

Непрерывной мерой называется непрерывное аддитивное отображение топологической булевой алгебры в топологическую абелеву полугруппу [1]. В статье определяется индуктивный предел направленности непрерывных мер и описываются некоторые его свойства. Индуктивные пределы последовательностей непрерывных мер рассматривались в заметке [2].

1. Индуктивные пределы топологических булевых алгебр и колец

Топологическая алгебра определяется как алгебра с топологией, при которой каждая операция непрерывна по каждой переменной.

1.1. Топологические булевы алгебры и кольца

Назовем булевой алгеброй $(A, \vee, \wedge, \setminus)$ множество A , для которого определены порядок $\leq$, верхняя грань $\vee$, нижняя грань $\wedge$ и относительное дополнение $\setminus$. Булева алгебра $(A, \vee, \wedge, \setminus)$ определяет булево кольцо $(A, +, \cdot)$ с суммой $+$ и произведением $\cdot$. Сумма $+$ в булевом кольце $(A, +, \cdot)$ равна разности $-$, а произведение $\cdot$ идемпотентно: $x + x = 0$, $x \cdot x = x$ ($x \in A$).

Операции $\vee, \wedge, \setminus$ и $+, \cdot$ выражаются друг через друга равенствами

$$x + y = (x \setminus y) \vee (y \setminus x), \quad x \cdot y = x \wedge y;$$

$$x \vee y = x + y + xy, \quad x \wedge y = x \cdot y, \quad x \setminus y = x + x \cdot y.$$

Относительное дополнение $\setminus$ не коммутативно.

Для булевой алгебры $(A, \vee, \wedge, \setminus)$ существует наименьший элемент 0 . Он является нулем кольца $(A, +, \cdot)$. Если для булевой алгебры $(A, \vee, \wedge, \setminus)$ существует наибольший элемент 1 , то он является единицей кольца $(A, +, \cdot)$. Поэтому такой элемент называется единицей булевой алгебры $(A, \vee, \wedge, \setminus)$. Для булевой алгебры с единицей определено дополнение $'$: $x' = 1 \setminus x = 1 + x$, $x \setminus y = x \cdot y'$.

Рассмотрим булеву алгебру $(A, \vee, \wedge, \setminus)$, булево кольцо $(A, +, \cdot)$ и топологию $\mathcal{T}$ для множества A . Условимся, что топология $\mathcal{T}$ согласована с операцией $\circ$ для A , если и только если преобразования $x \rightarrow a \circ x$ и $x \rightarrow x \circ a$ множества A непрерывны при каждом $a \in A$. Булева алгебра $(A, \vee, \wedge, \setminus)$ и топология $\mathcal{T}$, согласованная с каждой из операций $\vee, \wedge, \setminus$ для множества A , образуют топологическую булеву алгебру $(A, \vee, \wedge, \setminus, \mathcal{T})$. Булево кольцо $(A, +, \cdot)$ и топология $\mathcal{T}$, согласованная с каждой из операций $+, \cdot$ для множества A , образуют топологическое булево кольцо $(A, +, \cdot, \mathcal{T})$.

Скажем, что топология $\mathcal{T}$ (секвенциально) согласована с порядком $\leq$ для множества A , если и только если для каждой ограниченной сверху возрастающей (последовательности) направленности в A существует верхняя грань множества значений и (последовательность) направленность сходится к ней, а для каждой ограниченной снизу убывающей (последовательности) направленности в A существует нижняя грань множества значений $(B, \vee, \wedge, \setminus)$ и (последовательность) направленность сходится к ней (ср. [3]).

Рассмотрим подалгебру $(B, \vee, \wedge, \setminus)$ булевой алгебры $(A, \vee, \wedge, \setminus)$ и булево кольцо $(B, +, \cdot)$, определяемое этой подалгеброй. Условимся, что $(B, \vee, \wedge, \setminus)$ — идеал для $(A, \vee, \wedge, \setminus)$, если и только если кольцо $(B, +, \cdot)$ является идеалом для кольца $(A, +, \cdot)$.

Некоторые элементарные свойства топологических булевых алгебр и колец описаны в статье [1].

1.2. Индуктивные пределы топологических булевых алгебр и колец

Рассмотрим возрастающую направленность булевых алгебр $(C_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i)$ и ее индуктивный предел $(C, \vee, \wedge, \setminus)$:

$$C_i \subseteq C_k, \vee_i \subseteq \vee_k, \wedge_i \subseteq \wedge_k, \setminus_i \subseteq \setminus_k \quad (i \leq k); \quad (1)$$

$$C = \cup C_i, \vee = \cup \vee_i, \wedge = \cup \wedge_i, \setminus = \cup \setminus_i.$$

Замечание. Операции являются частями декартовых произведений множеств. Поэтому для них определены включение и объединение.

Для множества C_i возьмем топологию $\mathcal{T}_i$, согласованную с каждой из операций $\vee_i, \wedge_i, \setminus_i$. Будем предполагать, что топология $\mathcal{T}_i$ для C_i индуцируется топологией $\mathcal{T}_k$ для C_k при каждом $i \leq k$:

$$\mathcal{T}_i = C_i \cap \mathcal{T}_k. \quad (2)$$

Класс

$$\mathcal{T} = \{T \mid C_i \cap T \in \mathcal{T}_i \quad (\forall i)\} \quad (3)$$

частей T множества C , следы $C_i \cap T$ которых на каждом множестве C_i принадлежат топологиям $\mathcal{T}_i$, является наибольшей из топологий для C , при которых каждое тождественное вложение $e_i: C_i \rightarrow C$ непрерывно [4, гл. 1, § 2, п. 4]. Топология $\mathcal{T}$ называется индуктивным пределом направленности топологий $\mathcal{T}_i$ и обозначается $\text{limind } \mathcal{T}_i$.

Рассмотрим отображение $f: C \rightarrow H$ пространства $(C, \mathcal{T})$ в произвольное топологическое пространство $(H, \mathcal{U})$. Из определения индуктивного предела следует [4, гл. 1, § 2, предложение 6] такой

Критерий непрерывности. Отображение f непрерывно, если и только если каждая композиция $f \circ e_i$ непрерывна.

Используя этот критерий, легко доказать

Предложение 1. Топология $\mathcal{T}$ согласована с каждой из операций $\vee, \wedge, \setminus$ для множества C .

Доказательство. Рассмотрим $a \in C$, операцию $\circ$ для C и преобразования s, t множества C , определяемые равенствами $s(x) = a \circ x$, $t(x) = x \circ a$ ($x \in C$).

Пусть $a \in C_i$. Для каждого $j \in J$ существует $k \in J$ такой, что $i \leq k$, $j \leq k$ и $C_i \subseteq C_k$, $C_j \subseteq C_k$. Композиции $s \circ e_j$, $t \circ e_j$ являются сужениями на C_j преобразований множества C_k и вместе с ними непрерывны. Следовательно, непрерывны s, t .

Таким образом, $(C, \vee, \wedge, \setminus, \mathcal{T})$ является топологической булевой алгеброй. Она называется индуктивным пределом направленности топологических булевых алгебр $(C_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i, \mathcal{T}_i)$ и обозначается $\text{limind } (C_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i, \mathcal{T}_i)$.

1.3. Свойства индуктивных пределов направленностей

Предложения этого раздела описывают некоторые элементарные свойства топологии $\mathcal{T} = \text{limind } \mathcal{T}_i$.

Критерий замкнутости. Множество T' замкнуто при топологии $\mathcal{T}$, если и только если $C_i \cap T'$ замкнуто при топологии $\mathcal{T}_i$ для каждого i . Этот критерий следует непосредственно из определений.

