

образом, что $Q_0(a_{j+1}) \leq 2Q_0(a)$ при $a \in [a_{j+1}, a_j]$. Отсюда и из (10), (11) имеем

$$p_0((0, \sqrt{T})) = \sum_{j=1}^{\infty} p_0([a_{j+1}, a_j]) \leq \sum_{j=1}^{\infty} cQ_0(a_{j+1}) \int_{a_{j+1}}^{a_j} \psi(a, T, \delta) da \leq \leq \int_0^{\sqrt{T}} cQ_0(a) \psi(a, T, \delta) da \equiv \psi_0(\delta). \quad (12)$$

Заметим, что

$$\psi_0(\delta) \geq cQ_0(\sqrt{T}) \int_0^{\sqrt{T}} \psi(a, T, \delta) da \geq cQ_0(\sqrt{T}) \min\{1, \delta\}.$$

Это соотношение совместно с (10) и (11) дает

$$p_0([\sqrt{T}, \infty)) \leq c\Psi([\sqrt{T}, \infty))Q_0(\sqrt{T}) \leq cQ_0(\sqrt{T}) \min\{1, \delta\} \leq c\psi_0(\delta).$$

Из последнего неравенства и (12) получаем

$$p_0((0, \infty)) = p_0((0, \sqrt{T})) + p_0([\sqrt{T}, \infty)) \leq c\psi_0(\delta).$$

Предыдущую оценку можно переписать в виде

$$q_0(y, h, \delta) = h^{-1}P(I \in (y, y+h), |w(1)| < \delta) \leq c\psi_0(\delta).$$

Утверждение теоремы следует теперь из очевидных соотношений:

$$L(f, w) = \sup_{y, h > 0} \lim_{\delta \rightarrow \infty} q_0(y, h, \delta) \leq c \lim_{\delta \rightarrow \infty} \psi_0(\delta);$$

$$L(f, w_0) = \sup_{y, h > 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} h^{-1}P(I \in (y, y+h) | |w(1)| < \delta) = = \sup_{y, h > 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} q_0(y, h, \delta) / [\Phi(\delta, 1) - \Phi(-\delta, 1)] \leq c \lim_{\delta \rightarrow 0} \psi_0(\delta) / \delta.$$

Пользуясь случаем, автор благодарит И. С. Борисова и участников семинара отдела теории вероятностей Института математики СО АН СССР за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sawyer S. Rates of convergence for some functionals in probability.— Ann. Math. Stat., 1972, v. 43, N 1, p. 273—284.
2. Борисов И. С. О скорости сходимости распределений функционалов интегрального вида.— Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. 21, № 2, с. 293—308.
3. Саханенко А. И. Одно условие существования ограниченной плотности у распределений функционалов интегрального типа.— Вторая Вильнюсская конф. по теории вероятн. и мат. статистике. Тез. докл. Т. 2. Вильнюс, 1977, с. 149—150.
4. Борисов И. С. Об условиях существования ограниченной плотности распределения аддитивных функционалов от некоторых случайных процессов.— Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, № 3, с. 464—475.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир. 752 с.

СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ ТИПАМИ ВЫЗОВОВ

С. Г. ФОСС

Для некоторой одноканальной системы массового обслуживания, в которую поступают вызовы n типов, указывается алгоритм очередности обслуживания вызовов, когда средняя суммарная стоимость простоя вызовов минимальна. Задача построения такого алгоритма рассматривалась в работах [1, 2, 3] для системы обслуживания с пуассоновским входным потоком.

1. Описание системы обслуживания, формулировка основного результата

Будем предполагать, что все рассматриваемые в работе случайные величины заданы на одном вероятностном пространстве $\langle \Omega, F, P \rangle$. Введем следующие обозначения: $Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, $Z_+^n = Z_+ \times Z_+ \times \dots \times Z_+$ (n -кратное прямое произведение), $E^n = Z_+^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$.

Рассмотрим n независимых в совокупности последовательностей

$$\{\bar{m}_{1,j}\}_{j=1}^\infty, \{\bar{m}_{2,j}\}_{j=1}^\infty, \dots, \{\bar{m}_{n,j}\}_{j=1}^\infty, \quad (1)$$

независимых и одинаково распределенных в каждой последовательности $(n+1)$ -мерных случайных векторов; каждый вектор $\bar{m}_{i,j}$ имеет вид

$$\bar{m}_{i,j} = (\tau_{i,j}, m_{i,j}^{(1)}, m_{i,j}^{(2)}, \dots, m_{i,j}^{(n)}), \quad (2)$$

где первая координата $\tau_{i,j}$ принимает неотрицательные действительные значения, а остальные n координат $m_{i,j}^{(1)}, m_{i,j}^{(2)}, \dots, m_{i,j}^{(n)}$ — целые неотрицательные значения. Зададим также n -мерный случайный вектор $\bar{m}_{0,0} = (m_{0,0}^{(1)}, \dots, m_{0,0}^{(n)})$, не зависящий от набора $\{\bar{m}_{i,j}, 1 \leq i \leq n, j \geq 1\}$, все координаты которого принимают целые неотрицательные значения, причем $P\{\bar{m}_{0,0} = (0, 0, \dots, 0)\} = 0$.

Для $i, l = 1, 2, \dots, n$ будем предполагать, что

$$M\{m_{0,0}^{(i)}\} < \infty; \quad a_i = M\{\tau_{i,1}\} < \infty; \quad g_i^{(l)} = M\{m_{i,1}^{(l)}\} < \infty. \quad (3)$$

В системе обслуживаются вызовы n типов. Устройство обслуживания состоит из прибора и накопителя (последний можно представлять себе как помещение, в котором вызовы дожидаются, когда их обслужат). К начальному моменту времени $t=0$ прибор свободен, в накопителе находится $m_{0,0}^{(1)}, \dots, m_{0,0}^{(n)}$ вызовов соответственно 1-го, 2-го, ..., n -го типов. В момент $t=0$ начинается обслуживание одного из этих вызовов. Дальнейшее поступление вызовов в приемник происходит через один из n каналов и только в моменты, когда прибор закончит обслуживать очередной вызов, причем каждый раз номер канала совпадает с номером типа вызова, обслуживание которого завершено в данный момент. Более точно, пусть в некоторый момент времени $t \geq 0$ прибор освободился и в накопителе есть вызовы. Тогда немедленно из накопителя на обслуживающий прибор в соответствии с алгоритмом очередности обслуживания поступает один из этих вызовов. Пусть это вызов s -го типа, причем с начала обслуживания через прибор уже прошло $l \geq 0$ вызовов s -го типа. Тогда этот $(l+1)$ -й вызов s -го типа обслуживается за время $\tau_{s,l+1}$, и в момент $(t + \tau_{s,l+1})$ окончания его обслуживания через s -й канал и накопитель поступает соответственно $m_{s,l+1}^{(1)}, \dots, m_{s,l+1}^{(n)}$ вызовов 1-го, 2-го, ..., n -го типов. Если же в момент t вызовов в накопителе нет, то в дальнейшем вызовы в накопитель и на прибор не поступают (назовем этот момент t моментом остановки).

Обслуживание каждого вызова ведется без перерывов; одновременно может обслуживаться не более одного вызова. Очередность обслуживания вызовов задается с помощью так называемой функции переключения T , которая определяется как набор функций $T = \{T^{(l)}\}_{l=1}^\infty$, где при $l = 1, 2, \dots$

$$T^{(l)} : E^n \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}. \quad (4)$$

Пусть в некоторый момент времени закончилось l -е по счету обслуживание вызовов и в накопителе находится $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ вызовов. Тогда на обслуживание поступает вызов $T^{(l+1)}(r_1, \dots, r_n)$ -го типа. Обозначим класс таких функций переключения через K_0 .

