3. Если определенная в замечании 2 точка θ^* не принадлежит Γ, то критерий ψ_{θ^*} может не быть минимаксным в классе всех критериев уровня α. Действительно, пусть Γ состоит из двух точек: $a = (1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$ и $b = (1, -1, 0, 0, 0, \ldots)$. Тогда $\theta^* = (1, 0, 0, 0, 0, \ldots) \notin \Gamma$. Легко видеть, что в этом случае наименее благоприятное распределение на $\mathcal{F}$ приписывает равные вероятности точкам δ_a и δ_b, а потому в силу леммы Неймана — Пирсона наиболее мощный критерий уровня α совпадает с индикатором множества вида

$$c_\alpha < \frac{(2\pi)^{-1/2}\exp\left[-(y_1-1)^2/2-(y_2-1)^2/2\right]+(2\pi)^{-1/2}\exp\left[-(y_1-1)^2/2-(y_2+2)^2/2\right]}{2(2\pi)^{-1/2}\exp\left[-y_1^2/2-y_2^2/2\right]} = 2^{-1}e^{-1}e^{y_1}\left(e^{y_2}+e^{-y_2}\right).$$

Аналогично предыдущему можно заметить, что критерий $\psi_{\theta^*}(G_n)$ является асимптотически минимаксным в классе критериев Ψ^α, где асимптотическая минимаксность понимается, как в теореме 4. Полагая $g^*(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j^* g_j(x)$, критерий $\psi_{\theta^*}(G_n)$ можно представить как индикатор множества

$$\left\{X_n : n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} g^*(x_{ni}) > c_\alpha \| g^* \|\right\},$$

где c_α определяется в (15).

В заключение рассмотрим одно приложение теоремы к задачам распознавания образов. Допустим, что требуется проверить гипотезу H^0 против гипотезы H_{γ_0}, где плотность $1 + n^{-1/2}\gamma_0(x)$ неизвестна и оценивается с помощью отдельной выборки объема m. Пользуясь известными оценками для плотности, можно получить оценку $\tilde{\gamma}_m(x)$ для $\gamma_0(x)$ и построить для γ_0 «доверительный шар» Γ_m в L_2 некоторого радиуса ε с центром в точке $\tilde{\gamma}_m$. Считая, что $\|\tilde{\gamma}_m\| > \varepsilon$ и $\gamma_0 \in \Gamma_m$, и применяя теорему, получим $g^* = \tilde{\gamma}_m(1 - \varepsilon/\|\tilde{\gamma}_m\|)$, так что асимптотически оптимальный в указанном выше смысле критерий будет иметь вид

$$\left\{n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} \tilde{\gamma}_m(x_{ni}) > c\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chibisov D. M.** Transition to the limiting process for deriving asymptotically optimal tests.— Sankhya, 1969, v. A31, N 3, p. 241—258.
2. **Лоэв М.** Теория вероятностей.— М.: ИЛ, 1962. 720 с.
3. **Schay G.** Nearest random variables with given distributions.— Ann. Probability, 1974, v. 2, N 1, p. 163—166.
4. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965. 654 с.
5. **Боровков А. А.** Асимптотически оптимальные тесты для проверки сложных гипотез.— Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. XX, № 3, с. 463—487.
6. **Леман Э.** Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964. 498 с.

ОБ УМЕРЕННО БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ОТ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ

А. А. МОГУЛЬСКИЙ

1. Введение

Пусть $\mathcal{R}$ — линейное пространство конечных мер μ, заданных на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}$ некоторого метрического пространства X, $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ — класс вероятностных мер на $\mathcal{B}$. Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$,

$0 \leqslant t$, со значениями в X, траектории которого с вероятностью A измеримы по Борелю. Пусть

$$\widehat{P}_t(A) = \int_0^t \chi_A(\xi(y))\, dy$$

— часть времени t, которую процесс $\xi(y)$ провел в множестве $A \in \mathscr{B}$. Тогда в широких предположениях с вероятностью 1 случайные вероятностные меры $t^{-1}\widehat{P}_t$ при $t \to \infty$ слабо сходятся к некоторой неслучайной вероятностной мере P.

