удовлетворяет условиям (6); согласно (7), имеем

$$E \left(\exp \frac{\alpha}{X^*} \sum_{k=1}^{\tau} \frac{(X_k - X_{k-1})^2}{X_n^*} \right) \leq \frac{e^{2\alpha}}{1 - 4\alpha(1+M)},$$

а при $\alpha = 1/8(1+M)$ получаем

$$E \left[(X^* < \lambda) \exp \left(\frac{1}{8(1+M)\lambda^2} \sum_{k=1}^{\tau} (X_{k+1} - X_k)^2 \right) \right] \leq 2e^{1/4(1+M)}.$$

Отсюда следует ограниченность

$$E \left[(X^* < \lambda) \exp \left(\frac{1}{8(1+M)\lambda^2} S_{\tau}^2 \right) \right],$$

так как $X_0^2 \leq \lambda^2$ на множестве $\{X^* < \lambda\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. G. Austin. A sample function property of martingales.— Ann. Math. Stat., 1966, v. 37, N 5, (1966), p. 1369—1397.
2. D. L. Burkholder. Martingale transforms.— Ann. Math. Stat., 1966, v. 37, N 6, p. 1494—1504.
3. D. L. Burkholder. Distribution function inequalities for martingales.— Ann. Probab., 1973, v. 1, N 1, p. 19—42.
4. B. I. Davis. On the integrability of martingale square functions.— Israel J. Math., 1970, v. 8, N 2, p. 187—190.
5. A. M. Garsia. Martingale Inequalities. Seminar Note on Recent Progress, 1973.
6. P.-A. Meyer. Martingales and stochastic integrals I.— In: Lecture Notes in Math., 1972, N 284.
7. Новиков А. А. Мартингалные неравенства.— Труды школы-семинара по теории случайных процессов. Ч. II. Друскининкай, 1974, Вильнюс, 1975, с. 89—126.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. В. НАГАЕВ

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины (с. в.), принимающие значения в сепарабельном банаховом пространстве B , $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $S_{kj} = \sum_{h=1}^j X_h$. Норму в пространстве B будем обозначать символом $|\cdot|$.

Цель настоящей статьи — получение оценок для вероятностей $P(|S_n| \geq u)$ (теоремы 1, 2, 3, следствие 3). Эти оценки формулируются в несколько других терминах, нежели в работах [1, 2]. Вместо $E|S_n|$ используется величина u_0 , которая определяется соотношением $P(|S_n| \geq u_0) \leq \alpha$, где α — некоторая фиксированная постоянная. Ясно, что u_0 можно выбрать так, что $u_0 \leq E|S_n|/\alpha$.

Не столь очевидно то, что $E|S_n|$ оценивается сверху в терминах u_0 и $\sum_{j=1}^n E|X_j|^2$ (следствие 5, см. также [10]).

Что касается применяемого нами метода доказательства, то он также отличается от методов [1, 2]. Его можно рассматривать как модификацию метода, который использовался в работе [3, гл. VI, § 3].

Напомним, что с. в. X со значениями в B называется симметричной, если X и $-X$ одинаково распределены. С. в. X^s называется симметриза-

цией X , если $X^s = X' - X''$, где с. в. X' и X'' независимы и $L(X') = L(X'')$.

Положим $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} |S_k|$, $\bar{M}_n = \max_{1 \leq k \leq j} |S_{kn}|$.

Предложение 1. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ симметричны, то

$$P(M_n \geq u) \leq 2P(|S_n| \geq u). \quad (1)$$

Это предложение является обобщением известного неравенства Леви. Доказательство можно найти, например, в [4, с. 27–28, и 5].

Предложение 2. Пусть X — любая с. в. со значениями в B . Тогда

$$\frac{1}{2} P(|X^s| \geq 2u) \leq P(|X| \geq u) \leq P(|X^s| \geq u - v) / P(|X| \leq v). \quad (2)$$

Доказательство. Левая часть неравенства (2) доказывается точно так же, как в одномерном случае (см., например, [6, с. 259]).

Докажем правую часть. Очевидно, $|X^s| \geq |X'| - |X''|$, где X' и X'' независимы и $L(X') = L(X'')$.

С другой стороны,

$$\{|X'| \geq u, |X''| \leq v\} \subseteq \{|X'| - |X''| \geq u - v\}.$$

Следовательно,

$$P(|X^s| \geq u - v) \geq P(|X| \geq u)P(|X| \leq v).$$

Предложение доказано.

