

Доказательство. Справедливость оценки (9) непосредственно вытекает из лемм 1, 2 и 4.

Утверждения теорем 1—4 следуют из леммы 5 и теорем 1—4 [3] соответственно.

Замечание. Существует пример, обосновывающий наличие множителя σ_2^{-1} в оценках δ_n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Нагаев С. В., Чеботарев В. И. Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме в l_2 для случая независимых координат. — Вторая Вильнюсская конф. по теории вероятностей и математической статистике, 1977, т. 2, с. 68—69.
2. Шахайдарова Н. Равномерные, локальные и глобальные теоремы для плотностей. — Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1966, вып. 5, с. 90—91.
3. Нагаев С. В., Чеботарев В. И. Об оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме для случайных векторов со значениями в пространстве l_2 . — В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978, с. 153—182.

ОБ УСРЕДНЕНИИ НЕДИВЕРГЕНТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В. В. ЮРИНСКИЙ

В работе рассматривается предельное поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений краевых задач для уравнений

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = f, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = L_\varepsilon u_\varepsilon + f,$$

где

$$L_\varepsilon v = \sum_{i,j} a_{ij}(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) \frac{\partial^2 v}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} + \sum_i b_i(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) \frac{\partial v}{\partial x^{(i)}} + c(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) v;$$

$$v = v(\bar{x}); \quad \bar{x} = \{x^{(0)}, \dots, x^{(n)}\} \in R^{n+1},$$

а коэффициенты $a_{ij}(\bar{x}, \bar{y}), \dots$ представляют собой гладкие случайные поля, периодические по переменным $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ и удовлетворяющие по переменной $y^{(0)}$ условию сильного перемешивания.

Основные результаты работы — теоремы о сближении решений u_ε краевых задач для оператора L_ε с решениями U усредненных задач для оператора L_0 с гладкими и не зависящими от случая коэффициентами в том смысле, что $\sup |u_\varepsilon(\bar{x}) - U(\bar{x})| \rightarrow 0$ по вероятности. Формулировки и доказательства этих теорем приведены в разделе 3.

Усреднению недивергентных уравнений с неслучайными периодическими быстроосциллирующими коэффициентами посвящена работа [1] (другими путями этот результат получен в [2]). Метод усреднения для уравнений в дивергентной форме рассматривался, например, в [2, 3—10].

Ниже используется метод [2, 3, 10]. Основные трудности, связанные с его применением, — построение быстроосциллирующих поправок к решению усредненной задачи, представляющих собой решения вспомогательных задач для главной части оператора L_ε . Построению этих поправок посвящены разделы 1, 2. В разделе 4 результаты используются для изучения слабой сходимости распределений, связанных с оператором L_ε диффузионных процессов к мере в пространстве непрерывных функций, порожденной усредненным оператором.

Автор благодарен за консультации Т. И. Зеленьку и С. В. Успенскому.

1. Оценки периодических решений вспомогательных уравнений

Пусть $a = \|a_{ij}(\bar{y})\|$, $i, j = 0, \dots, n$, $\bar{y} = \{y^{(0)}, \dots, y^{(n)}\}$, симметричная матрица, удовлетворяющая условию

$$\forall \bar{y}, \bar{\xi} \quad 0 < a_- |\bar{\xi}|^2 \leq a_{ij}(\bar{y}) \xi^{(i)} \xi^{(j)} \leq a_+ |\bar{\xi}|^2 < \infty, \quad (1)$$

где $|\bar{\xi}|^2 = \xi^{(i)} \xi^{(i)}$, а повторение индексов здесь и далее подразумевает суммирование от 0 до n .

Коэффициенты a_{ij} предполагаются трижды непрерывно дифференцируемыми, причем для любого $\bar{y}$

$$|\nabla_k a_{ij}(\bar{y})| < A, \quad |\nabla_k \nabla_l a_{ij}(\bar{y})| < A, \quad |\nabla_k \nabla_l \nabla_m a_{ij}(\bar{y})| < A, \quad (2)$$

где $\nabla_k \varphi = \partial \varphi / \partial y^{(k)}$.

Функции, периодические с периодом 1 только по переменным $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$, называются ниже 1-периодическими; $(T, 1)$ -периодическими называются функции 1-периодические и периодические с периодом T по $y^{(0)}$:

$$\varphi(\bar{y}) = \varphi(y^{(0)} + \varepsilon_0 T, y^{(1)} + \varepsilon_1, \dots), \quad \varepsilon_i = 0, \pm 1.$$

Если $a_{ij}(T, 1)$ -периодичны, уравнение

$$\nabla_i \nabla_j (a_{ij} \mu) = 0 \quad (3)$$

имеет (см., например, [11]) единственное $(T, 1)$ -периодическое решение, удовлетворяющее условию

$$\int_0^T dy \int' \mu(y) = c,$$

где использовано сокращение

$$\int' \varphi(y) = \int_{[0,1]^n} \varphi(y, y^{(1)} \dots y^{(n)}) dy^{(1)} \dots dy^{(n)}.$$

Воспользовавшись справедливым для гладких $(T, 1)$ -периодических функций тождеством

$$\int_0^T dy \int' \nabla_i \nabla_j (a_{ij} \mu) \varphi(y) = \int_0^T dy \int' \mu a_{ij} \nabla_i \nabla_j \varphi(y)$$

в случае, когда φ не зависит от $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$, нетрудно убедиться, что $\int' a_{00} \mu(y)$ не зависит от y . Это позволяет в дальнейшем использовать более удобное условие нормировки

$$\int' \mu a_{00}(y) = 1, \quad (4)$$

также выделяющее $(T, 1)$ -периодическое решение (3) однозначно.

Неравенство Гарнака (см., например, [12]) позволяет заключить, что $(T, 1)$ -периодическое решение задачи (3), (4) допускает оценки

$$1/c \leq \mu(\bar{y}) \leq c. \quad (5)$$

Гладкость коэффициентов позволяет с помощью оценки Шаудера [13] дополнить (5) неравенствами

$$|\nabla_j \mu(\bar{y})| < c; \quad |\nabla_i \nabla_j \mu(\bar{y})| < c. \quad (6)$$

Символом c здесь и далее обозначается любая положительная постоянная, значение которой определяют только размерность и постоянные из условий (1), (2), но не T , так что $c + c = c$, $c \cdot c = c$ и т. д.

В справедливости (5) можно убедиться также, воспользовавшись известными теоремами (см., например, [14]) о фундаментальных решениях уравнения $u_i = \nabla_i \nabla_j (a_{ij} \mu)$, через которые выражаются переходные плотности случайного блуждания на торе $[0, T] \times [0, 1]^n$ с инфинитезимальным оператором $a_{ij} \nabla_i \nabla_j$, так как μ пропорциональна инвариантной плотности этого блуждания.

