ЧАСТЬ III

СВОЙСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

ОБ ОТЫСКАНИИ В ЯВНОМ ВИДЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУПРЕМУМА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ НА ЦЕПИ МАРКОВА

К. АРНДТ

1. Введение

Пусть $\{\varkappa_n\}_{n\geqslant 0}$ — однородная неприводимая нециклическая цепь Маркова с конечным множеством состояний $\mathcal{N}=\{1, 2, \ldots, N\}$, с матрицей переходных вероятностей $P=\|p_{kj}\|_{k,\,j\in N}$ и с однозначно определенным стационарным распределением $\pi=\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N\}$, $\pi_k>0$, $k\in\mathcal{N}$. Далее, пусть $\{\xi_{kj}^n\}_{k,j\in\mathcal{N}}^{n\geqslant 1}$ — независимое от $\{\varkappa_n\}$ семейство независимых случайных величин, одинаково распределенных в каждой последовательности $\{\xi_{kj}^n\}^{n\geqslant 1}$, $F_{kj}(x)=P\left(\xi_{kj}^n\leqslant x\right), k, j\in\mathcal{N}$. Рассмотрим двумерный марковский процесс $\{Y_n, \varkappa_n\}_{n\geqslant 0}$, эволюция которого задается начальным значением $\{0, \varkappa_0\}$ и соотношением $Y_{n+1}=Y_n+\xi^{n+1}_{\varkappa_n\varkappa_{n+1}}$. Распределение $\{Y_n, \varkappa_n\}_{n\geqslant 0}$ будет полностью определено, если заданы распределение $\varkappa_0$ и матрица $A(\mu)=\left\|p_{kj}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\mu x}dF_{kj}(x)\right\|$. Назовем $\{Y_n\}_{n\geqslant 0}$ случайным блужданием на цепи Маркова $\{\varkappa_n\}$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\mathrm{M}_\pi Y_1\equiv\sum\limits_{k,j\in\mathcal{N}}\pi_k p_{kj}\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\,dF_{kj}(x)<0$. Тогда случайная величина $\bar{Y}\equiv\sup\limits_{n\geqslant 0}Y_n$ конечна с вероятностью 1 при любом начальном состоянии $\varkappa_0$ цепи $\{\varkappa_n\}$ [1].

Пусть V_N — кольцо квадратных матриц порядка N, элементы которых являются преобразованиями Фурье — Стилтьеса от непрерывных справа функций ограниченной вариации на вещественной оси. Обозначим через V_{N+} (V_{N-}) подкольцо таких матриц $\left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\mu x}db_{kj}(x)\right\|\in V_N$, для которых $\operatorname*{Var}\limits_{(-\infty,0]}b_{kj}(x)=0$ $\left(\operatorname*{Var}\limits_{(0,\infty)}b_{kj}(x)=0\right)$, $k, j\in\mathcal{N}$.

Пусть I обозначает единичную матрицу порядка N.

Определение. Матрица $I-B\in V_N$ допускает правую факторизацию (п. ф.), если существуют элементы $B_-\in V_{N-}$ и $B_+-I\in V_{N+}$ такие, что $I-B=B_-B_+$. Если при этом существуют обратные элементы $(B_-)^{-1}\in V_{N-}$, $(B_+)^{-1}-I\in V_{N+}$, то говорят, что $I-B$ допускает правую каноническую факторизацию (п. к. ф.). Элемент $B_+(B_-)$ называется положительной (отрицательной) компонентой факторизации. Для краткости в дальнейшем будем писать $P_k(\cdot)$ вместо $P(\cdot\mid\varkappa_0=k)$ и $M_k(\cdot)$ вместо $M(\cdot\mid\varkappa_0=k)$, $k\in\mathcal{N}$.

Утверждение 1 (см. [4]). *Матрица $I-A(\mu)\in V_N$ допускает п. ф.*

$$I-A(\mu)=A_-(\mu)A_+(\mu), \tag{1}$$

где компоненты имеют следующие представления:

$$A_+(\mu)=I-\left\|\int\limits_0^{\infty}e^{i\mu x}da_{kj+}(x)\right\|,\ a_{kj+}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}P_k\left(\bar{y}_{n-1}\leqslant 0,\ Y_n\leqslant x,\ \varkappa_n=j\right);$$

$$A_-(\mu) = I - \left\| \int_{-\infty}^{0} e^{i\mu x} da_{kj-}(x) \right\|, \quad a_{kj-}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_k\left(\bar{y}_{n-1} < Y_n \leqslant x, \varkappa_n = j\right),$$

где $\bar{y}_n = \max\limits_{1 \leqslant m \leqslant n} Y_m$, $n \geqslant 1$, $\bar{y}_0 = -\infty$.

