ОДНА ОЦЕНКА ДЛЯ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

А. И. САХАНЕНКО

1. Введение и основная идея доказательства

В ряде работ (см., например, [1, 2] и библиографию там) при изучении скорости сходимости распределений функционалов вида

$$I(\xi_n) = \int_0^1 f(\xi_n(t), t)\,dt,$$

где $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных ломаных, а f — измеримая по обеим переменным функция, в числе других ограничений на f требовалось существование ограниченной плотности распределения $I(\xi)$, где ξ — предельный процесс. (В указанных работах ξ есть стандартный винеровский процесс w. Далее будем предполагать, что либо $\xi = w$, либо ξ есть «броуновский мост» w_0, т. е. винеровский процесс w при условии $w(1) = 0$.) Другими словами, требовалось, чтобы

$$L(f, \xi) \equiv \sup_{x, h>0} h^{-1}\mathbf{P}(x \leqslant I(\xi) \leqslant x + h) < \infty. \qquad (1)$$

Естественно, возникает задача найти простые достаточные условия для выполнения (1). До последнего времени наиболее существенный результат в этом направлении принадлежал, по-видимому, С. Сойеру [1], который показал, что $L(f, w) < \infty$ при

$$f(x, t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t),\ 0 < \int_0^1 [a^2(t) + b^2(t)]\,dt < \infty.$$

Однако недавно (независимо от автора, объявившего часть своих результатов в работе [3]) И. С. Борисов [4] получил достаточные условия для выполнения (1) для функций вида

$$f(x, t) = f(x). \qquad (2)$$

Настоящая работа, а также [3] и соответствующие результаты в [4] появились как ответ на высказанную А. А. Боровковым гипотезу, что для выполнения (1) достаточно отделенности $f'(x)$ от нуля в некоторой окрестности нуля. В частности, при существовании у $f(x)$ производной при $|x| \leqslant b$, $b > 0$, которая может менять знак только при $x = 0$, из [4] следует, что для выполнения (1) достаточно при некотором $C > 0$

$$|f'(x)| > C\exp(-\pi^2/2(40)^2x^2) \text{ при } |x| \leqslant b.$$

С другой стороны, там показано, что

$$L(d(x), w_0) = \infty, \text{ где } d(x) = \exp(-\pi^2/8x^2).$$

Целью данной работы является получение о ц е н к и для $L(f, \xi)$, которая приводится в теореме в разделе 2 и доказывается в разделах 3 и 4. Из этой теоремы, в частности, вытекает, что $L(f, \xi) < \infty$, если при $|x| \leqslant b$, $b > 0$, знак $f'(x, t)$ зависит только от знака x, и для некоторого $C > 0$

$$|f'(x, t)| > C|x|^{-k}d(x)\theta(x, \xi) \text{ при } k > 11, \qquad (3)$$

где $\theta(x, w) = 1$, $\theta(x, w_0) = |x|^{-1}$, а производные здесь и далее взяты по первому аргументу. О том, насколько этот результат близок к неулучшаемому, говорит тот факт, что

$$L(f, \xi) = \infty, \text{ если } |f'(x)|/(|x|^{-3}d(x)\theta(x, \xi)) \to 0 \text{ при } x \to 0.$$

Последнее утверждение вытекает из результатов [4], поскольку в данном случае

$$\mathbf{P}\left(\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |\xi(t)| < x\right) \Big/ f(x) \to \infty \text{ при } x \to 0.$$

Результаты [4] существенно используют безграничную делимость распределения $\int\limits_0^\tau f(w(t))\,dt$, где τ — первый момент достижения некоторого уровня b, и не переносятся на функции, не удовлетворяющие (2). В данной работе получение оценок для $L(f, \xi)$ основано на следующем очевидном соотношении.