В дальнейшем переменная $y^{(0)}$ будет играть особую роль. В тех случаях, когда это необходимо подчеркнуть, будет использоваться сокращение

$$\bar{y} = \{y, 'y\}, y(=y^{(0)}) \in R^1, 'y(=\{y^{(1)}, \dots, y^{(n)}\}) \in R^n.$$

Лемма 1. Пусть $\mu^{(k)}$, $k = 1, 2$, — 1-периодические функции, такие, что при $0 < y < S$

$$\nabla_i \nabla_j a_{ij}^{(k)} \mu^{(k)}(\bar{y}) = 0, \int' a_{00}^{(k)} \mu^{(k)}(y) = 1,$$

причем $\mu^{(k)}$ допускают оценки (5), (6), а коэффициенты $a_{ij}^{(k)}$ 1-периодичны, удовлетворяют (1), (2) и при $1 < y < S - 1$, $\alpha \leq 1$

$$|a_{ij}^{(1)}(\bar{y}) - a_{ij}^{(2)}(\bar{y})| \leq \alpha, |\nabla_k a_{ij}^{(1)}(\bar{y}) - \nabla_k a_{ij}^{(2)}(\bar{y})| \leq \alpha.$$

Тогда

$$\int_0^S dy \int' |\mu^{(1)} - \mu^{(2)}|(y) \leq c [\alpha S + S^{1/2}].$$

Доказательство. Пусть $\rho(y) = 0$ вне $[1, S - 1]$, $0 \leq \rho(y) \leq 1$, $\rho(y) = 1$ при $y \in [2, S - 2]$, $|\rho'(y)| + |\rho''(y)| \leq c$. Функция $u(\bar{y}) = \rho(y)(\mu^{(1)}(\bar{y}) - \mu^{(2)}(\bar{y}))/\mu^{(1)}(\bar{y})$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \int_0^S dy \int' u \nabla_i \nabla_j (a_{ij}^{(1)} (\mu^{(1)} - \mu^{(2)}) \rho) &= \int_0^S dy \int' u \nabla_i \nabla_j (a_{ij}^{(1)} \mu^{(1)} u) = \\ &= - \int_0^S dy \int' \mu^{(1)} a_{ij}^{(1)} \nabla_i u \nabla_j u - \int_0^S dy \int' \nabla_j (a_{ij}^{(1)} \mu^{(1)}) \nabla_i (u^2/2) = \\ &= - \int_0^S dy \int' \mu^{(1)} a_{ij}^{(1)} \nabla_i u \nabla_j u, \end{aligned}$$

которое получается интегрированием по частям с учетом 1-периодичности и финитности u .

Левой части можно придать вид

$$\int_0^S dy \int' u \nabla_i \nabla_j (a_{ij}^{(1)} (\mu^{(1)} - \mu^{(2)}) \rho) = I_1 + I_2,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^S dy \int' u \nabla_i \nabla_j [\rho (a_{ij}^{(2)} - a_{ij}^{(1)}) \mu^{(2)}]; \\ I_2 &= \int_0^S dy \int' u \nabla_i \nabla_j [\rho (a_{ij}^{(1)} \mu^{(1)} - a_{ij}^{(2)}) \mu^{(2)}]. \end{aligned}$$

Первое слагаемое допускает оценку

$$|I_1| = \left| - \int_0^S dy \int' \nabla_i u \cdot \nabla_j (\rho (a_{ij}^{(2)} - a_{ij}^{(1)}) \mu^{(2)}) \right| \leq$$

$$\leq \left(\int_0^S dy \int' u_{\bar{y}}^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^S dy \int' [\rho (a_{ij}^{(2)} - a_{ij}^{(1)}) \mu^{(2)}]_{\bar{y}}^2 \right)^{1/2} \leq c \left(\int_0^S dy \int' u_{\bar{y}}^2 \right)^{1/2} (S\alpha^2)^{1/2},$$

где $\varphi_{\bar{y}}^2 = \nabla_i \varphi \nabla_i \varphi$. Эта оценка вытекает из близости $a_{ij}^{(h)}$, $\nabla_i a_{ij}^{(h)}$ при $\rho \neq 0$ и (5), (6).

Второе слагаемое удовлетворяет неравенству

$$|I_2| = \left| \int_{\rho \neq 0} dy \int' u \cdot \{ \rho'' (a_{00}^{(1)} \mu^{(1)} - a_{00}^{(2)} \mu^{(2)}) + 2\rho' \nabla_j [a_{0j}^{(1)} \mu^{(1)} - a_{0j}^{(2)} \mu^{(2)}] \} \right| \leq \\ \leq c \left(\int_{0 < \rho < 1} dy \int' u^2 \right)^{1/2} \left(\int_{0 < \rho < 1} dy \int' 1 \right)^{1/2},$$

так как $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$ — решения (3). При этом, поскольку $u(\bar{y})$ обращается в нуль при $y = 0, S$,

$$\int_{0 < \rho < 1} dy \int' u^2 \leq c \int_{0 < \rho < 1} dy \int' u_{\bar{y}}^2$$

вследствие оценки Пуанкаре — Фридрихса.

Эти оценки показывают, что

$$\int_0^S dy \int' u_{\bar{y}}^2 \leq c (S\alpha^2 + 1).$$

Условие нормировки и близость коэффициентов $a_{ij}^{(h)}$ обеспечивают справедливость неравенства $|\bar{u}(y)| \leq c\alpha$, $1 \leq y \leq S-1$, где

$$\bar{u}(y) = \int' a_{00}^{(1)} \mu^{(1)} u(y) / \int' a_{00}^{(1)} \mu^{(1)}(y).$$

Пусть $\hat{u}(\bar{y}) = u(\bar{y}) - \bar{u}(y)$. Тогда

$$\int' \hat{u}^2(y) \leq c \int' \hat{u}_{,\bar{y}}^2(y); v_{,\bar{y}}^2 = \sum_{i=1}^n (\nabla_i v)^2$$

(этот вариант неравенства Пуанкаре — Фридрихса для периодических функций с ограниченным периодом и нулевым средним по ограниченной плотности нетрудно получить, например, выкладкой, аналогичной выводу неравенств Эрлинга в [15]).