В работах [1—5] для различных конкретных процессов $\xi(t)$ получены грубые теоремы о вероятностях больших (порядка $O(1)$) уклонений случайной меры $t^{-1}\widehat{P}_t$ от меры P. Именно при выполнении ряда условий справедливы следующие соотношения:

I) $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1} \ln \mathbf{P}\left(t^{-1}\widehat{P}_t \in G\right) = -\inf\limits_{\mu\in G} I(\mu)$ для некоторого класса множеств $G \subseteq \mathscr{P}$;

II) $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1} \ln \mathbf{M} \exp\{\langle f, \widehat{P}_t\rangle\} = S(f)$, где $f = f(x)$ пробегает пространство D измеримых ограниченных вещественных функций на X, $\langle f, \mu\rangle = \int f(x)\, \mu(dx)$ для $\mu \in \mathscr{R}$. При этом функции $I(\mu)$, $\mu \in \mathscr{P}$ и $S(t)$, $f \in D$, связаны следующими соотношениями:

$$I(\mu) = \sup_{f\in D}\{\langle f, \mu\rangle - S(f)\};\ R(f) = \sup_{\mu\in\mathscr{P}}\{\langle f, \mu\rangle - I(\mu)\}. \tag{1}$$

В настоящей статье рассматриваются умеренно большие уклонения (порядка $o(1)$) случайной меры $t^{-1}\widehat{P}_t$ от P. Следующие нестрогие рассуждения приведут нас к соответствующим результатам. Как правило, минимум функции $I(\mu)$ равен 0 и достигается при $\mu = P$; поэтому естественно ожидать, что для любой меры $\mu \in \mathscr{R}_0 = \{\mu \in \mathscr{R} : \langle 1, \mu\rangle = \mu(X) = 0\}$

$$I(P + \alpha\mu) = \alpha^2 I_0(\mu) + o(\alpha^2) \quad \text{при} \quad \alpha \to 0. \tag{2}$$

Учитывая (1), из (2) можно вывести, что для любой функции $f \in D_0 = \{f \in D : \langle f, P\rangle = 0\}$ при $\alpha \to 0$ справедливо $S(\alpha f) = \alpha^2 S_0(f) + o(\alpha^2)$, и функции $I_0(\mu)$, $\mu \in \mathscr{R}_0$; $S_0(f)$, $f \in D_0$, удовлетворяют соотношениям (1). Аналогами соотношений I, II естественным образом будут следующие соотношения ($x(t)/\sqrt{t} \to \infty$, $x(t) = 0(t)$ при $t \to \infty$):

I_0) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t}{x^2(t)} \ln \mathbf{P}\left(x^{-1}(t)\left(\widehat{P}_t - tP\right) \in G\right) = -\inf\limits_{\mu\in G} I_0(\mu)$ для некоторого класса множеств $G \subseteq \mathscr{R}_0$;

II_0) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t}{x^2(t)} \ln \mathbf{M} \exp\left\{\dfrac{x(t)}{t}\langle f, \widehat{P}_t\rangle\right\} = S_0(f)$ для $f \in D_0$.

В настоящей работе получены грубые предельные теоремы о вероятностях умеренно больших уклонений для однородных цепей Маркова и однородных марковских процессов в предположениях, близких к рассмотренным ранее в [3]. При этом в основном использованы методы, развитые ранее в [1—5]. Отметим, что первой работой, где наряду с большими рассматривались умеренно большие уклонения для случайных мер, является [2].