Лемма 1. *Пусть на вероятностном пространстве $\Omega_1 \times \Omega_2$ задана случайная величина $X = X(\omega_1, \omega_2)$. Предположим, что условное распределение случайной величины X при фиксированном ω_1 имеет плотность, ограниченную константой $Y(\omega_1)$. Тогда случайная величина X имеет плотность, ограниченную константой $\mathbf{M}Y(\omega_1)$.*

В частности, отсюда легко получается (см. лемму 2), что если знак $f'(x, t)$ постоянен и при некотором $C > 0$

$$|f'(x, t)| \geqslant C \quad \forall x \quad \forall t \in [0, 1],$$

то

$$L(f, w) \leqslant \sqrt{3/2\pi}\, C^{-1}; \; L(f, w_0) \leqslant \sqrt{6/\pi}\, C^{-1}.$$

Трудности при доказательстве основного результата возникают потому, что мы разрешаем производной менять знак и накладываем на нее ограничения только в некоторой окрестности нуля.

2. Основные результаты

Фиксируем $0 < T \leqslant 1$ и введем в рассмотрение непрерывные монотонно неубывающие функции своих аргументов $0 < \varepsilon(a) \leqslant a/2$ и $g(a, t) > 0$, определенные при $0 < a \leqslant \sqrt{T}$ и $0 < t \leqslant \varepsilon^2(a)$. Обозначим $K(y, u, a)$ прямоугольник на плоскости (x, t) с вершинами в точках $(y \pm \varepsilon(a), u)$ и $(y \pm \varepsilon(a), u + \varepsilon^2(a))$, и пусть $H(a)$ — множество всех точек (y, u), $|y| \leqslant a - \varepsilon(a)$, $0 \leqslant u \leqslant T$, таких, что при всех $(x, t) \in K(y, u, a)$ функция $f'(x, t)$ имеет постоянный знак и $|f'(x, t)| \geqslant g(a, t - u)$.

Символом $\alpha(a)$ обозначим первый момент достижения множества $H(a)$, а $\varkappa(a)$ — первый момент достижения одного из уровней $\pm a$. Если $\alpha(a)$ не определен, то мы полагаем его равным бесконечности. Положим $\theta(T, a, w) = 1$, а $\theta(T, a, w_0) = \min\{a^{-1}, (1-T)^{-1/2}\}$, причем считаем $\theta(1, a, w_0) = a^{-1}$.

Теорема. *Если при всех* $a \in (0, \sqrt{T})$ $\mathbf{P}(\alpha(a) < \varkappa(a) | \varkappa(a) \leqslant T) = 1$, *то*

$$L(f, \xi) \leqslant c \int\limits_0^{\sqrt{T}} da \int\limits_0^{\varepsilon^2(a)} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2(a)}{2t} - \frac{\pi^2 T}{8a^2}\right) \frac{\varepsilon(a)\,\theta(T, a, \xi)}{a^3 t^3 g(a, t/2)}\, dt.$$

Символ c здесь и далее заменяет некоторые положительные абсолютные постоянные.

В частности, если в некоторой окрестности нуля $\{(x, t) : |x| \leqslant b, 0 < t \leqslant T\}$, $b > 0$, знак $f'(x, t)$ зависит только от знака x, то, выбрав $\varepsilon(a)$, можно положить при $a \leqslant b$

$$g(a, u) = \min\{|f'(x, t)| : b \geqslant |x| \geqslant a - 2\varepsilon(a), \; u \leqslant t \leqslant T\}$$

и $g(a, u) = g(b, u)$ при $a > b$. Тогда условие теоремы будет выполнено автоматически при $H(a)=\{(x, t): |x|=a-\varepsilon(a)\}$. Рассматривая в качестве примера функцию

$$g(a, t)=C\exp\left(-C_0^2a^6/t\right)|a|^{-k}\exp\left(-\pi^2T/8a^2\right)\theta(T, a, \xi)$$

при $C>0$, $C_0>0$, $k>11$, $\varepsilon(a)=2C_0a^3$, получим (3) и все результаты, объявленные в [3].