При $T \in K_0$ пусть $\nu(T)$ есть общее число обслуженных вызовов до момента остановки и $\eta_i^{(T)}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $t \geq 0$) есть число вызовов i -го типа, находящихся в накопителе в момент t . Определим функционал $L: K_0 \rightarrow [0, \infty)$ следующим образом:

$$L(T) = M \left\{ \int_0^\infty \sum_{i=1}^n c_i \eta_i^{(T)}(t) dt \right\}, \quad (5)$$

где c_i ($1 \leq i \leq n$) — некоторые положительные числа и $T \in K_0$. Под c_i будем понимать стоимость простоя в очереди вызова i -го типа за единицу времени.

Краткости ради поступающий на обслуживание j -й по счету вызов i -го типа будем называть (i, j) -вызовом. Пусть $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ — перестановка набора $(1, 2, \dots, n)$ и $1 \leq s \leq n$. Функцию переключения $T \in K_0$ будем называть $(d_1, d_2, \dots, d_s)$ -функцией, если при всех $l = 1, 2, \dots$ выполняются равенства: $T^{(l)}(r_1, \dots, r_n) = d_1$ при $r_{d_1} \geq 1$ и $T^{(l)}(r_1, \dots, r_n) = d_i$ для $i = 2, 3, \dots, s$ при $r_{d_1} = r_{d_2} = \dots = r_{d_{i-1}} = 0$, $r_{d_i} \geq 1$.

Пусть $T \in K_0$. Если существует перестановка $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ набора $(1, 2, \dots, n)$ такая, что T есть $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ -функция, то будем считать, что T имеет приоритетный порядок обслуживания.

Теорема. Пусть $M\{\nu(T)\} < \infty$ для некоторой $T \in K_0$. Тогда существует такая приоритетная функция переключения T_0 , что

$$L(T_0) \leq L(T) \quad (6)$$

для любой функции переключения $T \in K_0$.

Приведем вид функции переключения T_0 . Пусть задана произвольно перестановка $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ набора $(1, 2, \dots, n)$. При $i = 1, 2, \dots, n-1$; $j, k \neq d_1, d_2, \dots, d_i$ определим числа $a_j^{(i)}$ и $g_j^{(i,k)}$ по формулам (22) и (23) (см. раздел 3) и положим

$$b_k^{(i)} = \sum_{j \neq d_1, \dots, d_i} c_j g_k^{(i,j)}; \quad b_k = \sum_{j=1}^n c_j g_k^{(j)}.$$

Тогда T_0 есть $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ -функция, где числа $d_1, d_2, \dots, d_n$ выбираются по следующему правилу: d_1 таково, что

$$(b_{d_1} - c_{d_1})/a_{d_1} = \min_{1 \leq k \leq n} \{(b_k - c_k)/a_k\}$$

и при $i = 1, 2, \dots, n-1$ число d_{i+1} таково, что

$$(b_{d_{i+1}}^{(i)} - c_{d_{i+1}}^{(i)})/a_{d_{i+1}}^{(i)} = \min_{h \neq d_1, \dots, d_i} \{(b_h^{(i)} - c_h)/a_h^{(i)}\}.$$

2. Вспомогательные результаты

В ходе доказательства теоремы нам придется использовать функции переключения более общего вида, предполагая, что при любых $l = 1, 2, \dots$; $(r_1, \dots, r_n) \in E^n$ значение $T^{(l)}(r_1, \dots, r_n)$ может быть случайным, но не зависит от будущего. Точный смысл понятия независимости от будущего дается ниже. Класс таких функций переключения обозначим через K ($K \supset K_0$). Ради удобства изложения теорему докажем в более общей формулировке — для всех функций переключения из класса K .

Введем сначала класс K' функций переключения. Функцией переключения $T \in K'$ назовем произвольную последовательность случайных функций $T = \{T^{(l)}\}_{l=1}^\infty$, где $T^{(l)}: \Omega \times E^n \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, удовлетворяющую

свойству: пусть $(r_1, \dots, r_n) \in E^n$, тогда при $l = 1, 2, \dots; k \in \{1, 2, \dots, n\}$, если $P\{T^{(l)}(r_1, \dots, r_n) = k\} > 0$, то $r_k \geq 1$.

Пусть N_+^n — совокупность наборов $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ таких, что каждое из l_i ($i = 1, 2, \dots, n$) есть либо целое неотрицательное число, либо $+\infty$. Для $(l_1, l_2, \dots, l_n) \in N_+^n$ пусть $B(l_1, \dots, l_n) = \sigma\{\bar{m}_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l_i\}$ есть σ -алгебра, порожденная набором случайных векторов $\{\bar{m}_{1,j}\}_{j=1}^{l_1}, \{\bar{m}_{2,j}\}_{j=1}^{l_2}, \dots, \{\bar{m}_{n,j}\}_{j=1}^{l_n}$ и пусть $D(l_1, \dots, l_n) = \sigma\{\bar{m}_{i,j}, 1 \leq i \leq n, j > l_i\}$.

Введем совокупность σ -алгебр $\{G(l_1, \dots, l_n), (l_1, \dots, l_n) \in N_+^n\}$ таких, что для любых $(l_1, \dots, l_n) \in N_+^n$ и $(l'_1, \dots, l'_n) \in N_+^n$ выполнены следующие свойства:

- 1) $F \equiv G(l_1, \dots, l_n) \equiv B(l_1, \dots, l_n)$;
- 2) независимые σ -алгебры есть

$$G(l_1, \dots, l_n) \text{ и } D(l_1, \dots, l_n); \quad (7)$$

- 3) если $l_1 \leq l'_1, \dots, l_n \leq l'_n$, то $G(l_1, \dots, l_n) \subseteq G(l'_1, \dots, l'_n)$.

Пусть при $j = 1, 2, \dots, \bar{k}_j = (k_1, k_2, \dots, k_j)$ есть набор целых чисел, такой, что при $l = 1, 2, \dots, j$

$$k_l \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (8)$$

Обозначим через $q_i = q_i(\bar{k}_j)$ ($1 \leq i \leq n$) количество k_l ($1 \leq l \leq j-1$), равных i .

Введем класс функций переключения $K \subset K'$: функция переключения T из K' принадлежит классу K , если для любого $j = 1, 2, \dots$, для любого $\bar{k}_j$, удовлетворяющего (8), событие $\{T^{(1)} = k_1, \dots, T^{(j)} = k_j\}$ принадлежит σ -алгебре $G(q_1, \dots, q_n)$.

Заметим, что совокупность σ -алгебр $\{G(l_1, \dots, l_n)\}$ можно задать, например, положив $\{G(l_1, \dots, l_n)\} = \{B(l_1, \dots, l_n)\}$. Свойства (7) в этом случае выполнены, и класс K непуст, так как $K \supseteq K_0$.

Приведем другой пример задания $\{G(l_1, \dots, l_n)\}$. Пусть при любых $l = 1, 2, \dots, (r_1, \dots, r_n) \in E^n$ $T^{(l)}(r_1, \dots, r_n)$ есть случайная величина, выбирающая (случайным образом) одну из ненулевых координат вектора $(r_1, \dots, r_n)$, причем набор случайных величин $\{T^{(l)}(r_1, \dots, r_n), l = 1, 2, \dots, (r_1, \dots, r_n) \in E^n\}$ независим в совокупности и не зависит от набора (1). Тогда если при $(l_1, \dots, l_n) \in N_+^n$ задать $G(l_1, \dots, l_n)$ как σ -алгебру, порожденную набором случайных величин и векторов $\{T^{(l)}(r_1, \dots, r_n), \bar{m}_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l_j, 1 \leq l \leq l_1 + \dots + l_n, (r_1, \dots, r_n) \in E^n\}$, то $\{G(l_1, \dots, l_n)\}$ удовлетворяет свойствам (7) и $T \in K$.

Функционал L определяется на классе K в соответствии с формулой (5).

Приведем некоторое свойство, характеризующее класс функций переключения K' . Пусть $T \in K'$. Обозначим через $\lambda(T)$ момент остановки и через $v_i(T)$ ($1 \leq i \leq n$) — общее число обслуживаний вызовов i -го типа до момента $\lambda(T)$ при функции переключения T (в частности, $\lambda(T)$ и $v_i(T)$ могут равняться $+\infty$).