2. Формулировки результатов в дискретном случае

Пусть X — метрический компакт, $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — однородная цепь Маркова со стационарным распределением P. Пусть переходные вероятности $\Pi(x, dy)$ цепи абсолютно непрерывны относительно P (коротко $\Pi(x, dy) \ll P(dy)$) и переходные плотности $\pi(x, y) = \Pi(x, dy)/P(dy)$ для всех x,

$y \in X$ удовлетворяют неравенствам

$$0 < a \leqslant \pi(x, y) \leqslant A < \infty. \tag{3}$$

Отметим, что если предположить абсолютную непрерывность переходных вероятностей относительно произвольной вероятностной меры μ, то из условия (3) для соответствующих плотностей будет следовать существование стационарного распределения P такого, что выбранные относительно него плотности переходных вероятностей будут удовлетворять (3) [6]. Выбор плотностей $\pi(x, y)$ относительно P удобен для дальнейших рассмотрений, так как в этом случае функцию $\pi^*(x, y) = \pi(y, x)$ можно тоже интерпретировать как плотность переходных вероятностей относительно P некоторой цепи (ξ_n^*).

Определим оператор Π, отображающий пространство D ограниченных измеримых функций $f(x)$, $x \in X$, в себя, положив

$$\Pi f(x) = \int \pi(x, y) f(y) P(dy) = M_x f(\xi_1).$$

Пусть, далее,

$$\Pi^{(1)}(x, dy) = \Pi(x, dy), \ldots, \Pi^{(k+1)}(x, dy) = \int \Pi^{(k)}(x, dz)\, \Pi(z, dy);$$

в сделанных предположениях [6, гл. V, § 7] последовательность мер $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\Pi^{(k)}(x, dy) - P(dy)\right)$ сходится при $n \to \infty$ по вариации равномерно по $x \in X$ к некоторой мере, которую обозначим $r(x, dy)$. Оператор $Rf(x) = f(x) + \int r(x, dy) f(y)$ осуществляет взаимно-однозначное отображение гиперплоскости $D_0 = \{f \in D : \langle f, P\rangle = 0\}$ в D, и для любой функции $f \in D$ справедливо $R(I - \Pi) f = f$, где I — тождественный оператор. Положим для $f, g \in D$ $(f, g) = \int f(x) g(x) P(dx)$, $\|f\| = (f, f)^{1/2}$. Для функции $f \in D_0$ положим $S_0(f) = 1/2 \cdot (\|Rf\|^2 - \|\Pi Rf\|^2)$, и для меры $\mu \in \mathscr{R}_0 = \{\mu \in \mathscr{R} : \langle 1, \mu\rangle = \mu(X) = 0\}$ примем

$$I_0(\mu) = \sup_{f \in D_0} \{\langle f, \mu\rangle - S_0(f)\}.$$

Выведем более удобную формулу

$$I_0(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2}(m, (I - \Pi) R_C (I - \Pi^*) m), & \text{если } \mu \ll P,\ m = \frac{\partial \mu}{\partial P}, \\ \infty & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{4}$$

где оператор R_C — соответствующий оператор R для цепи (ξ_n^C) с плотностями переходных вероятностей $\pi^C(x, y) = \int \pi(x, z) \pi(y, z) P(dz)$; оператор Π^* — соответствующий оператор Π для цепи (ξ_n^*) с плотностями $\pi^*(x, y) = \pi(y, x)$.

Для того чтобы сформулировать теорему, необходимо еще задать топологию в пространстве $\mathscr{R}$ всех конечных мер на $(X, \mathscr{B})$. Пусть $\alpha = (\alpha)$ — совокупность всех конечных подалгебр σ-алгебры $\mathscr{B}$. Зададим топологию τ в $\mathscr{R}$ с помощью семейства полунорм

$$\rho_\alpha(\mu) = \max_{A \in \alpha} |\mu(A)|, \quad \alpha \in \mathrm{A}. \tag{5}$$

Таким образом, сходимости мер в топологии τ соответствует сходимость значений мер на любом измеримом множестве.

Напомним еще определение случайной меры

$$\widehat{P}_n(dy)=\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{\xi_i}(dy),$$

где $\delta_x(dy)$ — вероятностная мера, вырожденная в точке $x\in X$.