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 2. *Пусть $\xi(t)$ — гауссовский процесс на $[A, B]$ с ковариационной функцией*

$$r(u, v)\equiv\mathbf{M}(\xi(u)-\mathbf{M}\xi(u))(\xi(v)-\mathbf{M}\xi(v))\geqslant 0.$$

Предположим, что знак функции $f'(x, t)$ не зависит от (x, t) и для некоторой функции $g(t)$

$$|f'(x, t)|\geqslant g(t)\geqslant 0\quad\forall(x, t).$$

Тогда случайная величина $\int\limits_A^B f(\xi(t), t)\,dt$ имеет плотность, ограниченную константой $(2\pi\sigma^2)^{-1/2}$, где $\sigma^2=\int\limits_A^B\int\limits_A^B r(u, v)\,g(u)\,g(v)\,du\,dv$.

Доказательство. Заметим, что нормально распределенная случайная величина $\eta=\int\limits_A^B\xi(t)\,g(t)\,dt$ и гауссовский процесс $\zeta(t)=\xi(t)-$ $-\sigma^{-2}h(t)\eta$, где $h(t)=\int\limits_A^B r(u, t)\,g(u)\,du$, независимы. При фиксированной траектории $\zeta(t)$, плотности $p(\cdot)$ и $p_\psi(\cdot)$ случайных величин η и $\psi(\eta)\equiv$ $\equiv\int\limits_A^B f\left(\zeta(t)+\sigma^{-2}h(t)\eta, t\right)dt$, где $\psi(\cdot)$ — монотонная функция, удовлетворяют соотношению $p_\psi(y)=p(\psi^{-1}(y))/|\psi'(\psi^{-1}(y))|$. Поскольку

$$|\psi'(z)|=\left|\int\limits_A^B\sigma^{-2}h(t)\,f'\left(\zeta(t)+\sigma^{-2}h(t)\,z, t\right)dt\right|\geqslant\int\limits_A^B\sigma^{-2}h(t)\,g(t)\,dt=1,$$

то

$$\sup_y p_\psi(y)\leqslant\sup_y p(y)=(2\pi D\eta)^{-1/2}=(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\equiv Y(\zeta),$$

и теперь из леммы 1 следует требуемая оценка.

При $0\leqslant t<T\leqslant 1$, $\delta>0$ положим $\mu=\max\limits_{t\leqslant u\leqslant T}|w(u)|$,

$$\lambda(a, x)=\mathbf{P}(\mu<a,\ |w(1)|<\delta\,|\,w(t)=x).$$

Как и прежде, $d(a)=\exp(-\pi^2/8a^2)$, а все производные взяты по первому аргументу. Обозначим

$$\varphi(x, t)=(2\pi t)^{-1/2}\exp(-x^2/2t),\ \Phi(x, t)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(y, t)\,dy.$$

Лемма 3. *При $t\leqslant\varepsilon^2(a)\leqslant a^2/4$ и $a^2\leqslant T$*

$$\lambda'(a, x)\leqslant\psi(a, T, \delta)\equiv ca^{-3}d(a/\sqrt{T})\min\{1,\ \delta a^{-1},\ \delta(1-T)^{-1/2}\}.$$

Доказательство. Обозначим

$$q(a, x, z)=\frac{d}{dz}\mathbf{P}(\mu<a,\ w(T)<z\,|\,w(t)=x).$$

В этом случае q' как функция от a и z является плотностью совместного распределения μ и $w(T)$ при условии $w(t)=x$. Из формулы (5.7) на с. 404 в [5] вытекает

$$q(a, x, z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\varphi(z-x+4ka, T-t)-\varphi(z+x+2a+4ka, T-t)].$$

Применяя формулу суммирования Пуассона [5, с. 710] при $d=d(a/\sqrt{T-t})$, имеем

$$q(a, x, z)=\frac{1}{2a}\sum_{k=1}^{\infty}d^{k^2}\left[\cos\frac{(z-x)k\pi}{2a}-\cos\frac{(z+x+2a)k\pi}{2a}\right]. \qquad (4)$$

Используя неравенства $|x|\leqslant a$ и $|z|\leqslant a$, нетрудно получить

$$q'(a, x, z)\leqslant c\sum_{k=1}^{\infty}d^{k^2}\left[a^{-4}k^2+a^{-2}k+a^{-2}\right]\equiv q_1(a).$$