Лемма 1. Пусть для некоторой $T_1 \in K'$ $P\{v(T_1) < \infty\} = 1$. Тогда для любой $T_2 \in K'$ случайные векторы $(\lambda(T_1), v_1(T_1), \dots, v_n(T_1))$ и $(\lambda(T_2), v_1(T_2), \dots, v_n(T_2))$ совпадают п. н.

Доказательство. Для любой $T \in K'$ $\lambda(T) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{v_i(T)} \tau_{i,k}$. Следовательно, достаточно показать, что для любой $T_2 \in K'$ случайные векторы $(v_1(T_1), \dots, v_n(T_1))$ и $(v_1(T_2), \dots, v_n(T_2))$ совпадают почти наверное (п. н.).

Возьмем произвольно элементарный исход $\omega \in \Omega$, на котором $v(T_1) < \infty$. Пусть $v_1(T_1) = l_1, \dots, v_n(T_1) = l_n$. Покажем, что для всех $i = 1, 2, \dots, n$ на заданном элементарном исходе ω выполняется неравенство

$v_i(T_2) \leq l_i$. Пусть это не так. Пусть при $i = 1, 2, \dots, n, t \geq 0$ $v_i^{(t)}(T_2)$ равняется числу вызовов i -го типа, обслуженных к моменту t при функции переключения T_2 . Тогда существуют момент времени $t \geq 0$ и число $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что после момента t начинается $(l_i + 1)$ -е обслуживание вызовов i -го типа и $v_k^{(t)}(T_2) \leq l_k$ при $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда число вызовов i -го типа, ожидающих обслуживания в момент t при функции переключения T_2 , равняется

$$m_{0,0}^{(i)} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{v_k^{(t)}(T_2)} m_{k,j}^{(i)} - l_i \leq m_{0,0}^{(i)} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{l_k} m_{k,j}^{(i)} - l_j = 0$$

в силу того, что $v_1(T_1) = l_1, \dots, v_n(T_1) = l_n$. Поэтому при функции переключения T_2 в момент t не может начаться $(l_i + 1)$ -е обслуживание вызовов i -го типа, так как таковых нет в приемнике. Следовательно, получилось противоречие: Тем самым

$$P\{v_1(T_1) \geq v_1(T_2), \dots, v_n(T_1) \geq v_n(T_2)\} = 1$$

и $P\{v(T_2) < \infty\} = 1$. Если проделать те же рассуждения при замене T_1 на T_2 и T_2 на T_1 , то получим

$$P\{v_1(T_1) \leq v_1(T_2), \dots, v_n(T_1) \leq v_n(T_2)\} = 1.$$

Следовательно, лемма 1 доказана.

Замечание 1. Будем в дальнейшем предполагать, что хотя бы для одной (тем самым и для всех) $T \in K'$ выполнено неравенство $M\{v(T)\} < \infty$ (и, следовательно, $M\{\lambda(T)\} < \infty$). Это условие можно переформулировать в терминах (3). Пусть $Q = \{g_i^{(l)}\}$ — матрица порядка n .

Лемма 2. Для того чтобы для всех $T \in K'$ выполнялось неравенство $M\{v(T)\} < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы Q были по модулю меньше единицы.

Доказательство. Пусть $b_i = M\{v(T)\}$ — среднее суммарное число обслуживаний в системе, где $m_{0,0}^{(k)} = 0$ при $k \neq i, 1 \leq k \leq n$ и $m_{0,0}^{(i)} = 1$ п.н. В силу неравенства $M\{m_{0,0}^{(l)}\} < \infty$ при $l = 1, 2, \dots, n$, для того чтобы выполнялись условия леммы, необходимо и достаточно, чтобы $\max_{1 \leq i \leq n} b_i < \infty$.

Заметим, что

$$b_i = 1 + \sum_{j=1}^n g_i^{(j)} + \sum_{j=1}^n g_i^{(j)}(2) + \dots + \sum_{j=1}^n g_i^{(j)}(l) + \dots, \quad (9)$$

где $g_i^{(j)}(l)$ — элементы матрицы $Q^l = Q \times Q \times \dots \times Q$ (l раз). Тогда уравнение (9) можно записать в векторной форме: при $\bar{b}(b_1, \dots, b_n)$, $\bar{a} = (1, 1, \dots, 1)$ $\bar{b} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} Q^l \right) \bar{a} = (I - Q)^{-1} \bar{a}$, где $Q^0 = I$ — единичная матрица

порядка n . Для того чтобы ряд $\sum_{l=0}^{\infty} Q^l$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы Q были по модулю меньше единицы [4, с. 173]. Доказательство леммы 2 завершено.

3. Доказательство теоремы

Для любой $T \in K'$ введем набор случайных величин $\{f_{i,j}^{(T)}; 1 \leq i \leq n, j \geq 1\}$ таких, что $f_{i,j}^{(T)}$ равняется числу вызовов, обслуженных прибором к моменту окончания обслуживания (i, j) -вызова, если таковое происходит, и $f_{i,j}^{(T)} = \infty$ в противном случае.

Для любых $T', T'' \in K'$ введем набор случайных величин $\{\gamma_{k,l,i,j}^{(T',T'')}; 1 \leq k, i \leq n; j, l \geq 1\}$ таких, что

$$\gamma_{k,l,i,j}^{(T',T'')} = \begin{cases} 1, & \text{если } f_{k,l}^{(T')} < f_{i,j}^{(T')}, f_{k,l}^{(T'')} > f_{i,j}^{(T'')}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что $\gamma_{i,l,i,j}^{(T',T'')} = 0$ п. н. при $1 \leq i \leq n, j, l \geq 1$.

Пусть $T', T'' \in K'$. Обозначим через $A'_{i,j}(A''_{i,j})$ случайный интервал времени, в течение которого происходит обслуживание (i, j) -вызова, и через $\eta'_k(i, j)(\eta''_k(i, j))$ — число вызовов k -го типа, ожидающих обслуживания в течение промежутка времени $A'_{i,j}(A''_{i,j})$, при функциях переключения $T'(T'')$; если же обслуживания (i, j) -вызова не происходит, то полагаем $\eta'_k(i, j) = 0$ ($\eta''_k(i, j) = 0$) и $A'_{i,j} = (0, 0)$ ($A''_{i,j} = (0, 0)$) ($1 \leq i, k \leq n; j \geq 1$).

Лемма 3. Пусть $T', T'' \in K$. Тогда:

- а) случайная величина $\gamma_{i,j,k,l}^{(T',T'')}$ не зависит от векторов $\bar{m}_{i,j}$ и $\bar{m}_{k,l}$;
- б) случайная величина $\eta'_k(i, j)$ не зависит от вектора $\bar{m}_{i,j}$ при $1 \leq i, k \leq n; j, l \geq 1$.

Доказательство. Заметим, что при любой $T \in K$, при любых $1 \leq i, k \leq n; j, l, r \geq 1$ событие $\{f_{i,j}^{(T)} = r; f_{k,l}^{(T)} > r\}$ принадлежит σ -алгебре $G(l_1, \dots, l_n)$, где $l_s = \infty$ при $s \neq i, s \neq k$ и $l_i = j - 1, l_k = l - 1$. А так как

$$\{\gamma_{i,j,k,l}^{(T',T'')} = 1\} = \bigcup_{r_1=1}^{\infty} \bigcup_{r_2=1}^{\infty} \{f_{i,j}^{(T')} = r_1; f_{k,l}^{(T')} > r_1\} \{f_{k,l}^{(T'')} = r_2; f_{i,j}^{(T'')} > r_2\},$$

то $\{\gamma_{i,j,k,l}^{(T',T'')} = 1\} \in G(l_1, \dots, l_n)$.

Условие „б“ доказывается совершенно аналогично. Обозначим для $1 \leq k, i \leq n$ и $T', T'' \in K'$

$$N_{k,i}^{(T',T'')} = M \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{k,r,i,j}^{(T',T'')} \right\} < \infty \quad (\text{в силу замечания 1});$$

$$F_{k,i}^{(T',T'')} = N_{k,i}^{(T',T'')} - N_{i,k}^{(T',T'')}.$$

Отметим, что

$$F_{k,k}^{(T',T'')} = 0, \quad F_{k,i}^{(T',T'')} = -F_{i,k}^{(T',T'')}.$$

Положим для $1 \leq k \leq n$ $b_k = \sum_{l=1}^n c_l \cdot g_k^l$.