Заметим, что правую часть (2) можно легко извлечь из более общего утверждения, содержащегося в работе [7, с. 81, леммы 4.1].

Предложение 3. Для любых неотрицательных s, t, u

$$P(M_n \geq t + s + u) \leq P(M_n \geq t) P(\bar{M}_n \geq s) + \sum_1^n P(|X_j| > u). \quad (3)$$

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $P(M_n \geq t) > 0$. Положим $\tau = \inf \{k : |S_k| \geq t\}$. Легко видеть, что

$$P(M_n \geq t + s + u) \leq \sum_1^n \int_{t < |x| \leq t+u} P(\max_{k \leq j \leq n} |S_{kj} + x| \geq t + s + u) P(\tau = k, S_k \in dx) + \sum_1^n P(\tau = k, |S_k| > t + u) \equiv A + B. \quad (4)$$

Очевидно, $|S_{jn} + x| \leq |S_{jn}| + |x|$. Поэтому

$$\{|S_{jn} + x| \geq t + s + u\} \subseteq \{|S_{jn}| \geq t + s + u - |x|\}.$$

Следовательно, $\{|S_{jn} + x| \geq t + s + u, |x| \leq t + u\} \subseteq \{|S_{jn}| \geq s\}$.

Используя предыдущее соотношение, заключаем, что

$$A \leq \sum_1^n P(\max_{k \leq j \leq n} |S_{kj}| \geq s) P(\tau = k) \leq P(\bar{M}_n \geq s) P(M_n \geq t), \quad (5)$$

поскольку $P(\max_{k \leq j \leq n} |S_{kj}| \geq s) \leq P(\bar{M}_n \geq s)$

и $\sum_1^n P(\tau = k) = P(M_n \geq t)$.

Оценим теперь B . Нетрудно видеть, что

$$\{\tau = k, |S_k| > t + u\} \subseteq \{|X_k| > u\}. \quad (6)$$

Сопоставляя неравенства (4)–(6), получаем (3). Предложение 3 доказано.

Отметим, что доказательство предложения 3, по существу, совпадает с доказательством леммы 4.4 в работе [7].

Следствие 1. Для любых неотрицательных s, t, u

$$P(M_n \geq t + s + u) \leq P(M_n \geq t) P(M_n \geq s/2) + \sum_1^n P(|X_j| > u). \quad (7)$$

Доказательство. Очевидно, $|S_{jk}| \leq |S_j| + |S_k|$. Следовательно, $\bar{M}_n \leq 2M_n$. Это означает, что

$$P(\bar{M}_n \geq s) \leq P(M_n \geq s/2).$$

Остается подставить эту оценку в правую часть (3).

Предложение 4. Для любого целого $m > 1$

$$P(M_n \geq \lambda) \leq P^m(M_n \geq \lambda/4m) + P(M_n < \lambda/4m)^{-1} \sum_1^n P(|X_j| > \lambda/2m).$$

Аналогичное неравенство получено в [3, с. 454] для ограниченных с. в. со значениями в гильбертовом пространстве.

Доказательство. Полагая в (7) $t = (k-1)\lambda/m, s = \lambda/2m, u = \lambda/2m$, имеем

$$P(M_n \geq k\lambda/m) \leq P(M_n \geq (k-1)\lambda/m) P(M_n \geq \lambda/4m) + \sum_1^n P(|X_j^t| > \lambda/2m).$$

Пусть
$$a = P(M_n \geq \lambda/4m); \quad b = \sum_1^n P(|X_j| > \lambda/2m);$$

$$a_k = P(M_n \geq k\lambda/m).$$

Тогда $a_k \leq aa_{k-1} + b, k \geq 2$. Отсюда

$$a_m \leq a_1 a^{m-1} + b \sum_0^{m-1} a^k \leq a^m + b/(1-a).$$

С другой стороны, $a_m = P(M_n \geq \lambda)$. Предложение доказано.

Следствие 2. Если $X_j, j = \overline{1, n}$, симметричны, то для любого целого $m > 1$, такого, что $P(|S_n| \geq \lambda/4m) < 1/2$,

$$P(|S_n| \geq \lambda) \leq 2^m P^m(|S_n| \geq \lambda/4m) + (1 - 2P(|S_n| \geq \lambda/4m))^{-1} \sum_1^n P(|X_j| > \lambda/2m).$$

Доказательство. Достаточно заметить, что $P(|S_n| \geq \lambda) \leq P(M_n \geq \lambda)$ и применить предложения 1 и 4.