Поскольку $a^2\leqslant T\leqslant 1$ и $d<1$, то из соотношений $d^{k^2}\leqslant d^k$, $\sum_{k=1}^{\infty}d^{k-1}=(1-d)^{-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty}kd^{k-1}=(1-d)^{-2}$, $\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)d^{k-2}=2(1-d)^{-3}$ вытекает, что $q_1(a)\leqslant ca^{-4}d(1-d)^{-3}\equiv q_2(a)$. Из ограничений на t и a следует $d=d(a/\sqrt{T})/d(a/\sqrt{t})\leqslant d(a/\sqrt{T})/d(2)\leqslant d(1)/d(2)<1$, а потому

$$q'(a, x, z)\leqslant q_2(a)\leqslant ca^{-4}d(a/\sqrt{T}). \qquad (5)$$

Формула полной вероятности по значению $w(T)$ немедленно дает

$$\lambda(a, x)=\int_{-a}^{a}q(a, x, z)\,\mathbf{P}(|w(1)|<\delta\,|\,w(T)=z)\,dz.$$

Отсюда, из (5) и равенства $q(a, x, \pm a)=0$, вытекающего из (4), имеем

$$\lambda'(a, x)=\int_{-a}^{a}q'(a, x, z)\,\Phi_0(z)\,dz\leqslant ca^{-4}d\left(a/\sqrt{T}\right)\int_{-a}^{a}\Phi_0(z)\,dz, \qquad (6)$$

где $\Phi_0(z)=\Phi(z+\delta, 1-T)-\Phi(z-\delta, 1-T)$. Из равенств $\Phi_0(z)\leqslant 1$ и $\Phi_0(z)\leqslant 2\delta/\sqrt{2\pi(1-T)}$ получаем

$$\int_{-a}^{a}\Phi_0(z)\,dz\leqslant\min\{2a, \delta a(1-T)^{-1/2}\}. \qquad (7)$$

С другой стороны,

$$\int_{-a}^{a}\Phi_0(z)\,dz\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_0(z)\,dz=2\delta.$$

Из последнего соотношения, (6) и (7) следует требуемое утверждение.

Заметим, что при выполнении условий леммы 3 для всех $A\subset[0, \infty)$

$$\mathbf{P}(\mu\in A, |w(1)|<\delta/w(t)=x)\leqslant\mathbf{P}(|w(1)|<\delta/w(t)=x)=$$
$$=\Phi(\delta-x, 1-t)-\Phi(-\delta-x, 1-t)\leqslant\min\{1, \delta\}. \qquad (8)$$

Фиксируем $\varepsilon>0$, $t_0>0$ и $t_1=(3/4)t_0$, и пусть τ — первый после t_1 момент пересечения процессом $w(t)$ одного из уровней $\pm\varepsilon$.

Лемма 4. *При $B\subset[(7/8)t_0, \infty)$ и $\varphi_0(t)=28\varepsilon t^{-1}\varphi(\varepsilon, t)$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(|w(t_1)|<\varepsilon, \tau\in B)\leqslant\int_B\varphi_0(t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть τ^+ и τ^- — первые после t_1 моменты пересечения процессом $w(t)$ уровней $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$ соответственно. Из [5, с. 403] при $|x| \leqslant \varepsilon$ и $t > t_1$ имеем

$$q(x, t) \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{P}\left(\tau^+ < t \mid w(t_1) = x\right) = (\varepsilon - x)(t - t_1)^{-1} \varphi(\varepsilon - x, t - t_1) \leqslant \leqslant 2\varepsilon (t - t_1) \varphi(\varepsilon - x, t - t_1).$$

В силу симметрии и марковости процесса w получаем

$$\mathbf{P}(|w(t_1)| < \varepsilon, \tau \in B) \leqslant 2\mathbf{P}(|w(t_1)| < \varepsilon, \tau^+ \in B) = = 2 \int\limits_{\substack{|x| \leqslant \varepsilon \\ t \in B}}\int \varphi(x, t_1)\, q(x, t)\, dx dt \leqslant 2 \int\limits_{t \in B}\int 2\varepsilon (t - t_1)^{-1} \varphi(x, t_1) \times \times \varphi(\varepsilon - x, t - t_1)\, dx dt = 4\varepsilon \int\limits_B (t - t_1)^{-1} \varphi(\varepsilon, t)\, dt.$$

Отсюда и из неравенства $(t - t_1)^{-1} \leqslant 7t^{-1}$, справедливого при $t > (7/8)t_0$, следует требуемое утверждение.