Заметим, что при $\operatorname{Im}\mu < 0$ $\det A_-(\mu) \neq 0$, и в силу условия $M_\pi Y_1 < 0$ при $\operatorname{Im}\mu \geqslant 0$ $\det A_+(\mu) \neq 0$.

Утверждение 2 (см. [1]). *При* $\operatorname{Im}\mu \geqslant 0$

$$\left\| \mathbf{M}_k e^{i\mu \bar{Y}} \right\|_{k \in \mathcal{N}} = (A_+(\mu))^{-1} A_+(0)\,\mathbf{1}, \tag{2}$$

где $\mathbf{1}$ — *вектор-столбец порядка* N, *элементы которого суть единицы.*

Возникает вопрос о возможности найти из формулы (2) распределение $\bar{Y}$ в явном виде, если задана матрица $A(\mu)$. Соотношения, определяющие компоненты факторизации (1) (см. Утверждение 1), вообще говоря, не могут служить эффективным средством отыскания матриц $A_+(\mu)$, $(A_+(\mu))^{-1}$. Обозначим через

$$F(x) = \| p_{kj} F_{kj}(x) \|_{k,j \in \mathcal{N}} \tag{3}$$

матрицу условных распределений, полностью определяющую матрицу $A(\mu)$, и зададим метрику ρ следующим образом. Если $F^{(1)}(x) = \| p_{kj}^{(1)} F_{kj}^{(1)}(x) \|$ и $F^{(2)}(x) = \| p_{kj}^{(2)} F_{kj}^{(2)}(x) \|$, то

$$\rho\left(F^{(1)}, F^{(2)}\right) = \max_{k,j \in \mathcal{N}} L\left(F_{kj}^{(1)}, F_{kj}^{(2)}\right) + \max_{k,j \in \mathcal{N}} \left| p_{kj}^{(1)} - p_{kj}^{(2)} \right|,$$

где $L(\cdot, \cdot)$ — расстояние по Леви.

В предлагаемой работе рассматриваются два вопроса:

1) указывается класс $\mathcal{R}$ матриц вида (3) всюду плотный в V_N в смысле ρ-сходимости на множестве всех матриц вида (3) такой, что для $F \in \mathcal{R}$ матрица $A_+(\mu)$ может быть найдена в явном виде. Теорему о непрерывной зависимости $A_+(\mu)$ от $A(\mu)$, дополняющую этот подход, можно найти в работе [3];

2) дается применение результатов первой части в условиях одной системы массового обслуживания. Для случая $N = 1$, который соответствует случайному блужданию с независимыми одинаково распределенными слагаемыми, более сильные результаты получены А. А. Боровковым [2].

2. Об условиях явной разрешимости факторизации

Нам потребуются следующие условия о матрицах $F(x)$ (или $A(\mu)$):

A_1) распределения $F_{kj}(x)$ не имеют сингулярных компонент и хоть одно из этих распределений, соответствующее $p_{kj} > 0$, имеет абсолютно непрерывную компоненту;

A_2) $\mathrm{M}\left|\xi_{kj}^n\right| < \infty$ для всех $k, j \in \mathcal{N}$;

A_3) все распределения $F_{kj}(x)$ являются абсолютно непрерывными.

Класс $\mathcal{R}$ матриц вида (3) описывается следующим образом: $F \in \mathcal{R}$, если выполнены условия A_2, A_3 и хоть одна из матриц $A^{\pm}(\mu)$ в разложении $A(\mu) = A^+(\mu) + A^-(\mu)$,

$$A^+(\mu) = \left\| p_{kj} \int_0^{\infty} e^{i\mu x} dF_{kj}(x) \right\|; \quad A^-(\mu) = \left\| p_{kj} \int_{-\infty}^{0} e^{i\mu x} dF_{kj}(x) \right\|,$$

является рациональной матрицей (т. е. матрицей, элементы которой — рациональные функции).

Для рациональности, скажем, $A^+(\mu)$ необходимо и достаточно, чтобы $1-F_{kj}(x)$ при $x>0$ были представимы в виде

$$1-F_{kj}(x)=\sum_m P_{kj,m}(x)\exp\{-\alpha_{kj,m}x\}, \qquad (4)$$

где $P_{kj,m}(x)$ — полиномы от x; $\alpha_{kj,m}>0$; $k, j\in\mathcal{N}$ (см. [2, с. 139]). Следуя [2], выражения вида (4) будем называть экспоненциальными полиномами.

Утверждение 3. *Матрицами из $\mathfrak{R}$ можно в смысле ρ-сходимости приблизиться к любой матрице вида (3).* Это непосредственно следует из соответствующего утверждения для случая $N=1$ в [2, с. 139, 140].