Условимся называть отделимыми топологические пространства, в которых каждая точка отделяется от любой другой некоторой окрестностью. Это свойство эквивалентно замкнутости одноточечных множеств пространства (T_1) .

Следствие. Пространство $(C, \mathcal{T})$ отделимо, если и только если пространство $(C_i, \mathcal{T}_i)$ отделимо для каждого i .

Доказательство. В самом деле, пересечение $C_i \cap \{c\}$ равно 0 или $\{c\}$ для каждого индекса i и точки $c \in C$.

Обозначим $\mathcal{T}'_i$ и $\mathcal{T}'$ классы замкнутых частей множеств C_i и C при топологиях $\mathcal{T}_i$ и $\mathcal{T}$. Равенства (2), (3) эквивалентны равенствам

$$\mathcal{T}'_i = C_i \cap \mathcal{T}'_k \quad (i \leq k), \quad (2')$$

$$\mathcal{T}' = \{T' \mid C_i \cap T' \in \mathcal{T}'_i \quad (\forall i)\}. \quad (3')$$

Предложение 2. Если C_i замкнуто в пространстве $(C_k, \mathcal{T}_k)$ при каждом $i \leq k$, то C_i замкнуто в пространстве $(C, \mathcal{T})$ при каждом i .

Доказательство. В самом деле, если выполнено условие предложения 2, то $C_i \in \mathcal{T}'_k$ и $C_i \cap C_j \in C_j \cap \mathcal{T}'_k = \mathcal{T}'_j$ для каждого $i \leq k$, $j \leq k$. Следовательно, $C_i \in \mathcal{T}'$.

Предложение 3. Если C_i замкнуто в пространстве $(C_k, \mathcal{T}_k)$ при каждом $i \leq k$, то $\mathcal{T}_i = C_i \cap \mathcal{T}$ при каждом i .

Доказательство. Из непрерывности тождественного вложения $e_i: C_i \rightarrow C$ вытекает, что $C_i \cap \mathcal{T} \in \mathcal{T}_i$ для каждого i . Докажем обратное включение. Возьмем произвольное $T_i \in \mathcal{T}_i$ и рассмотрим $T = T_i \cup (C \setminus C_i)$. Ясно, что $T_i = C_i \cap T$. Покажем, что $T \in \mathcal{T}$. Вследствие равенства (2) для каждого $i \leq k$, $j \leq k$ и некоторого $T_k \in \mathcal{T}_k$ имеем

$$\begin{aligned} C_j \cap T &= C_j \cap C_k \cap T = C_j \cap (T_i \cup (C_k \setminus C_i)) = \\ &= C_j \cap ((C_i \cap T_k) \cup (C_k \setminus C_i)) = C_j \cap (T_k \cup (C_k \setminus C_i)) \in \mathcal{T}_j. \end{aligned}$$

Значит, $T \in \mathcal{T}$, $T_i \in C_i \cap \mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_i \subseteq C_i \cap \mathcal{T}$.

Предложение 4. Если $(C_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i)$ является идеалом для $(C_k, \vee_k, \wedge_k, \setminus_k)$ при каждом $i < k$, а топология $\mathcal{T}_i$ (секвенциально) согласована с порядком $\leq_i$ для C_i при каждом i , то топология $\mathcal{T}$ (секвенциально) согласована с порядком $\leq$ для C .

Доказательство. Из условия вытекает, что ограниченность (последовательности) направленности x в C влечет ее ограниченность в некотором C_i . Действительно, пусть $x_\alpha \leq a$ для каждого индекса α , $a \in C_i$ и $x_\alpha, a \in C_j$. Тогда $x_\alpha = a \cdot x_\alpha \in C_i$.

Так как топология $\mathcal{T}_i$ (секвенциально) согласована с порядком $\leq_i$ для множества C_i , то ограниченная возрастающая (последовательность) направленность x сходится в пространстве $(C_i, \mathcal{T}_i)$ к верхней грани u множества своих значений. Следовательно, x сходится к u в пространстве $(C, \mathcal{T})$. Аналогично обстоит дело с убывающими (последовательностями) направленностями.

1.4. Свойства индуктивных пределов последовательностей

Рассмотрим индуктивный предел $(C, \vee, \wedge, \setminus, \mathcal{T})$ возрастающей последовательности топологических булевых алгебр $(C_n, \vee_n, \wedge_n, \setminus_n, \mathcal{T}_n)$:

$$C_n \subseteq C_{n+1}, \vee_n \subseteq \vee_{n+1}, \wedge_n \subseteq \wedge_{n+1}, \setminus_n \subseteq \setminus_{n+1};$$

$$C = \cup C_n, \vee = \cup \vee_n, \wedge = \cap \wedge_n, \setminus = \cup \setminus_n; \quad (4)$$

$$\mathcal{T}_n = C_n \cap \mathcal{T}_{n+1}. \quad (5)$$

Нетрудно доказать, что $\mathcal{T} = \limind \mathcal{T}_n$ обладает еще некоторыми свойствами, кроме указанных в разделе 1.3 (ср. [5]).

Предложение 5. $\mathcal{T}_n = C_n \cap \mathcal{T}$ для каждого n .

Доказательство. Из непрерывности тождественного вложения $e_n: C_n \rightarrow C$ вытекает, что $C_n \cap \mathcal{T} \in \mathcal{T}_n$ для каждого n . Докажем обратное включение. Пусть $T_n \in \mathcal{T}_n$. По принципу индукции из равенства (5) вытекает существование последовательности множеств $T_{n+p} \in \mathcal{T}_{n+p}$ таких, что

$$T_{n+p} = C_{n+p} \cap T_{n+p+q} \quad (p, q \geq 0).$$

Возьмем $T = \bigcup T_{n+q}$ ($q \geq 0$). Так как последовательность множеств T_{n+p} ($p \geq 0$) возрастает, то $T = \bigcup T_{n+p+q}$ ($q \geq 0$) при каждом p . Поэтому

$$C_{n+p} \cap T = \bigcup (C_{n+p} \cap T_{n+p+q}) = T_{n+p} \quad (q \geq 0).$$

В частности, $C_n \cap T = T_n$. В то же время

$$C_m \cap T = C_m \cap (C_n \cap T) \subseteq C_m \cap \mathcal{T}_n = \mathcal{T}_m \quad (m \leq n).$$

Следовательно, $T \in \mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_n \subseteq C_n \cap \mathcal{T}$.

Рассмотрим последовательность x точек C и точку $a \in C$. Из предложения 5 вытекает

Следствие. Если каждое пространство $(C_n, \mathcal{T}_n)$ отделимо, то $x \rightarrow a$ в пространстве $(C, \mathcal{T})$ тогда и только тогда, когда $x \rightarrow a$ в некотором из пространств $(C_n, \mathcal{T}_n)$.

Доказательство. Предположим, что множество значений последовательности x не содержится ни в одном из множеств C_n и $a \in C_m$. В этом случае существует строго возрастающая последовательность номеров $k(n)$ такая, что $x(k(n)) \notin C_{m+n}$ для каждого n . Рассмотрим множество X всех этих значений последовательности x и его дополнение $T = C \setminus X$.

