факторизации для блужданий на цепях Маркова.— Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, № 2, с. 329—338.
4. **Пресман Э. Л.** Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1969, т. 33, № 4, с. 861—900.

## К ПРОБЛЕМЕ МАРТИНГАЛОВ НА ПЛОСКОСТИ

*В. М. БОРОДИХИН*

В работе [1] Д. Струком и С. Вараданом была сформулирована и решена так называемая проблема мартингалов, эквивалентная существованию и слабой единственности решения стохастического дифференциального уравнения

$$x(t) = x + \int_s^t b(u, x(u))\,du + \int_s^t \sigma(u, x(u))\,d\beta(u), \tag{1}$$

где $\beta$ — процесс броуновского движения на прямой, коэффициент $b$ ограничен и измерим, $\sigma$ ограничен и непрерывен.

В работе [2] И. И. Гихман и Т. Е. Пясецкая доказали существование решения стохастического дифференциального уравнения, являющегося аналогом уравнения (1) для двупараметрических случайных процессов. В настоящей работе вводится аналог решения проблемы мартингалов для двупараметрических процессов, доказываются аналоги некоторых утверждений из [1], в частности, устанавливается эквивалентность задания меры как решения проблемы мартингалов и как решения стохастического дифференциального уравнения, рассмотренного в [2]. Из результатов работы [2] вытекает поэтому существование решения двупараметрической проблемы мартингалов для случая непрерывного и отграниченного от нуля и бесконечности коэффициента диффузии. Иная формулировка проблемы мартингалов рассмотрена К. Тюдором в [3].

### 1. О двумерных марковских моментах

Обозначим $(\Omega, \mathscr{F})$ измеримое пространство, где $\Omega = C(R^2_+, R^d)$ — пространство непрерывных функций со значениями в $R^d$, определенных на множестве $R^2_+ = [0, \infty)\times[0, \infty)$; $\mathscr{F}$ — наименьшая $\sigma$-алгебра, относительно которой измеримы отображения $x_z : \Omega \to R^d$, $z \in R^2_+$, $x_z(\omega) = \omega(z)$. В дальнейшем значение траектории $\omega \in \Omega$ в точке $z$ будет обозначаться $x_z(\omega)$ или $x(z, \omega)$, индекс $\omega$ иногда опускается, $\Omega$ рассматривается как полное сепарабельное метрическое пространство с топологией равномерной сходимости на компактах из $R^2_+$.

Введем на $R^2_+$ следующие отношения, одно из которых задает упорядочение $R^2_+$. Пусть $z = (s, t)$, $z' = (s', t') \in R^2_+$, тогда, по определению, $z \leqslant z'$, если $s \leqslant s'$ и $t \leqslant t'$; $z \prec z'$, если $s \leqslant s'$ или $t \leqslant t'$. Пусть $z_0, z_1 \in R^2_+$, $z_0 \leqslant z_1$. $\mathscr{F}^{z_0}_{z_1} = \sigma\{x_z(\cdot);\ z_0 \leqslant z \leqslant z_1\}$ будет обозначать наименьшую $\sigma$-алгебру, относительно которой измеримы функции $x_z(\cdot) z_0 \leqslant z \leqslant z_1$. Если $z_1 = (\infty, \infty)$, то эта $\sigma$-алгебра будет обозначаться $\mathscr{F}^{z_0}$.

Аналогично $\mathscr{G}^{z_0}_{z_1} = \sigma\{x_z(\cdot);\ z_0 \leqslant z \prec z_1\}$. Пусть также $\mathscr{F}^{z_0}_{s\infty} = \sigma\left\{\bigcup\limits_{t_0 \leqslant t < \infty} \mathscr{F}^{z_0}_{(s,t)}\right\}$; $\mathscr{F}^{z_0}_{\infty t} = \sigma\left\{\bigcup\limits_{s_0 \leqslant s < \infty} \mathscr{F}^{z_0}_{(s,t)}\right\}$ — $\sigma$-алгебры, порожденные указанными в скобках семействами множеств. Для некоторого $z_0 \in R^2_+$ обозначим $I_{z_0} = \{z \in R^2_+ : z_0 \leqslant z\}$. Функцию $\zeta : \Omega \to R^2_+$ назовем марковским $z_0$-моментом, если $z_0 \leqslant \zeta(\omega)$ при всех $\omega \in \Omega$ и для любого $z \in$

$\in I_{z_0}\{\omega\in\Omega:\zeta(\omega)\leqslant z\}\in\mathscr{F}_z^{z_0}$. Для каждого марковского $z_0$-момента можно определить следующие $\sigma$-алгебры:

$$\mathscr{F}_\zeta^{z_0}=\left\{A\in\mathscr{F}^{z_0}:A\cap(\zeta\leqslant z)\in\mathscr{F}_z^{z_0}\text{ для каждого } z\in I_{z_0}\right\};$$

$$\mathscr{G}_\zeta^{z_0}=\left\{A\in\mathscr{F}^{z_0}:A\cap(\zeta\leqslant z)\in\mathscr{G}_z^{z_0}\text{ для каждого } z\in I_{z_0}\right\}.$$

Ниже доказываются две теоремы, обобщающие результат Д. Струка и С. Варадана [1, теорема 0.1] на случай двупараметрических выборочных траекторий.

**Теорема 1.** *Пусть* $\mathbf{P}$ — *вероятностная мера на* $(\Omega,\mathscr{F}^{z_0})$, $z_0\in R_+^2$, $\zeta$ — *марковский* $z_0$-*момент. Тогда существует функция* $Q(\omega, A)$ *такая, что*:

I) $Q(\omega, A)$ — *вероятностная мера на* $(\Omega,\mathscr{F}^{z_0})$ *при каждом* $\omega\in\Omega$;

II) $Q(\omega, A)\,\mathscr{G}_\zeta^{z_0}$- *измерима для каждого* $A\in\mathscr{F}^{z_0}$;

III) $Q(\omega, A_\omega)=1$, *где*

$$A_\omega=\{\omega':x(z,\omega')=x(z,\omega)\text{ при } z_0\leqslant z\prec\zeta(\omega)\};$$

IV) $Q(\omega, A)=\mathbf{P}\left(A/\mathscr{G}_\zeta^{z_0}\right)$ $\mathbf{P}$-почти наверное (п. н.).

Функцию $Q(\omega, A)$, как обычно, будем называть условным регулярным распределением относительно меры $\mathbf{P}$, соответствующим $\sigma$-алгебре $\mathscr{G}_\zeta^{z_0}$ (см. [4]).

