xi, w) < \varepsilon$, если для всех измеримых B

$$P(\xi \in B) \leq P(w \in B^{(\varepsilon)}) + \varepsilon, \quad P(w \in B) \leq P(\xi \in B^{(\varepsilon)}) + \varepsilon.$$

Под оценкой близости между распределениями ξ и w наиболее часто понимается оценка для расстояния $\lambda(\xi, w)$. Первый такой результат принадлежит Ю. В. Прохорову [2], который получил

$$\lambda(\xi, w) = o(L_3^{1/4} |\ln L_3|^2) \text{ при } L_3 \rightarrow 0.$$

Эта оценка была улучшена А. А. Боровковым [3] до

$$\lambda(\xi, w) \leq c L_s^{1/(s+1)}, \quad 2 < s \leq 3, \quad (1)$$

где c — абсолютная постоянная. Большинство других результатов в этой задаче (см. библиографию в [3]) были получены в предположении, что $\xi_1, \dots, \xi_n$ одинаково распределены. Наилучшим из них будет, по-видимому, известный результат Комлоша, Майера и Тушнади [4], из которого, в частности, вытекает (1) при всех $s > 2$, но с константой, зависящей от s и распределения $\sqrt{n} \xi_n$.

Если мы имеем оценку для расстояния Леви — Прохорова $\lambda = \lambda(\xi, w)$, то для любого измеримого множества B с границей B' получаем

$$\Delta(B) = |P(\xi \in B) - P(w \in B)| \leq P(w \in (B')^{(\lambda)}) + \lambda.$$

В частности, для липшицевых множеств, т. е. для множеств, граница B' которых удовлетворяет условию

$$P(w \in (B')^{(\varepsilon)}) \leq C_\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (2)$$

$$\text{справедливо } \Delta(B) \leq (C_\varepsilon + 1)\lambda(\xi, w). \quad (3)$$

В [3] приведен пример, показывающий, что существует такое B_0 , что

$$\Delta(B_0) \geq c L_s^{1/s}. \quad (4)$$

В данной работе мы сократим разрыв между оценками (1) и (4). В теореме 1 будет приведена оценка снизу между распределениями, показывающая, что (1) неулучшаема, а в теореме 2 будет доказана оценка для $\Delta(B)$, из которой вытекает существование абсолютной постоянной c , для которой при $L_s \leq 1$

$$\Delta(B) \leq c C_B (1 + \ln(1 + C_B^{-1})) L_s^{1/s} (1 + \ln(L_s^{-1/s}))^{3(s-1)/2s}, \quad (5)$$

что значительно точнее оценки, даваемой (1) и (3). Тем самым, в частности, будет доказано, что для $\Delta(B)$ можно получить качественно лучшую оценку, чем вытекающую из (3).

При доказательстве теоремы 2 используется слегка модифицированный метод одного вероятностного пространства, предложенный А. В. Скороходом.

1. Оценка снизу для расстояния Леви — Прохорова

Обозначим

$$\varepsilon = \max \{y: y \leq \sum P(|\xi_i| \geq y)\}; \quad \sigma_i^2 = D\xi_i; \\ \sigma^2 = \max \sigma_i^2; \quad \delta = \sqrt{\sigma^2(1 + 3 \ln(\sigma^{-2}))/8}.$$

Теорема 1. $\lambda = \lambda(\xi, w) \geq \max\{\varepsilon/2 - 4\delta, \delta\}$.

В силу неравенства Чебышева

$$\varepsilon \leq \max \{y: y \leq L_s y^{-s}\} = L_s^{1/(s+1)}, \\ \sigma \leq \max (M|\xi_i|^s)^{1/s} \leq L_s^{1/s}. \quad (6)$$

Если же подобрать такую схему серий, что

$$\sum P(|\xi_i| > c_1 L_s^{1/(s+1)}) \geq c_2 L_s^{1/(s+1)},$$

то из теоремы при достаточно малых L_s следует оценка $\lambda \geq c L_s^{1/(s+1)}$.

Конкретный пример распределений ξ_i можно найти в [5].

Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$A(y) = \{x \in C(0, 1): \max |x(t_i) - x(t_{i-1})| \geq y\}$$

и заметим, что

$$(A(\varepsilon))^{(\varepsilon/2 - 4\delta)} \subset A(\varepsilon - 2(\varepsilon/2 - 4\delta)) = A(8\delta).$$

Таким образом, для доказательства неравенства

$$\lambda \geq \varepsilon/2 - 4\delta \quad (7)$$

достаточно показать

$$P(\xi \in A(\varepsilon)) \geq \varepsilon/2, \quad P(w \in A(8\delta)) \leq 4\delta. \quad (8)$$

Имеем

$$P(\xi \in A(\varepsilon)) = 1 - P(1 - P(|\xi_i| \geq \varepsilon)) \geq 1 - \exp(-\sum P(|\xi_i| \geq \varepsilon)) \geq 1 - e^{-\varepsilon}.$$

Чтобы получить отсюда первое из неравенств в (8), достаточно заметить, что $\varepsilon \leq 1$ в силу (6) при $s = 2$.

Далее,

$$P(w \in A(8\delta)) \leq \sum P(|w(t_i) - w(t_{i-1})| > 8\delta) \leq \sum \Phi_0(8\delta\sigma_i^{-1}), \quad (9)$$

где

$$\Phi_0(x) = (2/\sqrt{2\pi}) \int_x^\infty e^{-y^2/2} dy \leq (2/\sqrt{2\pi}) x^{-1} e^{-x^2/2}.$$

Пользуясь неравенствами $(8\delta)^2 \geq \sigma^2$ и $(8\delta)^2 \geq \sigma_i^2 + \sigma_i^2 \ln \sigma_i^{-2} + 2\sigma_i^2 \ln \sigma^{-2}$, имеем

$$\Sigma \Phi_0(8\delta\sigma_i^{-1}) \leq \Sigma (2/\sqrt{2\pi}) (\sigma_i/\sigma) \exp(-(1/2) - (1/2) \ln \sigma_i^{-2} - \ln \sigma^{-2}) \leq \\ \leq \Sigma (2/\sqrt{2\pi}) (\sigma_i^2/\sigma) e^{-1/2} \sigma^2 \leq (1/2) \sigma \leq 4\delta.$$

Отсюда и из (9) следует второе неравенство в (8), что полностью доказывает (7).

Докажем теперь, что

$$\lambda \geq \delta. \quad (10)$$

Пусть $\sigma = \sigma_j$. Обозначим через $B(y)$ множество всех траекторий $x(t)$, у которых максимальное отклонение на отрезке (t_{j-1}, t_j) от прямой, соединяющей $(t_{j-1}, x(t_{j-1}))$ и $(t_j, x(t_j))$, больше y . Заметим, что $(B(2\delta))^{(6)} \subset B(0)$; $P(\xi \in B(0)) = 0$. Таким образом, для доказательства (10) достаточно проверить, что

$$P(w \in B(2\delta)) \geq \delta. \quad (11)$$

В силу однородности процесса w

$$P(w \in B(2\delta)) = P\left(\max_{0 \leq t \leq \sigma^2} |w(t) - t\sigma^{-2}w(\sigma^2)| > 2\delta\right) = \\ = P\left(\max_{0 \leq t \leq 1} |w(t) - tw(1)| > 2\delta\sigma^{-1}\right).$$

Поскольку распределение процесса $w(t) - tw(1)$ совпадает с распределением броуновского моста $w_0(t)$ (у этих процессов совпадают корреляционные функции), то (см. [6], с. 640)

$$P(w \in B(2\delta)) = P\left(\max_{0 \leq t \leq 1} |w_0(t)| > 2\delta\sigma^{-1}\right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp(-2(2k\delta\sigma^{-1})^2)$$

Соотношение (11) будет следовать теперь из неравенств

$$P(w \in B(2\delta)) \geq 2 \sum_{k=1}^2 (-1)^k \exp(-2(2k\delta\sigma^{-1})^2) = 2e^{-1/8} \sigma^{3/4} - 2e^{-1/2} \sigma^3; \\ 8\delta = \sqrt{\sigma^2(1 + 3 \ln \sigma^{-2})} \leq \sqrt{12} \sigma^{3/4}, \sigma \leq 1.$$

Из (7) и (11) вытекает утверждение теоремы.