Так как «поперечные» производные u и $\hat{u}$ совпадают, $\hat{u}_{,\bar{y}}^2 = u_{,\bar{y}}^2 \leq u_{\bar{y}}^2$. Поэтому

$$\int_1^{S-1} dy \int' |\hat{u}|(y) \leq \left(\int_1^{S-1} dy \int' \hat{u}^2 \right)^{1/2} \left(\int_1^{S-1} dy \int' 1 \right)^{1/2} \leq \\ \leq c S^{1/2} \left(\int_1^{S-1} dy \int' u_{\bar{y}}^2 \right)^{1/2} \leq c [S^{1/2} + S\alpha].$$

Вместе с оценкой для $|\bar{u}|$ это приводит к неравенству

$$\int_1^{S-1} dy \int' |u|(y) \leq c (S^{1/2} + S\alpha),$$

из которого вытекает оценка леммы, если принять во внимание (5), (6) и неравенство

$$\int_{0 < \rho < 1} dy \int' |\mu^{(1)} - \mu^{(2)}|(y) \leq c.$$

Можно проверить (например, повторяя рассуждения § 5 гл. III [13]) для пространства $(T, 1)$ -периодических функций с нормой $(\int \int' u^2 + u_{\bar{y}}^2)^{1/2}$, что условие разрешимости сопряженного к (3) уравнения с $(T, 1)$ -периодическими коэффициентами

$$a_{ij} \nabla_i \nabla_j \varphi = g \quad (7)$$

имеет вид

$$\int_0^T dy \int' g \mu(y) = 0, \quad (8)$$

где μ есть $(T, 1)$ -периодическое решение (3), (4). При этом единственное решение можно выделить, например, условием

$$\int \int' \varphi = 0. \quad (9)$$

Если g удовлетворяет условию Гёльдера, φ — классическое решение (7), (9). Ниже используется следствие леммы о возрастании [16, гл. 1, § 4].

Лемма 2. Пусть 1-периодическая функция φ удовлетворяет уравнению (7) при $|\bar{y} - \bar{y}_0| \leq 4l$:

$$\begin{aligned} \Phi(l) &= \varphi_+(l) - \varphi_-(l); \quad \varphi_+(l) = \sup_{|\bar{y} - \bar{y}_0| < l} \varphi(\bar{y}), \\ \varphi_-(l) &= \inf_{|\bar{y} - \bar{y}_0| < l} \varphi(\bar{y}). \end{aligned}$$

Существуют положительные постоянные c, κ (их значение определяется только размерностью и постоянными из (1), (2)) такие, что

$$\Phi(l) \leq cl^2 G; \quad G = \sup_{|\bar{y} - \bar{y}_0| < 4l} |g(\bar{y})|,$$

если только $\Phi(4l) \leq \Phi(l)(1 + \kappa)$.

Доказательство. Пусть G_1 — такая постоянная, что при $|\bar{y} - \bar{y}_0| \leq 4l$

$$a_{ij} \nabla_i \nabla_j (G_1 |\bar{y}|^2 \pm \varphi) > 0;$$

пусть $\varphi_0 = (\varphi_+ + \varphi_-)/2$. Величину G_1 , очевидно, можно выбрать так, что $0 < G_1 < cG$. Доказательство достаточно провести в случае, когда $\bar{y}_0 = 0$, $\Phi(l) > 4l^2 G_1 / \kappa$ (ограничения на выбор κ будут указаны позже).

Пусть $s > 0$ настолько велико, что s -емкость C_s является для оператора (7) верхней. В случае, когда

$$C_s(H_0) \geq l^s/2, \quad H_0 = \{\bar{y} : \varphi(\bar{y}) \leq \varphi_0, |\bar{y}| \leq l\},$$

нужный результат получается путем применения леммы о возрастании [16] к функции

$$u(\bar{y}) = \varphi(\bar{y}) - \varphi_0 - \Phi(l)\kappa/4 + G_1 |\bar{y}|^2.$$

Действительно,

$$H = \{\bar{y} : u(\bar{y}) \leq 0, |\bar{y}| \leq l\} \supseteq H_0.$$

Поэтому $C_s(H) \geq l^s/2$ и на основании леммы о возрастании

$$\sup_{|\bar{y}| < 4l} u(\bar{y}) \geq (1 + c_1) \sup_{|\bar{y}| < l} u(\bar{y}).$$

В условиях леммы

$$\sup_{|\bar{y}| < 4l} u(\bar{y}) \leq \sup_{|\bar{y}| < 4l} \varphi(\bar{y}) - \varphi_0 - \Phi(l)\kappa/4 + 4^2 l^2 G_1 \leq (1/2 + 2\kappa) \Phi(l) + 16 G_1 l^2;$$

вместе с тем

$$\sup_{|\bar{y}| \leq l} u(\bar{y}) \geq \Phi(l)/2 - \Phi(l)\kappa/4.$$

Следовательно, при $\kappa < \kappa_0$ (значение κ_0 определяет постоянная c_1 из леммы о возрастании)

$$16l^2 G_1 \geq \Phi(l)[(1 + c_1)(1/2 - \kappa/4) - (1/2 + \kappa 7/4)] \geq \Phi(l)/c,$$

что дает нужную оценку.

Если $C_s(H_0) < l^s/2$, выкладки достаточно повторить для функции $\bar{u} = G_1|\bar{y}|^2 - \Phi(l)\kappa/4 + \varphi_0 - \varphi(\bar{y})$, так как в этом случае

$$\bar{H} = \{\bar{y} : u(\bar{y}) \leq 0, |\bar{y}| \leq l\} \supseteq \{\bar{y} : \varphi_0 \leq \varphi(\bar{y}), |\bar{y}| \leq l\} \supseteq \{\bar{y} : |\bar{y}| \leq l\} \setminus H_0$$

и $C_s(\bar{H}) \geq l^s - C_s(H_0) \geq l^s/2$.

Следствие 1. Если $(T, 1)$ -периодическая функция φ удовлетворяет уравнению (7) с $(T, 1)$ -периодической правой частью g , причем при $0 \leq y \leq T$, $g \neq 0$ лишь в «интервале» $Q = \{\bar{y} : 0 \leq y \leq N\}$, то

$$\Phi = \sup_{\bar{y}} \varphi(\bar{y}) - \inf_{\bar{y}} \varphi(\bar{y}) \leq cN^2 \sup_{\bar{y}} |g(\bar{y})|.$$

Действительно, в соответствии с принципом максимума φ достигает наибольшего и наименьшего значений на множестве, где $g \neq 0$. Поэтому для любой точки $\bar{y} \in \{\bar{y} : 0 \leq y \leq N\}$

$$\Phi(\sqrt{N^2 + n}) = \Phi(4\sqrt{N^2 + n}) = \Phi,$$

что и дает требуемую оценку.