Так как $C_m \cap X = \emptyset$, то $a \in T$. При каждом p множество $C_p \cap X = \{x(k(n)) \mid n < p - m\}$ конечно. Вследствие отделимости пространства $(C_p, \mathcal{T}_p)$ оно замкнуто при топологии $\mathcal{T}_p$. Значит, множество X замкнуто при топологии $\mathcal{T}$ и $T \in \mathcal{T}$. Таким образом, множество T является открытой окрестностью точки a в пространстве $(C, \mathcal{T})$. Отсюда вытекает, что последовательность x вместе с выбранной подпоследовательностью не сходится к точке a в пространстве $(C, \mathcal{T})$.

Предположим, что множество значений последовательности x содержится в множестве C_m и $a \in C_m$ при некотором m . Из предложения 5 следует, что в этом случае сходимость последовательности x к точке a в пространстве $(C, \mathcal{T})$ эквивалентна сходимости x к a в пространстве $(C_m, \mathcal{T}_m)$.

1.5. Секвенциальные топологии

Топологии, при которых каждое секвенциально замкнутое множество замкнуто, условимся называть секвенциальными. Среди секвенциальных топологий для множества C , содержащих топологию $\mathcal{T}$ для C , есть наименьшая. Назовем ее секвенциальной топологией, порожденной $\mathcal{T}$, и обозначим $\mathcal{P}$. Класс замкнутых множеств при топологии $\mathcal{P}$ равен классу секвенциально замкнутых множеств при топологии $\mathcal{T}$. Секвенциальная топология $\mathcal{P}$ является наибольшей из топологий для множества C , при которых секвенциальный предел содержит секвенциальный предел при топологии $\mathcal{T}$ [6, гл. 1, § 7]. Секвенциальные пределы при топологиях $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$ равны. Если $(C, \vee, \wedge, \setminus, \mathcal{T})$ — топологическая булева алгебра, то и $(C, \vee, \wedge, \setminus, \mathcal{P})$ — топологическая булева алгебра [1, п. 5.3].

Рассмотрим индуктивный предел $(C, \vee, \wedge, \setminus, \mathcal{T})$ последовательности топологических булевых алгебр $(C_n, \vee_n, \wedge_n, \setminus_n, \mathcal{T}_n)$; секвенциальную топологию $\mathcal{P}$, порожденную топологией $\mathcal{T}$, и топологическую булеву алгебру $(C, \vee, \wedge, \setminus, \mathcal{P})$; последовательность секвенциальных топологий $\mathcal{P}_n$, порожденных топологиями $\mathcal{T}_n$, и последовательность топологических булевых алгебр $(C_n, \vee_n, \wedge_n, \setminus_n, \mathcal{P}_n)$. Предположим, что для каждого n множество C_n замкнуто в пространстве $(C_{n+1}, \mathcal{T}_{n+1})$ и пространство $(C_n, \mathcal{T}_n)$ отделимо. Из замкнутости C_n в $(C_{n+1}, \mathcal{T}_{n+1})$ следует замкнутость C_n в $(C_{n+1}, \mathcal{P}_{n+1})$, а из отделимости $(C_n, \mathcal{T}_n)$ — отделимость $(C_n, \mathcal{P}_n)$.

Лемма. $\mathcal{P}_n = C_n \cap \mathcal{P}_{n+1}$ для каждого n .

Доказательство. След Y на C_n каждой секвенциально открытой при $\mathcal{T}_{n+1}$ части Z множества C_{n+1} секвенциально открыт при топологии $\mathcal{T}_n$. Вместе с тем $\mathcal{T}_n = C_n \cap \mathcal{T}_{n+1}$. Поэтому $C_n \cap \mathcal{P}_{n+1} \subseteq \mathcal{P}_n$. В то же время

каждая секвенциально открытая при топологии $\mathcal{T}_n$ часть Y множества C_n является следом на C_n множества $Z = Y \cup (C_{n+1} \setminus C_n)$. Из замкнутости множества C_n в пространстве $(C_{n+1}, \mathcal{T}_{n+1})$ вытекает, что Z секвенциально открыто при топологии $\mathcal{T}_{n+1}$. Поэтому $\mathcal{P}_n \subseteq C_n \cap \mathcal{T}_{n+1}$. Следовательно, $\mathcal{P}_n = C_n \cap \mathcal{P}_{n+1}$.

Доказанная лемма и равенства (4) позволяют рассматривать индуктивный предел $\limind \mathcal{P}_n$ последовательности топологий $\mathcal{P}_n$.

Предложение 6. $\mathcal{P} = \limind \mathcal{P}_n$.

Доказательство. Рассмотрим произвольные последовательность x и точку a в C . Из предложения 5 вытекает, что сходимости $x \rightarrow a$ в пространстве $(C, \mathcal{T})$ влечет сходимости $x \rightarrow a$ в некотором пространстве $(C_n, \mathcal{T}_n)$. Так как секвенциальные пределы при топологиях $\mathcal{T}_n$ и $\mathcal{P}_n$ равны, то $x \rightarrow a$ в пространстве $(C, \limind \mathcal{P}_n)$. Следовательно, $x \rightarrow a$ в пространстве $(C, \limind \mathcal{P}_n)$.

Секвенциальная топология $\mathcal{P}$ является наибольшей из топологий $\mathcal{R}$ для множества C , при которых сходимости $x \rightarrow a$ в пространстве $(C, \mathcal{T})$ влечет сходимости $x \rightarrow a$ в пространстве $(C, \mathcal{R})$ для каждой последовательности x и точки a в C . Поэтому из сказанного следует, что $\limind \mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}$.

Рассмотрим произвольные номер n , последовательность x и точку a в C_n . Так как сходимости $x \rightarrow a$ в пространстве $(C_n, \mathcal{T}_n)$ влечет сходимости последовательности $e_n(x) = x$ к точке a в пространстве $(C, \mathcal{T})$, то тождественное вложение $e_n: C_n \rightarrow C$ непрерывно при топологиях $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{P}$ [7, предложение 5.2, следствие 2]. Топология $\limind \mathcal{P}_n$ является наибольшей из топологий $\mathcal{Q}$ для множества C таких, что каждое тождественное вложение $e_n: C_n \rightarrow C$ непрерывно при топологиях $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{Q}$. Поэтому из сказанного следует, что $\mathcal{P} \subseteq \limind \mathcal{P}_n$. Предложение 6 доказано.

1.6. Индуктивный предел замыканий

Рассмотрим снова возрастающую направленность топологических булевых алгебр $(C_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i, \mathcal{T}_i)$ и ее индуктивный предел $(C, \vee, \wedge, \setminus, \mathcal{T})$. Возьмем $A_i \subseteq C_i$ так, чтобы $A_i = A_k \cap C_i$ при каждом $i \leq k$, и обозначим A индуктивный предел направленности множеств A_i . Он равен их объединению: $A = \bigcup A_i$. Заметим, что

$$A_i \cap C_j = A_k \cap C_i \cap C_j = A_k \cap C_j \cap C_i = A_j \cap C_i$$

для каждого $i \leq k, j \leq k$. Используя дистрибутивность объединения и эти равенства, убеждаемся в том, что при сделанных относительно A_j предположениях верна

Лемма. $A \cap C_j = A_j$ при каждом j .

Рассмотрим замыкание $\bar{A}_i$ множества A_i в пространстве $(C_i, \mathcal{T}_i)$ и замыкание $\bar{A}$ множества A в пространстве $(C, \mathcal{T})$.

Предложение 7. Если $\bar{A}_i = \bar{A}_k \cap C_i$ при каждом $i \leq k$, то $\bar{A} = \bigcup \bar{A}_i$.