Лемма 4'. Пусть $T', T'' \in K$. Тогда

$$L(T') - L(T'') = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n F_{k,i}^{(T',T'')} \cdot a_i \cdot (b_k - c_k). \quad (10)$$

Доказательство. Пусть

$$\delta_{l,k} = \begin{cases} 1, & \text{если } l = k, \\ 0, & \text{если } l \neq k. \end{cases}$$

Тогда верны равенства

$$\begin{aligned} \eta'_k(i, j) - \eta''_k(i, j) &= \sum_{l=1}^n \sum_{r=1}^{\infty} \gamma_{l,r,i,j}^{(T',T'')} \cdot (m_{l,r}^{(k)} - \delta_{l,k}) - \\ &\quad - \sum_{l=1}^n \sum_{r=1}^{\infty} \gamma_{i,j,l,r}^{(T',T'')} \cdot (m_{l,r}^{(k)} - \delta_{l,k}). \end{aligned}$$

Поясним, в силу чего появляются эти равенства. Пусть $\gamma_{i,j,i,r}^{(T',T'')} = 1$. Тогда до обслуживания (i, j) -вызова при T'' обслуживается $\delta_{l,k}$ вызов

типа k с номером r , т. е. число вызовов k -го типа в очереди уменьшится на $\delta_{l,k}$ при T'' относительно T' , но в результате такого «лишнего» обслуживания получается $m_{l,r}^{(k)}$ вызовов k -го типа. Аналогично появляются и остальные слагаемые.

В силу леммы 3

$$M \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (\eta'_k(i, j) - \eta''_k(i, j)) \right\} = \sum_{l=1}^n F_{l,i}^{(T', T'')} \cdot g_l^{(k)} - F_{k,i}^{(T', T'')}.$$

Используя независимость $\eta'_k(i, j)$ и $\eta''_k(i, j)$ от $\tau_{i,j}$, получаем

$$\begin{aligned} L(T') - L(T'') &= M \left\{ \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^n c_k \eta'_k(t) dt - \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^n c_k \eta''_k(t) dt \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} M \left\{ \int_{A_{i,j}} \sum_{k=1}^n c_k \eta'_k(t) dt - \int_{A_{i,j}} \sum_{k=1}^n c_k \eta''_k(t) dt \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} c_k \cdot M \{ \tau_{i,j} \cdot (\eta'_k(i, j) - \eta''_k(i, j)) \} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i \cdot c_k \cdot M \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (\eta'_k(i, j) - \eta''_k(i, j)) \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i \cdot c_k \left(\sum_{l=1}^n F_{l,i}^{(T', T'')} \cdot g_l^{(k)} - F_{k,i}^{(T', T'')} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n F_{k,i}^{(T', T'')} \cdot a_i (b_k - c_k). \end{aligned}$$

Доказательство леммы 4 завершено.

Лемма 5. Для любых функций переключения $T \in K'$, перестановки $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ набора $(1, 2, \dots, n)$ и числа $s \in (1, 2, \dots, n)$ существует такая функция переключения $T_s \in K'$, что:

- T_s есть $(d_1, d_2, \dots, d_s)$ -функция;
- при $1 \leq k \leq n$, $i \in \{d_{s+1}, \dots, d_n\}$, $j, l \geq 1$ $\gamma_{k,l,i,j}^{(T', T'')} = 0$ п. н.

Доказательство. Пусть $\Omega = \{\omega\}$ — вероятностное пространство. На элементарном исходе $\omega \in \Omega$ при функции переключения T однозначно установлены порядок обслуживания вызовов, времена обслуживания и наборы вызовов, поступающих в конце обслуживания. С учетом замечания 1 можно считать, что при заданном $\omega \in \Omega$ обслуживается конечное число вызовов $v_1(T) = l_1, \dots, v_n(T) = l_n$, $(l_1, \dots, l_n) \in Z_+^n$.

Будем называть используемые ниже наборы (случайных) чисел $\{f_{i,j}, 1 \leq i \leq n, j \geq 1\}$, $\{q_{i,j}, 1 \leq i \leq n, j \geq 1\}$ нумерациями.

Положим для $1 \leq i, k \leq n$; $j, l \geq 1$ $f_{i,j} = f_{i,j}^{(T)}$;

$$q_{i,j} = \begin{cases} f_{k,l}, & \text{если } (i,j)\text{-вызов появился в очереди} \\ & \text{по окончании обслуживания } (k, l)\text{-вызова,} \\ 0, & \text{если } (i,j)\text{-вызов находился в очереди на} \\ & \text{обслуживание в начальный момент времени,} \\ \infty, & \text{если } f_{i,j} = \infty. \end{cases} \quad (11)$$

Заметим, что $q_{i,j} < f_{i,j}$. Положим для $1 \leq i \leq n$

$$f_{i,0} = q_{i,1}. \quad (12)$$

Алгоритм, в соответствии с которым строится T_s , состоит из конечного числа операций сдвига, применяемых последовательно. Операция (d_k, l) -сдвига ($1 \leq k \leq n$, $l \geq 1$) применяется в случае $l_{d_k} \geq l$, следовательно, $f_{d_k,l} < \infty$ и $q_{d_k,l} < \infty$.

Полагаем

$$r = \min \{n \in \mathbb{Z}_+ / n \geq \max \{q_{d_k, l}; f_{d_k, l-1}\} + 1;$$

$$n = f_{i, j} \text{ при } i \neq d_1; i \neq d_2, \dots, i \neq d_{k-1}\}.$$

Заметим, что так как $q_{d_k, l} < f_{d_k, l}; f_{d_k, l-1} < f_{d_k, l}$, то $r \leq f_{d_k, l}$.

Перенумеруем $\{f_{i, j}\}$ и $\{q_{i, j}\}$ следующим образом: при $1 \leq i \leq n, j \geq 1$

$$f'_{i, j} = \begin{cases} r, & \text{если } (i, j) = (d_k, l), \\ f_{i, j} + 1, & \text{если } r \leq f_{i, j} < f_{d_k, l}, \\ f_{i, j} & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (13)$$

$\{q_{i, j}\}$ перенумеруем в соответствии с (11) и $\{f_{i, 0}\}$ — в соответствии с (12).

В случае $l_{d_1} > 0$ назовем (d_1) -операцией последовательное применение операций $(d_1, 1)$ -, $(d_1, 2)$ -, ..., (d_1, l_{d_1}) -сдвига. В случае $l_{d_1} = 0$ (d_1) -операцией является тождественная операция, оставляющая нумерации $\{f_{i, j}\}$ и $\{q_{i, j}\}$ неизменными.

Определим операции $(d_1, \dots, d_k)$ ($2 \leq k \leq n$) по индукции. Пусть (d_1) -, (d_1, d_2) -, ..., $(d_1, \dots, d_{k-1})$ -операции определены. Тогда в случае $l_{d_k} = 0$ $(d_1, \dots, d_k)$ -операция совпадает с $(d_1, \dots, d_{k-1})$ -операцией. В случае $l_{d_k} > 0$ проводим $(d_k, 1)$ -сдвиг, а затем — $(d_1, \dots, d_{k-1})$ -операцию; после этого то же проделываем последовательно с $(d_k, 2)$ -, ..., (d_k, l_{d_k}) -вызовами. В итоге получаем $(d_1, \dots, d_k)$ -операцию.

Результатом применения (d_1) -операции будет функция переключения $T_1(T)$ и соответствующая нумерация $\{f_{i, j}^{(T_1)}\}$; результатом последовательного применения (d_1) -, (d_1, d_2) -, ..., $(d_1, \dots, d_k)$ -операций ($2 \leq k \leq n$) будет функция переключения $T_k(T)$ и соответствующая нумерация $\{f_{i, j}^{(T_k)}\}$. Из конструкции алгоритма видно, что условия леммы выполняются, так как условие «б» выполнено при каждой операции сдвига.