Теорема 1. *Пусть $x(n)/\sqrt{n}\to\infty$, $x(n)/n\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда для любого $x\in X$:*

а) *для любого τ-открытого множества $U\subseteq\mathcal{R}_0$*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n}{x^2(n)}\ln \mathbf{P}_x\left(x^{-1}(n)\left(\widehat{P}_n-nP\right)\in U\right)\geqslant-\inf_{\mu\in U}I_0(\mu);\tag{6}$$

б) *для любого τ-замкнутого множества $U\subseteq\mathcal{R}_0$*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{x^2(n)}\ln \mathbf{P}_x\left(x^{-1}(n)\left(\widehat{P}_n-nP\right)\in U\right)\leqslant-\inf_{\mu\in U}I_0(\mu);\tag{7}$$

в) *для любой функции $f\in D_0$*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x^2(n)}\ln \mathbf{M}_x\exp\left\{\frac{x(n)}{n}\langle f,\widehat{P}_n\rangle\right\}=S_0(f).\tag{8}$$

Отметим, что топология τ рассмотрена в [5], где получены теоремы о больших уклонениях (порядка $O(1)$) для эмпирических мер в сепарабельном полном метрическом пространстве. В работе [4] тоже, по существу, присутствует (в доказательствах) топология τ; в основном же там используется топология, индуцированная нормой $\|\mu\|_{\mathcal{B}_1}=\sup\limits_{A\in\mathcal{B}_1}|\mu(A)|$, $\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{B}$ — класс измеримых множеств, удовлетворяющий следующим двум условиям:

а) все меры $\mu\in\mathcal{R}$ однозначно определяются своими значениями на $\mathcal{B}_1$;

б) для любого $\delta>0$ найдутся конечные алгебры α_1, α_2 измеримых множеств с $\mathbf{P}$-мерой границы, равной нулю, и такие, что для любого множества $A\in\mathcal{B}_1$ найдутся множества $A_1\in\alpha_1$ и $A_2\in\alpha_2$ такие, что $(A\setminus A_1)\cup\cup(A_1\setminus A)\subseteq A_2$, $\mathbf{P}(A_2)\leqslant\delta$.

Утверждать заранее, что найдется хотя бы одна такая норма $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_1}$, по-видимому, нельзя. В тех случаях, когда такая норма существует, утверждения теоремы 1 остаются справедливыми и для топологии, порожденной этой нормой.

3. Формулировки результатов в непрерывном случае

Пусть X — метрический компакт, $\xi(t)$; $0\leqslant t$,— однородный марковский процесс с переходными вероятностями $\mathbf{P}(t,x,dy)$ и стационарным распределением $P(dy)$. Пусть $\mathbf{P}(t,x,dy)=p(t,x,y)P(dy)$, и для всякого $\delta>0$ найдутся числа $a=a(\delta)$, $A=A(\delta)$ такие, что для $t\geqslant\delta$, $x,y\in X$

$$0<a\leqslant p(t,x,y)\leqslant A<\infty.\tag{9}$$

Кроме того, пусть полугруппа операторов $T_tf(x)=\int f(y)\,p(t,x,y)\,P(dy)$ переводит пространство C непрерывных на X функций $f(x)$ в себя и сильно непрерывна по t ((T_t) — полугруппа класса C_0 [7]). В этих предположениях (см. [8], с. 135) можно считать, что выборочные траектории процесса $\xi(t)$ непрерывны справа и имеют пределы слева для всех $t\geqslant 0$; область определения $\mathcal{D}$ инфинитезимального оператора L полугруппы (T_t) плотна в C [7]. Далее, в сделанных предположениях (см. [6]) последовательность мер $\int\limits_0^t(p(u,x,y)-1)\,P(dy)\,du$ сходится при $t\to\infty$ по вариации равномерно по $x \in X$ к мере, которую мы обозначим $r(x, dy)$. При этом оператор $Rf(x) = \int f(y) r(x, dy)$ отображает гиперплоскость $C_0 = \{f \in C : \langle f, P\rangle = (f, 1) = 0\}$ в $\mathscr{D}$, и для любой функции $f \in C_0$ справедливо $LRf = f$.