Доказательство. Ясно, что $A = \bigcup A_i \subseteq \bigcup \bar{A}_i = B$. В то же время $A_i = A_i \cap C_i \subseteq A \cap C_i \subseteq \bar{A} \cap C_i$ для каждого i . Так как множество $\bar{A}$ замкнуто в пространстве $(C, \mathcal{T})$, то множество $\bar{A} \cap C_i$ замкнуто в пространстве $(C_i, \mathcal{T}_i)$. Поэтому из $A_i \subseteq \bar{A} \cap C_i$ следует $\bar{A}_i \subseteq \bar{A} \cap C_i$. Отсюда вытекает, что $B \subseteq \bar{A}$. Таким образом, $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$. Следовательно, для доказательства предложения 7 достаточно показать, что множество B замкнуто в пространстве $(C, \mathcal{T})$. По лемме из условия $\bar{A}_i = \bar{A}_k \cap C_i$ ($i \leq k$) вытекает, что $B \cap C_j = \bar{A}_j$, и поэтому $B \cap C_j$ замкнуто в $(C_j, \mathcal{T}_j)$ при каждом j . Значит, B замкнуто в $(C, \mathcal{T})$. Предложение 7 доказано.

Скажем, что множество A_i ограничивает множество C_i тогда и только тогда, когда для каждого элемента c из C_i существует элемент $a \geq c$ из A_i . Предположим дополнительно, что $(A_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i)$ является под-

алгеброй алгебры $(C_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i)$ при каждом i . Из предложения 7 вытекает

Следствие. Если $(A_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i)$ является идеалом для $(A_k, \vee_k, \wedge_k, \setminus_k)$ и A_i ограничивает C_i при каждом $i \leq k$, то $\bar{A} = \bigcup \bar{A}_i$.

Доказательство. В самом деле, $A_i = A_k \cap C_i \subseteq \bar{A}_k \cap C_i$, множество $\bar{A}_k \cap C_i$ замкнуто в пространстве $(C_i, \mathcal{T}_i)$ и, следовательно, $\bar{A}_i \subseteq \bar{A}_k \cap C_i$ при каждом $i \leq k$. Пусть $c \in \bar{A}_k \cap C_i$. Возьмем направленность x в A_k , сходящуюся к c в пространстве $(C_k, \mathcal{T}_k)$. Если A_i ограничивает C_i , то существует $a \in A_i$ такой, что $a \geq c$. В этом случае направленность ax сходится к элементу $ac = c$ в пространстве $(C_k, \mathcal{T}_k)$. Если $(A_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i)$ — идеал для $(A_k, \vee_k, \wedge_k, \setminus_k)$, то все значения направленности ax принадлежат множеству A_i , и она сходится к c также в пространстве $(C_i, \mathcal{T}_i)$. Следовательно, $c \in \bar{A}_i$ и $\bar{A}_k \cap C_i \subseteq \bar{A}_i$. Таким образом, $\bar{A}_i = \bar{A}_k \cap C_i$ при каждом $i \leq k$. По предложению 7 отсюда вытекает, что $\bar{A} = \bigcup \bar{A}_i$.

Рассмотрим пример, который показывает, что замыкание $\bar{A}$ в пространстве $(C, \mathcal{T})$ индуктивного предела A направленности множеств A_i может не быть равным индуктивному пределу $\bigcup \bar{A}_i$ направленности их замыканий $\bar{A}_i$ в пространствах $(C_i, \mathcal{T}_i)$.

Возьмем индуктивный предел $(\mathcal{C}, \cup, \cap, \setminus, \mathbf{T})$ возрастающей последовательности топологических булевых алгебр $(\mathcal{C}_n, \cup_n, \cap_n, \setminus_n, \mathbf{T}_n)$, в которых $\mathcal{C}_n$ — класс всех частей отрезка $[0, n+1]$ вещественной прямой, а $\mathbf{T}_n$ — секвенциальная порядковая топология для этого класса [7, п. 1.7.2]. Пусть

$$J_m = [1/(m+1), 1/m], Q_m = Q \cap [m, m+1];$$

$$J_K = \bigcup J_m, Q_K = \bigcup Q_m (m \in K), U_K = J_K + Q_K$$

для каждого номера m и конечного множества номеров K . В частности, $U_K = \emptyset$ при $K = \emptyset$. Обозначим $\mathcal{A}_n$ класс всех объединений $U_K \cup F$ множеств U_K с индексами $K \subseteq \{1, \dots, n\}$ и конечных множеств $F \subseteq Q \cap [1, n+1]$. Нетрудно проверить, что $(\mathcal{A}_n, \cup_n, \cap_n, \setminus_n)$ является подалгеброй алгебры $(\mathcal{C}_n, \cup_n, \cap_n, \setminus_n)$.

При каждом $K \subseteq \{1, \dots, n\}$ множество Q_K — объединение некоторой возрастающей последовательности конечных множеств $F_k \in \mathcal{A}_n$. Поэтому множество $J_K = U_K \setminus Q_K$ является пересечением убывающей последовательности множеств $G_k = U_K \setminus F_k \in \mathcal{A}_n$. Следовательно, множество J_K принадлежит замыканию $\bar{\mathcal{A}}_n$ класса $\mathcal{A}_n$ в пространстве $(\mathcal{C}_n, \mathbf{T}_n)$. В частности, $H_n = J_{\{1, \dots, n\}} \in \bar{\mathcal{A}}_n$. В то же время $H_n \in \mathcal{C}_0$ при каждом n . Поэтому последовательность множества H_n сходится к своему объединению $]0, 1[$ в пространстве $(\mathcal{C}, \mathbf{T})$. Но интервал $]0, 1[$ не принадлежит объединению $\bigcup \bar{\mathcal{A}}_n$ классов $\bar{\mathcal{A}}_n$, так как все множества класса $\bar{\mathcal{A}}_n$ вместе с множествами класса $\mathcal{A}_n$ содержатся в интервале $[1/(n+1), n+1]$. Следовательно, объединение $\bigcup \bar{\mathcal{A}}_n$ не замкнуто в пространстве $(\mathcal{C}, \mathbf{T})$ и не может быть равным замыканию $\bar{\mathcal{A}}$ в этом пространстве объединения $\mathcal{A}$ классов $\mathcal{A}_n$.

1.7. Присоединение единицы

Каждая топологическая булева алгебра изоморфна подалгебре некоторой топологической булевой алгебры с единицей. Это легко доказать, используя общее определение индуктивного предела семейства топологий и теорему Стоуна о представлении булевых алгебр. Пусть

$(A, \vee, \wedge, \setminus, \mathcal{T})$ — топологическая булева алгебра;

$(D, \vee, \wedge, \setminus)$ — булева алгебра с множеством элементов $D = \{0, 1\}$;

H — множество всех гомоморфизмов A в D ;

$\mathcal{P}$ — класс всех частей множества H ;

$(\mathcal{P}, \cup, \cap, \setminus)$ — булева алгебра, элементами которой являются все

множества класса $\mathcal{P}$, а операциями — объединение, пересечение и относительное дополнение;

$$\begin{aligned}\varphi: A \rightarrow \mathcal{P}, \varphi(a) &= \{h \in H | h(a) = 1\} \quad (a \in A); \\ \varphi': A \rightarrow \mathcal{P}, \varphi'(a) &= \{h \in H | h(a) = 0\} \quad (a \in A); \\ \mathcal{A} &= \varphi(A), \mathcal{A}' = \varphi'(A), \mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}';\end{aligned}$$

U — наибольшая топология для $\mathcal{B}$, при которых отображения φ и φ' непрерывны;

$T = \mathcal{A} \cap U$ — топология для $\mathcal{A}$, индуцированная топологией U .