Лемма 6. Пусть $T \in K$ и $T_s = T_s(T)$ ($1 \leq s \leq n$) построены, как в лемме 5. Тогда $T_s \in K$.

Доказательство. Нам нужно показать, что для любых $j \geq 1$, $1 \leq s \leq n$ событие $\{T_s^{(1)} = k_1, \dots, T_s^{(j)} = k_j\}$ принадлежит σ -алгебре $G(q_1, \dots, q_n)$. Но так как порядок обслуживания первых j вызовов при переходе от T к T_s меняется не более чем j^s раз при использовании операций сдвига, то включение $T_s \in K$ будет следовать из такого факта: если $T \in K$, $1 \leq d \leq n$, $l \geq 1$, T_1 — результат применения к T операции (d, l) -сдвига, то $T_1 \in K$. Пусть $j \geq 1$; задан набор $\bar{k}_j$, удовлетворяющий (8); r определено, как в лемме 5; $A = \{T_1^{(1)} = k_1, \dots, T_1^{(j)} = k_j\}$.

Заметим, что события

$$\{T^{(1)} = k_1, \dots, T^{(j)} = k_j, r > j\};$$

$$\{T^{(1)} = k_1, \dots, T^{(j)} = k_j, r = i\};$$

$$\{T^{(1)} = k_1, \dots, T^{(j)} = k_j, r = i, f_{d, l}^{(T)} = s\};$$

$$\{T^{(1)} = k_1, \dots, T^{(j)} = k_j, r = i, f_{d, l}^{(T)} > j\}$$

принадлежат σ -алгебре $G(q_1, \dots, q_n)$ при $1 \leq i \leq s \leq j$.

Представим A в виде

$$A = (A \cap \{r > j\}) \cup (A \cap \{r = j\}) \cup (A \cap \{r < j\}).$$

Заметим, что

$$A \cap \{r > j\} = \{T^{(j)} = k_1, \dots, T^{(j)} = k_j, r > j\} \in G(q_1, \dots, q_n)$$

и $A \cap \{r = j\} = \emptyset$ при $k_j \neq d$; в противном же случае

$$A \cap \{r = j\} = \bigcup_{m=1}^n \{T^{(1)} = k_1, \dots, T^{(j-1)} = k_{j-1}, T^{(j)} = m, r = j\} \in G(q_1, \dots, q_n).$$

Далее, при $1 \leq i \leq s \leq j-1$

$$A_{i,s} = A \cap \{r = i, f_{d,i}^{(T)} = s\} = \{T^{(1)} = k_1, \dots, T^{(i-1)} = k_{i-1}, T^{(i)} = k_{i+1}, \dots, T^{(s-1)} = k_s, T^{(s)} = d, T^{(s+1)} = k_{s+1}, \dots, T^{(j)} = k_j, r = i, f_{d,i}^{(T)} = s\} \in G(q_1, \dots, q_n)$$

при $k_i = d$ и $A_{i,s} = \emptyset$ при $k_i \neq d$,

$$A_{i,j} = A \cap \{r = i, f_{d,i}^{(T)} \geq j\} = \{T^{(1)} = k_1, \dots, T^{(i-1)} = k_{i-1}, T^{(i)} = k_{i+1}, \dots, T^{(j-1)} = k_j, r = i, f_{d,i}^{(T)} > j-1\} \in G(q'_1, \dots, q'_n)$$

при $k_i = d$ и $A_{i,j} = \emptyset$ при $k_i \neq d$, где $q'_m = q_m$ при $m \neq d$ и $q'_d = q_d - 1$.

Следовательно, $A_{i,j} \in G(q_1, \dots, q_n)$ и

$$A \cap \{r < j\} = \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} \bigcup_{s=i}^{j-1} A_{i,s} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} A_{i,j} \right) \in G(q_1, \dots, q_n).$$

Лемма 6 доказана.

Будем строить искомую перестановку $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ набора $(1, 2, \dots, n)$ по индукции. Определим сначала число d_1 . Пусть при $k = 1, 2, \dots, n$ $b_k = \sum_{j=1}^n c_j g_k^{(j)}$. Пусть $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ — некоторая произвольная перестановка. Возьмем произвольно $T \in K$ и построим в соответствии с леммой 5 функцию переключения $T_1 = T_1(T)$. В силу леммы 5 выполнены следующие равенства:

- а) $\gamma_{d_1, l, i, j}^{(T, T_1)} = 0$ п. н. для $l, j \geq 1, 1 \leq i \leq n$, и, следовательно, $N_{d_1, i}^{(T, T_1)} = 0$;
- б) $\gamma_{k, l, i, j}^{(T, T_1)} = 0$ п. н. для $1 \leq i, k \leq n; i \neq d_1; k \neq d_1; l, j \geq 1$, и, следовательно, $F_{k, i}^{(T, T_1)} = 0$

Используя лемму 4, получим

$$L(T) - L(T_1) = \sum_{k=1}^n F_{k, d_1}^{(T, T_1)} (a_{d_1} (b_k - c_k) - a_k (b_{d_1} - c_{d_1})).$$

Так как все числа $F_{k, d_1}^{(T, T_1)}$ неотрицательны при $1 \leq k \leq n$, то для выполнения неравенства $L(T) - L(T_1) \geq 0$ достаточно выбрать $d_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ так, чтобы

$$(b_{d_1} - c_{d_1})/a_{d_1} = \min_{1 \leq k \leq n} \{(b_k - c_k)/a_k\}. \quad (13)$$

Пусть для некоторого $s \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ выбраны числа $d_1, d_2, \dots, d_s$ ($d_i \neq d_j$ при $i \neq j$) такие, что для любой функции переключения $T \in K$ и для построенных по T функций переключения $T_i(T)$ ($i = 1, 2, \dots, s$; T_i есть $(d_1, d_2, \dots, d_i)$ -функции; построение совершается в соответствии с конструкцией леммы 5) выполнены неравенства $L(T) \geq L(T_1) \geq \dots \geq L(T_s)$. Найдем тогда число d_{s+1} так, чтобы $(d_1, d_2, \dots, d_s, d_{s+1})$ -функция $T_{s+1} = T_{s+1}(T)$ удовлетворяла неравенству $L(T_s) \geq L(T_{s+1})$.

Дальнейшие рассуждения ради простоты изложения будем проводить в предположении, что $(d_1, d_2, \dots, d_s) = (1, 2, \dots, s)$. Это предположение не ограничивает общности рассуждений, так как если оно не выполняется, то можно провести перенумерацию типов вызовов так, чтобы

i -й тип вызовов в новой нумерации совпадал с d_i -м типом в старой нумерации.

Пусть $K_s \subset K$ — класс $(1, 2, \dots, s)$ -функций. Разобьем все вызовы на два класса: 1) вызовы 1-го, 2-го, ..., s -го типов; 2) вызовы $(s+1)$ -го, $(s+2)$ -го, ..., n -го типов.

Зафиксируем $T \in K_s$. Пусть $x = (i, j)$ — некоторый вызов, $\mathcal{B}_{x,1} = \mathcal{B}_{x,1}(\omega)$ — (случайное) множество вызовов, поступающих в очередь по окончании обслуживания вызова x . Пусть для $l \geq 2$

$$\mathcal{B}_{x,l} = \mathcal{B}_{x,l}(\omega) = \bigcup_{y \in \mathcal{B}_{x,l-1}; y \text{ — } 1\text{-го класса}} \mathcal{B}_{y,1}.$$

Положим $\mathcal{B}_x = \bigcup_{l=1}^{\infty} \mathcal{B}_{x,l} = \mathcal{B}'_x \cup \mathcal{B}''_x$, где $\mathcal{B}'_x$ — вызовы 1-го класса; $\mathcal{B}''_x$ — вызовы 2-го класса.