Следствие 2. Пусть φ — 1-периодическое решение (7), причем при $|\bar{y} - y_0| \leq M$ ($M > 1$) $g(\bar{y}) = 0$.

Тогда

$$|\nabla_j \varphi(\bar{y}_0)| \leq cM^{-\kappa_1} \Phi, \quad |\nabla_i \nabla_j \varphi(\bar{y}_0)| \leq cM^{-\kappa_1} \Phi,$$

где $\Phi = \sup_{|\bar{y} - \bar{y}_0| < M} \varphi - \inf_{|\bar{y} - \bar{y}_0| < M} \varphi$, а κ_1 зависит только от размерности и постоянных эллиптичности задачи.

Доказательство. Пусть $\Phi(l)$ определена так же, как в лемме 2. При $4^k < M$

$$\Phi(4^k) \geq (1 + \kappa)\Phi(4^{k-1}),$$

так как допущение противного с помощью леммы 2 приводит к равенству $\Phi(4^{k-1}) = 0$ и противоречию. Поэтому

$$\Phi(1) \leq c(1 + \kappa)^{-\log_4 M} \Phi = cM^{-\kappa_1} \Phi, \quad \kappa_1 > 0.$$

Функция $\varphi + \text{const}$ также является решением (7). Это позволяет, воспользовавшись гладкостью коэффициентов, получить требуемый результат из оценки Шаудера [13].

2. Эргодические свойства периодических решений вспомогательных уравнений

В дальнейшем $a_{ij}(\bar{y}) = a_{ij}(\bar{y}, \omega)$, $g(\bar{y}) = g(\bar{y}, \omega)$, $\bar{y} = \{y, 'y\} \in R^{n+1}$, $\omega \in \Omega$, — 1-периодические гладкие случайные поля на вероятностном пространстве $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$. Предполагается, кроме того, что при $y \in (\alpha, \beta)$ случайные величины $a_{ij}(\bar{y})$, $g(\bar{y})$, $\bar{y} = \{y', y\}$ измеримы относительно σ -алгебры $\mathfrak{M}_\alpha^\beta$, причем семейство $\{\mathfrak{M}_\alpha^\beta\}$ допускает включение $\mathfrak{M}_\alpha^\beta \subseteq \mathfrak{M}_\gamma^\delta$ при $(\alpha, \beta) \subset (\gamma, \delta)$ и удовлетворяет условию сильного перемешивания

$$|E\xi\eta - E\xi E\eta| \leq \alpha(\tau), \quad (10)$$

где ξ , $|\xi| \leq 1$, $\mathfrak{M}_\alpha^\beta$ -измерима, η , $|\eta| \leq 1$, $\mathfrak{M}_{\beta+\tau}^\delta$ -измерима.

По переменной y поля a_{ij} , g предполагаются однородными (достаточно считать, что совместные распределения значений a_{ij} , g для некоторого набора точек $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_N$ не меняются при целочисленном сдвиге $\bar{y}_i$ по первой координате).

Поле a_{ij} удовлетворяет ограничениям (1), (2) с вероятностью 1; поле g с вероятностью 1 допускает оценки

$$|g(\bar{y})| + \sum_j |\nabla_j g(\bar{y})| < c \quad \forall \bar{y}. \quad (11)$$

Пусть $\rho(y)$ — неслучайная функция такая, что

$$0 \leq \rho(y) \leq 1, \quad |\rho'(y)| + |\rho''(y)| \leq c, \quad \rho(\bar{y}) = 0$$

в окрестности $y = 0$, $\rho(y) = 1$ при $|y| > 1$. Преобразование поля a_{ij} в окрестности гиперплоскостей $y = kT$ по формулам

$$\hat{a}_{ij}(\bar{y}) = \rho(y - kT) a_{ij}(\bar{y}) + (1 - \rho(y - kT)) a_{-} \delta_{ij}, \quad (12)$$

очевидно, сохраняет все описанные выше свойства, включая однородность (для сдвигов на кратные T). При этом поле $\hat{a}$ допускает $(T, 1)$ -периодическое продолжение с каждого из «отрезков» $[kT, (k+1)T] \times [0, 1]^n$. В дальнейшем, когда речь идет о периодических продолжениях a_{ij} или g , предполагается, что в случае необходимости a , g предварительно подвергаются преобразованию (12).

Лемма 3. Пусть μ_T — $(T, 1)$ -периодическое решение (3), (4), отвечающее $(T, 1)$ -периодическому продолжению a_{ij} с $[0, T] \times [0, 1]^n$. Существуют пределы

$$G_i = \lim_{T \rightarrow \infty} E \gamma^{(i)}(T), \quad i = 1, 2,$$

где

$$\gamma^{(i)}(T) = T^{-1} \int_0^T dy \int' g^{(i)} \mu_T(y), \quad g^{(1)}(\bar{y}) = 1, \quad g^{(2)}(\bar{y}) = g(\bar{y}).$$

Если коэффициент перемешивания в условии (10) допускает оценку

$$\alpha(\tau) \leq c_1 \exp(-c_2 \tau), \quad (13)$$

то для любого целого $S < T$

$$P(|\gamma^{(2)}(T)/\gamma^{(1)}(T) - E\gamma^{(2)}(S)/E\gamma^{(1)}(S)| \geq c'(S^{-1/2} + S/T + x)) \leq c'' \exp\{-x(T/S)^{1/2} \ln^{-1/2}(T/S)\},$$

где постоянные c' , c'' не зависят от T или S .

Доказательство. Пусть $T = kS + M$, $0 \leq M < S$, где k , S — целые. Пусть $\hat{\mu}(\bar{y})$, $\bar{y} = \{y, y'\}$ при $lS < y \leq (l+1)S$ совпадает с $(S, 1)$ -периодическим решением (3), (4), отвечающим $(S, 1)$ -периодическому продолжению a_{ij} с «отрезка» $Q_l = [lS, (l+1)S] \times [0, 1]^n$. Тогда на основании леммы 1 (с $\alpha = 0$)

$$\gamma^{(i)}(T) = (kS)^{-1} \int_0^{Sk} dy \int' g^{(i)} \hat{\mu}(y) + r_1^{(i)},$$

где с вероятностью 1 $|r_1^{(i)}| \leq c(S/T + S^{-1/2})$. Но

$$(kS)^{-1} \int_0^{Sk} dy \int' g^{(i)} \hat{\mu}(y) = \sum_{l=1}^k \xi_l^{(i)} / k,$$

где случайные величины $\xi_l^{(i)} \mathfrak{M}_{lS}^{(l+1)S}$ — измеримы и (в силу однородности) распределены как $\gamma^{(i)}(S)$. Имеющиеся оценки для g и μ обеспе-

чивают выполнение с вероятностью 1 неравенств

$$1/c \leq \xi_l^{(1)} \leq c; \quad |\xi_l^{(2)}| \leq c.$$

Поэтому, в частности,

$$\mathbf{E}\gamma^{(i)}(T) = \mathbf{E}\gamma^{(i)}(S) + O(S^{-1/2} + S/T),$$

откуда легко следует существование пределов G_i . Так как последовательность $\xi_l^{(i)}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания с коэффициентом $\hat{\alpha}(l) \leq c \exp(-Sl)$, то оценки для вероятностей больших отклонений

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{l=1}^k \xi_l^{(i)}/k - \mathbf{E}\xi_1^{(i)}\right| \geq c_1^{(i)}x\right) \leq c_2^{(i)} \exp\{-x\sqrt{k/\ln k}\}$$

вытекают из результатов работы [17].