Предложение 8. $(\mathcal{B}, U, \cap, \setminus, U)$ является топологической булевой алгеброй с единицей; $(A, \vee, \wedge, \setminus, \mathcal{T})$ изоморфна ее подалгебре $(\mathcal{A}, U, \cap, \setminus, T)$.

Доказательство. По теореме Стоуна φ является изоморфизмом булевой алгебры $(A, \vee, \wedge, \setminus)$ на подалгебру $(\mathcal{A}, U, \cap, \setminus)$ булевой алгебры $(\mathcal{P}, U, \cap, \setminus)$ ([8], гл. VIII, § 40; [9], гл. I, § 2). Нетрудно проверить, что $(\mathcal{B}, U, \cap, \setminus)$ — подалгебра булевой алгебры $(\mathcal{P}, U, \cap, \setminus)$. Единица H принадлежит $\mathcal{B}$, так как $H = \varphi'(0)$. Следовательно, $(\mathcal{A}, U, \cap, \setminus)$ является подалгеброй булевой алгебры $(\mathcal{B}, U, \cap, \setminus)$ с единицей.

Докажем, что $(\mathcal{B}, U, \cap, \setminus, U)$ — топологическая булева алгебра. Возьмем $B \in \mathcal{B}$ и обозначим $U_B, \cap_B, C_B, D_B$ переносы множества $\mathcal{B}$ с коэффициентом B :

$$U_B(X) = B \cup X, \cap_B(X) = B \cap X, C_B(X) = B \setminus X, D_B(X) = X \setminus B.$$

Вместо C_H условимся писать также C : $C(X) = H \setminus X = X'$ ($X \in \mathcal{B}$).

Все рассматриваемые переносы представляют собой некоторые композиции $\cap_B$ и C . Поэтому для доказательства непрерывности переносов достаточно показать непрерывность $\cap_B$ и C . Из определения топологии U следует, что непрерывность этих отображений равносильна непрерывности композиций $\cap_B \varphi, \cap_B \varphi'$ и $C\varphi, C\varphi'$ [4, гл. 1, § 2, предложение 6]. Так как $C\varphi = \varphi'$ и $C\varphi' = \varphi$, то композиции $C\varphi$ и $C\varphi'$ непрерывны вместе с φ и φ' .

Для $\cap_B \varphi$ и $\cap_B \varphi'$ рассмотрим два случая: $B = \varphi(A)$ и $B = \varphi'(A)$ ($a \in A$).

Пусть $B = \varphi(a)$ ($a \in A$). Тогда

$$\cap_B(\varphi(x)) = \varphi(a) \cap \varphi(x) = \varphi(a \wedge x) \quad (x \in A).$$

Непрерывность $\cap_B \varphi$ вытекает из непрерывности переноса $x \rightarrow a \wedge x$ множества A и отображения φ . Если $B = \varphi'(a)$ ($a \in A$), то

$$\cap_B(\varphi(x)) = \varphi'(a) \cap \varphi(x) = \varphi(x \setminus a) \quad (x \in A)$$

и непрерывность $\cap_B \varphi$ следует из непрерывности переноса $x \rightarrow x \setminus a$ множества A и отображения φ . Аналогично доказывается непрерывность композиций $\cap_B \varphi'$.

Для доказательства второй части предложения 8 достаточно показать, что $\varphi(\mathcal{T}) = T$. Это следует из определения топологии U , взаимной однозначности отображений φ, φ' и равенства $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = 0$ [4, гл. 1, § 2, предложение 8]. Предложение 8 доказано.

2. Индуктивные пределы непрерывных мер

Непрерывной мерой называется непрерывное аддитивное отображение топологической булевой алгебры в топологическую абелеву полуруппу. Индуктивный предел направленности непрерывных мер является непрерывной мерой, для которой существует непрерывное продолжение.

2.1. Определение индуктивного предела непрерывных мер

Рассмотрим булеву алгебру $(A, \vee, \wedge, \setminus)$ и абелеву полугруппу $(H, +)$ с нулем. Отображение $m: A \rightarrow H$, для которого $m(0) = 0$ и $m(x \vee y) = m(x) + m(y)$ при любых дизъюнктивных x, y из A , называется аддитивным отображением A в H или мерой на A со значениями в H . Возьмем топологию $\mathcal{T}$ для множества A , согласованную с операциями $\vee, \wedge, \setminus$, и топологию $\mathcal{U}$ для множества H , согласованную с операцией $+$ (преобразование $t \rightarrow h + t$ множества H непрерывно при каждом $h \in H$). Рассмотрим топологическую булеву алгебру $(A, \vee, \wedge, \setminus, \mathcal{T})$ и топологическую абелеву полугруппу $(H, +, \mathcal{U})$ с нулем. Непрерывное аддитивное отображение A в H называется непрерывной мерой на A со значениями в H .

Предположим, что существуют замкнутая часть F и часть G множества H , удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $0 \in F$;
- 2) $F + F \subseteq G$ ($F = 0 + F \subseteq G$);
- 3) индуцированная топология $G \cap \mathcal{U}$ порождается некоторой равномерностью $\mathcal{W}$ для G ;
- 4) сужение суммы $+$ для H на множество $F \times F$ равномерно непрерывно.

Будем в этом случае говорить, что $(H, +, \mathcal{U})$ и $F, G, \mathcal{W}$ образуют равномерную абелеву полугруппу $(H, +, \mathcal{U}, F, G, \mathcal{W})$.

Когда $F = G = H$, образуется равномерная абелева полугруппа $(H, +, \mathcal{U}, \mathcal{W})$. Сумма $+$ для H тогда равномерно непрерывна. Если равномерное пространство $(G, \mathcal{W})$ отделимо и (секвенциально) полно, то будем называть равномерную абелеву полугруппу $(H, +, \mathcal{U}, F, G, \mathcal{W})$ отделимой и (секвенциально) полной.

Если множество значений $m(A)$ меры $m: A \rightarrow H$ содержится в замкнутом множестве F , то скажем, что мера m принимает значения в равномерной абелевой полугруппе $(H, +, \mathcal{U}, F, G, \mathcal{W})$.

Рассмотрим возрастающую направленность топологических булевых алгебр $(A_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i, \mathcal{T}_i)$ и ее индуктивный предел $(A, \vee, \wedge, \setminus, \mathcal{T})$, топологическую абелеву полугруппу $(H, +, \mathcal{U})$ с нулем, возрастающую направленность непрерывных мер $m_i: A_i \rightarrow H$ и ее индуктивный предел $m: A \rightarrow H$, равный их объединению: $m = \limind m_i = \bigcap m_i$.

Замечание. Меры $m_i: A_i \rightarrow H$ являются частями декартова произведения множеств A и H . Поэтому для них определены объединение и порядок по включению. Возрастание направленности мер m_i означает, что $m_i \subseteq m_k$ (m_i — сужение m_k) при $i \leq k$.

Предложение 9. Индуктивный предел m возрастающей направленности непрерывных мер $m_i: A_i \rightarrow H$ является непрерывной мерой на $A = \bigcup A_i$ со значениями в H .

Доказательство. Так как для любых i, j существует $k \geq i, k \geq j$ и $m_i \subseteq m_k, m_j \subseteq m_k$, то соответствие $m = \bigcup m_i$ однозначно. Из равенства $A = \bigcup A_i$ следует, что m определено на A . Из аддитивности каждой меры m_i вытекает аддитивность m , а непрерывность каждой меры m_i влечет непрерывность m вследствие критерия непрерывности и равенства $m e_i = m_i$ для композиции тождественного вложения $e_i: A_i \rightarrow A$ с m .