4. Доказательство основной теоремы

Фиксируем числа y, $0 < T \leqslant 1$, $h > 0$, $a_0 > 0$, $\delta > 0$, $0 < t_0 \leqslant \varepsilon^2 = \varepsilon^2(a_0)$, $t_1 = (3/4)t_0$ и множества $A \subset [a_0, \infty)$ и $B \subset [(7/8)t_0, t_0]$. Как и ранее, положим $\alpha = \alpha(a_0)$ — первый момент достижения множества $H(a_0)$, и пусть $\mu(t) = \max\limits_{t \leqslant u \leqslant T} |w(u)|$, $w_1(t) = w(\alpha + t) - w(\alpha)$, $\mu_1 = \max\limits_{0 \leqslant u \leqslant t_1} |w_1(u)|$, β — первый момент достижения процессом $w_1(t)$ границ множества $K = K(0, 0, a_0)$, а γ определим как первый после t_1 момент достижения границ множества K процессом $w_1(t)$. Обозначим $I(u, v) = \int\limits_u^v f(w(t), t)\, dt$, $I_1 = I(0, \alpha)$, $I_2 = I(\alpha, \alpha + t_1)$, $I_3 = I(\alpha + t_1, 1)$, $I = I(0, 1)$.

Оценим сначала $p(A, B) = h^{-1}\mathbf{P}(\Omega)$, где

$$\Omega = \{I \in (y, y + h),\ \beta \in B,\ \mu(0) \in A,\ |w(1)| < \delta\}.$$

Из марковости процесса w следует

$$\Omega = \{I_1 + I_2 + I_3 \in (y, y + h),\ \mu_1 < \varepsilon,\ \gamma \in B,\ \mu(\alpha + \gamma) \in A,\ |w(1)| < \delta\}.$$

При фиксированном значении

$$\nu = (\alpha, w(\alpha), w_1(t_1), \gamma, w_1(\gamma), \mu(\alpha + \gamma), w(1))$$

нетрудно заметить следующее: во-первых, случайные величины I_1, I_3 и вектор (I_2, μ_1) независимы; во-вторых, при условии $\mu_1 < \varepsilon$ значение I_2 не изменится, если стоящую под интегралом в I_2 функцию f мы изменим при $|x - w(\alpha)| > \varepsilon$ таким образом, чтобы у получившейся функции f_0 производная $f_0'(x, t)$ при всех x (а не только при $|x - w(\alpha)| \leqslant \varepsilon$) и $t \in (\alpha, \alpha + \varepsilon^2)$ имела бы постоянный знак и удовлетворяла неравенству $|f_0'(x, t)| \geqslant g(a_0, t - \alpha)$ (можно, например, положить $f_0'(x, t) = f'(w(\alpha), t)$ при $|x - w(\alpha)| > \varepsilon$); в-третьих, при $t \in [0, t_1]$ процесс $w_1(t)$ является гауссовским с корреляционной функцией $r(u, v) = \min\{u, v\} - uv/t_1$, а потому в силу леммы 2 распределение случайной величины

$$I_0 = \int\limits_\alpha^{\alpha + t_1} f_0(w(t), t)\, dt = \int\limits_0^{t_1} f_0(w(\alpha) + w_1(t_1), \alpha + t)\, dt$$

имеет плотность, не превосходящую $\rho(t_0) \equiv 4t_0^{-3/2} g^{-1}(a_0, t_0/2)$, поскольку в данном случае

$$2\pi\sigma^2 = 2\pi \iint\limits_{0\leqslant u,v\leqslant t_1} r(u,v)\, g(a_0,u)\, g(a_0,v)\, du dv \geqslant$$
$$\geqslant 2\pi g^2(a_0,\, t/2) \iint\limits_{t_0/2\leqslant u,v\leqslant t_1} r(u,v)\, dudv \geqslant (1/16)\, t_0^3 g^2(a_0,\, t_0/2).$$