Для функций f из C_0 положим

$$S_0(f) = -(f, Rf), \tag{10}$$

и для любой меры $\mu \in \mathscr{R}_0 = \{\mu \in \mathscr{R} : \langle 1, \mu\rangle = 0\}$ примем

$$I_0(\mu) = \sup_{f \in C_0} \{\langle f, \mu\rangle - S_0(f)\}.$$

Формуле (4) будет соответствовать формула

$$I_0(\mu) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(m, LR_C L^* m), & \text{если} \quad \mu << P \text{ и } \frac{d\mu}{dP} = m, \\ \infty, & \text{если} \quad \mu </< P, \end{cases} \tag{11}$$

где L^* — инфинитезимальный оператор процесса $\xi^*(t)$ с плотностью $p^*(t, x, y) = p(t, y, x)$, оператор R_C — оператор R для процесса $\xi_C(t)$, которому соответствует инфинитезимальный оператор $L_C = L + L^*$.

Напомним определение случайной меры

$$\hat{P}_t(dy) = \int_0^t \delta_{\xi(u)}(dy)\, du.$$

В пространстве $\mathscr{R}$ будем рассматривать топологию τ, введенную в разделе 2.

Теорема 2. *Пусть $x(t)/\sqrt{t} \to \infty$, $x(t)/t \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда для любого $x \in X$:*

а) *для любого τ-открытого множества $u \in \mathscr{R}_0$*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{t}{x^2(t)} \ln \mathbf{P}_x\left(x^{-1}(t)\left(\hat{P}_t - tP\right) \in U\right) \geqslant -\inf_{\mu \in U} I_0(\mu);$$

б) *для любого τ-замкнутого множества $U \in \mathscr{R}_0$*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t}{x^2(t)} \ln \mathbf{P}_x\left(x^{-1}(t)\left(\hat{P}_t - tP\right) \in U\right) \leqslant -\inf_{\mu \in U} I_0(\mu);$$

в) *для любой функции $f \in C_0$*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{x^2(t)} \ln \mathbf{M}_x \exp\left\{\frac{x(t)}{t} \langle f, \hat{P}_t\rangle\right\} = S_0(f).$$

4. Доказательство теоремы 1

Лемма 1. *Для любой функции $f \in D_0$ найдутся числа $\varepsilon_0 > 0$, $A < \infty$ и семейство функций $f_\varepsilon \in D_0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, такие, что при $\varepsilon \to 0$*

$$f_\varepsilon = \varepsilon f + \varepsilon^2 \tilde{f}_\varepsilon, \tag{12}$$

где $\sup_{x \in X} |\tilde{f}_\varepsilon(x)| < A$, *и для* $\varepsilon(n) \to 0$, $\varepsilon(n)\sqrt{n} \to \infty$ *при* $n \to \infty$ *для всех* $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\varepsilon^2(n)} \ln \mathbf{M}_x \exp\{\langle f_{\varepsilon(n)}, \hat{P}_n\rangle\} = S_0(f). \tag{13}$$

Доказательство. Для $f \in D_0$ положим $\varphi = Rf$, и пусть

$$f_\varepsilon = \log(1 - \varepsilon\varphi)/(1 - \varepsilon\Pi\varphi) - (\log(1 - \varepsilon\varphi)/(1 - \varepsilon\Pi\varphi), 1). \tag{14}$$

Очевидно, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ функция f_ε принадлежит D_0; при $\varepsilon \to 0$ выполнено (12) и (см. (14) и определение $S_0(f)$ в разделе 1)

$$-(\log(1-\varepsilon\varphi)/(1-\varepsilon\Pi\varphi),\ 1) = \varepsilon^2 S_0(f) + O(\varepsilon^2). \qquad (15)$$