Теорема 1. Если $u_0 > 0$ и $t > 0$ таковы, что

$$P(M_n \geq u_0) \leq 1/6, \quad A_t/u_0^t \leq 1/36,$$

то $\forall u > u_0$

$$P(M_n \geq u) < \frac{1}{2} \exp \left\{ -c_0 \left(\frac{u}{u_0} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} \right\} + 11 \cdot 3^{t+1} A_t/u^t,$$

где $c_0 = (\ln 3)/2, A_t = \sum_1^n E|X_i|^t$.

Доказательство. Согласно предложению 3,

$$P(M_n \geq 3u) \leq P^2(M_n \geq u) + A_t/u^t.$$

Положим

$$u_k = 3^k u_0, \quad k \geq 1, \quad \varepsilon = A_t/u_0^t, \quad a_k = P(M_n \geq u_k).$$

Тогда

$$a_k \leq a_{k-1}^2 + \varepsilon/3^{(k-1)t}. \quad (8)$$

Пусть

$$k_0 = \max \{n : 3^{2k} \varepsilon/3^{(k-1)t} \leq 1/4\}.$$

Заметим, что функция 3^{2u-ut} выпуклая. Поэтому

$$\max_{1 \leq k \leq k_0} 3^{2k} \varepsilon/3^{(k-1)t} = \max [9\varepsilon, 3^{2k_0} \varepsilon/3^{(k_0-1)t}] \leq 1/4. \quad (9)$$

Положим $\lambda_k = 3^{2k}$, $b_k = a_k \lambda_k$. Тогда

$$b_k \leq b_{k-1}^2 + \varepsilon 3^{2k-(k-1)t},$$

поскольку $\lambda_k = \lambda_{k-1}^2$.

Принимая во внимание (9), получаем $b_k \leq b_{k-1}^2 + 1/4$, $1 \leq k \leq k_0$. Очевидно, $b_0 = \lambda_0 a_0 \leq 1/2$, а значит, и $b_k \leq 1/2$ для любого $k \leq k_0$. Это означает, что для $k \leq k_0$

$$a_k \leq 3^{-2k}/2. \quad (10)$$

Пусть $u_{k-1} \leq u \leq u_k$. Тогда

$$\mathbf{P}(M_n \geq u) \leq \mathbf{P}(M_n \geq u_{k-1}) \leq 3^{-2^{k-1}}/2.$$

Очевидно, $2^{k-1} = 3^{k \cdot (\ln 2)/\ln 3} / 2 = (u_k/u_0)^{(\ln 2)/\ln 3} / 2$.

Следовательно, $\forall u \leq u_{k_0}$

$$\mathbf{P}(M_n \geq u) \leq \frac{1}{2} \exp \left\{ -c_0 (u/u_0)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} \right\}, \quad (11)$$

где $c_0 = (\ln 3)/2$.

Рассмотрим теперь $u > u_{k_0}$. Очевидно, $\forall n \geq 1$ имеет место $a_n \leq a_{n-1}$. Следовательно, $\forall k > k_0$

$$a_k \leq a_{k_0} a_{k-1} + \varepsilon/3^{(k-1)t}.$$

Отсюда

$$a_k \leq a_{k_0}^{k-k_0+1} + \varepsilon \sum_{k_0+1}^k a_{k_0}^{k-j} / 3^{(j-1)t}. \quad (12)$$

Очевидно,

$$\Sigma \equiv \sum_{k_0+1}^k a_{k_0}^{k-j} / 3^{(j-1)t} = \sum_{k_0+1}^k (3^t a_{k_0})^{k-j} / 3^{(k-1)t}. \quad (13)$$

По определению k_0 выполнено $3^{2^{k_0+1}-k_0 t} \varepsilon > 1/4$. Отсюда

$$3^{2^{k_0}-k_0 t/2} > \varepsilon^{-1/2}/2. \quad (14)$$

В частности,

$$3^{k_0 t/2 - 2^{k_0}} < 1/3. \quad (15)$$

Из (10) и (15) следует, что

$$3^t a_{k_0} < 1/6, \quad (16)$$

если $k_0 \geq 2$.