Из сказанного вытекает, что

$$\mathbf{P}(\Omega\,|\,\nu,\, I_1,\, I_3) \leqslant \sup_y \mathbf{P}(I_2 = I_0 \in (y,\, y+h),\ \mu_1 < \varepsilon\,|\,\nu) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_y \mathbf{P}(I_0 \in (y,\, y+h)\,|\,\nu) \leqslant \rho(t_0)\, h.$$

Следовательно,

$$p(A,\, B) = h^{-1}\mathbf{MP}(\Omega|\nu,\, I_1,\, I_3) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(t_0)\mathbf{P}(|w_1(t_1)| < \varepsilon,\ \gamma \in B,\ \mu(\alpha+\gamma) \in A,\ |w(1)| < \delta) =$$
$$= \rho(t_0)\mathbf{P}(|w(t_1)| < \varepsilon,\ \tau \in B,\ \mu(\tau) \in A,\ |w(1)| < \delta.$$

(Последнее равенство легко понять, если поменять интервалы $(0,\, \alpha]$ и $(\alpha,\, \alpha+\gamma]$ местами.) Используя марковость w, лемму 3 и (8) далее получаем

$$p(A, B) \leqslant \rho(t_0) \iint\limits_{t\in B} \mathbf{P}(|w(t_1)| < \varepsilon,\ \tau \in dt,\ w(\tau) \in dx) \times$$
$$\times \mathbf{P}(\mu(\tau) \in A,\ |w(1)| < \delta\,|\,\tau = t,\ w(\tau) = x) \leqslant \rho(t_0)\, Q(t_0, B)\, \Psi(A), \quad (9)$$

где

$$\Psi(A) = \min\left\{\int\limits_A \psi(a,\, T,\, \delta)\, da,\ 1,\ \delta\right\}; \quad Q(t_0, B) = \mathbf{P}(|w(t_1)| < \varepsilon,\ \tau \in B). \quad (10)$$

Оценим теперь $p(A,\ (0,\ \varepsilon^2))$. Из неравенства $\rho(t_0) \leqslant \rho(t)$, справедливого при $t \leqslant t_0$, и леммы 4 следует

$$\rho(t_0)\, Q(t_0,\, [(7/8)\, t_0,\, t_0)) \leqslant \int\limits_{(7/8)t_0}^{t_0} \rho(t)\, \varphi_0(t)\, dt \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant \varepsilon^2.$$

Отсюда и из (9) легко получаем

$$p(A,\, (0,\varepsilon^2)) = \sum_{j=0}^{\infty} p\left(A,\, \left[(7/8)^{j+1}\varepsilon^2,\, (7/8)^j \varepsilon^2\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \Psi(A) \int\limits_0^{\varepsilon^2} \rho(z)\, \varphi_0(t)\, dt \equiv \Psi(A)\, Q_0(a_0).$$

Из (9) и соотношений $Q(t_0,\, B) \leqslant 1$ и $\int\limits_0^{\varepsilon^2} \rho(t)\, \varphi_0(t)\, dt \geqslant \rho(\varepsilon^2) \int\limits_0^{\varepsilon^2} \varphi_0(t)\, dt = c\rho(\varepsilon^2)$ немедленно вытекает

$$p(A,\, \{\varepsilon^2\}) \leqslant \rho(\varepsilon^2)\Psi(A) \leqslant cQ_0(a_0)\Psi(A);$$
$$p_0(A) \equiv p(A,\ (0,\ \varepsilon^2]) = p(A,\ (0,\ \varepsilon^2)) + p(A,\ \{\varepsilon^2\}) \leqslant c\Psi(A)Q_0(a_0). \quad (11)$$

Наконец, оценим $p_0((0,\, \infty))$. Поскольку непрерывная функция

$$Q_0(a) = c \int\limits_0^{\varepsilon^2(a)} t^{-3} g^{-1}(a,\, t/2) \exp(-\varepsilon^2(a)/2t)\, dt$$