**Теорема 2** *формулируется так же, как теорема* 1, *если в последней заменить* $\mathscr{G}_\zeta^{z_0}$ на $\mathscr{F}_\zeta^{z_0}$ *и* $A_\omega$ *на* $B_\omega=\{\omega':x(z,\omega')=x(z,\omega)$ *при* $z_0\leqslant\leqslant z\leqslant\zeta(\omega)\}$.

Для доказательства теоремы 1 введем некоторый вид срезки, сохраняющей непрерывность траектории:

$$x_z^{z'}=\begin{cases}x_z(\omega),\text{ если } z\prec z',\\ x_{(s',t)}+x_{(s,t')}-x_{(s',t')}\text{ в противном случае;}\end{cases}$$

или, иначе,

$$x_z^{z'}=\begin{cases}x_z(\omega),\text{ если } z'\nleqslant z,\\ x_{(s',t)}+x_{(s,t')}-x_{(s',t')},\text{ если } z'\leqslant z.\end{cases}$$

Легко понять, что для фиксированных $z'\in R_+^2$ и $\omega\in\Omega$ функция $x_z^{z'}(\omega)$ непрерывна по $z$, а при фиксированных $z$ и $\omega$ — по $z'$.

**Лемма 1.** *Пусть* $\zeta$ — *марковский* $z_0$-*момент. Тогда для любого* $z\in I_{z_0}$ *отображение* $\omega\to x_z^{\zeta(\omega)}(\omega)$ — *измеримо.*

Доказательство. Пусть $U\subset R^d$ — произвольное открытое множество. Достаточно показать, что

$$\{\omega:x_z^{\zeta(\omega)}(\omega)\in U\}\cap(\zeta\leqslant z')\in\mathscr{G}_{z'}^{z_0}\tag{2}$$

при каждом $z'\in I_{z_0}$. Подмножества $R_+^2$ вида $(z_1, z_2]=(s_1, s_2]\times(t_1, t_2]\to$ или $[z_1, z_2]\neq[s_1, s_2]\times[t_1, t_2]$, где $z_1=(s_1, t_1)\leqslant z_2=(s_2; t_2)$, будем называть прямоугольниками. Нетрудно видеть, что если $z_1, z_2\in I_{z_0}$, $z_1\leqslant z_2$, то $\{\omega:\zeta\in(z_1, z_2]\}\in\mathscr{G}_{z_2}^{z_0}$; $\{\omega:\zeta\in[z_1, z_2]\}\in\mathscr{G}_{z2}^{z0}$. Обозначим $\{D_{m,n}\}_{m,n=1}^\infty$ — счетное семейство прямоугольников, обладающее свойствами:

а) $D_{m,n}\cap D_{m,k}=\varnothing$, $n\neq k$;

б) $\bigcup\limits_{n=1}^\infty D_{m,n}=\{z:z_0\leqslant z\leqslant z'\}$;

в) $\operatorname{diam}(D_{m,n})\leqslant 1/m$.

Тогда, очевидно, при каждых $m$, $n$ $(\zeta \in D_{m,n}) \in \mathcal{G}_{z'}^{z_0}$. В силу непрерывности $x_z^{z'}\omega$ по $z'$ имеет место соотношение

$$\{x_z^\zeta \in U\} \cap (\zeta \leqslant z') = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_z^\zeta \in U\} \cap (\zeta \in D_{m,n}) =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x_z^{z_{m,n}} \in U\right\} \cap (\zeta \in D_{m,n}), \tag{3}$$

где $z_{m,n}$ — одна из вершин $D_{m,n}$. Так как

$$\{x_z^{z_1} \in U\} = \{x_z \in U;\ z < z_1\} \cup \{x_{(s_1,t)} + x_{(s,t_1)} - x_{(s_1,t_1)} \in U\};$$

$$\{z_1 \leqslant z\};\ \{x_z \in U\} \in \mathcal{F}_z^{z_0} \subset \mathcal{G}_{z'}^{z_0} \quad \text{при} \quad z < z_1,\ z_1 \leqslant z';$$

$$\{x_{(s_1,t)} + x_{(s,t_1)} - x_{(s_1,t_1)} \in U\} \in \mathcal{G}_{z_1}^{z_0} \subset \mathcal{G}_{z'}^{z_0} \quad \text{при} \quad z_1 \leqslant z,\ z_1 \leqslant z',$$

то $\{x_z^{z_{m,n}} \in U\} \in \mathcal{G}_{z'}^{z_0}$ при всех $m$, $n \geqslant 1$. Из соотношения (3) вытекает теперь (2) и утверждение леммы 1.

Следующая лемма аналогична лемме 0.1 [1].

**Лемма 2.** *Пусть $z_0 \in R_+^2$, $\zeta$ — марковский $z_0$-момент.*

*Обозначим $\mathfrak{B}_\zeta^{z_0} = \{C : C = \{\omega \in \Omega : x_{z_1}^\zeta(\omega) \in \Gamma_1,\ x_{z_2}^\zeta(\omega) \in \Gamma_2, \ldots,$ $x_{z_k}^\zeta(\omega) \in \Gamma_k\};\ z_i \in I_{z_0},\ \Gamma_i \in \mathcal{B}_{R^d},\ i = \overline{1, k},\ k = 1, 2, \ldots\}$; $\mathcal{B}_E$ — σ-алгебра борелевских подмножеств $E$. Тогда, $\mathcal{G}_\zeta^{z_0} = \sigma(\mathfrak{B}_\zeta^{z_0})$.*

Доказательство лишь деталями отличается от доказательства леммы 0,1 [1].

Доказательство теоремы 1 можно получить теперь очевидным видоизменением рассуждений в доказательстве леммы 0.2 и теоремы 0.2 [1], если $\Omega^s$, $\varphi^s$, $\tau^s$, $\Omega^s(\tau^s)$, $\varphi_\tau^s$ в обозначениях (1) заменить соответственно следующими:

$\Omega^{z_0} = G(I_{z_0}, R^d)$; $\varphi^{z_0} : \Omega \to \Omega^{z_0}$ таково, что если $\omega^{z_0} = \varphi^{z_0}(\omega)$, то $x(z, \omega^{z_0}) =$
$= x(z, \omega) \forall z \in I_{z_0}$;

если $\zeta$ — марковский $z_0$-момент, то $\zeta^{z_0} : \Omega \to R_+^2$ таково, что

$$\zeta^{z_0}(\varphi^{z_0}(\omega)) = \zeta(\omega)\ \forall \omega \in \Omega;\ \Omega^{z_0}(\zeta) =$$

$$= \left\{\omega^{z_0} \in \Omega^{z_0} : x(z, \omega^{z_0}) = x_z^{\zeta^{z_0}(\omega^{z_0})}\ \forall z \in I_{z_0}\right\};$$

$\varphi_\zeta^{z_0} : \Omega \to \Omega^{z_0}(\zeta)$ таково, что $x(z, \varphi_\zeta^{z_0}(\omega)) = x_z^\zeta(\omega)\ \forall z \in I_{z_0}$.