Из предложения 9 вытекает

Следствие. Каждая непрерывная мера m на $A = \bigcup A_i$ со значениями в H является индуктивным пределом возрастающей направленности своих сужений $m_i: A_i \rightarrow H$.

2.2. Топологическое продолжение индуктивного предела непрерывных мер

Рассмотрим возрастающую направленность топологических булевых алгебр $(C_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i, \mathcal{T}_i)$ и ее индуктивный предел $(C, \vee, \wedge, \setminus, \mathcal{T})$. Возьмем $A_i \subseteq C_i$ так, чтобы A_i равнялось $A_k \cap C_i$ при каждом $i \leq k$ и являлось множеством элементов подалгебры булевой алгебры $(C_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i)$ при каждом i .

Пусть $\bar{A}_i$ — замыкание множества A_i в пространстве $(C_i, \mathcal{T}_i)$, $B = \bigcup \bar{A}_i$, $A = \bigcup A_i$, $\bar{A}$ — замыкание множества A в пространстве $(C, \mathcal{T})$.

Рассмотрим топологическую абелеву полугруппу $(H, +, \mathcal{U})$ с нулем, возрастающую направленность непрерывных мер $m_i: A_i \rightarrow H$ и ее индуктивный предел $m: A \rightarrow H$. Предположим, что для каждого i существуют замкнутое множество $F_i \subseteq H$, множество $G_i \subseteq H$ и равномерность $\mathcal{W}_i$ для G_i , которые удовлетворяют условиям 1—4 раздела 2.1 при $F = F_i$, $G = G_i$ и $\mathcal{W} = \mathcal{W}_i$. Предположим также, что для каждого i мера m_i принимает значения в равномерной абелевой полугруппе $(H, +, \mathcal{U}, F_i, G_i, \mathcal{W}_i)$ и что эта полугруппа хаусдорфова и полная.

При сделанных предположениях верна

Теорема 1. *Существует единственная непрерывная мера $n: B \rightarrow H$, продолжающая непрерывную меру $m: A \rightarrow H$.*

Доказательство. Для каждого $i \leq k$ обозначим $\bar{A}_i^{(k)}$ замыкание множества A_i в пространстве $(C_k, \mathcal{T}_k)$. Так как $A_i = C_i \cap A_k$ и $\mathcal{T}_i = C_i \cap \mathcal{T}_k$, то $\bar{A}_i = \bar{A}_i^{(i)} \subseteq \bar{A}_i^{(k)} \subseteq \bar{A}_k^{(k)} = \bar{A}_k$. По теореме о продолжении непрерывных мер [1, теорема 1] существует единственная непрерывная при топологиях $\mathcal{T}_k$ и $\mathcal{U}$ мера $\bar{m}_i^{(k)}: \bar{A}_i^{(k)} \rightarrow H$, продолжающая меру $m_i: A_i \rightarrow H$, причем $\bar{m}_i = \bar{m}_i^{(i)} \subseteq \bar{m}_i^{(k)} \subseteq \bar{m}_k^{(k)} = \bar{m}_k$.

Возьмем индуктивный предел n возрастающей направленности непрерывных мер $\bar{m}_i: \bar{A}_i \rightarrow H$. По предложению 9 он является непрерывной при топологиях $\mathcal{T}$ и $\mathcal{U}$ мерой на $B = \bigcup \bar{A}_i$ со значениями в H . Так как $\bar{m}_i$ продолжает m_i при каждом i , то $n = \bigcup \bar{m}_i$ продолжает $m = \bigcup m_i$. При этом $B \subseteq \bar{A}$ и единственность такого продолжения следует из его непрерывности. Теорема 1 доказана.

Предположим дополнительно, что $\bar{A}_i = C_i \cap \bar{A}_k$ при каждом $i \leq k$. В этом случае из предложения 7 и теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Существует единственная непрерывная мера $\bar{m}: \bar{A} \rightarrow H$, продолжающая непрерывную меру $m: A \rightarrow H$.*

Это следствие остается верным, если вместо $\bar{A}_i = C_i \cap \bar{A}_k$ предположить, что $(A_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i)$ является идеалом для $(A_k, \vee_k, \wedge_k, \setminus_k)$ при каждом $i \leq k$ и A_i ограничивает C_i при каждом i .

Рассмотрим возрастающую направленность булевых алгебр $(C_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i)$, ее индуктивный предел $(C, \vee, \wedge, \setminus)$, топологию $\mathcal{S}$ для C , согласованную с операциями $\vee, \wedge, \setminus$, возрастающую направленность топологических булевых алгебр $(C_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i, \mathcal{T}_i)$ с индуцированными топологиями $\mathcal{T}_i = C_i \cap \mathcal{S}$ для C_i , ее индуктивный предел $(C, \vee, \wedge, \setminus, \mathcal{T})$. Из определений вытекает, что каждое тождественное вложение $e_i: C_i \rightarrow C$ непрерывно при топологиях $\mathcal{T}_i$ и $\mathcal{S}$. Следовательно, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$.

Возьмем подалгебру $(A, \vee, \wedge, \setminus)$ алгебры $(C, \vee, \wedge, \setminus)$; топологическую абелеву полугруппу $(H, +, \mathcal{U})$ с нулем; непрерывную при топологиях $\mathcal{S}$ и $\mathcal{U}$ меру $m: A \rightarrow H$; возрастающую направленность непрерывных при топологиях $\mathcal{T}_i$ и $\mathcal{U}$ мер $m_i: A_i \rightarrow H$, являющихся сужениями меры m на множества $A_i = C_i \cap A$. Предположим, что для m_i выполнены все условия, при которых была доказана теорема 1. В этом случае из нее вытекает

Следствие 2. *Существует единственная непрерывная при топологиях $\mathcal{T}$ и $\mathcal{U}$ мера $n: B \rightarrow H$, продолжающая непрерывную при топологиях $\mathcal{S}$ и $\mathcal{U}$ меру $m: A \rightarrow H$.*

Замечание. Так как $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$ и $B \subseteq \bar{A}$, то следствие 2 описывает и единственное непрерывное при топологиях $\mathcal{P}$ и $\mathcal{U}$ продолжение меры m на множество B , если такое продолжение существует.

2.3. Секвенциальное продолжение индуктивного предела непрерывных мер

Снова рассмотрим возрастающую направленность топологических булевых алгебр $(C_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i, \mathcal{T}_i)$ и ее индуктивный предел $(C, \vee, \wedge, \setminus, \mathcal{T})$. Возьмем $A_i \subseteq C_i$ так, чтобы A_i равнялось $A_k \cap C_i$ при каждом $i \leq k$ и являлось множеством элементов подалгебры булевой алгебры $(C_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i)$ при каждом i .

Пусть $\mathcal{P}_i$ — секвенциальная топология, порожденная топологией $\mathcal{T}_i$ для C_i ; $\tilde{A}_i$ — замыкание множества A_i в пространстве $(C_i, \mathcal{P}_i)$; $D = \bigcup \tilde{A}_i$; $A = \bigcup A_i$; $\tilde{A}$ — замыкание множества A в пространстве $(C, \mathcal{T})$.

Рассмотрим топологическую абелеву полугруппу $(H, +, \mathcal{U})$ с нулем, возрастающую направленность непрерывных при топологиях $\mathcal{T}_i$ и $\mathcal{U}$ мер $m_i: A_i \rightarrow H$ и ее индуктивный предел $m: A \rightarrow H$. Предположим, что для m_i выполнены все условия, при которых была доказана теорема 1, кроме условия о полноте равномерной абелевой полугруппы $(H, +, \mathcal{U}, F_i, G_i, \mathcal{W}_i)$. Будем предполагать, что эта полугруппа секвенциально полная.