2. Оценки для липшицевых множеств

При $a > 0$ обозначим

$$L_1(a) = \Sigma M\{|\xi_i|^4; |\xi_i| < a\}; H_1(a) = \Sigma M\{|\xi_i|^2; |\xi_i| \geq a\}; \\ g(a) = a(1 + \ln(1 + a^{-1}))$$

и заметим, что

$$C_B \leq g(C_B) \leq C_B + 1; g(C_B) \rightarrow 0 \text{ при } C_B \rightarrow 0.$$

Теорема 2. При $0 < a \leq e^{-1}$ для любого множества B , удовлетворяющего (2),

$$\Delta(B) \leq g(C_B)[84(L_1(a))^{1/4} |\ln a|^{3/4} + 41a |\ln a|^{3/2} + \\ + 26(H_2(a))^{1/2} |\ln a|^{1/2} + 2H_1(a)].$$

Следствие. При $L_s \leq 1$ справедливо (5), точнее,

$$\Delta(B) \leq 285g(C_B) L_s^{1/8} (1 + \ln(L_s^{-1/8}))^{3(s-1)/2s}.$$

Для доказательства следствия достаточно положить в теореме 2 $a = e^{-1} L_s^{1/s} (1 + \ln(L_s^{-1/s}))^{-3/2s}$ и воспользоваться при $0 < r \leq s \leq 4$ неравенствами

$$M\{|\xi_i|^4; |\xi_i| < a\} \leq a^{4-s} M|\xi_i|^s; M\{|\xi_i|^r; |\xi_i| \geq a\} \leq a^{r-s} M|\xi_i|^s,$$

из которых вытекает

$$L_4(a) \leq a^{4-s} L_s; H_1(a) \leq a^{1-s} L_s; H_2(a) \leq a^{2-s} L_s.$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $F_1(x), \dots, F_n(x)$ — функции распределения случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ соответственно. Зададим случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ на одном вероятностном пространстве с винеровским процессом $w(t)$, $0 \leq t < \infty$, и независимой от нее последовательностью $v = (v_1, \dots, v_n)$ независимых случайных величин, равномерно распределенных на $[0, 1]$. (Точнее, построим новую последовательность случайных величин, одинаково распределенную с первоначальной последовательностью $\xi_1, \dots, \xi_n$.)

Пусть $u_i = F_i^{-1}(v_i)$. Поскольку $Mu_i = 0$, положим $v_i = F_i^{-1}(G_i(v_i))$, где $G_i(u)$ однозначно определяется как решение уравнений

$$\int_u^{G_i(u)} F_i^{-1}(t) dt = 0 \quad (12)$$

и $u_i v_i < 0$ при $u_i \neq 0$. Фиксируем некоторое число $a > 0$ и обозначим $I = I(v, a)$ множество тех i , для которых $\max\{|u_i|, |v_i|\} \geq a$. Определим последовательность независимых векторов $(\xi_i, \tau_i = T_i - T_{i-1})$, $\tau_i \geq 0$, $T_0 = 0$, следующим образом: пусть $\xi_i = u_i$ и $\tau_i = 0$ при $i \in I$, а в противном случае определим T_i как первый после T_{i-1} момент достижения процессом w одного из уровней $w(T_{i-1}) + u_i$ и $w(T_{i-1}) + v_i$ и положим $\xi_i = w(T_i) - w(T_{i-1})$. Поскольку u_i имеет функцию распределения F_i , а ξ_i при $i \in I$ определена так же, как в представлении Скорохода, то построенные нами $\xi_1, \dots, \xi_n$ обладают требуемыми свойствами.

Заметим, что в силу свойств моментов остановки τ_i (см. [7, 8]) при $d(v) = \sum M(\tau_i^2 | v) \geq D(T_n | v)$

$$Md(v) \leq 8 \sum M\{|\xi_i|^4; i \notin I\} \leq 8L_4(a); \quad (13)$$

$$M\{\tau_i; i \notin I | v\} = -u_i v_i; MT_n = \sum M\{\xi_i^2; i \notin I\} \leq 1.$$

Обозначим через ξ' ломаную с вершинами в точках $(t_i, \xi'(t_i) = w(T_i))$. В этом случае

$$\|\xi - w\| \leq \|\xi - \xi'\| + \|\xi' - w\|; \|\xi - \xi'\| \leq \zeta = \sum_{i \in I} |\xi_i|.$$

Из лемм 3 и 4 следует, что $P(\|\xi - w\| > \alpha | v) \leq \beta$, при $\alpha = 6\sqrt{6}(1+b)|\ln a|(\delta + \gamma) + a + \zeta$; $\beta = (3 + M(T_n | v))ae^{-b}$, где a и b — фиксированные числа, $b > 0$, $0 < a \leq e^{-1}$, а δ и γ определены в лемме 3.