**Замечание 1.** Теорема 1 остается справедливой, если марковский $z_0$-момент определить следующими условиями: $\forall z \in I_{z_0} \{\omega : \zeta(\omega) \leqslant z\} \in \mathcal{G}_z^{z_0}$ и $\{\omega : \zeta(\omega) < z\} \in \mathcal{G}_z^{z_0}$.

**Замечание 2.** Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1, если в качестве срезки вместо $x_z^{z'}(\omega)$ взять $x_{z \wedge z'}(\omega)$, где $z \wedge z' = (\min(s, s'), \min(t, t'))$.

## 2. Свойства экспоненциальных мартингалов

Для функции $\theta(z, \omega)$, определенной на $I_{z_0} \times \Omega$ со значениями в $R^d$ или $R^d \otimes R^d$, введем следующее условие:

$(z_0)$. Отображение $(z, \omega) \to \theta(z, \omega)$ измеримо относительно $\mathcal{B}_{I_{z_0}} \times \mathcal{F}^{z_0}$ и при фиксированном $z \in I_{z_0}$ отображение $\omega \to \theta(z, \omega)$ $\mathcal{F}_z^{z_0}$-измеримо.

Пусть функция $a: I_{z_0}\times\Omega\to R^d\otimes R^d$ удовлетворяет условию $(z_0)$ и ограничена: $\exists A>0$ такое, что

$$0\leqslant\langle a\lambda,\ \lambda\rangle\leqslant A|\lambda^2| \text{ при всех } \lambda\in R^d. \tag{4}$$

Пусть $z=(s,\ t)\leqslant z'=(s',\ t')$, $B=(z,\ z']$. Для функции $\theta(z)$, заданной на $R_+^2$, обозначим

$$\theta(B)=\theta(z,\ z']=\theta(s',\ t')-\theta(s,\ t')-\theta(s',\ t)+\theta(s,\ t).$$

Функция $\theta(B)$, определенная на прямоугольниках вида $(z,\ z']$, является аддитивной; продолжим ее по аддитивности на множество конечных объединений прямоугольников указанного вида.

Случайный процесс $\{\theta(z,\ \omega),\ z\in I_{z_0}\}$ со значениями в $R^d$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F}^{z_0},\ \mathbf{P})$ и согласованный с семейством $\sigma$-алгебр $(\mathcal{F}_z^{z_0},\ z\in I_{z_0})$, будем называть сильным экспоненциальным (или $e$-) мартингалом, связанным с функцией $a(\cdot)$, если он удовлетворяет условию

$$\mathbf{E}\{X_\lambda^z(z')/\mathcal{G}_z^{z_0}\}=1\ \mathbf{P}\text{-п. н.} \tag{5}$$

при всех $\lambda\in R^d$; $z,z'\in I_{z_0}$, $z\leqslant z'$, где

$$X_\lambda^z(z')=\exp\left\{\langle\lambda,\ \theta(z,z']\rangle-\frac{1}{2}\left\langle\lambda,\ \int\limits_{(z,z']}a(u)\lambda du\right\rangle\right\}. \tag{6}$$

**Лемма 3.** *Пусть функция $a(z,\ \omega)$ удовлетворяет условиям $(z_0)$ и (4); $\{\theta(z,\ \omega),\ z\in I_{z_0}\}$ — сепарабельный сильный е-мартингал, связанный с $a(\cdot)$. Тогда для любых $z_1,z_2\in \mathring{I}_{z_0}$, $z_1\leqslant z_2$, и любого $r>0$*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{z\in(z_1,z_2]}|\theta(z_1,\ z]|\geqslant r\right\}\leqslant\frac{4de}{e-1}\exp\left\{-\frac{r^2}{2d(1+c)A|(z_1,z_2]|}\right\}, \tag{7}$$

*где*

$$c=1/e+1/e^2,\ |(z_1,\ z_2]|=(s_2-s_1)(t_2-t_1).$$

Доказательство. Заметим, что при фиксированном $s\geqslant s_1$ $\{X_\lambda^{z_1}(s,t),\ \mathcal{F}_{\infty t}^{z_0},\ t\geqslant t_0\}$ — $\mathbf{P}$-мартингал, а при фиксированном $t\geqslant t_1$ $\{X_\lambda^{z_1}(s,t),\ \mathcal{F}_{s\infty}^{z_0},\ s\geqslant s_1\}$ — $\mathbf{P}$-мартингал. Действительно, пусть $t'\geqslant t\geqslant t_1$; тогда $\mathbf{P}$-п. н.

$$\mathbf{E}\{X_\lambda^{z_1}(s,t')/\mathcal{F}_{\infty t}^{z_0}\}=\mathbf{E}\Bigg\{\exp\Bigg\{\langle\lambda,\ \theta(z_1,z]+\theta((s_1,t),(s,t')]\rangle-$$
$$-\frac{1}{2}\left\langle\lambda,\int\limits_{(z_1,z]}a(u)\cdot\lambda du+\int\limits_{((s_1,t),(s,t')]}a(u)\cdot\lambda du\right\rangle\Bigg\}\Bigg/\mathcal{F}_{\infty t}^{z_0}\Bigg\}=$$
$$=X_\lambda^{z_1}(s,t)\,\mathbf{E}\{X_\lambda^{(s_1,t)}(s,t')/\mathcal{F}_{\infty t}^{z_0}\}=$$
$$=X_\lambda^{z_1}(s,t)\cdot\mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{X_\lambda^{(s_1,t)}(s,t')/\mathcal{G}_{(s_1,t)}^{z_0}\right\}\Big/\mathcal{F}_{\infty t}^{z_0}\right\}=X_\lambda^{z_1}(s,t).$$

Применяя теперь неравенства Дуба [5, гл. VII] так, как это делается, например, в [6], можно показать, что

$$r\mathbf{P}\left\{\sup_{(s,t)\in(z_1,z_2]}X_\lambda^{z_1}(s,t)\geqslant r\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{e}{e-1}+\frac{e}{e-1}\sup_{(s,t)\in(z_1,z2]}\mathbf{E}\{X_\lambda^{z_1}(s,t)\ln^+X_\lambda^{z_1}(s,t)\}. \tag{8}$$

Заметим, что $\inf\{\alpha>0:\ e^{\alpha x}\geqslant x^{+}\ \forall\, x\in R\}=1/e$. Отсюда следует, что $\ln^{+}x\leqslant x^{1/e}\ \forall_{x>0}$. Поэтому (8) влечет за собой

$$r\cdot\mathbf{P}\left\{\sup_{(s,t)\in(z_1,z_2]} X_\lambda^{z_1}(s,t)\geqslant r\right\}\leqslant\frac{e}{e-1}\left\{1+\sup_{(s,t)\in(z_1,z_2]}\mathbf{E}\{X_\lambda^{z_1}(s,t)\}^{1+1/e}\right\}. \quad (9)$$