Комбинируя (13) и (16), заключаем, что при $k_0 \geq 2$

$$\Sigma \leq 6/5 \cdot 3^{(k-1)t}. \quad (17)$$

Вследствие (10) и (14) $a_{k_0} \leq (\varepsilon/3^{k_0 t})^{1/2}$. Поэтому

$$a_{k_0}^{k-k_0+1} \leq \varepsilon^{(k-k_0+1)/2} / 3^{k_0(k-k_0+1)t/2}. \quad (18)$$

Легко видеть, что $\forall k > k_0$

$$k_0(k - k_0 + 1) \geq 2(k - 1), \quad (19)$$

если $k_0 \geq 2$. С другой стороны, $\forall k > k_0$

$$\varepsilon^{(k-k_0+1)/2} \leq \varepsilon. \quad (20)$$

Сравнивая неравенства (18) — (20), получаем

$$a_{k_0}^{k-k_0+1} \leq \varepsilon/3^{(k-1)t}, \quad k > k_0, \quad k_0 \geq 2. \quad (21)$$

Из (12), (17) и (21) следует

$$a_k \leq 3\varepsilon/3^{(k-1)t}, \quad k > k_0, \quad k_0 \geq 2. \quad (22)$$

Допустим теперь, что $k_0 = 1$. Согласно (8),

$$a_1 \leq a_0^2 + \varepsilon \leq 1/18. \quad (23)$$

С другой стороны, в соответствии с определением k_0

$$3^{4-t}\varepsilon > 1/4. \quad (24)$$

Следовательно, $3^t < 4 \cdot 3^t \varepsilon \leq 9$.

$$(25)$$

Сравнивая (23) и (25), заключаем, что

$$3^t a_1 < 1/2. \quad (26)$$

Из (13) и (25) следует

$$\Sigma < 2/3^{(k-1)t}. \quad (27)$$

С другой стороны, согласно (24),

$$3^{-t}\varepsilon > 1/4 \cdot 3^4. \quad (28)$$

Сопоставляя (23) и (28), получаем $a_1 < 18\varepsilon/3^t$. Так как $18\varepsilon \leq 1/2$, то $\forall k > 1$ имеет место неравенство

$$a_1^k < 9\varepsilon/3^{tk}. \quad (29)$$

Комбинируя (12), (27) и (29), получаем

$$a_k < 11\varepsilon/3^{(k-1)t}, \quad k_0 = 1, \quad k > 1. \quad (30)$$

Вследствие (22) и (30), заключаем, что $\forall k_0$ выполнено $a_k < 11\varepsilon/3^{(k-1)t}$, если $k > k_0$. Это означает, что

$$\mathbf{P}(M_n \geq u_k) < 11 \cdot 3^t A_t / u_k^t, \quad k > k_0.$$

Если $u_{k-1} < u < u_k$, то

$$\mathbf{P}(M_n \geq u) \leq \mathbf{P}(M_n \geq u_{k-1}) < 11 \cdot 3^{t+1} A_t / u^t. \quad (31)$$

Неравенства (11) и (31) дают утверждение теоремы 1.

Следствие 3. Пусть X_j , $j = 1, n$, симметричны и $u_0 > 0$, $t > 0$ таковы, что

$$\mathbf{P}_i(|S_n| \geq u_0) \leq 1/12, \quad A_t / u_0^t \leq 1/36.$$

Тогда $\forall u > u_0$

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq u) \leq \frac{1}{2} \exp \left\{ -c_0 (u/u_0)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} \right\} + 11 \cdot 3^{t+1} A_t / u^t,$$

где $c_0 = (\ln 2)/\ln 3$.

Доказательство. Согласно неравенству (1),

$$\mathbf{P}(M_n \geq u_0) \geq 2\mathbf{P}(|S_n| \geq u_0) \leq 1/6.$$

Таким образом, выполняются условия теоремы 1. Остается заметить, что

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq u) \leq \mathbf{P}(M_n \geq u).$$

Теорема 2. Если u_0 и t удовлетворяют условиям

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq u_0) \leq 1/24, \quad A_t/u_0^t \leq 1/36, \quad (32)$$

то $\forall u > u_0$

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq u) < \exp \left\{ -c_0 \left((u - u_0)/2u_0 \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} \right\} + 6^{t+2} A_t/2 (u - u_0)^t,$$

где $c_0 = (\ln 3)/2$.