В силу формулы (2.1) из [5] можно записать:

$$\mathbf{M}_x\left(e^{\langle w, \widehat{P}_n\rangle}\cdot v(\xi_{n-1})\right) = u(x), \qquad (16)$$

где $u(x) = 1 - \varepsilon\varphi(x)$; $v(x) = 1 - \varepsilon\Pi\varphi(x)$; $w(x) = f_\varepsilon(x) + (\log(u/v),\ 1)$. Из (16) получаем

$$\mathbf{M}_x\left(e^{\langle f_\varepsilon, \widehat{P}_n\rangle}\cdot v(\xi_{n-1})\right) = e^{-n(\log(u|v),1)}\cdot u(x). \qquad (17)$$

Поскольку при достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо для $x \in X$

$$0 < a \leqslant u(x) \leqslant A < \infty,\quad 0 < a \leqslant v(x) \leqslant A < \infty,$$

то из (17) в силу (15) следует (13). Лемма доказана.

Пусть α — произвольная конечная подалгебра $\mathscr{B}$, $D_{0,\alpha}$ — та часть функций D_0, которые измеримы относительно α,

$$I_{0,\alpha}(\mu) = \sup_{f\in D_{0,\alpha}} \{\langle f, \mu\rangle - S_0(f)\}.$$

Отправляясь от утверждения леммы 1 и повторяя рассуждения, которые использовались при доказательстве лемм 1.1, 1.2 в [4], можно показать, что для любых $\varepsilon > 0$, $\mu \in \mathscr{R}_0$, $x \in X$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbf{P}_x\left(x^{-1}(n)\,\rho_\alpha\left(\widehat{P}_n - nP - x(n)\,\mu\right) < \varepsilon\right) \geqslant I_{0,\alpha}(\mu), \qquad (18)$$

где полунорма ρ_α определена (5), и

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{x^2(n)} \ln \mathbf{P}_x\left(x^{-1}(n)\left(\widehat{P}_n - nP\right) \notin \Phi_\alpha^\varepsilon(s)\right) \leqslant -s, \qquad (19)$$

где $\Phi_\alpha^\varepsilon(s) = \{\mu \in \mathscr{R}_0 : \rho_\alpha(\mu, \mu') < \varepsilon,\ I_{0,\alpha}(\mu') \leqslant s\}$.

Далее, отправляясь от (18) и (19) и повторяя рассуждения § 3 в [4] (см. также [5]), получаем (6) и (7). Соотношение (8) следует из (6), (7) (см. [9]). Теорема 1 доказана.

Для вывода формулы (4) введем в D_0 скалярное произведение

$$(f,\ g)_0 = (Rf,\ Rg) - (\Pi Rf,\ \Pi Rg);$$

из неравенства Коши для $f \in D_0$ следует $\|f\|_0 = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Операторы Π^* и R^*, Π_C и R_C определены для цепей (ξ_n^*), (ξ_n^C), которые введены в разделе 2. Справедливы следующие соотношения:

$$(\Pi f,\ g) = (f,\ \Pi^* g);\quad (Rf,\ g) = (f,\ R^* g),$$

и скалярные произведения $(\cdot,\ \cdot)$ и $(\cdot,\ \cdot)_0$ связаны соотношением

$$(f,\ g) = (f,\ (I-\Pi)R_C(I-\Pi^*)g)_0.$$

Далее, поскольку $S_0(f) = 1/2\cdot\|f\|_0^2$, то для $\mu \ll P$ при $m = \partial\mu/\partial P$ справедливо

$$I_0(\mu) = \sup_{f\in D_0} \{(f, m) - S_0(f)\} = \sup_{f\in D_0} \{(f, (I-\Pi)\,R_C(I-\Pi^*)\,m)_0 - 1/2\cdot\|f\|_0^2\}.$$

Из последнего следует первая часть (4). Если же $\mu \not\ll P$, то воспользуемся неравенством $\|f\|_0^2 \leqslant A^2\|f\|^2$, где $A^2 < \infty$, которое следует из леммы 7.1 в [6, с. 203]. Из этого неравенства получаем

$$A^2 I_0(\mu) \geqslant \tilde{I}_0(\mu) \equiv \sup_{f \in D_0} \{\langle f, \mu \rangle - 1/2 \cdot \|f\|^2\}.$$

Поскольку для $\mu <\!\!\!\backslash\!\!\!< P$ справедливо $\tilde{I}_0(\mu) = \infty$, то вторая часть формулы (4) получена.