Далее,

$$\sup_{(s,t)\in(z_1,z_2]}\mathbf{E}\{X_\lambda^{z_1}(s,t)\}^{1+1/e}=\sup_{(s,t)\in(z_1,z_2]}\mathbf{E}\left\{\exp\left[\langle\lambda(1+1/e),\,\theta(z_1,z)]\rangle-\right.\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left\langle\lambda(1+1/e),\ \int_{(z_1,z]} a(u)\lambda(1+1/e)\,du\right\rangle+$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}(1/e+1/e^2)\left\langle\lambda,\ \int_{(z_1,z]} a(u)\lambda du\right\rangle\right]\right\}\leqslant\exp\left\{\frac{1}{2}cA\,|\lambda|^2\,|(z_1,z_2]|\right\}. \quad (10)$$

Учитывая (9) и (10), имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{z\in(z_1,z_2]}\left\langle\frac{\lambda}{|\lambda|},\ \theta(z_1,z]\right\rangle\geqslant r\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{P}\left\{\sup_{z\in(z_1,z_2]} X_\lambda^{z_1}(z)\geqslant\exp\left[r\,|\lambda|-\frac{|\lambda|^2}{2}A\,|(z_1,z_2]|\right]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{e}{e-1}\left(1+\exp\left[\frac{1}{2}cA\,|\lambda|^2\,|(z_1,z_2]|\right]\right)\cdot\exp\left[-r\,|\lambda|+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}A\,|\lambda|^2\cdot|(z_1,z_2]|\right]=\frac{e}{e-1}\left\{\exp\left[-r\,|\lambda|+\frac{1}{2}A\,|\lambda|^2\cdot|(z_1,z_2]|\right]+\right.$$

$$\left.+\exp\left[-r\,|\lambda|+\frac{1}{2}(1+c)A\,|\lambda|^2\,|z_1,z_2]|\right]\right\}. \quad (11)$$

Положим $|\lambda|=\dfrac{r}{(1+c)A\,|(z_1,z_2]|}$. Тогда (11) влечет за собой

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{z\in(z_1,z_2]}\left\langle\frac{\lambda}{|\lambda|},\ \theta(z_1,z]\right\rangle\geqslant r\right\}\leqslant\frac{2e}{e-1}\exp\left\{-\frac{r^2}{2(1+c)A\,|(z_1,z_2]|}\right\}.$$

Отсюда следует (7). Лемма доказана.

**Лемма 4.** *В условиях леммы* 3 *для любых* $\lambda_0>0,\ k\geqslant 0$ *семейство случайных величин*

$$\{|\theta(z_1,z]|^k X_\lambda^{z_1}(z)\}_{|\lambda|\leqslant\lambda_0,\ z\in(z_1,z_2]}$$

*равномерно интегрируемо.*

Доказательство вытекает из леммы 2 [3] и следующих неравенств:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{z\in(z_1,z_2]}|\theta(z_1,z_2]|^k X_\lambda^{z_1}(z)\geqslant r^k\exp(\lambda_0 r)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{P}\left\{\sup_{z\in(z_1,z_2]}|\theta(z_1,z]|^k\exp[\langle\lambda,\theta(z_1,z]\rangle]\geqslant r^k\exp(\lambda_0 r)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{P}\left\{\sup_{z\in(z_1,z_2]}|\theta(z_1,z_2]|\geqslant r\right\}\leqslant\frac{4de}{e-1}\exp\left\{-\frac{r^2}{4d(1+c)A\,|(z_1,z_2]|}\right\}.$$

**Следствие.** *В условиях леммы 3* $\forall\lambda\in R^d$:

I) $\mathbf{E}\left\{\langle\lambda,\theta(z_1,z_2]\rangle/\mathcal{G}_{z_1}^{z_0}\right\}=0$ $\quad$ **P**-п. н.;

II) $\mathbf{E}\left\{\langle\lambda,\theta(z_1,z_2]\rangle^2-\left\langle\lambda,\ \int_{(z_1,z_2]} a(u)\cdot\lambda du\right\rangle\Big/\mathcal{G}_{z_1}^{z_0}\right\}=0$ $\quad$ **P**-п. н.;

III) $\mathbf{E}|\theta(z_1, z_2]|^4 \leqslant C|(z_1, z_2]|^2$, *где $C$ зависит лишь от $A$.*

**Лемма 5.** *Пусть* $\{\theta(z, \omega), z \in I_{z_0}\}$ — **Р**-*п. н. непрерывный сильный е-мартингал, связанный с* $a(\cdot)$. *Тогда для любых двух марковских* $z_0$-*моментов* $\zeta_1, \zeta_2$ *таких, что для некоторого постоянного* $M$

$$z_0 \leqslant \zeta_1 \leqslant \zeta_2 \leqslant (M-1, M-1),$$

*справедливо соотношение*

$$\mathbf{E}\left\{X_\lambda^{\zeta_1}(\zeta_2)/\mathcal{G}_{\zeta_2}^{z_0}\right\} = 1 \qquad \mathbf{P}\text{-п. н.}$$

Доказательство проведем по схеме доказательства теоремы 3.1 [1]. Для $z = (s, t)$, $n \in N$ примем обозначение $z^{(n)} = (s^{(n)}, t^{(n)})$, где

$$s^{(n)} = ([ns]+1)/n, \; t^{(n)} = ([nt]+1)/n.$$

Тогда $\zeta_1^{(n)} \leqslant \zeta_2^{(n)} \leqslant (M, M)$, и с помощью утверждения, аналогичного теореме 34, гл. IV [7], можно показать, что $\zeta_i^{(n)}$ — марковские $z_0$-моменты.