Подчеркнем, что величины α , β , γ , δ и ζ зависят от v , но не зависят от w . Поэтому для множества B , удовлетворяющего (2), справедливы соотношения

$$P(\xi \in B | v) \leq P(w \in B^{(\alpha)} | v) + \beta \leq P(w \in B) + C_B \alpha + \beta;$$

$$P(\xi \in B) \leq P(w \in B) + C_B M\alpha + M\beta.$$

Рассматривая вместо множества B его дополнение, получим аналогичные неравенства в обратную сторону. Таким образом,

$$\Delta(B) \leq C_B M\alpha + M\beta.$$

Полагая теперь $b = \ln(1 + C_B^{-1})$ и оценивая $M\alpha$ и $M\beta$ при помощи (13) и лемм 5, 6, получим требуемую в теореме оценку.

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1.

$$P(\tau_i > t | v) \leq 4t^{-1} M(\tau_i | v) \exp(-2t|u_i - v_i|^{-2}).$$

Доказательство. Опуская временно индекс i , положим

$$A = \pi \min\{|u|, |v|\} / |u - v|; K = \pi^2 t / (4|u - v|^2) \geq 2t / |u - v|^2.$$

При $\max\{|u|, |v|\} \leq a$ из [8] вытекает

$$P(\tau > t | v) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)A)}{2m+1} \exp(-(2m+1)^2 2K).$$

Воспользовавшись неравенствами $|\sin x| \leq |x|$ и $e^{-|x|} \leq |x|^{-1}$, получаем

$$P(\tau > t | v) \leq \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} A A(m) e^{-K} / K,$$

где

$$A(m) = 1/[2(2m+1)^2 - 1]; \quad \sum_{m=0}^{\infty} A(m) \leq A(0) + \int_0^{\infty} A(x) dx \leq 1.$$

Окончательно имеем

$$P(\tau > t | v) \leq 4\pi^{-1} A K^{-1} e^{-K} \leq 16\pi^2 \min\{|u|, |v|\} |u - v| e^{-K} t^{-1} \leq 4|uv| e^{-K} t^{-1} = 4M(\tau | v) e^{-K} t^{-1}.$$

Лемма 2. При $x \geq y \geq a^2$

$$P(\psi \equiv \max |T_i - M(T_i | v)| > x | v) \leq 2(ed(v)/(xy))^{x/y} + 4M(T_n | v) y^{-1} e^{-y/2a^2}.$$

Доказательство. Поскольку $\tau_i \geq 0$ и $M(\tau_i | v) \leq a^2$, то из [9] (см. теорему 4) и [10] следует

$$P(\psi > x | v) = P\left(\max \left| \sum_{j=1}^i (\tau_j - M(\tau_j | v)) \right| > x | v\right) \leq \leq 2 \exp(x/y - (d(v)/y^2 + x/y) \ln(xy/d(v) + 1)) + \sum P(|\tau_i - M(\tau_i | v)| > y | v) \leq 2(ed(v)/(xy))^{x/y} + \sum P(\tau_i > y | v).$$

Применяя далее лемму 1, получим требуемое утверждение.

Лемма 3. При $b > 0$, $0 < a \leq e^{-1}$,

$$\gamma = \max |M(T_i | v) - t_i|, \quad \delta = (1+b)[\sqrt{8d(v)|\ln a|} + 6a^2 |\ln a|^2]$$

справедливо

$$P(\mu \equiv \max |T_i - t_i| > \delta + \gamma | v) \leq (2 + M(T_n | v)) a e^{-b}.$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением $\mu \leq \psi + \gamma$ и применим лемму 2 при $y = \delta / ((1+b)|\ln a|)$, $x = \delta + \gamma$, заметив, что

$$xy \geq e^2 d(v); \quad x/y \geq (1+b)|\ln a|;$$

$$y/2a^2 \geq (1+b)|\ln a|; \quad |\ln a| = -\ln a \geq 1.$$

Лемма 4. При $1 \geq x \geq a^2 \geq \sigma^2$

$$P(\|w - \xi'\| > 6\sqrt{6(1+b)|\ln a|} x + a | v) \leq a e^{-b} + P(\mu > x | v).$$

Доказательство. Поскольку $\xi'(t_i) = w(T_i)$, то при $|T_i - t_i| \leq x$, $x \geq \sigma^2$ и $t \in (t_{i-1}, t_{i+1})$ имеем

$$|w(t) - \xi'(t)| \leq |w(t) - w(t_i)| + |w(t_i) - w(T_i)| + + |\xi'(t_i) - \xi'(t)| \leq 2\eta'_i + a,$$