5. Доказательство теоремы 2

Лемма 2. *Для любой функции* $f \in C_0$ *найдутся числа* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $A < \infty$ *и семейство функций* $f_\varepsilon \in C_0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *такие, что*

$$f_\varepsilon = \varepsilon f + \varepsilon^2 \tilde{f}_\varepsilon, \tag{20}$$

где $\sup\limits_{x \in X} |\tilde{f}_\varepsilon(x)| \leqslant A$, *и для* $\varepsilon(t) \to 0$, $\varepsilon(t)\sqrt{t} \to \infty$ *при* $t \to \infty$ *для всех* $x \in X$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t\varepsilon^2(t)} \ln \mathrm{M}_x \exp \{\langle f_{\varepsilon(t)}, \hat{P}_t \rangle\} = S_0(f), \tag{21}$$

где $S_0(f)$ *определяется* (10).

Доказательство. В непрерывном случае роль (16) будет играть соотношение

$$\mathrm{M}_x \exp\left\{-\left\langle \frac{Lu}{u}, \hat{P}_t \right\rangle\right\} u(\xi(t)) = u(x), \tag{22}$$

которое имеет место для любой положительной функции $u \in \mathscr{D}$ [3]. Для заданной функции $f \in C_0$ положим $\varphi = Rf \in \mathscr{D}$ и

$$f_\varepsilon = -(L(1 - \varepsilon\varphi))/(1 - \varepsilon\varphi) + (L(1 - \varepsilon\varphi)/(1 - \varepsilon\varphi),\ 1).$$

Очевидно, что $f_\varepsilon \in C_0$ и выполнено (20). Легко видеть, далее, что при $\varepsilon \to 0$

$$(L(1 - \varepsilon\varphi)/(1 - \varepsilon\varphi),\ 1) = -\varepsilon(L\varphi/(1 - \varepsilon\varphi),\ 1) = \varepsilon^2 S_0(f) + o(\varepsilon^2). \tag{23}$$

В силу (22)

$$\mathrm{M}_x e^{\langle f_\varepsilon, \hat{P}_t \rangle} (1 - \varepsilon\varphi(\xi(t))) = (1 - \varepsilon\varphi(x))\, e^{-(L\varepsilon\varphi/(1-\varepsilon\varphi), 1)t},$$

поэтому в силу (23) получаем

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t\varepsilon^2(t)} \ln \mathrm{M}_x e^{\langle f_\varepsilon, \hat{P}_t \rangle} (1 - \varepsilon\varphi(\xi(t))) = S_0(f). \tag{24}$$

Поскольку при достаточно малых $\varepsilon > 0\ (\leqslant \varepsilon_0)$ справедливо $0 < a \leqslant 1 - \varepsilon\varphi(x) \leqslant A < \infty$, то из (24) следует (21). Лемма 2 доказана.

Далее доказательство теоремы 2 полностью совпадает с доказательством теоремы 1.