Пусть $A \in \mathcal{G}_{\zeta_1}^{z_0}$. Введем также обозначения:

$$A^{k,l} = A \cap \{\zeta_1^{(n)} = (k/n, l/n)\} \in \mathcal{G}^{z_0}_{(k/n, l/n)};$$

$$A_{p,q}^{k,l} = A^{k,l} \cap \{\zeta_2^{(n)} = (p/n, q/n)\} \in \sigma\left\{\mathcal{G}^{z_0}_{(k/n,l/n)} \cup \mathcal{F}^{z_0}_{(p/n,q/n)}\right\};$$

$$B_{p,q}^{k,l} = A^{k,l} \cap \{(p/n, q/n) \leqslant \zeta_2^{(n)}\} \in \mathcal{G}^{z_0}_{(p/n,q/n)}.$$

Здесь при каждом $n \in N$ $(k/n, l/n) = z_{k,l}$, $(p/n, q/n) = z_{p,q}$ пробегают прямоугольник $(z_0, (M, M)]$, причем $z_{k,l} \leqslant z_{p,q}$. Если $A$ — прямоугольник вида $(z, z']$ или сумма конечного числа таких прямоугольников, будем обозначать

$$X_\lambda(A) = \exp\left\{\langle\lambda, \theta(A)\rangle - \frac{1}{2}\left\langle\lambda, \int_A a(u)\,\lambda du\right\rangle\right\}.$$

При каждых $(k, l)$ имеем

$$\int_{B_{k,l}^{k,l}} 1d\mathbf{P} = \int_{B_{k,l}^{k,l}} X_\lambda^{z_{k,l}}(z_{k+1,l+1})\,d\mathbf{P} = \int_{A_{k+1,l+1}^{k,l}} X_\lambda^{\zeta_1^{(n)}}(\zeta_2^{(n)})\,d\mathbf{P} +$$

$$+ \int_{B_{k,l}^{k,l} \setminus A_{k+1,l+1}^{k,l}} X_\lambda^{z_{k,l}}(z_{k+1,l+1})d\mathbf{P} = \int_{A_{k+1,l+1}^{k,l}} X_\lambda^{\zeta_1^{(n)}}(\zeta_2^{(n)})\,d\mathbf{P} +$$

$$+ \int_{B_{k,l}^{k,l} \setminus A_{k+1,l+1}^{k,l}} X_\lambda^{z_{k,l}}(z_{k+1,l+2})\,d\mathbf{P} = \int_{A_{k+1,l+1}^{k,l} \cup A_{k+1,l+2}^{k,l}} X_\lambda^{\zeta_1^{(n)}}(\zeta_2^{(n)})\,d\mathbf{P} +$$

$$+ \int_{B_{k,l}^{k,l} \setminus \left(A_{k+1,l+1}^{k,l} \cup A_{k+1,l+2}^{k,l}\right)} X_\lambda^{z_{k,l}}(z_{k+1,l+2})\,d\mathbf{P} = \ldots = \int_{\bigcup_{j \geqslant 1} A_{k+1,l+j}^{k,l}} X_\lambda^{\zeta_1^{(n)}}(\zeta_2^{(n)})d\mathbf{P} +$$

$$+ \int_{B_{k+1,l}^{k,l}} X_\lambda^{z_{k,l}}\left(\frac{k+1}{n}, M\right)d\mathbf{P} = \int_{\bigcup_{j \geqslant 1} A_{k+1,l+j}^{k,l}} X_\lambda^{\zeta_1^{(n)}}(\zeta_2^{(n)})\,d\mathbf{P} +$$

$$+ \int_{B_{k+1,l}^{k,l}} X_\lambda\left(\left(z_{k,l}, \left(\frac{k+1}{n}, M\right)\right] \cup (z_{k+1,l}, z_{k+2,l+1}]\right)d\mathbf{P} =$$

$$= \int\limits_{\bigcup\limits_{j\geqslant 1} A^{k,l}_{k+1,l+j}} X_\lambda^{\zeta_1^{(n)}}\left(\zeta_2^{(n)}\right) d\mathbf{P} + \int\limits_{A^{k,l}_{k+2,l+1}} X_\lambda^{z_{k,l}}(z_{k+2,l+1})\, d\mathbf{P} +$$

$$+ \int\limits_{B^{k,l}_{k+1,l}\setminus A^{k,l}_{k+2,l+1}} X_\lambda\left(\left(z_{k,l}, \left(\frac{k+1}{n}, M\right)\right] \cup (z_{k+1,l}, z_{k+2,l+1}]\right) d\mathbf{P} =$$

$$= \ldots = \int\limits_{\bigcup\limits_{j\geqslant 1, i\geqslant 1} A^{k,l}_{k+i,l+j}} X_\lambda^{\zeta_1^{(n)}}\left(\zeta_2^{(n)}\right) d\mathbf{P} = \int\limits_{A^{k,l}} X_\lambda^{\zeta_1^{(n)}}\left(\zeta_2^{(n)}\right) d\mathbf{P}.$$

Суммируя по $(k, l)$, получим

$$\int\limits_A 1 d\mathbf{P} = \int\limits_A X_\lambda^{\zeta_1^{(n)}}\left(\zeta_2^{(n)}\right) d\mathbf{P}, \tag{12}$$

а значит,

$$\mathbf{E}\left\{X_\lambda^{\zeta_1^{(n)}}\left(\zeta_2^{(n)}\right)/\mathcal{G}^{z_0}_{\zeta_1}\right\} = 1 \qquad \mathbf{P}\text{-п. н.}$$

Так как

$$\mathbf{P}\left\{\sup_n |\theta\left(\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}\right]| \geqslant r\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\sup_{z_0 \leqslant z \leqslant z' \leqslant (M,M)} |\theta(z, z']| \geqslant r\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 4\mathbf{P}\left\{\sup_{z_0 \leqslant z \leqslant (M,M)} |\theta(z_0, z]| \geqslant r/4\right\} \leqslant \frac{16de}{e-1} \exp\left\{-\frac{r^2}{32d(1+c)A|(z_0, (M, M)]|}\right\},$$

то $\left\{X_\lambda^{\zeta_1^{(n)}}\left(\zeta_2^{(n)}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно интегрируемы, поэтому в (12) можно перейти к пределу по $n$, откуда следует

$$\mathbf{E}\left\{X_\lambda^{\zeta_1}(\zeta_2)/\mathcal{G}^{z_0}_{\zeta_1}\right\} = 1 \qquad \mathbf{P}\text{-п. н.}$$

Лемма доказана.

**Следствие.** *Пусть* $\zeta$ — *ограниченный марковский* $z_0$-*момент*, $\{\theta(z, \omega), z \in I_{z_0}\}$—$\mathbf{P}$-*п. н. непрерывный сильный е-мартингал, связанный с* $a(\cdot)$, $Q_\omega$ — *регулярное условное распределение относительно* $\mathbf{P}$, *соответствующее* $\mathcal{G}^{z_0}_\zeta$. *Тогда существует множество* $N \in \mathcal{G}^{z_0}_\zeta$, $\mathbf{P}(N) = 0$, *такое, что для* $\omega \notin N$ *и* $\lambda \in R^d$, $\{\theta(\zeta(\omega), z), z \in I_{\zeta(\omega)}\}$ *является сильным е-мартингалом, связанным с* $a(\cdot)$, *относительно меры* $Q_\omega$.