Для $s+1 \leq i \leq n$, $j \geq 1$ через $\tau_{i,j}^{(s)}$ обозначим время, необходимое для обслуживания (i, j) -вызова и всех вызовов 1-го класса из множества $\mathcal{B}'_{(i,j)}$. Пусть $A_{i,j}^{(s,T)}$ есть случайный интервал времени, в течение которого происходят эти обслуживания (полагаем $A_{i,j}^{(s,T)} = (0, 0)$, если обслуживания (i, j) -вызова не происходит при функции переключения T). Пусть соответственно $m_{i,j}^{(s,s+1)}, \dots, m_{i,j}^{(s,n)}$ есть число вызовов $(s+1)$ -го, $(s+2)$ -го, ..., n -го типов из множества $\mathcal{B}''_{(i,j)}$.

Положим при $s+1 \leq i, k \leq n$; $j \geq 1$

$$M\{\tau_{i,j}^{(s)}\} = a_i^{(s)}; M\{m_{i,j}^{(s,k)}\} = g_i^{(s,k)}. \quad (14)$$

Замечание 2. При любых фиксированных $1 \leq s \leq n-1$, $j \geq 1$, $s+1 \leq i \leq n$ суммарная стоимость $C_{i,j}^{(s)}$ простых вызовов из множества $\mathcal{B}_{(i,j)}$ за промежуток времени $A_{i,j}^{(s,T)}$ имеет одинаковые распределения, следовательно, и одинаковые средние при различных функциях переключения $T \in K_s$.

В силу того, что до момента начала обслуживания первого вызова 2-го класса обслуживание других вызовов ведется идентично при различных $T \in K_s$, то, если рассматривать только класс K_s функций переключения, можно без ограничения общности предположить, что в начальный момент времени в очереди находятся только вызовы 2-го класса.

Пусть $T \in K_s$. Рассмотрим набор случайных векторов $\{\bar{M}_{i,j}^{(T)}, 1 \leq i \leq n-s, j \geq 1\}$, где

$$\bar{M}_{i,j}^{(T)} = (\tau_{i+s,j}^{(s)}, m_{i+s,j}^{(s,s+1)}, \dots, m_{i+s,j}^{(s,n)}). \quad (15)$$

Так как $T \in K_s$, то векторы $\{\bar{M}_{i,j}^{(T)}\}$ независимы в совокупности и при любых $i = 1, 2, \dots, n-s$ в последовательности $\{\bar{M}_{i,j}^{(T)}\}_{j=1}^{\infty}$ одинаково распределены. Заметим, что при различных функциях переключения $T_1, T_2 \in K_s$ векторы $\bar{M}_{i,j}^{(T_1)}$ и $\bar{M}_{i,j}^{(T_2)}$ одинаково распределены при любых $i = 1, 2, \dots, n-s, j = 1, 2, \dots$

При $T \in K_s$ определим наборы σ -алгебр $\{\tilde{G}_T(\bar{l}), \bar{l} \in N_+^{n-s}\}$ и $\{\tilde{D}_T(\bar{l}), \bar{l} \in N_+^{n-s}\}$. Пусть $\bar{l} = (l_1, \dots, l_{n-s}) \in N_+^{n-s}$,

$$S(\bar{l}) = \{(i, j), s+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l_{i-s}\};$$

$$F(\bar{l}) = \bigcup_{(i,j) \in S(\bar{l})} \mathcal{B}_{(i,j)};$$

$\bar{u}(\bar{l}) = (u_1(\bar{l}), \dots, u_s(\bar{l}))$ — число вызовов 1-го класса (соответственно, 1-го, 2-го, ..., s -го типов) из множества $F(\bar{l})$.

Будем считать, что $A \in \tilde{G}_T(\bar{l})$ ($A \in \tilde{D}_T(\bar{l})$), если для любого вектора $\bar{r} = (r_1, \dots, r_s) \in N_+^s$ $A \cap \{\bar{u}(\bar{l}) = \bar{r}\} \in G(r_1, \dots, r_s, l_1, \dots, l_{n-s})$; ($A \cap \{\bar{u}(\bar{l}) =$

$= \bar{r}\} \in D(r_1, \dots, r_s, l_1, \dots, l_{n-s})$). Заметим, что σ -алгебры $\bar{G}_T(\bar{l})$ и $\bar{D}_T(\bar{l})$ независимы при любом $\bar{l} \in N_+^{n-s}$, и если $\bar{l}, \bar{l}' \in N_+^{n-s}$, $\bar{l} \leq \bar{l}'$, то $\bar{G}_T(\bar{l}) \subseteq \bar{G}_T(\bar{l}')$.

Введем при $T \in K_s$ класс функций переключения $\bar{K}_s = \bar{K}_s(T)$: функция переключения $T' = \{T'^{(l)}\}_{l=1}^\infty$, где при $l = 1, 2, \dots$ $T'^{(l)}: \Omega \times E^{n-s} \rightarrow \{1, 2, \dots, n-s\}$, принадлежит классу $\bar{K}_s$, если для любого набора $\bar{k}_j$ ($j = 1, 2, \dots$), удовлетворяющего (8) при замене n на $(n-s)$, и для $q_i = q_i(\bar{k}_j)$ ($1 \leq i \leq n-s$), $\bar{q} = (q_1, \dots, q_{n-s})$ верно включение $\{T'^{(1)} = k_1, \dots, T'^{(j)} = k_j\} \in \bar{G}_T(\bar{q})$.

Рассмотрим при $T \in K_s$ систему массового обслуживания, в которую приходят вызовы $(n-s)$ -типов, задаваемую набором векторов $\{\bar{M}_{i,j}^{(T)}\}$, с функциями переключения из класса $\bar{K}_s(T)$. Функции переключения T при этом поставим в соответствие функцию переключения $T^* = \{T^{*(l)}\}_{l=1}^\infty$ следующим образом: для любого набора $(l_1, \dots, l_{n-s}) \in E^{n-s}$ для любого $k \geq 1$ положим

$$T^{*(k)}(l_1, \dots, l_{n-s}) = T^{(k+t_T)}(0, \dots, 0, l_1, \dots, l_{n-s}), \quad (16)$$

где t_T — случайная величина, равная числу обслуживаний вызовов 1-го класса до начала k -го обслуживания вызовов 2-го класса при функции переключения T . Непосредственно проверяется, что $T^* \in \bar{K}_s(T)$.

Пусть при $1 \leq i \leq n-s$, $T \in K_s$, $T' \in \bar{K}_s(T)$, $\eta_i^{(T')}(t, T)$ есть число вызовов i -го типа, пришедших до момента t в систему с $(n-s)$ -типами вызовов, обслуживание которых до момента t не началось. Пусть, далее, $\{c'_i = c_{i+s}; 1 \leq i \leq n-s\}$;

$$L(T', T) = M \left\{ \int_0^\infty \sum_{i=1}^{n-s} c'_i \eta_i^{(T')}(t, T) dt \right\}. \quad (17)$$

В силу определения T^* верно равенство

$$L(T) = L(T^*, T) + \sum_{i=s+1}^n \sum_{j=1}^\infty M\{C^{(i,j)}\}. \quad (18)$$

Для класса $\bar{K}_s(T)$ формулируются в иных обозначениях результаты, соответствующие леммам 3—6 для класса K , которые доказываются совершенно аналогично. Приведем, например, формулировку леммы 4 в обозначениях класса $\bar{K}_s(T)$. Введем для $T', T'' \in \bar{K}_s(T)$ при $1 \leq i, k \leq n-s$, $j, l \geq 1$ случайные величины $\gamma_{i,jkl}^{(T', T'')}$, числа $N_{k,l}^{(T', T'')}$ и $F_{k,l}^{(T', T'')}$.

Положим при $s+1 \leq k \leq n$ $b_k^{(s)} = \sum_{l=s+1}^n c_l g_k^{(s,l)}$.