является монотонно убывающей по a, то можно разбить отрезок $(0,\, \sqrt{T})$ на интервалы $[a_{j+1},\, a_j)$, $j = 1,\, 2,\, \ldots$, где $a_1 = \sqrt{T}$ и $a_j \downarrow 0$ при $j \to \infty$, таким образом, что $Q_0(a_{j+1}) \leqslant 2Q(a)$ при $a \in [a_{j+1}, a_j)$. Отсюда и из (10), (11) имеем

$$p_0((0, \sqrt{T})) = \sum_{j=1}^{\infty} p_0([a_{j+1}, a_j)) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} cQ_0(a_{j+1}) \int_{a_{j+1}}^{a_j} \psi(a, T, \delta)\, da \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\sqrt{T}} cQ_0'(a)\, \psi(a, T, \delta)\, da \equiv \psi_0(\delta). \qquad (12)$$

Заметим, что

$$\psi_0(\delta) \geqslant cQ_0(\sqrt{T}) \int_0^{\sqrt{T}} \psi(a, T, \delta)\, da \geqslant cQ_0(\sqrt{T}) \min\{1, \delta\}.$$

Это соотношение совместно с (10) и (11) дает

$$p_0([\sqrt{T}, \infty)) \leqslant c\Psi([\sqrt{T}, \infty))Q_0(\sqrt{T}) \leqslant cQ_0(\sqrt{T}) \min\{1, \delta\} \leqslant c\psi_0(\delta).$$

Из последнего неравенства и (12) получаем

$$p_0((0, \infty)) = p_0((0, \sqrt{T})) + p_0([\sqrt{T}, \infty)) \leqslant c\psi_0(\delta).$$

Предыдущую оценку можно переписать в виде

$$q_0(y, h, \delta) \equiv h^{-1}\mathbf{P}(I \in (y, y+h), |w(1)| < \delta) \leqslant c\psi_0(\delta).$$

Утверждение теоремы следует теперь из очевидных соотношений:

$$L(f, w) = \sup_{y,h>0} \lim_{\delta\to\infty} q_0(y, h, \delta) \leqslant c \lim_{\delta\to\infty} \psi_0(\delta);$$

$$L(f, w_0) = \sup_{y,h>0} \overline{\lim_{\delta\to 0}}\, h^{-1}\mathbf{P}(I \in (y, y+h) \,|\, |w(1)| < \delta) =$$

$$= \sup_{y,h>0} \overline{\lim_{\delta\to 0}}\, q_0(y, h, \delta)/[\Phi(\delta, 1) - \Phi(-\delta, 1)] \leqslant c \overline{\lim_{\delta\to 0}}\, \psi_0(\delta)/\delta.$$

Пользуясь случаем, автор благодарит И. С. Борисова и участников семинара отдела теории вероятностей Института математики СО АН СССР за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sawyer S.** Rates of convergence for some functionals in probability.— Ann. Math. Stat., 1972, v. 43, N 1, p. 273—284.
2. **Борисов И. С.** О скорости сходимости распределений функционалов интегрального вида.— Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. 21, № 2, с. 293—308.
3. **Саханенко А. И.** Одно условие существования ограниченной плотности у распределений функционалов интегрального типа.— Вторая Вильнюсская конф. по теории вероятн. и мат. статистике. Тез. докл. Т. 2. Вильнюс, 1977, с. 149—150.
4. **Борисов И. С.** Об условиях существования ограниченной плотности распределения аддитивных функционалов от некоторых случайных процессов.— Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, № 3, с. 464—475.
5. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир. 752 с.

СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ ТИПАМИ ВЫЗОВОВ

С. Г. ФОСС

Для некоторой одноканальной системы массового обслуживания, в которую поступают вызовы n типов, указывается алгоритм очередности обслуживания вызовов, когда средняя суммарная стоимость простоя вызовов минимальна. Задача построения такого алгоритма рассматривалась в работах [1, 2, 3] для системы обслуживания с пуассоновским входным потоком.