Замечание. Если случайные поля $a_{ij}(\bar{x}, \bar{y})$, $g(\bar{x}, \bar{y})$ гладко зависят от параметра $\bar{x} \in D \subset R^{n+1}$ в том смысле, что с вероятностью 1 a_{ij} , g удовлетворяют (1), (2), (11) при всех $\bar{x}$ с общими постоянными и для всех $\bar{y}$

$$\begin{aligned} |a_{ij}(\bar{x}, \bar{y}) - a_{ij}(\bar{x}', \bar{y})| &\leq c|\bar{x} - \bar{x}'|^\delta; \\ |\nabla_k a_{ij}(\bar{x}, \bar{y}) - \nabla_k a_{ij}(\bar{x}', \bar{y})| &\leq c|\bar{x} - \bar{x}'|^\delta; \\ |g(\bar{x}, \bar{y}) - g(\bar{x}', \bar{y})| &\leq c|\bar{x} - \bar{x}'|^\delta; \quad \delta > 0, \end{aligned}$$

то на основании леммы 1 средние леммы 3 с вероятностью 1 допускают оценку

$$|\gamma_{\bar{x}}^{(i)}(T) - \gamma_{\bar{x}'}^{(i)}(T)| \leq c|\bar{x} - \bar{x}'|^\delta + O(T^{-1/2}).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что предельные значения $G_i(\bar{x})$ удовлетворяют условию Гёльдера. Кроме того, сходимость средних $\mathbf{E}\gamma_{\bar{x}}^{(i)}(T)$ к их пределам равномерна на любом компакте.

Лемма 4. Пусть $T = LN$ (L, N — целые), a_{ij} , g $(T, 1)$ -периодичны. Существует $(T, 1)$ -периодическая функция φ такая, что с вероятностью 1

$$\begin{aligned} \sup |\varphi(\bar{y})| &\leq cTN, \quad \sup |\nabla_j \varphi(\bar{y})| \leq cN^{1+\kappa_1} T^{1-\kappa_1}; \\ \sup |\nabla_i \nabla_j \varphi(\bar{y})| &\leq cN^{1+\kappa_1} T^{1-\kappa_1}, \end{aligned}$$

где κ_1 — постоянная следствия 2, причем, если коэффициент перемешивания (10) допускает оценку (13), для любого целого $S < N$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\sup |a_{ij} \nabla_i \nabla_j \varphi - g + G_2/G_1| \geq |G_2/G_1 - \mathbf{E}\gamma^{(2)}(S)/\mathbf{E}\gamma^{(1)}(S)| + \\ + c(S^{-1/2} + (N/S)^{-1/4})\} \leq c(T/N) \exp\{-(N/S)^{1/4} \ln^{-1/2} N/S\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $(T, 1)$ -периодические функции $\xi_l(y) = 0$ вне 1-окрестности отрезка $\Delta_l = [lN, (l+1)N]$, $|\xi_l'(y)| + |\xi_l''(y)| \leq c$, $0 \leq \xi_l \leq 1$, $\sum_{l=1}^L \xi_l \equiv 1$. Пусть $\hat{g}_l$ — такие постоянные, что

$$\int_0^T dy \int' \xi_l (g - \hat{g}_l) \mu_T = 0,$$

где μ_T — $(T, 1)$ -периодическое положительное решение сопряженного уравнения (3). Тогда задача

$$a_{ij} \nabla_i \nabla_j \varphi_l = \xi_l (g - \hat{g}_l), \quad \int_0^T dy \int' \varphi_l = 0$$

однозначно разрешима в классе $(T, 1)$ -периодических функций и в силу следствия 1 допускает оценку $\sup |\varphi_l(\bar{y})| \leq cN^2$.

Следствие 2 дает для производных оценку

$$|\nabla_i \varphi_l(\bar{y})| \leq cN^2 [1 + \min \{(lN - x)^+, (x - (l+1)N)^+\}]^{-\kappa_1},$$

где $a^+ = \max(a, 0)$. Поэтому в каждой точке $\bar{y}$ $\varphi = \sum_{l=1}^L \varphi_l$ удовлетворяет неравенствам

$$|\varphi(\bar{y})| \leq cN^2 T/N = cTN;$$

$$|\nabla_j \varphi(\bar{y})|, |\nabla_i \nabla_j \varphi(\bar{y})| \leq cN^2 \sum_{l=1}^{T/N} (1 + lN)^{-\kappa_1} \leq cN^2 (1 + N^{-\kappa_1} (T/N)^{1-\kappa_1}).$$

Пусть $(T, 1)$ -периодическое решение μ_T сопряженной задачи выделено условием (4). Тогда оценки леммы 1 дают равенство

$$\hat{g}_l = \int_0^N dy \int' g \mu_N / \int_0^N dy \int' \mu_N + r_l,$$

где μ_N — $(N, 1)$ -периодическое решение (4), (3), отвечающее $(N, 1)$ -периодическому продолжению (возможно, модифицированных по формулам (12)) коэффициентов a_{ij} с «отрезка» $[lN, (l+1)N] \times [0, 1]^n$, а остаток с вероятностью 1 оценивается неравенством $|r_l| \leq cN^{-1/2}$. Но по лемме 3 при целом $S < N$ и $x = (N/S)^{-1/4}$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \left| \int_0^N dy \int' g \mu_N / \int_0^N dy \int' \mu_N - E\gamma^{(2)}(S)/E\gamma^{(1)}(S) \right| \geq \right. \\ & \left. \geq c'(S^{-1/2} + (S/N)^{1/4} + S/N) \right\} \leq c'' \exp \{ -(N/S)^{1/4} \ln^{-1/2} N/S \}, \end{aligned}$$

что заканчивает доказательство.