Доказательство. Согласно первому из неравенств (2)

$$\mathbf{P}(|S_n^s| \geq 2u_0) \leq 2\mathbf{P}(|S_n| \geq u_0) \leq 1/12. \quad (33)$$

Легко видеть, что $\forall t > 0$

$$\mathbf{E}|X_j^s|^t \leq 2^t \mathbf{E}|X_j|^t.$$

Поэтому

$$A_t^s \equiv \sum_1^n \mathbf{E}|X_j^s|^t \leq 2^t A_t. \quad (34)$$

Следовательно,

$$A_t^s/(2u_0)^t \leq 1/36. \quad (35)$$

Применяя следствие 3, заключаем, что $\forall u \geq 2u_0$

$$\mathbf{P}(|S_n^s| \geq u) < \frac{1}{2} \exp \left\{ -c_0 \left(\frac{u}{2u_0} \right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} \right\} + 11 \cdot 3^{t+1} A_t^s/u^t.$$

Отсюда согласно второму из неравенств (2) и неравенству (34)

$$\mathbf{P}(|S_n| \leq u_0) \mathbf{P}(|S_n| \geq u) < \frac{1}{2} \exp \left\{ -c_0 \left((u - u_0)/2u_0 \right)^{\ln 2/\ln 3} \right\} + \\ + 33 \cdot 6^t A_t/(u - u_0)^t,$$

где $u \geq 3u_0$.

Остается воспользоваться оценкой

$$\mathbf{P}(|S_n| \leq u_0) \geq 23/24 > 1/2. \quad (36)$$

Теорема 3. Пусть u_0 и t удовлетворяют условиям (32). Тогда для каждого целого $m > 1$ существуют постоянные $c_0(m)$, $c_1(m)$, $c_2(t, m)$ такие, что $\forall u \geq (8m + 1)u_0$:

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq u) \leq c_1(m) \exp \left\{ -c_0(m) \left((u - u_0)/u_0 \right)^{\ln 2/\ln 3} \right\} + \\ + c_2(t, m) \left(A_t/(u - u_0)^t \right)^m + \frac{6}{5} \sum_1^n \mathbf{P}(|X_j| > (u - u_0)/2m). \quad (37)$$

Можно положить

$$c_0(m) = 2^{-1} m (8m)^{-(\ln 2)/\ln 3} \ln 3; \quad c_1(m) = 2^m; \quad c_2(t, m) = (11 \cdot 3^{t+1} \cdot 2^{3t+2} m^t)^m.$$

Доказательство. Согласно второму из неравенств (2),

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq u) \leq \mathbf{P}(|S_n^s| \geq u - u_0) / \mathbf{P}(|S_n| \leq u_0). \quad (38)$$

С другой стороны, в силу (33) $\forall u \geq (8m + 1)u_0$

$$\mathbf{P}(|S_n^s| \geq (u - u_0)/4m) \leq \mathbf{P}(|S_n^s| \geq 2u_0) \leq 1/12. \quad (39)$$

Применяя теперь следствие 2, имеем

$$\mathbf{P}(|S_n^s| \geq u - u_0) \leq 2^m \mathbf{P}^m(|S_n^s| \geq (u - u_0)/4m) + \\ + \frac{6}{5} \sum_1^n \mathbf{P}(|X_j| > (u - u_0)/2m).$$

В силу (35) и (39) для $2u_0$ выполнены условия следствия 3. Поэтому $\forall u \geq (8m + 1)u_0$

$$\mathbf{P}(|S_n^s| \geq (u - u_0)/4m) \leq \frac{1}{2} \exp\{-c_0((u - u_0)/8u_0m)^{(1n2)/1n3}\} + \\ + 11 \cdot 3^{t+1} (4m)^t A_t^s / (u - u_0)^t.$$

Сравнивая два последних неравенства, заключаем, что

$$\mathbf{P}(|S_n^s| \geq u - u_0) \leq 2^m \left(\frac{1}{2} \exp\{-c_0((u - u_0)/8u_0m)^{(1n2)/1n3}\} + \right. \\ \left. + 11 \cdot 3^{t+1} (4m)^t A_t^s / (u - u_0)^t \right)^m + \frac{6}{5} \sum_1^n \mathbf{P}(|X_j| > (u - u_0)/2m). \quad (40)$$

Неравенства (34), (36), (38), (40) и $(a + b)^m \leq 2^{m-1}(a^m + b^m)$ дают (37).