Доказательство. Пусть $(0, 0) \leqslant z_1 \leqslant z_2$, $B \in G^{z_0}_\zeta$, $A \in G^{z_0}_{\zeta+z_1}$. Тогда, используя лемму 5, имеем

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left\{\mathbf{I}_B(\omega)\mathbf{E}^{Q_\omega}\left\{\mathbf{I}_A(\omega) X_\lambda^{\zeta+z_1}(\zeta+z_2)\right\}\right\} = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left\{\mathbf{I}_{A\cap B}(\omega) X_\lambda^{\zeta+z_1}(\zeta+z_2)\right\} =$$

$$= \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\{\mathbf{I}_B(\omega) Q_\omega(A)\}.$$

Таким образом, для любых $z_1 \leqslant z_2$, $\lambda \in R^d$, $A \in \mathcal{G}^{z_0}_{\zeta+z_1}$ найдется

$$N^{A,\lambda}_{z_1,z_2} \in \mathcal{G}^{z_0}_\zeta,\ \mathbf{P}\left(N^{A,\lambda}_{z_1,z_2}\right) = 0, \text{ такое, что для } \omega \notin N^{A,\lambda}_{z_1,z_2}$$

$$\mathbf{E}^{Q_\omega}\left\{\mathbf{I}_A(\omega') X_\lambda^{\zeta+z_1}(\zeta+z_2)\right\} = Q_\omega(A).$$

Завершается доказательство так же, как в теореме 3.1 [1].

Дополним определение сильного $e$-мартингала заданием условий на границе области $I_{z_0}$.

Пусть $x \in R^d$, функции $a_s : R_+ \times \Omega \to R^d \otimes R^d$, $a_{\cdot t} : R_+ \times \Omega \to R^d \otimes R^d$ удовлетворяют следующим условиям:

$(s_0)$. $a_{\cdot t}(s, \omega)$ $\mathscr{B}_{R_+} \times F^{z_0}$-измеримо и при каждом фиксированном $s \geqslant s_0$ $F^{z_0}_{(s,t)}$-измеримо.

$(t_0)$. $a_{s\cdot}(t, \omega) \mathscr{B}_{R_+} \times F^{z_0}$- измеримо и при каждом фиксированном $t \geqslant t_0$ $F^{z_0}_{(s,t)}$-измеримо. Пусть также $a : R^2_+ \times \Omega \to R^d \otimes R^d$ удовлетворяет условию $(z_0)$ и все эти функции — условию (4). Случайный процесс $\{\theta(z, \omega), z \in I_{z_0}\}$ будем называть сильным $e$-мартингалом относительно $(z_0, x, a_{s_0 \cdot}, a_{\cdot t_0}, a)$ и меры $\mathbf{P}$, если он удовлетворяет условиям $(z_0)$, [см. (5)], а также следующим:

(5°) $\mathbf{P}\{\theta(z_0) = x\} = 1$;

(5′) $\left\{Y^{(t)}_{\lambda, s_0 \cdot}(t_0), \mathscr{F}^{z_0}_{\infty t}, t \geqslant t_0\right\}$ $\forall \lambda \in R^d$ — $\mathbf{P}$-мартингал;

(5″) $\left\{Y^{(s)}_{\lambda, \cdot t_0}(s_0), \mathscr{F}^{z_0}_{s\infty}, s \geqslant s_0\right\}$ $\forall \lambda \in R^d$ — $\mathbf{P}$-мартингал,

где

$$Y^{(t')}_{\lambda, s \cdot}(t) = \exp\left\{\langle \lambda, \theta(s, t') - \theta(s, t)\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \lambda, \int_t^{t'} a_{s\cdot}(u)\lambda du\right\rangle\right\};$$

$$Y^{(s')}_{\lambda, \cdot t}(s) = \exp\left\{\langle \lambda, \theta(s', t) - \theta(s, t)\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \lambda, \int_s^{s'} a_{\cdot t}(v)\lambda dv\right\rangle\right\};$$

$$t' \geqslant t, \ s' \geqslant s.$$

**Лемма 6.** *Если $\{\theta(z, \omega), z \in I_{z_0}\}$ — сильный е-мартингал относительно $(z_0, x, a_{s_0 \cdot}, a_{\cdot t_0}, a)$ и меры $\mathbf{P}$, то он является маргинальным е-мартингалом, т. е. при каждом фиксированном $s \geqslant s_0$ $\left\{Y^{(t)}_{\lambda, s\cdot}(t_0), \mathscr{F}^{z_0}_{\infty t}, t \geqslant t_0\right\}$ — $\mathbf{P}$-мартингал $\forall \lambda \in R^d$ и при каждом фиксированном $t \geqslant t_0$ $\left\{Y^{(s)}_{\lambda, \cdot t}(s_0), \mathscr{F}^{z_0}_{s\infty}, s \geqslant s_0\right\}$ — $\mathbf{P}$ мартингал $\forall \lambda \in R^d$. При этом функции $a_{s\cdot}$, $a_{\cdot t}$, фигурирующие в определении $Y^{(t')}_{\lambda, s\cdot}(t)$, $Y^{(s')}_{\lambda, \cdot t}(s)$, имеют вид*

$$a_{s\cdot}(t) = a_{s_0 \cdot}(t) + \int_{s_0}^{s} a(u, t)\, du, \quad a_{\cdot t}(s) = a_{\cdot t_0}(s) + \int_{t_0}^{t} a(s, v)\, dv.$$

Доказательство. Обозначим $z_0 = (s_0, t_0)$, $z_1 = (s_0, t)$, $z_2 = (s, t')$, где $s \geqslant s_0$, $t' \geqslant t \geqslant t_0$. Тогда $\mathbf{P}$-п. н.

$$\mathbf{E}\left\{Y^{(t')}_{\lambda, s\cdot}(t_0) / \mathscr{F}^{z_0}_{\infty t}\right\} = \mathbf{E}\left\{\exp\left[\langle \lambda, \theta(s, t) + \theta(s_0, t') - \theta(s_0, t) - \theta(s, t_0)\rangle - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left\langle \lambda, \int_{t_0}^{t'} a_{s_0\cdot}(v)\lambda dv + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{s_0}^{s} a(u, v)\lambda du\right) dv\right\rangle\right] \mathbf{E}\left\{\exp\left[\langle \lambda, \theta(z_1 z_2]\rangle - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{1}{2}\left\langle \lambda, \int_{(z_1, z_2]} a(u, v)\lambda du dv\right\rangle\right] \Big/ \mathscr{G}^{z_0}_{z_1}\right\} \Big/ \mathscr{F}^{z_0}_{\infty t}\right\} = \exp\left[\langle \lambda, \theta(s, t) - \theta(s, t_0)\rangle - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left\langle \lambda, \int_{t_0}^{t} a_{s\cdot}(v)\lambda dv\right\rangle\right] \mathbf{E}\left\{\exp\left[\langle \lambda, \theta(s_0, t') - \theta(s_0, t)\rangle - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}\left\langle \lambda, \int_{t}^{t'} a_{s_0\cdot}(v)\lambda dv\right\rangle\right] \Big/ \mathscr{F}^{z_0}_{\infty t}\right\} = Y^{(t)}_{\lambda, s\cdot}(t_0).$$

Лемма доказана.