При сделанных предположениях верна

Теорема 2. Существует единственная непрерывная мера $s: D \rightarrow H$, продолжающая непрерывную меру $m: A \rightarrow H$.

Доказательство. По теореме о секвенциальном продолжении непрерывной меры [1, теорема 2] для каждого i существует непрерывная при топологиях $\mathcal{T}_i$ и $\mathcal{U}$ мера $\tilde{m}_i: \tilde{A}_i \rightarrow H$, продолжающая $m_i: A_i \rightarrow H$. Обозначим $\tilde{A}_i^{(k)}$ замыкание множества A_i в пространстве $(C_k, \mathcal{P}_k)$ для каждого $i \leq k$. Так как $A_i = C_i \cap A_k$ и $\mathcal{T}_i = C_i \cap \mathcal{T}_k$, то $\mathcal{P}_i \subseteq C_i \cap \mathcal{P}_k$ (см. доказательство леммы в разделе 1.5) и $\tilde{A}_i = \tilde{A}_i^{(i)} \subseteq \tilde{A}_i^{(k)} \subseteq \tilde{A}_k^{(k)} = \tilde{A}_k$ при $i \leq k$. Из $\tilde{A}_i \subseteq \tilde{A}_k$ и $m_i \subseteq m_k$ вытекает, что $\tilde{m}_i \subseteq \tilde{m}_k$ при $i \leq k$.

Возьмем индуктивный предел s возрастающей направленности непрерывных мер $\tilde{m}_i: \tilde{A}_i \rightarrow H$. По предложению 9 он является непрерывной при топологиях $\mathcal{T}$ и $\mathcal{U}$ мерой на $D = \bigcup \tilde{A}_i$ со значениями в H . Так как $\tilde{m}_i$ продолжает m_i при каждом i , то $s = \bigcup \tilde{m}_i$ продолжает $m = \bigcup m_i$. При этом $D \subseteq \tilde{A}$ и единственность такого продолжения следует из его непрерывности. Теорема 2 доказана.

Предположим дополнительно, что C_i замкнуто в пространстве $(C_k, \mathcal{T}_k)$ и $\tilde{A}_i = C_i \cap \tilde{A}_k$ при каждом $i \leq k$. Рассуждение, аналогичное проведенному при доказательстве леммы в разделе 1.5, показывает, что в этом случае $\mathcal{P}_i = C_i \cap \mathcal{P}_k$ при каждом $i \leq k$. Следовательно, можно рассмотреть топологию $\mathcal{P} = \lim \text{ind } \mathcal{P}_i$ для множества C . Обозначим $\tilde{A}$ замыкание множества $A = \bigcup A_i$ в пространстве $(C, \mathcal{P})$. Так как $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{T}_i$ при каждом i , то $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$ и $\tilde{A} \subseteq \bar{A}$.

При сделанных дополнительных предположениях из предложения 7 и теоремы 2 вытекает

Следствие. Существует единственная непрерывная мера $\tilde{m}: \tilde{A} \rightarrow H$, продолжающая непрерывную меру $m: A \rightarrow H$.

Это следствие остается верным, если вместо $\tilde{A}_i = C_i \cap \tilde{A}_k$ предположить, что $(A_i, \vee_i, \wedge_i, \setminus_i)$ является идеалом для $(A_k, \vee_k, \wedge_k, \setminus_k)$ при каждом $i \leq k$ и A_i ограничивает C_i при каждом i .

Замечание. В частном случае, когда рассматриваемая направленность — последовательность отделимых топологических булевых алгебр, топология $\mathcal{S}$ будет секвенциальной топологией, порождаемой топологией $\mathcal{T}$ (предложение 6).

2.4. Пример

Приведем пример продолжения индуктивного предела направленности непрерывных мер. Рассмотрим множество E , класс $\mathcal{P}$ всех его частей и топологическую булеву алгебру $(\mathcal{P}, \cup, \cap, \setminus, S)$ со стандартными операциями $\cup, \cap, \setminus$ и секвенциальной порядковой топологией S ([7, 1.7.2; [10], § 2). Возьмем возрастающую направленность множеств $E_i \subseteq E$. Она определяет возрастающую направленность подалгебр $(\mathcal{C}_i, \cup_i, \cap_i, \setminus_i, T_i)$ топологической булевой алгебры $(\mathcal{P}, \cup, \cap, \setminus, S)$, в которых $\mathcal{C}_i$ равно классу всех частей множества E_i , а операции $\cup_i, \cap_i, \setminus_i$ и топология T_i индуцированы. Рассмотрим индуктивный предел $(\mathcal{C}, \cup, \cap, \setminus, T)$ этой направленности.

Множество $\mathcal{C}_i$ замкнуто в пространстве $(\mathcal{P}, S)$ при каждом i . Следовательно, $\mathcal{C}_i$ замкнуто в $(\mathcal{C}_k, T_k)$ при каждом $i \leq k$ [4, гл. 1, § 3]. Пространство $(\mathcal{P}, S)$ хаусдорфово [10, § 2]. Следовательно, пространство $(\mathcal{C}_i, T_i)$ хаусдорфовы. Из предложений 2 и 3 вытекает, что при каждом i множество $\mathcal{C}_i$ замкнуто в пространстве $(\mathcal{C}, T)$ и является подпространством $(\mathcal{C}, T)$. Так как при каждом $i \leq k$ булева алгебра $(\mathcal{C}_i, \cup_i, \cap_i, \setminus_i)$ — идеал для $(\mathcal{C}_k, \cup_k, \cap_k, \setminus_k)$ и топология T_i секвенциально согласована с порядком $\subseteq_i$ для $\mathcal{C}_i$, то топология T секвенциально согласована с порядком $\subseteq$ для $\mathcal{C}$ (предложение 4).

Замечание. Булева алгебра $(\mathcal{C}, \cup, \cap, \setminus)$ является подалгеброй булевой алгебры $(\mathcal{P}, \cup, \cap, \setminus)$. Но топология T может не совпадать с топологией $\mathcal{C} \cap S$ для $\mathcal{C}$, индуцированной топологией S для $\mathcal{P}$, т. е. $(\mathcal{C}, T)$ может не быть подпространством топологического пространства $(\mathcal{P}, S)$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть строго возрастающую последовательность множеств E_n и заметить, что последовательность $X_n = E_{n+1} \setminus E_n$ сходится к 0 при топологии $\mathcal{C} \cap S$ и расходится при топологии T (следствие предложения 5).

Из равенств $T_i = \mathcal{C}_i \cap S = \mathcal{C}_i \cap T$ следует только, что $\mathcal{C} \cap S \subseteq T$. В то же время T_i равна секвенциальной порядковой топологии S_i для множества $\mathcal{C}_i$. Это показывает рассуждение, аналогичное проведенному при доказательстве леммы раздела 1.5.