Замечание 1. Если $\mathbf{P}(|S_n| \geq u_0) \leq 1/24$, но $A_t/u_0^t > 1/36$, нельзя сразу воспользоваться оценкой (37). В этом случае удобно положить $u'_0 = (36A_t)^{1/t}$. Поскольку u'_0 удовлетворяет условиям (32), $\forall u > (8m + 1)u'_0$

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq u) < c_3(t, m) (A_t/u^t)^m + \frac{6}{5} \sum_1^n \mathbf{P}(|X_j| > 4u_0/(8m + 1)).$$

Кроме (37), здесь использовано неравенство $u - u'_0 > 8mu/(8m + 1)$, которое справедливо $\forall u > (8m + 1)u'_0$.

С другой стороны, если $u \leq u'_0$, то

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq u) \leq 1 \leq (u'_0/u)^{tm} \leq 36^m (A_t/u^t)^m$$

Положим $B_n^2 = \sum_1^n \mathbf{E}|X_j|^2$.

Замечание 2. Пусть B имеет тип 2, т. е. существует постоянная C такая, что $\mathbf{E}|S_n|^2 \leq CB_n^2$ для любых $X_1, X_2, \dots, X_n$ с нулевыми математическими ожиданиями. Тогда $u_0 = (24C)^{1/2} B_n$ удовлетворяет условию $\mathbf{P}(|S_n| \geq u_0) \leq 1/24$.

Применяя теперь неравенство (37), приходим к бесконечномерному аналогу оценки (47) из работы [8] с той разницей, что вместо $(u/B_n)^2$ появляется $(u/B_n)^{(1n2)/1n3}$. От этого недостатка свободны неравенства, полученные в [1, 2].

Теорема 4. Если $\mathbf{P}(|S_n| \geq u_0) \leq 1/24$, то $\forall t > 1$ существует постоянная $a(t)$ такая, что¹⁾

$$\mathbf{E}|S_n|^t < a(t) \max[u_0^t, 36A_t]. \quad (41)$$

В качестве $a(t)$ можно взять

$$a(t) = 4t (17/16c_0(2))^{(t \ln 3)/\ln 2} \Gamma\left(\frac{t \ln 3}{\ln 2}\right) + \\ + (17/16)^{t-1} 16^{-t} 36^{-2} c_2(t, 2) + (17/4)^t 36^{-1},$$

где постоянные $c_0(2)$ и $c_2(t, 2)$ те же, что в теореме 3.

¹⁾ Для симметричных X_i несколько более общий результат получен в [9, с. 8, неравенство 3.17].

Доказательство. Предположим сначала, что выполнены оба условия (32). Полагая в (37) $m = 2$, имеем $\forall u > 17u_0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|S_n| \geq u) \leq & 4 \exp\{-c_0(2)((u-u_0)/u_0)^{\alpha_0}\} + c_2(t, 2)(A_t/(u-u_0)^t)^2 + \\ & + \frac{6}{5} \sum_1^n \mathbf{P}(|X_j| > (u-u_0)/4), \end{aligned} \quad (42)$$

где $\alpha_0 = (\ln 2)/\ln 3$.

Очевидно,

$$\mathbf{E}|S_n|^t = t \int_0^\infty u^{t-1} \mathbf{P}(|S_n| \geq u) du \equiv t \int_0^{17u_0} + t \int_{17u_0}^\infty. \quad (43)$$

Нетрудно видеть, что

$$t \int_0^{17u_0} \leq 17^t u_0^t. \quad (44)$$

Оценим теперь $\int_{17u_0}^\infty$. Очевидно, $u > 17u_0 \Rightarrow u - u_0 > 16u_0$. Следовательно, $\forall u > 17u_0$

$$u = u - u_0 + u_0 < \frac{17}{16}(u - u_0).$$

Отсюда

$$\int_{17u_0}^\infty \frac{u^{t-1}}{(u-u_0)^{2t}} dt < (17/16)^{t-1} t^{-1} (16u_0)^{-t}.$$

Так как

$$A_t < u_0^t/36, \quad (45)$$

то

$$A_t^2 \int_{17u_0}^\infty \frac{u^{t-1}}{(u-u_0)^{2t}} dt < (17/16)^{t-1} 16^{-t} 36^{-2} t^{-1} u_0^t. \quad (46)$$