3. Теоремы об усреднении

Пусть случайные поля $a_{ij}(\bar{x}, \bar{y})$, $b_i(\bar{x}, \bar{y})$, $c(\bar{x}, \bar{y})$, $f(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{x} = \{x^{(0)}, \dots, x^{(n)}\} \in \bar{G} \subset R^{n+1}$, $\bar{y} = \{y^{(0)}, \dots, y^{(n)}\} \in R^{n+1}$ при фиксированном $\bar{x}$ 1-периодичны по переменным $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$, удовлетворяют условиям эллиптичности (1) и гладкости по $\bar{y}$ (2), (11) (где $g = b_i, c, f$) с вероятностью 1 при всех $\bar{x} \in \bar{G}$, а также условиям однородности и сильного перемешивания (10), (13), по переменной $y^{(0)}$. Пусть, кроме того, с вероятностью 1 для всех $\bar{y}$

$$\sum_{i,j} |a_{ij}(\bar{x}, \bar{y}) - a_{ij}(\bar{x}', \bar{y})| + \sum_{i,j,h} |\nabla_h a_{ij}(\bar{x}, \bar{y}) - \nabla_h a_{ij}(\bar{x}', \bar{y})| \leq c |\bar{x} - \bar{x}'|^\alpha; \quad (14)$$

$$|g(\bar{x}, \bar{y}) - g(\bar{x}', \bar{y})| \leq c |\bar{x} - \bar{x}'|^\alpha; \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

где $\nabla_j = \partial/\partial y^{(j)}$ — оператор дифференцирования по «быстрой» переменной $\bar{y}$.

Наложенные выше ограничения и условие

$$c(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0 \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \quad (15)$$

с вероятностью 1 обеспечивают однозначную разрешимость [13] в классе $C^{2+\alpha}(G)$ задачи Дарихле

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u_\varepsilon &= a_{ij}(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) D_i D_j u_\varepsilon + b_i(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) D_i u_\varepsilon + c(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) u_\varepsilon = \\ &= f(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon), \quad u_\varepsilon|_{\partial G} = \Phi(\bar{x}), \end{aligned} \quad (16)$$

где Φ — неслучайная функция класса $C^{2+\alpha}(\partial G)$; G — ограниченная область с границей класса $C^{2+\alpha}$; $D_i = \partial/\partial x^{(i)}$ — оператор «медленного» дифференцирования.

В дальнейшем U — решение усредненной задачи Дирихле

$$L_0 U = \bar{a}_{ij} D_i D_j U + \bar{b}_i D_i U + \bar{c} U = \bar{f}; \quad (17)$$

$$U|_{\partial G} = \Phi,$$

где коэффициенты $\bar{a}_{ij}(\bar{x})$, $\bar{b}_i(\bar{x})$, ... получаются усреднением a_{ij} , ... с помощью следующей процедуры.

Пусть $\mu_T^{\bar{x}}(\bar{y}) \geq 0$ — $(T, 1)$ -периодическое (см. разд. 1) решение уравнения

$$\nabla_i \nabla_j (a_{ij}(\bar{x}, \bar{y}) \mu_T^{\bar{x}}) = 0,$$

отвечающее $(T, 1)$ -периодическому продолжению коэффициентов $a_{ij}(\bar{x}, \bar{y})$ с «замороженным» аргументом $\bar{x}$ (при необходимости a_{ij} изменяются по формулам (12) так, чтобы сделать периодическое продолжение возможным). Среднее функции g определяется предельным переходом по формулам

$$\bar{g}(\bar{x}) = G_2(\bar{x})/G_1(\bar{x}); \quad G_1(\bar{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E} T^{-1} \int \int_{[0, T] \times [0, 1]^n} \mu_T^{\bar{x}}(\bar{y}) d\bar{y};$$

$$G_2(\bar{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E} T^{-1} \int \int_{[0, T] \times [0, 1]^n} g(\bar{x}, \bar{y}) \mu_T^{\bar{x}}(\bar{y}) d\bar{y}.$$

Пределы, участвующие в определении средних $\bar{a}_{ij}(\bar{x})$, $\bar{b}_i(\bar{x})$, ..., существуют вследствие леммы 3 и замечания 1 в разделе 2. Усредненные коэффициенты при $\bar{x} \in \bar{G}$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α . Поэтому усредненная задача Дирихле (17) также однозначно разрешима в классе $C^{2+\alpha}$.

При наложенных выше ограничениях справедлива

Теорема. 1. При $\varepsilon \rightarrow 0$ случайная величина

$$\zeta_\varepsilon = \sup_{\bar{x} \in \bar{G}} |u_\varepsilon(\bar{x}) - U(\bar{x})| \rightarrow 0$$

по вероятности.

Доказательство основывается на представлении решения (ср. [2, 3, 6, 10]) в форме $u_\varepsilon = U + \varepsilon^2 \varphi(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) + w_\varepsilon$, где быстроосциллирующая поправка φ выбирается так, чтобы устранить главный член правой части уравнения для w_ε , а U — решение усредненной задачи.

В случае, когда быстроосциллирующими оказываются только коэффициенты a_{ij} , поправку φ можно построить, например, следующим способом. Пусть $\zeta_k(\bar{x})$, $0 \leq \zeta_k(\bar{x}) \leq 1$ — финитные гладкие функции, составляющие разбиение единицы G ($\sum \zeta_k = 1$), причем носители ζ_k имеют диаметр не более εT ($T = T(\varepsilon)$ будет выбрано позже), кратность пересечения носителей ζ_k ограничена постоянной, не зависящей от ε , и производные l -го порядка допускают оценку $|D^{(l)} \zeta_k| \leq c(\varepsilon T)^{-l}$.

Пусть $\bar{x}_k$ — точка носителя ζ_k , $\widehat{\varphi}_{lm}^{(k)}(\bar{y})$ — описанная в лемме 4 $(2T, 1)$ -периодическая функция, построенная по $(2T, 1)$ -периодическому продолжению коэффициентов $a_{ij}(\bar{x}_k, \bar{y})$, $g(\bar{y}) = -a_{lm}(\bar{x}_k, \bar{y})$ (может быть, измененных по (12)) с «отрезка» $[a, a + 2T] \times [0, 1]^n$, основание которого покрывает проекцию носителя $\zeta_k(\bar{x}/\varepsilon)$ на ось $y^{(0)}$.