Допустим, что наряду с (1) имеет место п. ф. матрицы $I-A(\mu)$:

$$\left.\begin{aligned} &I-A(\mu)=B_-(\mu)B_+(\mu),\\ &B_+(i\infty)=I,\ \det B_-(\mu)\neq 0 \text{ при } \operatorname{Im}\mu<0,\\ &\qquad\qquad \det B_+(\mu)\neq 0 \text{ при } \operatorname{Im}\mu\geqslant 0.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия A_1, A_2. Тогда факторизация* (5) *единственна и $B_\pm(\mu)=A_\pm(\mu)$.* Этот факт является простым следствием из теоремы 2 в [3].

Теорема 1. *Для того чтобы $A_+(\mu)$ была рациональной матрицей, необходимо, а если выполнены условия A_2 и A_3, то достаточно, чтобы $A^+(\mu)$ была рациональной матрицей. Если при этом $A^+(\mu)=\left\|\dfrac{q^+_{kj}(\mu)}{r^+_{kj}(\mu)}\right\|$,* где *$\dfrac{q^+_{kj}(\mu)}{r^+_{kj}(\mu)}$ суть несократимые отношения полиномов, $k, j\in\mathcal{N}$, $r(\mu)$ — наименьшее общее кратное (н. о. к.) всех $r^+_{kj}(\mu)$, R — степень полинома $r(\mu)$, то функция* $\det\{(I-A(\mu))r(\mu)\}$ *имеет в области* $\operatorname{Im}\mu<0$ *ровно RN нулей и $A_+(\mu)=(r(\mu))^{-1}B(\mu)$, где $B(\mu)$ — матрица полиномов (т. е. матрица, элементы которой являются полиномами). Способы отыскания матрицы $B(\mu)$ содержатся в доказательстве.*

Доказательство. Необходимость. Из тождества (1) следует, что при $x>0$

$$p_{kj}(1-F_{kj}(x))=(a_{kj+}(\infty)-a_{kj+}(x))-$$
$$-\sum_{m=1}^{N}\int_{-\infty}^{0}da_{km-}(t)\{a_{mj+}(\infty)-a_{mj+}(x)\}. \qquad (6)$$

Остается лишь заметить, что по предположению правая сторона (6) при всех $k, j\in\mathcal{N}$ есть экспоненциальный полином, тем самым $p_{kj}(1-F_{kj}(x))$ при $x>0$ является экспоненциальным полиномом. Стало быть,

$$A^+(\mu)=\left\|-p_{kj}\int_0^\infty e^{i\mu x}d(1-F_{kj}(x))\right\|$$

— рациональная матрица. Доказательство достаточности разобьем на несколько этапов.

1. Если $A^+(\mu)\equiv 0$, то $A_+(\mu)\equiv I$ и теорема доказана. Пусть теперь $A^+(\mu)\not\equiv 0$. Тогда матрица $A^+(\mu)$ допускает представление $A^+(\mu)=(r(\mu))^{-1}\cdot\|q_{kj}(\mu)\|$, где $q_{kj}(\mu)$ — полиномы. **При сделанных предположениях матрица**

$$\mathcal{V}(\mu)=J(\mu)\cdot(I-A(\mu)), \qquad (7)$$

где

$$J(\mu)=\left\|\frac{i\mu+1}{i\mu}\delta_{1k}+\delta_{kj}(1-\delta_{1j})\right\|\cdot\operatorname{diag}(\pi_1,\ldots,\pi_N),$$

δ_{kj} — символ Кронекера, допускает п. к. ф. с компонентами $J(\mu)A_-(\mu)$ и

$A_+(\mu)$ (см. теорему 2 в [3]). Определим для $G \in V_N$ $\operatorname{ind} G \equiv \frac{1}{2\pi} \times \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} d \arg \det G(\mu)$. Так как $\operatorname{ind}(I - A(\mu)) = 0$ (см. [4]) и $\operatorname{ind} J(\mu) = 0$, то $\operatorname{ind} \mathscr{V} = 0$. Обозначим множители в произведении

$$\mathscr{V}(\mu) = \{I(\mu)[r(\mu)I - \|q_{kj}(\mu)\| - r(\mu)A^-(\mu)](i\mu + 1)^{-R}\}\left\{\frac{(i\mu+1)^R}{r(\mu)} I\right\}$$

через $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$. Тогда

$$\operatorname{ind} \mathscr{V}_1 = -RN. \tag{8}$$

Действительно, так как все нули $r(\mu)$ лежат в области $\operatorname{Im}\mu < 0$, то $\mathscr{V}_2 - I \in V_{N+}$, $\det \mathscr{V}_2 - 1 \in V_{1+}$. Кроме того, $\det \mathscr{V}_2(\mu)$ имеет в области $\operatorname{Im}\mu > 0$ RN нулей и $\det \mathscr{V}_2(\mu) \to i^{R \cdot N}$ при $|\mu| \to \infty$. Это значит, что $\operatorname{ind} \mathscr{V}_2 = R \cdot N$. Утверждение (8) тогда следует из равенства $\operatorname{ind} \mathscr{V} = \operatorname{ind} \mathscr{V}_1 + \operatorname{ind} \mathscr{V}_2$.