где $\eta'_i = \max_{|y-t_i| \leq x} |w(y) - w(t_i)|$. Обозначим

$$\eta_j(x) = \max_{jx \leq y \leq (j+1)x} |w(y) - w(jx)|$$

и заметим, что

$$\max_i \eta'_i \leq 3 \max_{0 \leq j \leq 1/x} \eta_j(x) \equiv 3\eta(x).$$

Таким образом,

$$P(\|w - \xi'\| > 6z + a|\nu) \leq P(\eta(x) > z) + P(\mu > x|\nu).$$

В силу известных свойств максимума винеровского процесса (см., например, [6], с. 371)

$$\begin{aligned} P(\eta(x) > z) &\leq (1 + 1/x)P(\eta_1(x) > z) \leq (1 + 1/x)2\Phi_0(z/\sqrt{x}) \leq \\ &\leq (1 + 1/x)4(2\pi)^{-1/2}z^{-1}\sqrt{x} \exp(-z^2/2x). \end{aligned}$$

Из последнего соотношения и $a^2(1 + 1/x) \leq 3/2$ вытекает при $z = \sqrt{6(1+b)|\ln a|x}$ требуемое утверждение.

Лемма 5. $M\xi \leq 2H_1(a)$.

Доказательство. Возможны два случая:

$$0 \leq F_i(a) \leq G_i(F_i(a)) \text{ или } G_i(F_i(a)) < F_i(-a + 0) < 0.$$

Рассмотрим первый из них и воспользуемся (12). Имеем

$$M\{|\xi_i|; i \in I\} = 2M\{\xi_i; \xi_i \geq a\} \leq 2M\{|\xi_i|; |\xi_i| \geq a\}. \quad (14)$$

Суммируя, получим требуемый результат.

Лемма 6. $M\gamma \leq 8(8L_4(a))^{1/2} + 3H_2(a)$.

Доказательство. Обозначим

$$\begin{aligned} \tau'_i = M(\tau_i|\nu) - M\tau_i, \quad \gamma_1 = \max |M(T_i|\nu) - MT_i| &= \max \left| \sum_{j=1}^i \tau'_j \right|, \\ \gamma_2 = \max |MT_i - t_i|. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\gamma_2 \leq \sum |\sigma_i^2 - M\tau_i| = \sum M\{\xi_i^2; i \in I\} \leq 3H_2(a),$$

поскольку в силу (14)

$$M\{\xi_i^2; i \in I\} \leq M\{\xi_i^2; |\xi_i| \geq a\} + aM\{|\xi_i|; i \in I\} \leq 3M\{\xi_i^2; |\xi_i| \geq a\}.$$

Чтобы оценить $M\gamma_1$, воспользуемся тем фактом, что случайные величины $\tau'_1, \dots, \tau'_n$ независимы, так как τ'_i зависит лишь от ν_i , и $M\tau'_i = 0$. Из [11, с. 303] и (13) имеем

$$M\gamma_1 \leq 8M|\Sigma \tau'_i| \leq 8(D(\Sigma \tau'_i))^{1/2} \leq 8(Md(\nu))^{1/2} \leq 8(8L_4(a))^{1/2}.$$

Неравенство $\gamma \leq \gamma_1 + \gamma_2$ немедленно дает требуемый результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саханенко А. И. Оценки скорости сходимости в принципе инвариантности.— Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 5, с. 1076—1078.
2. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.— Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, № 2, с. 177—238.
3. Боровков А. А. О скорости сходимости в принципе инвариантности.— Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, № 2, с. 217—234.

4. Komlos J., Major P., Tusnady G. An approximation of partial sums of independent R. V's and simple D. F.— Z. Wahrscheinlichkeits theorie verw. Geb., 1976, Bd 34, N 1, S. 33—58.
5. Арак Т. В. Об одной оценке А. А. Боровкова.— Теория вероятн. и ее примен., 1975, т. 2, № 2, с. 380—381.
6. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965. 656 с.
7. Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов. Киев, Изд-во Киевского ун-та, 1961. 216 с.
8. Sawyer S. A Remark on the Skorohod Representation.— Z. Wahrscheinlichkeits-theorie verw. Geb., 1972, Bd 23, N 1, S. 67—74.
9. Нагаев С. В., Фук Д. Х. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин.— Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, № 4, с. 660—675.
10. Боровков А. А. Замечания о неравенствах для сумм независимых величин.— Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, № 3, с. 587—589.
11. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956. 606 с.