В качестве поправки φ можно использовать функцию

$$\varphi = \sum_k \zeta_k(\bar{x}) \widehat{\varphi}_{lm}^{(k)}(\bar{x}/\varepsilon) D_l D_m U(\bar{x}_k).$$

Действительно, при выполнении условий

$$\varepsilon^2 TN + \varepsilon N + \varepsilon N^{1+\kappa_1} T^{1-\kappa_1} \rightarrow 0 \quad (18)$$

выражение $b_i D_i(\varepsilon^2 \varphi) + c_i \varepsilon^2 \varphi$, содержащее только функцию φ и ее производные первого порядка, с вероятностью 1 стремится к нулю равномерно по $\bar{x} \in \bar{G}$.

Главный член $L_\varepsilon(\varepsilon^2 \varphi)$ представляется в виде

$$\begin{aligned} \sum_k \zeta_k a_{ij}(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) \nabla_i \nabla_j \widehat{\varphi}_{lm}^{(k)}(\bar{x}/\varepsilon) D_l D_m U(\bar{x}_k) + r_1 = \\ = \sum_k \zeta_k a_{ij}(\bar{x}_k, \bar{x}/\varepsilon) \nabla_i \nabla_j \widehat{\varphi}_{lm}^{(k)}(\bar{x}/\varepsilon) D_l D_m U(\bar{x}_k) + r, \end{aligned}$$

где с вероятностью 1

$$|r| \leq c \{N/T + N^{1+\kappa_1}/T^{\kappa_1} + (\varepsilon T)^\alpha N^{1+\kappa_1} T^{1-\kappa_1}\}. \quad (19)$$

При этом если $\mathfrak{N}(\varepsilon)$ — число ζ_k в разбиении единицы G , то с вероятностью не менее

$$1 - c\mathfrak{N}(\varepsilon)(T/N) \exp(-(N/S)^{1/4} \ln^{-1/2} N/S), \quad (20)$$

при всех k ($S < N < T$) остаток r_k в представлении

$$a_{ij}(\bar{x}_k, \bar{x}/\varepsilon) \nabla_i \nabla_j \widehat{\varphi}_{lm}^{(k)}(\bar{x}/\varepsilon) = -a_{lm}(\bar{x}_k, \bar{x}/\varepsilon) + \bar{a}_{lm}(\bar{x}_k) + r_k(\bar{x})$$

допускает оценку

$$\sup_{k, \bar{x}} |r_k(\bar{x})| \leq c [S^{-1/2} + (S/N)^{1/4}] + |\bar{a}_{lm}(\bar{x}_k) - \mathbf{E} \gamma^{(2)}(S)/\mathbf{E} \gamma^{(1)}(S)|, \quad (21)$$

где, как отмечалось в замечании 1 (см. разд. 2), последний член стремится к нулю равномерно по $\bar{x} \in G$. Кроме того, очевидно, $\mathfrak{N}(\varepsilon) \leq c(\varepsilon T)^{-(n+1)}$.

Таким образом, с учетом гладкости коэффициентов исходной задачи по $\bar{x}$, (14) и усредненного решения U при

$$\begin{aligned} S^{-1} + S/N + N/T + N^{1+\kappa_1} T^{-\kappa_1} + \varepsilon^\alpha T^{1+\alpha-\kappa_1} N^{1+\kappa_1} + \\ + (\varepsilon T)^{-n-1} (T/N) \exp[-(N/S)^{1/4} \ln^{-1/2} (N/S)] \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (22)$$

остаток в соотношении

$$a_{ij}(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) D_i D_j(\varepsilon^2 \varphi) = -(a_{lm}(\bar{x}, \bar{x}/\varepsilon) - \bar{a}_{lm}(\bar{x})) D_l D_m U(\bar{x}) + \rho_\varepsilon$$

удовлетворяет соотношению $\sup_{\bar{x}} |\rho_\varepsilon(\bar{x})| \rightarrow 0$ по вероятности.

При одновременном выполнении (18), (22) уравнение для невязки w_ε (предполагается, что младшие члены не имеют быстроосциллирующих коэффициентов) принимает вид

$$L_\varepsilon w_\varepsilon = \bar{f} - a_{ij} D_i D_j U - \bar{b}_i D_i U - \bar{c} U + (a_{lm} - \bar{a}_{lm}) D_l D_m U + \rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon.$$

На границе $\sup_{\bar{x}} |w_\varepsilon| \leq c \varepsilon^2 N T$ стремится к нулю с вероятностью 1. Поэтому $\sup_{\bar{G}} |w_\varepsilon| \rightarrow 0$ по вероятности.

Остается заметить, что (18), (22) можно удовлетворить, выбирая $T \sim \varepsilon^{-\delta}$, $N \sim T^\delta$, $S \sim N^\delta$, где δ — малое положительное число.

В случае, когда коэффициенты при младших производных и свободный член также быстро осциллируют, в поправку добавляются члены вида

$$\sum \zeta_k \widehat{\varphi}_{bl}^{(k)} D_l U(\bar{x}_k), \sum \zeta_k \widehat{\varphi}_c^{(k)} U(\bar{x}_k), \sum \zeta_k \widehat{\varphi}^{(k)},$$

где $\widehat{\varphi}$ строятся по $g = b_i, \dots$

Чтобы завершить доказательство теоремы 1, достаточно заметить, что $\sup_{\bar{x} \in G} |\varepsilon^2 \varphi| \rightarrow 0$ с вероятностью 1.

Аналогично доказывается

Теорема 2. При $\varepsilon \rightarrow 0$ решение краевой задачи

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = L_\varepsilon u_\varepsilon + f_\varepsilon; (\bar{x}, t) \in G \times [0, \tau];$$

$$\lim_{t \downarrow 0} u_\varepsilon(\bar{x}, t) = \Phi_1; u_\varepsilon|_{\partial G} = 0$$

сближается с решением усредненной задачи

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L_0 U + \bar{f}; U|_{t=0} = \Phi_1; U|_{\partial G} = 0$$

в том смысле, что $\sup_{(t, \bar{x})} |u_\varepsilon - U| \rightarrow 0$ по вероятности.

4. Усреднение стохастических дифференциальных уравнений

Результаты предыдущего раздела можно применить к изучению предельного поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ распределений в пространстве непрерывных функций, порожденных решениями стохастических дифференциальных уравнений вида

$$dx_\varepsilon^{(i)}(t) = A_j^{(i)}(\bar{x}_\varepsilon(t), \bar{x}_\varepsilon(t)/\varepsilon) dw^{(j)}(t) + b^{(i)}(\bar{x}_\varepsilon(t), \bar{x}_\varepsilon(t)/\varepsilon) dt; x_\varepsilon^{(i)}(0) = x^{(i)},$$

где повторение индексов подразумевает суммирование и $\bar{x}_\varepsilon = \{\bar{x}_\varepsilon^{(0)}, \dots, \bar{x}_\varepsilon^{(n)}\}$; независимые в совокупности винеровские процессы $w^{(i)}$, $i = 0, \dots, n$, не зависят от случайных коэффициентов $A_j^{(i)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)$, $b^{(i)}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)$; коэффициенты $A_j^{(i)}$, $b^{(i)}$ периодичны по $y^{(i)}, \dots, y^{(n)}$ и удовлетворяют оговоренным в разделе 2 условиям перемешивания по $y^{(0)}$. Кроме того, коэффициенты $A_j^{(i)}$, $b^{(i)}$ — ограниченные гладкие функции $\bar{y}$, причем $a_{ij} = A_k^{(i)} A_k^{(j)}$ удовлетворяет условию сильной эллиптичности (1); как функции $\bar{x}$ эти коэффициенты и их производные по $y^{(j)}$ удовлетворяют равномерному по $\bar{y}, \omega$ условию Липшица.