2. Покажем теперь, что $\mathscr{V}_1(\mu) \in V_{N-}$, $\det \mathscr{V}_1(\mu) \in V_{1-}$ и $\det \mathscr{V}_1(\mu)$ имеет в области $\operatorname{Im}\mu < 0$ ровно $R \cdot N$ нулей. Разложим $A^-(\mu)$ в виде $A^-(\mu) = A^-(0) + (J(\mu))^{-1}D(\mu)$. Здесь $D(\mu) \equiv -J(\mu)\{A^-(0) - A^-(\mu)\} \in V_{N-}$. В самом деле,

$$J(\mu) = (I + Z(\mu))T \operatorname{diag}(\pi_1, \ldots, \pi_N),$$

где

$$T = \|\delta_{kj} + \delta_{1k}(1 - \delta_{1j})\|; \; Z(\mu) = \left\|\frac{-i}{\mu} \delta_{1k}\delta_{1j}\right\|.$$

Умножение слева на $(I + Z(\mu))$ меняет в матрице $T \operatorname{diag}(\pi_1, \ldots \ldots, \pi_N)\{A^-(0) - A^-(\mu)\}$ лишь первую строку, элементы которой суть

$$-\sum_{m=1}^{N} \pi_m p_{mj} \int\limits_{-\infty}^{0} \left(e^{i\mu x} - 1\right) dF_{mj}(x) = i\mu \int\limits_{-\infty}^{0} e^{i\mu x} \left(\sum_{m=0}^{N} \pi_m p_{mj} F_{mj}(x)\right) dx, \; j \in \mathscr{N},$$

так что в первой строке матрицы $D(\mu)$ стоят элементы

$$(i\mu + 1) \int\limits_{-\infty}^{0} e^{i\mu x} \left(\sum_{m=1}^{N} \pi_m p_{mj} F_{mj}(x)\right) dx, \qquad j \in \mathscr{N},$$

которые при $\mu \to 0$ стремятся к пределам

$$\sum_{m=1}^{N} \pi_m p_{mj} \int\limits_{-\infty}^{0} F_{mj}(x)\, dx = -\sum_{m=1}^{N} \pi_m p_{mj} M\left(\xi_{mj}^n\right)^- < \infty.$$

Стало быть, $D(\mu) \in V_{N-}$.

Покажем, что элементы матрицы $J(\mu)\{r(\mu)I - \|q_{kj}(\mu)\| - r(\mu)A^-(0)\}$ суть полиномы. Умножение слева на $I + Z(\mu)$ меняет в матрице полиномов

$$T \operatorname{diag}(\pi_1, \ldots, \pi_N)\{r(\mu)I - \|q_{kj}(r)\| - r(\mu)A^-(0)\} \tag{9}$$

лишь первую строку, где при $\mu = 0$ стоят нули, так как $\pi(I - A(0)) = \pi(I - P) = 0$. Поэтому полиномы, стоящие в первой строке матрицы (9), делимы на $i\mu$.

Матрица $\mathscr{V}_1(\mu)$ допускает представление

$$\mathscr{V}_1(\mu) = J(\mu)\{r(\mu)I - \|q_{kj}(\mu)\| - r(\mu)A^-(0)\} \quad (i\mu + 1)^{-R} - D(\mu)r(\mu)(i\mu + 1]^{-R},$$

так что $\mathscr{V}_1(\mu) \in V_{N-}$ и $\det \mathscr{V}_1(\mu) \in V_{1-}$.

3. Обозначим $A^-(\mu) = \|f_{kj}^-(\mu)\|$. Так как при $|\mu| \to \infty$ и $\operatorname{Im}\mu \leq 0$, $|f_{kj}^-(\mu)| \leq p_{kj}$,

$$\det \mathscr{V}_1(\mu) \sim \prod_{m=1}^{N} \pi_m \det\left(I - A^-(\mu)\right) i^{-R \cdot N}$$

и существует пара индексов (k_0, j_0) такая, что $\left|f_{k_0j_0}^{-}(\mu)\right| < p_{k_0j_0}$, то из $\operatorname{ind}\mathscr{V}_1 = -RN$ следует, что $\det\mathscr{V}_1(\mu)$ имеет в области $\operatorname{Im}\mu < 0$ ровно RN нулей, которые мы обозначим $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{RN}$. Очевидно, что функция $\det\{(I-A(\mu))r(\mu)\}$ имеет в области $\operatorname{Im}\mu < 0$ те же нули, что и $\det\mathscr{V}_1(\mu)$.