Возьмем $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{C}_i$ так, чтобы $\mathcal{A}_i = \mathcal{C}_i \cap \mathcal{A}_k$ при каждом $i \leq k$, $E_i \in \mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_i$ являлось множеством элементов подалгебры булевой алгебры $(\mathcal{C}_i, \cup, \cap, \setminus)$ (и, следовательно, $(\mathcal{P}, \cup, \cap, \setminus)$) при каждом i . Пусть $\overline{\mathcal{A}_i}$ — замыкание $\mathcal{A}_i$ в пространстве $(\mathcal{C}_i, T_i)$; $\mathcal{A} = \cup \mathcal{A}_i$; $\overline{\mathcal{A}}$ — замыкание $\mathcal{A}$ в пространстве $(\mathcal{C}, T)$. Замыкание $\overline{\mathcal{A}_i}$ равно классу $\sigma(\mathcal{A}_i)$ частей множества E_i — элементов σ -кольца, порожденного классом $\mathcal{A}_i$ [7, предложение 10.2].

Из условий $E_i \in \mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_i = \mathcal{C}_i \cap \mathcal{A}_k$ следует, что $(\mathcal{A}_i, \cup, \cap, \setminus)$ является идеалом для $(\mathcal{A}_k, \cup, \cap, \setminus)$ при каждом $i \leq k$ и что $\mathcal{A}_i$ ограничивает $\mathcal{C}_i$ при каждом i . В самом деле, так как $\mathcal{A}_i = \mathcal{C}_i \cap \mathcal{A}_k \subseteq \mathcal{A}_k$ при $i \leq k$, то $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_k \subseteq \mathcal{A}_i \subseteq E_i$, $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_k \subseteq \mathcal{C}_i$ и $\mathcal{A}_i \in \mathcal{A}_k$, $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_k \in \mathcal{A}_k$, $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_k \in \mathcal{C}_i \cap \mathcal{A}_k = \mathcal{A}_i$ для каждого $\mathcal{A}_i \in \mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_k \in \mathcal{A}_k$ при $i \leq k$. Кроме того, $E_i \in \mathcal{A}_i$ является единицей булевой алгебры $(\mathcal{C}_i, \cup, \cap, \setminus)$ при каждом i . Следовательно, $\overline{\mathcal{A}} = \cup \overline{\mathcal{A}_i}$ (следствие предложения 7). Из секвенциальной согласованности топологии T с порядком $\subseteq$ вытекает, что замыкание $\overline{\mathcal{A}}$ содержит класс $\delta(\mathcal{A})$ частей множества E — элементов δ -кольца, порожденного классом $\mathcal{A}$ (δ -кольцом называется кольцо множеств, замкнутое относительно счетных пересечений).

Рассмотрим хаусдорфову коммутативную полугруппу $(H, +, \mathcal{U})$ с нулем. Предположим дополнительно, что сумма непрерывна по обоим переменным сразу. Возьмем возрастающую направленность непрерывных мер $m_i: \mathcal{A}_i \rightarrow H$ и ее индуктивный предел $m: \mathcal{A} \rightarrow H$. Предположим, что для каждого i множество $m(\mathcal{A}_i)$ относительно компактно. Возьмем компактные множества $F_i \ni m_i(\mathcal{A}_i)$ и $G_i \ni F_i + F_i$. (Например, $F_i = \overline{m_i(\mathcal{A}_i)}$ и $G_i = F_i + F_i$). Множество $F_i + F_i$ компактно, так как является образом

компакта $F_i \times F_i$ при непрерывном отображении $(x, y) \rightarrow x + y$.) Существует единственная равномерность $\mathcal{W}_i$, порождающая индуцированную топологию $G_i \cap \mathcal{U}$ для G_i . Сужение суммы для H на множестве $F_i \times F_i$ равномерно непрерывно как всякое непрерывное отображение компакта.

Таким образом, при $F = F_i$, $G = G_i$ и $\mathcal{W} = \mathcal{W}_i$ удовлетворяются условия 1—4 раздела 2.1. Следовательно, к непрерывной мере $m: \mathcal{A} \rightarrow H$ применимо следствие 1 теоремы 1 и существует единственная непрерывная мера $\bar{m}: \bar{\mathcal{A}} \rightarrow H$, продолжающая m . Отсюда вытекает, что существует единственная непрерывная мера $n: \mathcal{B} \rightarrow H$ на $\mathcal{B} = \delta(\mathcal{A})$, продолжающая m .

2.5. Приложение к векторным мерам

Схема продолжения, описанная в разделе 2.4, применима, в частности, к векторным мерам. Пусть H — множество точек банахова пространства, обладающего свойством Радона — Никодима, и $\mathcal{U}$ — сильная топология для H . В этом случае из непрерывности меры m_i вытекает счетная аддитивность m_i и ограниченность ее вариации ([11], § 1, предложение 1; § 2, лемма 4; § 5, следствие 1 и [1], 2.2, предложение). Если мера m_i неатомическая, то относительная компактность $m_i(\mathcal{A}_i)$ необходима для существования непрерывной меры $\bar{m}_i: \bar{\mathcal{A}}_i \rightarrow H$, продолжающей меру m_i . Это следует из теоремы Ляпунова для векторных мер, принимающих значения в банаховом пространстве со свойством Радона — Никодима [12, гл. IX, § 1, теорема 10].

Пусть теперь H — множество точек слабо секвенциально полного банахова пространства и $\mathcal{U}$ — слабая топология для H . В этом случае из непрерывности мер вытекает их слабая счетная аддитивность. А из нее следует сильная ([12], гл. 1, § 4, следствие 1 теоремы 2; [13], теорема 2.3). Относительная слабая компактность $m_i(\mathcal{A}_i)$ необходима для существования непрерывной меры $\bar{m}_i: \bar{\mathcal{A}}_i \rightarrow H$, продолжающей меру m_i . Это следует из теоремы о счетно аддитивном продолжении для векторных мер со значениями в банаховом пространстве ([12], гл. 1, § 5, следствие 7 теоремы 1 и теорема 2; [13], теорема 4.1; ср. [14], следствия 1 и 2; [15]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев Л. Я. Продолжение непрерывных мер. — Сиб. мат. ж., 1979, т. 20, № 5, с. 1082—1091.
2. Савельев Л. Я. Индуктивные пределы последовательностей непрерывных мер. — Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 5, с. 1060—1063.
3. Floyd E. E. Boolean algebras with pathological order topologies. — Pacific J. of Mathematics, 1955, v. 5, p. 687—689.
4. Бурбаки Н. Общая топология (основные структуры). М.: Наука, 1968.
5. Garling D. J. H. A generalized form of inductive limit topology for vector spaces. — Proc. of the London Mathematical Society, 1964, v. 14, N 53, p. 1—28.
6. Бурбаки Н. Общая топология (основные структуры). М.: Наука, 1958.
7. Савельев Л. Я. Лекции по математическому анализу. Ч. 4, приложение. Новосибирск: НГУ, 1975.
8. Халмош П. Теория меры. М., ИЛ, 1953.
9. Владимиров Д. А. Булевы алгебры. М.: Наука, 1969.
10. Савельев Л. Я. О порядковых топологиях и непрерывных мерах. — Сиб. мат. ж., 1965, т. 6, № 6, с. 1357—1364.
11. Савельев Л. Я. Некоторые условия продолжимости векторных мер. — Сиб. мат. ж., 1968, т. 9, № 4, с. 937—950.
12. Diestel I., Uhl I. I. Vector measures. — AMS, Providence, Rhode Island, 1977.
13. Клуванек И. К теории векторных мер. Ч. I. — Mat-Fyz. Casopis SAV, 1961, т. 11, № 3, с. 173—191.
14. Клуванек И. К теории векторных мер. Ч. II. — Mat-Fyz. Casopis SAV, 1966, т. 16, № 1, с. 76—81.
15. Bartle R. G., Dunford N., Schwartz I. T. Weak compactness and vector measures. — Canadian J. Math., 1955, v. 7, p. 289—305.