Формула (12) выводится аналогично формуле (4). Для этого нужно ввести скалярное умножение

$$(f, g)_0 = -[(f, Rg) + (g, Rf)],$$

так что [см. (10)] $S_0(f) = 1/2 \cdot \|f\|_0^2$, и воспользоваться соотношениями

$$-(f, g)_0 = (f, R^*(L + L^*)Rg); \quad -(f, g) = (f, LR_c L^* g)_0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Санов И. Н.** О вероятностях больших уклонений для случайных величин.— Мат. сборник, 1957, т. 42 (84), с. 11—14.
2. **Боровков А. А.** Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах.— Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, № 4, с. 575—595.
3. **Donsker M. D., Varadhan S. R. S.** Asymptotic evaluation of certain Markov pro-

cess expectations for large time. I.— Comm. Pure Appl. Math., 1975, v. 27. p. 1—47.
4. **Гертнер Ю.** Большие уклонения от инвариантной меры.— Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, № 1, с. 27—42.
5. **Groenboom P., Oosterhoff J., Ruymgart F. H.** Large deviation theorems for empirical probability measures. Preprint. Amsterdam, Mathematical Centre, 1976.
6. **Дуб Дж.** Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.
7. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
8. **Дынкин Е. Б.** Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963.
9. **Varadhan S. R. S.** Asymptotic probabilities and differential equations.— Comm. Pure Appl. Math., 1966, v. 19, N 3, p. 261—286.

ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ БЕЛЛМАНА — ХАРРИСА С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В. А. ТОПЧИЙ

1. Введение

В работе рассматриваются зависящие от возраста ветвящиеся процессы (процессы Беллмана — Харриса) с дискретным временем $\xi(n)$, $n=0, 1, \ldots$ Случайные величины $\xi(n)$ принимают целочисленные значения, которые будем интерпретировать как размер популяции в момент времени n. Описание данных процессов см. в [1] или в [2] (модель 3).

Пусть процесс $\xi(n)$ определяется целочисленными случайными величинами η (продолжительность жизни частиц) с функцией распределения $F(k)=\mathbf{P}\{\eta\leqslant k\}$ (возможно $F(0)\neq 0$ и ζ (число потомков) с производящей функцией $h(z)=\sum h_k z^k$.

Введем обозначения: $P_n(z)=\mathbf{M}z^{\xi(n)}$; $p_{nk}=\mathbf{P}\{\xi(n)=k\}$; $Q_n(z)=1-P_n(z)$; $P_n=P_n(0)$; $Q_n=Q_n(0)$. Далее положим $A=h'(1)$; $B=h''(1)$; $\mu=\mathbf{M}\eta$; $\mu_k=\mathbf{M}\eta^k$; $\alpha=B/2\mu$; $f_k=F(k)-F(k-0)$; $q_k=\sum_{j=k+1}^{\infty} f_j$; $f(u)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k u^k$. Будем рассматривать критический случай, т. е. $A=1$. Из результатов Б. А. Севастьянова [3] следует, что для вероятности продолжения процесса выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} Q_n n = 1/\alpha \tag{1}$$

(при условии конечности третьих моментов у η и ζ). Однако, как показано М. И. Гольдштейном [4], для справедливости (1) достаточно существования второго момента у ζ и выполнения условий $k^2[1-F(k)]\to 0$ при $k\to\infty$ и $F(0)=0$ (от последнего условия легко избавиться). Отметим, что используемый в данной статье метод позволяет дать другое доказательство результата Гольдштейна (в том числе и для процессов с произвольным распределением времени жизни частиц).

В 1966 г. Кестеном, Неем и Спицером [5] для процессов Гальтона — Ватсона (последние совпадают с процессами Беллмана — Харриса при $\mathbf{P}\{\eta=1\}=1$) была доказана

Теорема 0. *Пусть $\xi(n)$ — процесс Гальтона — Ватсона; $A=1$, $B>0$, $\mathbf{M}\zeta^2\ln\zeta<\infty$ и наибольший общий делитель (н. о. д.) s таких, что $h_s\neq 0$, равен d, тогда для любой константы $0<c<\infty$*

$$\lim_{\substack{k,n\to\infty\\ k/n<c}} n^2 e^{kd/n\alpha} p_{nkd} = d/\alpha^2. \tag{2}$$

Кроме того,

$$\sup_{k,n\geqslant 1} n^2 p_{nk} < \infty. \tag{3}$$