4. Так как $\det\mathscr{V}_1(\mu_1) = 0$, то существует вектор-столбец $c_1 = (c_{11}, \ldots, c_{1N})^T \neq 0$ такой, что $\mathscr{V}_1(\mu_1)c_1 = 0$. Выбираем индекс j_1 такой, что $c_{1j_1} \neq 0$, положим

$$a_1(\mu) = \{c_{1j_1}(\mu-\mu_1)\}^{-1}\mathscr{V}_1(\mu)c_1$$

и заменим в $\mathscr{V}_1(\mu)$ j_1-й столбец на $a_1(\mu)$. Находим новую матрицу $B_1(\mu) = \mathscr{V}_1(\mu)C_1(\mu)$, где $C_1(\mu)$ получена из I заменой j-го столбца на вектор $\{c_{1j_1}(\mu-\mu_1)\}^{-1}c_1$. Функция $\det B_1(\mu)$ имеет в области $\operatorname{Im}\mu<0$ ровно $RN-1$ нулей. Далее, для некоторого вектора-столбца $c_2 = (c_{21}, \ldots, c_{2N})^T \neq 0$ имеем $B_1(\mu_2)c_2 = 0$ и можем найти матрицу $C_2(\mu)$ из I заменой j_2-го столбца на вектор $\{c_{2j_2}(\mu-\mu_2)\}^{-1}c_2$, где j_2 выбрано так, чтобы $c_{2j_2} \neq 0$. Положим $B_2(\mu) = B_1(\mu)C_2(\mu)$. Продолжая эту конструкцию, получим, наконец, матрицу $B_{RN}(\mu) = \mathscr{V}_1(\mu)C_1(\mu)\ldots C_{RN}(\mu)$, для которой $\det B_{RN}(\mu)$ в области $\operatorname{Im}\mu < 0$ не имеет нулей, $B_{RN}(\mu) \in V_{N-}$.

5. Положим $B(\mu) = \{C_1(\mu)\ldots C_{RN}(\mu)\}^{-1}$. Имеем $(r(\mu))^{-1}B(\mu) - I \in V_{N+}$, $\det\{(r(\mu))^{-1}B(\mu)\} - 1 \in V_{1+}$, $\det\{(r(\mu))^{-1}B(\mu) \to 1$ при $|\mu| \to \infty$. Вид матрицы $(r(\mu))^{-1}B(\mu)$ зависит от нумерации нулей функции $\det\mathscr{V}_1(\mu)$ при $\operatorname{Im}\mu < 0$ и от выбора индексов j_n в конструкции матриц $C_n(\mu)$. В силу леммы 1 можно найти такой набор матриц $C_1(\mu), \ldots, C_{RN}(\mu)$, что $(r(\mu))^{-1}B(\mu) \to I$ при $\mu \to i\infty$, т. е. $(r(\mu))^{-1}B(\mu) = A_+(\mu)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы $A_+(\mu)$ была представима в виде*

$$A_+(\mu) = R(\mu)(I-A(\mu))c,$$

где $R(\mu)$ — рациональная матрица, c — константа, необходимо, а если выполнены условия A_2 и A_3, то и достаточно, чтобы $A^-(\mu)$ была рациональной матрицей. Если при этом $A^-(\mu) = \dfrac{q_{kj}^-(\mu)}{r_{kj}^-(\mu)}$, где $\dfrac{q_{kj}^-(\mu)}{r_{kj}^-(\mu)}$ суть несократимые отношения полиномов, $k, j \in \mathscr{N}$, $r(\mu)$ — н. о. к. всех $r_{kj}^-(\mu)$, R — степень полинома $r(\mu)$, то функция $\det\{(I-A(\mu))r(\mu)\}$ имеет в области $\operatorname{Im}\mu > 0$ ровно $RN-1$ нулей и

$$R(\mu) = B(\mu)\|\delta_{kj}(1-\delta_{1j})\pi_j + \delta_{1k}\pi_j(i\mu)^{-1}\|r(\mu),$$

где $B(\mu)$ — рациональная матрица. Способы отыскания матрицы $B(\mu)$ содержатся в доказательстве.

Доказательство теоремы 2 по схеме весьма близко к доказательству теоремы 1. Приведем поэтому только краткое доказательство.

Необходимость. Из тождества (1) находим при $x < 0$ равенства

$$p_{kj}F_{kj}(x) = a_{kj-}(x) - \sum_{m=1}^{N}\int_0^\infty a_{km-}(x-t)\,da_{mj+}(t), \qquad k, j \in \mathscr{N},$$

из которых, как и в доказательстве теоремы 1, следует утверждение.