Следуя [1], вероятностную меру $\mathbf{P}$ на $(\Omega, \mathcal{F}^{z_0})$ будем называть решением проблемы мартингалов для $(z_0, x, a_{s_0}., a._{t_0}, a)$, если процесс $\theta(z, \omega) = x_z(\omega)$, $z \in I_{z_0}$, является сильным $e$-мартингалом относительно $(z_0, x, a_{s_0}., a._{t_0}, a)$ и меры $\mathbf{P}$. Следствия из леммы 4 и лемма 6 позволяют утверждать, что решение проблемы мартингалов является таковым и в смысле определения 4 [3].

Чтобы описать решение проблемы мартингалов в терминах стохастических дифференциальных уравнений, необходимо ввести стохастический интеграл относительно сильного $e$-мартингала. Делается это обычным образом, как в [1] или [8]. Отображение $\varphi : I_{z_0} \times \Omega \to R^d$ называется $\mathcal{F}^{z_0}$-предсказуемым, если оно измеримо относительно $\sigma$-алгебры, порожденной множествами $(z, z'] \times A$, где $z_0 \leqslant z \leqslant z'$, $A \in \mathcal{F}_z^{z_0}$.

Пусть $\{\theta(z, \omega), z \in I_{z_0}\}$ — $\mathbf{P}$-п. н. непрерывный сильный $e$-мартингал, связанный с функцией $a(\cdot)$, удовлетворяющей условиям $(z_0)$, (4). Множество $\mathcal{F}^{z_0}$-предсказуемых функций $\varphi$, для которых $\mathbf{E} \int\limits_{(z_0, z]} \langle \varphi(u), a(u)\varphi(u)\rangle du < \infty$ при всех $z$, $z_0 \leqslant z$, обозначим $\mathcal{L}^2(a)$.

Для простой функции

$$\varphi(z, \omega) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\omega) I_{(z_i, z_i']}(z) \in \mathcal{L}^2(a)$$

(здесь $\alpha_i$ измеримо относительно $\mathcal{F}^{z_0}$) стохастический интеграл определяется равенством

$$\langle \varphi, d\theta\rangle(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \langle \varphi(u), d\theta(u)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha_i, \theta((z_i, z_i'] \cap (z_0, z])\rangle.$$

Так определенный интеграл линеен и обладает следующими свойствами: для любых $z, z' \in I_{z_0}$, $z \leqslant z'$

I) $\mathbf{E}\left\{\langle \varphi, d\theta\rangle (z, z')]/G_z^{z_0}\right\} = 0 \qquad \mathbf{P}$-п. н.;

II) $\mathbf{E}(\langle \varphi, d\theta\rangle (z, z'])^2 = \mathbf{E} \int\limits_{(z, z']} \langle \varphi(u), a(u)\varphi(u)\rangle du.$

Поэтому интеграл $\langle \varphi, d\theta\rangle$ можно распространить па все $\mathcal{L}^2(a)$ с сохранением указанных свойств. С помощью леммы 5 и следствия из нее, а также лемм 3, 4 можно доказать следующее свойство:

III) для любой ограниченной $\varphi \in \mathcal{L}^2(a)$ и любых $z, z' \in I_{z_0}$, $z \leqslant z'$,

$$\mathbf{E}\left\{\exp\left\{\langle \varphi, d\theta\rangle (z, z'] - \frac{1}{2}\int\limits_{(z, z']} \langle \varphi(u), a(u)\varphi(u)\rangle du\right\} \Big/ \mathcal{G}_z^{z_0}\right\} = 1 \qquad \mathbf{P}\text{-п. н.}$$

Так же как в [1], вводится векторный стохастический интеграл $\int\limits_{z_0}^{z} \sigma(u)\, d\theta(u)$ от матричной $\mathcal{F}^{z_0}$-предсказуемой функции $\sigma : I_{z_0} \times \Omega \to R^d \otimes \otimes R^d$, для которой

$$\mathbf{E} \int\limits_{(z_0, z]} \langle \lambda, \sigma^*(u)\, a(u)\, \sigma(u)\lambda\rangle du < \infty \quad \forall \lambda \in R^d \, \forall z \in I_{z_0},$$

где матрица $\sigma^*$ транспонированная относительно $\sigma$. Если $\sigma$ удовлетворяет условию $\exists B > 0$

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}\lambda_i\lambda_j\right| \leqslant B|\lambda|^2 \quad \forall \lambda \in R^d, \tag{13}$$

то

IV) интеграл $\eta(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \sigma(u)\, d\theta(u)$ также является сильным $e$-мартингалом, связанным с функцией $\sigma^* a \sigma$, и обладает свойством $\langle \varphi, d\eta \rangle = \langle \sigma^* \varphi, d\theta \rangle$.

Введем, наконец, на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}^{z_0}, \mathbf{P})$ одно- и двупараметрические процессы броуновского движения. Двупараметрическим $z_0$-процессом броуновского движения будем называть функцию $\beta(z, \omega): I_{z_0} \times \Omega \to R^d$, удовлетворяющую условию $(z_0)$, $\mathbf{P}$-п. н. непрерывную, такую, что при любых $z_1, z_2 \in I_{z_0}$, $z_1 \leqslant z_2$, $\Gamma \in \mathcal{B}_{R^d}$

$$\mathbf{P}\left\{\beta(z_2) \in \Gamma / \mathcal{G}_{z_1}^{z_0}\right\} = \frac{1}{(2\pi\,|(z_1, z_2]\,|)^{d/2}} \times$$

$$\times \int\limits_{\Gamma} \exp\left\{-\frac{|y - \beta(s_1, t_2) - \beta(s_2, t_1) + \beta(s_1, t_1)|^2}{2\,|(z_1, z_2]\,|}\right\} dy;$$

$$\mathbf{P}\{\beta(z) = 0;\ z \in [s_0, \infty) \times \{t_0\} \cup \{s_0\} \times [t_0, \infty)\} = 1.$$