Лемма 4'. Для любых $T', T'' \in \bar{K}_s(T)$

$$L(T', T) - L(T'', T) = \sum_{i=1}^{n-s} \sum_{k=1}^{n-s} F_{k,i}^{(T', T'')} a_{s+i}^{(s)} (b_{s+k}^{(s)} - c_{s+k}).$$

Пусть $(f_1, \dots, f_{n-s})$ — перестановка набора $(1, 2, \dots, n-s)$, $1 \leq i \leq n-s$. Для $T' \in \bar{K}_s(T)$ можно ввести в соответствии с конструкцией леммы 5 $(f_1, \dots, f_i)$ -функции $T_i(T')$ такие, что (в силу леммы 6) $T_i(T') \in \bar{K}_s(T)$ и при $1 \leq k \leq n-s$, $r \in \{f_{i+1}, \dots, f_{n-s}\}$, $l, j \geq 1$ $\gamma_{k,l,r,j}^{(T', T_i(T'))} = 0$ п. н.

При $T \in K$ пусть $T_s = T_s(T)$ есть $(1, 2, \dots, s)$ -функция, $T_{s+1} = T_{s+1}(T)$ есть $(1, 2, \dots, s, d_{s+1})$ -функция (где $s+1 \leq d_{s+1} \leq n$). Тогда $T_s \in K_s$, $T_{s+1} \in K_s$.

Обозначим через $T_s^* \in \bar{K}_s(T_s)$, $T_{s+1}^* \in \bar{K}_s(T_{s+1})$ функции, определенные равенством (16) соответственно при $T = T_s$ и $T = T_{s+1}$.

Пусть $T_{s+1}^{**} = T_1(T_s^*) \in \bar{K}_s(T_s)$. Тогда в силу определения $L(\cdot, \cdot)$

$$L(T_{s+1}^*, T_s) = L(T_{s+1}^*, T_{s+1}). \quad (19)$$

С учетом леммы 4' и применяя рассуждения, использованные при нахождении (13), получаем что если выбрать число d_{s+1} так, чтобы выполнялось равенство

$$(b_{d_{s+1}}^{(s)} - c_{d_{s+1}}) / a_{d_{s+1}}^{(s)} = \min_{s+1 \leq k \leq n} \{(b_k^{(s)} - c_k) / a_k^{(s)}\}, \quad (20)$$

то $L(T_{s+1}^{**}, T_s) \leq L(T_s^*, T_s)$. Из равенств (18) и (19) следует, что при таком выборе числа d_{s+1} выполнено неравенство $L(T_{s+1}) \leq L(T_s)$. Заметим, что в случае, когда $(d_1, d_2, \dots, d_s) \neq (1, 2, \dots, s)$, выбор числа d_{s+1} осуществляется в соответствии с равенством

$$(b_{d_{s+1}}^{(s)} - c_{d_{s+1}}) / a_{d_{s+1}}^{(s)} = \min_{k \neq d_1, \dots, d_s} \{(b_k^{(s)} - c_k) / a_k^{(s)}\}, \quad (21)$$

где числа $b_k^{(s)}$ и $a_k^{(s)}$ вычисляются по формулам (22) и (23), приведенным ниже.

Пусть $(f_1, \dots, f_n)$ — произвольная перестановка набора $(1, 2, \dots, n)$ такая, что для некоторого $1 \leq s \leq n-1$ выполнено равенство $(f_1, \dots, f_s) = (d_1, \dots, d_s)$. Пусть $s < i, j \leq n$. Тогда

$$a_{f_i}^{(s)} = a_{f_i} + \sum_{l=1}^s a_{f_l} g_{f_i}^{(f_l)} + \sum_{l=1}^s a_{f_l} \sum_{k=1}^s g_{f_i}^{(f_k)} g_{f_k}^{(f_l)} + \dots + \sum_{l=1}^s a_{f_l} \sum_{k_1=1}^s \dots \sum_{k_r=1}^s g_{f_i}^{(f_{k_1})} \dots g_{f_{k_r}}^{(f_l)} + \dots; \quad (22)$$

$$g_{f_i}^{(s, f_j)} = g_{f_i}^{(f_j)} + \sum_{k=1}^s g_{f_i}^{(f_k)} g_{f_k}^{(f_j)} + \dots + \sum_{k_1=1}^s \dots \sum_{k_l=1}^s g_{f_i}^{(f_{k_1})} \dots g_{f_{k_l}}^{(f_j)} + \dots \quad (23)$$

Рассмотрим матрицы

$$X_s = \begin{pmatrix} g_{f_{s+1}}^{(f_1)} & \dots & g_{f_{s+1}}^{(f_s)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{f_n}^{(f_1)} & \dots & g_{f_n}^{(f_s)} \end{pmatrix} = (g_{f_k}^{(f_l)})_{\substack{s+1 \leq k \leq n; \\ 1 \leq l \leq s}};$$

$$Q_s = (g_{f_k}^{(f_l)})_{\substack{1 \leq k \leq s; \\ 1 \leq l \leq s}}; \quad Y_s = (g_{f_k}^{(f_l)})_{\substack{s+1 \leq k \leq n; \\ s+1 \leq l \leq n}};$$

$$Z_s = (g_{f_k}^{(f_l)})_{\substack{1 \leq k \leq s; \\ s+1 \leq l \leq n}}; \quad Y^{(s)} = (g_{f_k}^{(s, f_l)})_{\substack{s+1 \leq k \leq n; \\ s+1 \leq l \leq n}}$$

и векторы

$$\bar{a}^{(s)} = (a_{f_{s+1}}^{(s)}; \dots; a_{f_n}^{(s)}); \quad \bar{a}_s = (a_{f_{s+1}}; \dots; a_{f_n}); \quad \bar{b}_s = (a_{f_1}; \dots; a_{f_s}).$$

Уравнения (22) и (23) соответственно в векторной и матричной формах выглядят так:

$$\bar{a}^{(s)} = \bar{a}_s + X_s \left(\sum_{l=0}^{\infty} Q_s^l \right) \bar{b}_s = \bar{a}_s + X_s (I_s - Q_s)^{-1} \bar{b}_s; \quad (24)$$

$$Y^{(s)} = Y_s + X_s \left(\sum_{l=0}^{\infty} Q_s^l \right) Z_s = Y_s + X_s (I_s - Q_s)^{-1} Z_s, \quad (25)$$

где $Q_s^0 = I_s$ и для $l = 1, 2, \dots$ $Q_s^l = Q_s \times Q_s \times \dots \times Q_s$ (l раз).

Отметим, что если провести произвольно перенумерацию внутри группы типов вызовов, имеющих номера $f_1, f_2, \dots, f_s$, то коэффициенты $g_{f_i}^{(s, f_j)}$ и $a_{f_i}^{(s)}$ не изменятся.

Докажем следующее утверждение: пусть

$$\begin{aligned} (b_{f_{s+1}}^{(s)} - c_{f_{s+1}}) / a_{f_{s+1}}^{(s)} = (b_{f_{s+2}}^{(s)} - c_{f_{s+2}}) / a_{f_{s+2}}^{(s)} = \min_{s+1 \leq j \leq n} \{ (b_{f_j}^{(s)} - c_{f_j}) / a_{f_j}^{(s)} \} < \\ < (b_{f_{s+3}}^{(s)} - c_{f_{s+3}}) / a_{f_{s+3}}^{(s)} \end{aligned}$$

и в качестве типа вызовов, имеющего $(s+1)$ -й приоритет, выбран f_{s+1} -й тип (т. е. мы положили $d_{s+1} = f_{s+1}$). Тогда

$$(b_{f_{s+2}}^{(s+1)} - c_{f_{s+2}}) / a_{f_{s+2}}^{(s+1)} < (b_{f_{s+3}}^{(s+1)} - c_{f_{s+3}}) / a_{f_{s+3}}^{(s+1)}.$$

Доказательство без ограничения общности можно провести при $s = 0$ и $f_1 = 1$. Заметим, что для $2 \leq k, l \leq n$

$$g_k^{(1,l)} = g_k^{(l)} + g_k^{(1)} g_1^{(l)} / (1 - g_1^{(1)}); \quad a_k^{(1)} = a_k + g_k^{(1)} a_1 / (1 - g_1^{(1)});$$

$$b_k^{(1)} = \sum_{l=2}^n c_l g_k^{(1,l)} = \sum_{l=2}^n c_l g_k^{(l)} + g_k^{(1)} / (1 - g_1^{(1)}) \sum_{l=2}^n c_l g_1^{(l)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} h_k = (b_k^{(1)} - c_k) / a_k^{(1)} &= \frac{(b_k - c_1 g_k^{(1)}) + g_k^{(1)} / (1 - g_1^{(1)}) (b_1 - c_1 g_1^{(1)}) - c_k}{a_k^{(1)}} = \\ &= \frac{(b_k - c_k) + g_k^{(1)} / (1 - g_1^{(1)}) (b_1 - c_1)}{a_k + g_k^{(1)} / (1 - g_1^{(1)}) a_1} \end{aligned}$$

Воспользуемся следующими соотношениями. Пусть $x, y, z, t > 0$, тогда если $x/y = z/t$, то $(x+z)/(y+t) = x/y$, и если $x/y < z/t$, то $x/y < (x+z)/(y+t) < z/t$. Следовательно,

$$h_{f_2} = (b_1 - c_1) / a_1; \quad h_{f_3} > (b_1 - c_1) / a_1,$$

что и требовалось доказать.