Достаточность. Матрица $A^-(\mu)$ допускает представление $A^-(\mu) = (r(\mu))^{-1}\cdot\|q_{kj}(\mu)\|$, где $q_{kj}(\mu)$ — полиномы. Обозначив через $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$ множители в произведении

$$\mathscr{V}(\mu) = \{(r(\mu))^{-1}(i\mu-1)^R I\}\{J(\mu)[r(\mu)I - r(\mu)A^+(\mu) - \|q_{kj}(\mu)\|](i\mu-1)^{-R}\},$$

получим $\operatorname{ind}\mathscr{V}_1=-RN$, $\operatorname{ind}\mathscr{V}_2=RN$. Нетрудно показать, что $\mathscr{V}_2(\mu)-I\in V_{N+}$, $\det\mathscr{V}_2(\mu)-1\in V_{1+}$. Стало быть, по принципу аргумента функция $\det\mathscr{V}_2(\mu)$ имеет в области $\operatorname{Im}\mu>0$ ровно RN нулей $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{RN-1}$. Но $Y\det J(\mu)$ есть единственный нуль $\mu_0=i$, так что $\det\{(I-A(\mu))\times r(\mu)\}$ имеет при $\operatorname{Im}\mu>0$ $RN-1$ нулей $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{RN-1}$. Конструируем так же, как в доказательстве теоремы 1, последовательность рациональных матриц $C_0(\mu)$, $C_1(\mu)$, $\ldots$, $C_{RN-1}(\mu)$ таких, что функция $\det\{B(\mu)C_0(\mu)\mathscr{V}_2(\mu)\}$, где $B(\mu)=C_{RN-1}(\mu)C_{RN-2}(\mu)\ldots C_1(\mu)$, не имеет нулей в области $\operatorname{Im}\mu>0$ и что $R(\mu)(I-A(\mu))-I\in V_{N+}$, $\det\{R(\mu)(I-A(\mu))\}-1\in V_{1+}$, $\det\{R(\mu)(I-A(\mu))c\}\longrightarrow 1$ при $|\mu|\to\infty$, $\operatorname{Im}\mu>0$. В силу леммы 1 матрицы $C_n(\mu)$ можно конструировать так, чтобы $R(\mu)\times(I-A(\mu))c\longrightarrow I$ при $\mu\to i\infty$. Теорема 2 доказана.

3. О явных формулах для распределения стационарного времени ожидания в одной системе массового обслуживания

Рассмотрим случайное блуждание $\{w_n\}_{n\geqslant 0}$, определенное рекуррентной формулой

$$w_n=\max\left(0,\ w_{n-1}+\xi^n_{\varkappa_{n-1}\varkappa_n}\right),\qquad n\geqslant 1,$$

при произвольных начальных условиях $\varkappa_0$ и w_0, где $\xi^n_{kj}=\tau^{s,e}_{kj}-\tau^{e,n}_{kj}$, $\tau^{s,n}_{kj}$ и $\tau^{e,n}_{kj}$ — независимые неотрицательные случайные величины. Величину w_n можно интерпретировать как время, которое ждал с момента прихода до начала своего обслуживания n-й вызов, пришедший в систему $\langle SM, 1, SM, 1\rangle$ с полумарковским потоком вызовов и полумарковским режимом обслуживания. Здесь $\tau^{s,n}_{kj}$ — время обслуживания n-го вызова, $\tau^{e,n}_{kj}$ — время между приходами $(n-1)$-го и n-го вызова при условии, что $\varkappa_{n-1}=k$, $\varkappa_n=j$.

Нетрудно показать, что существует

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\mathcal{N}}\pi_k P_k(w_n\leqslant x)=\sum_{k\in\mathcal{N}}\pi_k P(\tilde{\tilde{Y}}\leqslant x\,|\,\tilde{\varkappa}_0=k),$$

где $\tilde{\tilde{Y}}=\sup\limits_{n\geqslant 0}\tilde{Y}_n$ — супремум частных сумм «обращенного» к $\{Y_n, \varkappa_n\}$ процесса $\{\tilde{Y}_n, \tilde{\varkappa}_n\}_{n\geqslant 0}$ с матрицей эволюции

$$\tilde{A}(\mu)=\operatorname{diag}(\pi_1^{-1},\ldots,\pi_N^{-1})\,A^T(\mu)\operatorname{diag}(\pi_1,\ldots,\pi_N),$$

(см. [4], ср. [2, гл. 1]). Поэтому представляет интерес найти явные формулы для распределения $\tilde{\tilde{Y}}$.