Из предположенной ограниченности коэффициентов вытекает оценка

$$M|\bar{x}_\varepsilon(t+h) - \bar{x}_\varepsilon(t)|^4 \leq ch^2$$

с вероятностью 1 (M далее означает условное среднее при условии, что фиксированы случайные коэффициенты $A_j^{(i)}$, $b^{(i)}$). Эта оценка показывает (см., например, [18], теорема 2 § 2, гл. IX), что с вероятностью 1 семейство распределений, порожденных в пространстве непрерывных функций процессами $\bar{x}_\varepsilon$, слабо компактно.

Пусть G — любая ограниченная область с гладкой границей, φ — финитная в G гладкая функция, τ_ε — момент первого выхода из G . Тогда из результатов раздела 3 и [19] следует, что для всех x из G

$$M_{\bar{x}} \varphi(\bar{x}_\varepsilon(t)) I_{\{\tau_\varepsilon < t\}} \rightarrow U(\bar{x})$$

по вероятности, где $U(\bar{x})$ — решение усредненной краевой задачи

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2} \bar{a}_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} + \bar{b}^{(i)} \frac{\partial U}{\partial x^{(i)}};$$

$$U|_{t=0} = \varphi(\bar{x}); U|_{\partial G} = 0.$$

Отсюда легко заключить, что для любого $t > 0$, $\bar{x} \in R^{n+1}$ распределение $\bar{x}_\varepsilon(t)$ в R^{n+1} по вероятности сходится к распределению $\bar{x}_0(t)$ — решения

стохастического уравнения

$$d\bar{X}_0^{(i)}(t) = \left(\sqrt{a} \right)_{ij} dw^{(j)}(t) + \bar{b}^{(i)} dt,$$

где $\sqrt{a}$ — положительно определенная симметричная матрица, такая, что $\sqrt{a} \sqrt{a} = \bar{a}$. Сходимость распределений по вероятности означает:

$$\mathfrak{L}(\bar{F}_\varepsilon^{x,t}, \bar{F}_0^{x,t}) \rightarrow 0 \quad (23)$$

по вероятности, где $\mathfrak{L}$ — расстояние Леви — Прохорова между распределениями $\bar{x}_\varepsilon(t) \bar{F}_\varepsilon$ и $\bar{x}_0(t) \bar{F}_0$ в R^{n+1} .

Выделяя из произвольной последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$ подпоследовательность $\varepsilon_{n'}$, обладающую тем свойством, что с вероятностью 1

$$\mathfrak{L}(\bar{F}_{\varepsilon_{n'}}^{x_k, t_l}, \bar{F}_0^{x_k, t_l}) \rightarrow 0$$

для любого $\bar{x}_k \in \bar{X}$, $t_l \in \bar{T}$, где $\bar{X}$, $\bar{T}$ — счетные всюду плотные множества в R^{n+1} , $R_+ = [0, \infty)$, можно, пользуясь установленной слабой компактностью с вероятностью 1 семейства распределений $x_\varepsilon(t)$ (в $C_{[0,1]}$, $t < \infty$), проверить, что $\mathfrak{L}_\pi(\mathfrak{F}_{\varepsilon_{n'}}^t, \mathfrak{F}_0^t) \rightarrow 0$ с вероятностью 1, где $\mathfrak{L}_\pi$ — расстояние Леви — Прохорова между распределениями в $C_{[0,1]}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{L}_\pi(\mathfrak{F}_\varepsilon^t, \mathfrak{F}_0^t) \rightarrow 0$ по вероятности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фрейдлин М. И. Задача Дирихле для уравнений с периодическими коэффициентами, зависящими от малого параметра. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, № 1, с. 133—139.
2. Козлов С. М. Осреднение дифференциальных операторов с почти периодическими быстроосциллирующими коэффициентами. — Мат. сб., 1978, т. 107 (149), № 2 (10), с. 199—217.
3. Бахвалов Н. С. Осредненные характеристики тел с периодической структурой. — Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 5, с. 1046—1048.
4. Бахвалов Н. С. Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстроосциллирующими коэффициентами. — Докл. АН СССР, 1975, т. 221, № 3, с. 516—519.
5. Бахвалов Н. С., Злотник А. А. Коэффициентная устойчивость дифференциальных уравнений и осреднение уравнений со случайными коэффициентами. — Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 4, с. 745—748.
6. Бердичевский В. Л. Пространственное осреднение периодических структур. — Докл. АН СССР, 1975, т. 222, № 3, с. 565—567.
7. Козлов С. М. Осреднение случайных структур. — Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 5, с. 1016—1019.
8. Юринский В. В. О применении метода усреднения к эллиптическим уравнениям со случайными коэффициентами. — В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск, Наука, 1978, с. 330—339.
9. Юринский В. В. Междунар. симпозиум по стохастическим дифференциальным уравнениям. Тез. докл. Вильнюс, 1978, с. 54—56.
10. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Sur quelques phénomènes asymptotiques stationnaires. — CR Ac. Sci., Ser. A, 1975, v. 281, N 2—3, p. A89—A94.
11. Хасьминский Р. З. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация задачи Коши для параболических уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, № 2, с. 196—214.
12. Aronson D. G., Serrin J. Local behaviour of solutions of quasilinear parabolic equations. — Arch. Ration. Mech. and Anal., 1967, v. 25, N 2, p. 81—122.
13. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Изд. 2, перераб. М.: Наука, 1973. 576 с.
14. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
15. Морен К. Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965. 570 с.
16. Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типа. М.: Наука, 1971. 288 с.
17. Сунклодас Й. Некоторые оценки для распределений сумм слабо зависимых случайных величин. — Лит. мат. сб., 1978, т. 18, № 1, с. 211—214.
18. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. Изд. 2, перераб. М.: Наука, 1977. 568 с.
19. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963. 860 с.