$z_0$-Процессом броуновского движения вдоль прямой $s = s_1$ будем называть функцию $\beta_{s_1 \cdot}(z, \omega): I_{z_0} \times \Omega \to R^d$ на прямой $s = s_1$, $\mathbf{P}$-п. н. непрерывную и удовлетворяющую условию $(z_0)$, такую, что при любых $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$, $\Gamma \in \mathcal{B}_{R^d}$

$$\mathbf{P}\left\{\beta_{s_1 \cdot}(s_1, t_2) \in \Gamma / F_{\infty t_1}^{z_0}\right\} = \frac{1}{[2\pi(t_2 - t_1)]^{d/2}} \int\limits_{\Gamma} \exp\left\{-\frac{|y - \beta_{s_1 \cdot}(s_1, t_1)|^2}{2\,|t_2 - t_1|}\right\} dy;$$

$$\mathbf{P}\{\beta_{s_1 \cdot}(s_1, t_0) = 0\} = 1.$$

**Теорема 3.** *Пусть $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F}^{z_0})$; функции $a$, $a_{s_0 \cdot}$, $a_{\cdot t_0}$ симметричны, удовлетворяют условиям $(z_0)$, $(t_0)$, $(s_0)$ соответственно, а также следующему условию:*

$$A'|\lambda|^2 \leqslant \langle \lambda, a\lambda \rangle \leqslant A|\lambda|^2 \quad \forall \lambda \in R^d,$$

*где $0 < A' < A < \infty$. Непрерывный ($\mathbf{P}$-п. н.) процесс $\{\theta(z, \omega), z \in I_{z_0}\}$ является сильным $e$-мартингалом относительно $(z_0, x, a_{s_0 \cdot}, a_{\cdot t_0}, a)$ и меры $\mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда существуют $z_0$-процессы броуновского движения $\beta$, $\beta_{s_0 \cdot}$, $\beta_{\cdot t_0}$ относительно $\mathbf{P}$ такие, что:*

a) $\mathbf{P}\{\theta(s_0, t_0) = x\} = 1$;

b) $\theta(s_0, t) - \theta(s_0, t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \sigma_{s_0 \cdot}(v)\, d\beta_{s_0 \cdot}(v)$, $t \geqslant t_0$ $\mathbf{P}$-п. н.;

$$\theta(s, t_0) - \theta(s_0, t_0) = \int\limits_{s_0}^{s} \sigma_{\cdot t_0}(u)\, d\beta_{\cdot t_0}(u), \quad s \geqslant s_0;$$

c) $\theta(z_0, z] = \int\limits_{z_0}^{z} \sigma(u)\, d\beta(u)$, $z \in I_{z_0}$ $\mathbf{P}$-п. н.,

*где $\sigma$, $\sigma_{s_0 \cdot}$, $\sigma_{\cdot t_0}$ — положительно определенные симметричные квадратные корни из $a$, $a_{s_0 \cdot}$, $a_{\cdot t_0}$.*

Доказательство. В силу результатов [1] достаточно проверить справедливость условий «с» или (5).

Пусть $\theta$ — сильный $e$-мартингал. Тогда положим $\beta(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \sigma^{-1}(u)\, d\theta(u)$.

Нетрудно проверить, что $\{\beta(z), z \in I_{z_0}\}$ обладает свойствами: $\beta(z)$ —

**P**-п. н. непрерывен с вероятностью 1, обращается в 0 на границе $I_{z_0}$. Кроме того, для любых $z_1, z_2 \in I_{z_0}$, $z_1 \leqslant z_2$, $\lambda \in R^d$

$$\mathbf{E}\left\{\exp\left\{\langle\lambda, \beta(z_1, z_2]\rangle - \frac{1}{2}|\lambda|^2 \cdot |(z_1, z_2]|\right\} \Big/ G_{z_1}^{z_0}\right\} = \mathbf{E}\left\{\exp\left\{\langle\lambda, \beta(z_1, z_2]\rangle - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}\left\langle\lambda, \int\limits_{(z_1, z_2]} (\sigma^{-1}(u))^* a(u)\sigma(u)\cdot\lambda du\right\rangle\right\} \Big/ G_{z_1}^{z_0}\right\} = 1 \qquad \mathbf{P}\text{-п. н.}$$

Отсюда следует, что $\beta$ — $z_0$-процесс броуновского движения. Соотношение «с» доказывается так же, как в теореме 3.3 [1], с использованием свойства IV.

Обратно, если $\theta$ удовлетворяет соотношениям «a», «b», «c», то он является сильным $e$-мартингалом ввиду IV и того, что $\beta$ — сильный $e$-мартингал, связанный с единичной матрицей ($a \equiv E$).

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Stroock D. W., Varadhan S. R. S.** Diffusion processes with continuous Coefficients (I).— Comm. on Pure and Applied Math., 1969, v. 22, N 3.
2. **Гихман И. И., Пясецкая Т. Е.** Об одном классе стохастических дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих двупараметрический белый шум.— В кн.: Предельные теоремы для случайных процессов. Киев, 1977, с. 71—92.
3. **Tudor C.** A theorem concerning the existence of the weak solution of the stochastic equation with continuous coefficients in the plane.— Revue Roumain de Mathématiques Pure et Appliquées, 1977, v. 22, N 9.
4. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Теория случайных процессов. Т. 3. М.: Наука, 1975.
5. **Дуб Дж. Л.** Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.
6. **Cairoli R.** Une inegalite pour Martingales a indices multiples et ses Applicationes.— Lecture Note in Mathematics, 1970, v. 124, p. 1—27.
7. **Мейер П.-А.** Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973.
8. **Cairoli R., Walsh J. B.** Stochastic integral in the plane.— Acta Math., 1975, v. 134, p. 111—183.


# О КВАДРАТИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ


*Г. П. КАРЕВ*


Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $\{\mathfrak{F}_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{F}$ — возрастающая последовательность $\sigma$-алгебр, и для любого $n$ $X_n$ — $\mathfrak{F}_n$-измеримая случайная величина такая, что $E|X_n| < \infty$. Обозначим

$$S_n^2(X) = X_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})^2, \; S^2(X) = X_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(X_k - X_{k-1})^2.$$

Величина $S(X)$ называется квадратической вариацией случайной последовательности $X = \{X_n\}$.

Свойства квадратической вариации мартингалов исследовались во многих работах (см. [1—7]). Так, Аустин [1] доказал, что если $X$ — $L_1$-ограниченный мартингал, то

$$S(X) < \infty \text{ почти всюду,} \tag{1}$$

а Буркхольдер [2, 3] установил, что для любого $\lambda > 0$

$$\mathbf{P}(S(X) \geqslant \lambda) \leqslant \frac{c}{\lambda}\sup \mathbf{E}|X_n|, \; c = \text{const} \leqslant 3. \tag{2}$$

В данной статье мы укажем условия, при которых аналогичные соотношения выполняются для произвольных случайных последовательностей.