Обозначим

$\tilde{A}(\mu)=\|\tilde{f}_{kj}(\mu)\|$;

$$\tilde{f}_{kj}(\mu)=\mathrm{M}\left(e^{i\mu\xi^n_{jk}},\ \tilde{\varkappa}_1=j\,|\,\tilde{\varkappa}_0=k\right);$$

$$\tilde{f}_{kj+}(\mu)=\mathrm{M}\left(e^{i\mu\tau^{s,n}_{jk}},\ \tilde{\varkappa}_1=j\,|\,\tilde{\varkappa}_0=k\right);$$

$$\tilde{f}_{kj-}(\mu)=\mathrm{M}\left(e^{-i\mu\tau^{e,n}_{jk}},\ \tilde{\varkappa}_1=j\,|\,\tilde{\varkappa}_0=k\right);\qquad k,j\in\mathcal{N}.$$

В силу независимости $\tau^{s,n}_{kj}$ и $\tau^{e,n}_{kj}$ справедливо

$$\tilde{f}_{kj}(\mu)=\tilde{f}_{kj+}(\mu)\,\tilde{f}_{kj-}(\mu),\ \tilde{f}_{kj\pm}(\mu)\in V_{1\pm};\qquad k,j\in\mathcal{N}.$$

Если $\tilde{f}_{kj+}(\mu)$ есть рациональная функция, то существует чисто мнимый полюс μ^{Γ}_{kj} (главный полюс), обладающий тем свойством, что $\operatorname{Im}\mu_{kj,m}\leqslant$

$\leqslant \operatorname{Im} \mu_{kj}^{\Gamma}$, $m = 1, 2, \ldots, r$, где $\mu_{k,j}, \ldots, \mu_{kj,r}$ — все полюсы $\tilde{f}_{kj+}$.

В нашем случае лемма 1 из § 19 в книге [2] имеет следующий вид.

Лемма 2. *Если* $\tilde{f}_{kj+}(\mu) = \dfrac{q_{hj}(\mu)}{r_{kj+}(\mu)}$ *есть несократимое отношение полиномов,* $k, j \in N$, *то* $\tilde{A}^{+}(\mu)$ *является рациональной матрицей*

$$\tilde{A}^{+}(\mu) = \left\| \frac{p_{kj}(\mu)}{r_{kj}^{+}(\mu)} \right\|,$$

где

$$r_{kj}^{+}(\mu) = r_{kj+}(\mu) \left\{ \prod_{m=1}^{l_{kj}} (\mu - \mu_{kj,m}) \right\}^{-1}; \ (\mu_{kj,1}, \ldots, \mu_{kj,l_{kj}})$$

— пересечение множества нулей функции $r_{kj+}(\mu)$ *и множества нулей* $\tilde{f}_{kj-}(\mu)$ *(с учетом кратности); точка* μ_{kj}^{Γ} *этому пересечению не принадлежит.*

Замечание. Модификация примера на с. 148 в книге [2] показывает, что из рациональности $\tilde{A}^{+}(\mu)$ в общем не следует рациональность всех функций $\tilde{f}_{kj+}(\mu)$. Рациональность $\tilde{A}^{+}(\mu)$ влечет за собой рациональность $\tilde{f}_{kj+}(\mu)$, если $\tilde{f}_{kj-}(\mu)$ имеет в нижней полуплоскости конечное число нулей, $k, j \in N$.

В качестве следствия леммы 2 и теоремы 1 мы получим следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* A_2, A_3. *Для того чтобы* $\tilde{A}_{+}(\mu)$ *была рациональной матрицей, достаточно, чтобы рациональными были функции* $\tilde{f}_{kj}(\mu)$, $k, j \in \mathcal{N}$. *Если* $\tilde{f}_{kj+}(\mu) = \dfrac{q_{kj}(\mu)}{r_{kj+}(\mu)}$ *есть несократимое отношение полиномов,*

$$r_{kj}^{+}(\mu) = r_{kj+}(\mu) \left\{ \prod_{m=1}^{l_{kj}} (\mu - \mu_{kj,m}) \right\}^{-1}; \ (\mu_{kj,1}, \ldots, \mu_{kj,l_{kj}})$$

— пересечение множества нулей $r_{kj+}(\mu)$ *и множества нулей* $\tilde{f}_{kj-}(\mu)$ *(с учетом кратности);* $k, j \in \mathcal{N}$; $r(\mu)$ *— н. о. к. всех* $r_{kj}^{+}(\mu)$; R *— степень полинома* $r(\mu)$, *то функция* $\det\{(I - A(\mu))r(\mu)\}$ *имеет в области* $\operatorname{Im} \mu < 0$ *ровно* RN *нулей и* $\tilde{A}_{+}(\mu) = (r(\mu))^{-1}B(\mu)$, где $B(\mu)$ *— матрица полиномов, способы отыскания которой можно найти в доказательстве теоремы 1.*

Рациональность вектора $\left\| \mathrm{M}\left(e^{i\mu\bar{\bar{\gamma}}} \,\middle|\, \tilde{\varkappa}_0 = k\right) \right\|$, вообще говоря, не влечет за собой рациональность всех $\tilde{f}_{kj+}(\mu)$, как видно из утверждения 2 теоремы 1 и замечания после леммы 2.