Рассмотрим далее интеграл

$$I = \int_0^\infty u^{t-1} \exp\{-c_0(2)((u-u_0)/u_0)^{\alpha_0}\} du.$$

Очевидно, $u > 17u_0 \Rightarrow u - u_0 > (16/17)u$.
Следовательно, $\forall u > 17u_0$

$$(u - u_0)^{\alpha_0} > (16/17) u^{\alpha_0}.$$

Пользуясь данной оценкой, без труда получаем

$$I < u_0^t \int_0^\infty u^{t-1} \exp\{-(16/17)c_0(2)u^{\alpha_0}\} du = u_0^t (17/16c_0(2))^{t/\alpha_0} \Gamma(t/\alpha_0). \quad (48)$$

Наконец, вследствие (47)

$$\begin{aligned} \int_{17u_0}^\infty u^{t-1} \mathbf{P}(|X_j| > (u-u_0)/4) du & < (17/4)^t \int_0^\infty u^{t-1} \mathbf{P}(|X_j| > u) du = \\ & = (17/4)^t t^{-1} \mathbf{E}|X_j|^t. \end{aligned} \quad (49)$$

В силу (45) и (49)

$$\sum_1^n \int_{17u_0}^{\infty} u^{t-1} P(|X_j| > (u - u_0)/4) du < (17/4)^t 36^{-1} u_0^t. \quad (50)$$

Из (42), (46), (48) и (50) следует

$$t \int_{17u_0}^{\infty} < u_0^t (4t (17/16 c_0 (2))^{t/\alpha_0} \Gamma(t/\alpha_0) + \\ + (17/16)^{t-1} 16^{-t} 36^{-2} c_2(t, 2) + (17/4)^t 36^{-1}). \quad (51)$$

Комбинируя (43), (44) и (51), получаем

$$E|S_n|^t < a(t) u_0^t, \quad (52)$$

если выполнены условия (32).

Предположим теперь, что $A_t/u_0^t > 1/36$. Тогда $u_0' = (36A_t)^{1/t}$ удовлетворяет условиям (32) и согласно (52)

$$E|S_n|^t < 36a(t)A_t. \quad (53)$$

Из (52) и (53) следует утверждение теоремы.

Следствие 4. Для любого $t > 1$

$$E|S_n|^t < 12a(t) \max [2(E|S_n|)^t, 3A_t].$$

Доказательство. Очевидно, $P(|S_n| \geq u) \leq E|S_n|/u$. Поэтому можно положить в (41) $u_0 = 24E|S_n|$, что и заканчивает доказательство. Следствие 4 уточняет и обобщает теорему 2 из [2].

Следствие 5. Если $P(|S_n| \geq u_0) \leq 1/24$, то

$$E|S_n|^2 < a(2) \max [u_0^2, 36B_n^2]; \quad (54)$$

$$E|S_n| < a^{1/2}(2) \max [u_0, 6B_n]. \quad (55)$$

Доказательство. Неравенство (54) получается из (41) при $t = 2$. Что касается неравенства (55), то оно следует из (54) и неравенства $E|S_n| \leq (E|S_n|^2)^{1/2}$.

Математическое ожидание $E|S_n|$ часто используется в исследованиях, посвященных распределениям в банаховых пространствах (см., например, [1, 2, 7]).

Следствие 5 показывает, что вместо него во многих случаях можно пользоваться величиной u_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Юринский В. В. Показательные оценки для больших отклонений.— Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, № 1, с. 152—153.
2. Пинелис И. Ф. О распределении сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве.— Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. 23, № 3, с. 630—637.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 1. М.: Наука, 1971.
4. Кахан Ж.-П. Случайные функциональные ряды. М.: Мир, 1973.
5. Булдыгин В. В. О неравенстве Леви для случайных величин со значениями в банаховом пространстве.— Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, № 1, с. 154—158.
6. Лозэв М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962.
7. Hoffman-Jorgensen I. Probability in B-spaces.— Aarhus Univ., 1977, 185 p. (Lect. notes ser., N 48).
8. Фук Д. Х., Нагаев С. В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин.— Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, № 4, с. 660—675.
9. Jain N. C., Marcus M. B. Integrability of infinite sums of independent vector-valued random variables.— Trans. Amer. Math. Soc., 1975, v. 212, p. 1—35.
10. Yurinskii V. V. Exponential inequalities for sums of independent random vectors.— J. multivar. anal., 1976, v. 6, N 4, p. 473—499.