Из теоремы 2 и аналога леммы 2 следует

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* A_2, A_3. *Для того чтобы* $\tilde{A}_{+}(\mu)$ *была представима в виде* $\tilde{A}_{+}(\mu) = R(\mu)(I - \tilde{A}(\mu))c$, *где* $R(\mu)$ *— рациональная матрица,* c *— константа, достаточно, чтобы рациональными были функции* $\tilde{f}_{kj-}(\mu)$, $k, j \in \mathcal{N}$.

Автор признателен А. А. Боровкову за постановку задачи и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Арндт К.** О свойствах граничных функционалов от случайного блуждания на цепи Маркова.— Math. Operations forsch. und Statist, Ser. Statistics, 1981, v. 12, № 1, p. 85—100.
2. **Боровков А. А.** Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
3. **Боровков К. А.** Теоремы непрерывности и оценки скорости сходимости компонент

факторизации для блужданий на цепях Маркова.— Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, № 2, с. 329—338.
4. **Пресман Э. Л.** Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1969, т. 33, № 4, с. 861—900.

К ПРОБЛЕМЕ МАРТИНГАЛОВ НА ПЛОСКОСТИ

В. М. БОРОДИХИН

В работе [1] Д. Струком и С. Вараданом была сформулирована и решена так называемая проблема мартингалов, эквивалентная существованию и слабой единственности решения стохастического дифференциального уравнения

$$x(t) = x + \int_s^t b(u, x(u))\,du + \int_s^t \sigma(u, x(u))\,d\beta(u), \tag{1}$$

где β — процесс броуновского движения на прямой, коэффициент b ограничен и измерим, σ ограничен и непрерывен.

В работе [2] И. И. Гихман и Т. Е. Пясецкая доказали существование решения стохастического дифференциального уравнения, являющегося аналогом уравнения (1) для двупараметрических случайных процессов. В настоящей работе вводится аналог решения проблемы мартингалов для двупараметрических процессов, доказываются аналоги некоторых утверждений из [1], в частности, устанавливается эквивалентность задания меры как решения проблемы мартингалов и как решения стохастического дифференциального уравнения, рассмотренного в [2]. Из результатов работы [2] вытекает поэтому существование решения двупараметрической проблемы мартингалов для случая непрерывного и отграниченного от нуля и бесконечности коэффициента диффузии. Иная формулировка проблемы мартингалов рассмотрена К. Тюдором в [3].

1. О двумерных марковских моментах

Обозначим $(\Omega, \mathcal{F})$ измеримое пространство, где $\Omega = C(R_+^2, R^d)$ — пространство непрерывных функций со значениями в R^d, определенных на множестве $R_+^2 = [0, \infty)\times[0, \infty)$; $\mathcal{F}$ — наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы отображения $x_z : \Omega \to R^d$, $z \in R_+^2$, $x_z(\omega) = \omega(z)$. В дальнейшем значение траектории $\omega \in \Omega$ в точке z будет обозначаться $x_z(\omega)$ или $x(z, \omega)$, индекс ω иногда опускается, Ω рассматривается как полное сепарабельное метрическое пространство с топологией равномерной сходимости на компактах из R_+^2.

Введем на R_+^2 следующие отношения, одно из которых задает упорядочение R_+^2. Пусть $z = (s, t)$, $z' = (s', t') \in R_+^2$, тогда, по определению, $z \leqslant z'$, если $s \leqslant s'$ и $t \leqslant t'$; $z \prec z'$, если $s \leqslant s'$ или $t \leqslant t'$. Пусть $z_0, z_1 \in R_+^2$, $z_0 \leqslant z_1$. $\mathcal{F}_{z_1}^{z_0} = \sigma\{x_z(\cdot);\ z_0 \leqslant z \leqslant z_1\}$ будет обозначать наименьшую σ-алгебру, относительно которой измеримы функции $x_z(\cdot) z_0 \leqslant z \leqslant z_1$. Если $z_1 = (\infty, \infty)$, то эта σ-алгебра будет обозначаться $\mathcal{F}^{z_0}$.

Аналогично $\mathcal{G}_{z_1}^{z_0} = \sigma\{x_z(\cdot);\ z_0 \leqslant z \prec z_1\}$. Пусть также $\mathcal{F}_{s\infty}^{z_0} = \sigma\left\{\bigcup_{t_0 \leqslant t < \infty} \mathcal{F}_{(s,t)}^{z_0}\right\}$; $\mathcal{F}_{\infty t}^{z_0} = \sigma\left\{\bigcup_{s_0 \leqslant s < \infty} \mathcal{F}_{(s,t)}^{z_0}\right\}$ — σ-алгебры, порожденные указанными в скобках семействами множеств. Для некоторого $z_0 \in R_+^2$ обозначим $I_{z_0} = \{z \in R_+^2 : z_0 \leqslant z\}$. Функцию $\zeta : \Omega \to R_+^2$ назовем марковским z_0-моментом, если $z_0 \leqslant \zeta(\omega)$ при всех $\omega \in \Omega$ и для любого $z \in$