Разобьем типы вызовов на группы следующим образом: k -й тип входит в 1-ю группу, если

$$(b_k - c_k) / a_k = \min_{1 \leq j \leq n} \{ (b_j - c_j) / a_j \}.$$

Остальные группы вызовов строим по индукции. Пусть 1-я, 2-я, ..., $(l-1)$ -я группы построены, причем число типов вызовов в них равно соответственно $s_1, s_2, \dots, s_{l-1}$. Положим $s = s_1 + s_2 + \dots + s_{l-1}$. Если $s = n$, то построение закончено. Пусть $s < n$ и типы вызовов из первых $(l-1)$ групп имеют номера $d_1, d_2, \dots, d_s$. Образует l -ю группу так: k -й тип входит в l -ю группу ($k \neq d_1, \dots, d_s$), если

$$(b_k^{(s)} - c_k) / a_k^{(s)} = \min_{j \neq d_1, \dots, d_s} \{ (b_j^{(s)} - c_j) / a_j^{(s)} \}.$$

Подведем итог. Мы показали следующее: все типы вызовов разбиваются на r групп ($1 \leq r \leq n$), каждый тип вызовов из l -й группы имеет приоритет перед типами вызовов из $(l+1)$ -й группы ($1 \leq l \leq r$); внутри каждой группы приоритеты можно задавать произвольным образом; каждая построенная таким образом приоритетная функция переключения удовлетворяет утверждению теоремы. Доказательство теоремы тем самым завершено.

4. Некоторые следствия

В работах Г. П. Климова [1, 2] и В. В. Рыкова [3] рассмотрена следующая система массового обслуживания. В однолинейную систему, предназначенную для выполнения n типов операций, поступает пуассон-

новский поток с параметром $\delta > 0$. Каждый вызов независимо от других с вероятностью $p_i \left(1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right)$ является вызовом i -го типа. В начальный момент времени в очереди находится $\bar{m}_{0,0} = (m_{0,0}^{(1)}, \dots, m_{0,0}^{(n)})$ вызовов различных типов. Прерываний в обслуживании не допускается. Помимо вызовов из входного потока в момент окончания j -го обслуживания вызовов i -го типа, продолжавшегося в течение $\tau_{i,j}$, в систему поступает $\bar{\psi}_{i,j} = (\psi_{i,j}^{(1)}, \dots, \psi_{i,j}^{(n)})$ вызовов различных типов. Считается, что случайные величины $\{\tau_{i,j}, 1 \leq i \leq n, j \geq 1\}$ и случайные векторы $\{\bar{\psi}_{i,j}, 1 \leq i \leq n, j \geq 1\}$ независимы в совокупности, при любом фиксированном $i = 1, 2, \dots, n$ одинаково распределены и не зависят от входного потока. Рассматривается класс K_0 функций переключения. Обслуживание вызовов ведется так же, как и в системах, описанных в разделе 1.

Пусть при $i = 1, 2, \dots, n$ есть некоторые неотрицательные числа и при $T \in K_0, t \geq 0$ $\xi_i^{(T)}(t)$ есть число вызовов i -го типа, пришедших до момента t , обслуживание которых к моменту t еще не началось, при функции переключения T . В работах [1–3] ставилась задача минимизации функционала

$$N(T) = M \left\{ \int_0^{\lambda^0(T)} \sum_{i=1}^n c_i \xi_i^{(T)}(t) dt \right\},$$

где $\lambda^0(T)$ — момент окончания первого периода занятости (в терминах данной работы — момент остановки). Была построена приоритетная функция переключения, минимизирующая функционал $N(T)$ в классе K_0 функций переключения.

Мы покажем, что задача минимизации функционала $N(T)$ в системе с пуассоновским входным потоком, описанной выше, сводится к задаче минимизации функционала $L(T)$ в системе, задаваемой набором случайных векторов вида (1), и, таким образом, результаты работ [1–3] следуют из результатов данной работы.

Пусть для $T \in K_0$ и $t > 0$ $r^{(T)}(t)$ есть последний из моментов окончания обслуживания вызовов, не превосходящий t ; $\varphi_i^{(T)}(t) (1 \leq i \leq n)$ есть число вызовов i -го типа, пришедших в систему до момента $r^{(T)}(t)$, обслуживание которых к моменту t еще не началось; $v_i^0(T) (1 \leq i \leq n)$ есть число вызовов i -го типа, обслуженных до момента $\lambda^0(T)$, в системе с пуассоновским входным потоком. Покажем, что

$$C(T) = M \left\{ \int_0^{\lambda^0(T)} \sum_{i=1}^n c_i (\xi_i^{(T)}(t) - \varphi_i^{(T)}(t)) dt \right\}$$

не зависит от функции переключения $T \in K_0$, т. е. $C(T) = C \equiv \text{const.}$

Заметим, что (см., например, [3]) случайные векторы $(\lambda^0(T), v_1^0(T), \dots, v_n^0(T))$ одинаково распределены при различных $T \in K_0$.

Для $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, T \in K_0$ в случае, когда происходит событие $v_i^0(T) \geq j$ (т. е. j -е обслуживание вызовов i -го типа заканчивается до момента времени $\lambda^0(T)$), пусть $A_{i,j}(T)$ есть случайный интервал времени, в течение которого происходит j -е обслуживание вызовов i -го типа; $U_{i,j}(T)$ есть (случайное) множество вызовов, пришедших из входного потока за интервал времени $A_{i,j}(T)$; $Y_{i,j}(T)$ есть суммарная стоимость простоя за интервал времени $A_{i,j}(T)$ вызовов из множества $U_{i,j}(T)$; в противном случае положим $Y_{i,j}(T) = 0$. Так как входной поток пуассоновский и при любых $T_1, T_2 \in K_0$ случайные величины $v_i^0(T_1)$ и $v_i^0(T_2)$ одинаково распределены, то одинаково распределены и случайные величины $Y_{i,j}(T_1)$ и $Y_{i,j}(T_2)$ (при любых фиксированных $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots$). Следовательно, $V_{i,j} = M \{Y_{i,j}(T) / v_i^0(T) \geq j\}$ не зависит от

функции переключения $T \in K_0$. Далее, в силу того, что случайные величины в последовательности $\{\tau_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}$ одинаково распределены для любых $i = 1, 2, \dots, n$, получаем, что $V_{i,j}$ не зависит от j . Положим $V_i = V_{i,j}$. Тогда

$$\begin{aligned} C(T) &= M \left\{ \int_0^{\lambda_0(T)} \sum_{i=1}^n c_i (\xi_i^{(T)}(t) - \varphi_i^{(T)}(t)) dt \right\} = M \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} Y_{i,j}(T) \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} M \{ Y_{i,j}(T) / v_i^0(T) \geq j \} P \{ v_i^0(T) \geq j \} = \\ &= \sum_{i=1}^n V_i \sum_{j=1}^{\infty} P \{ v_i^0(T) \geq j \} = \sum_{i=1}^n V_i M \{ v_i^0(T) \}. \end{aligned}$$

Так как $M \{ v_i^0(T) \}$ не зависит от T , то $C(T) = C = \text{const}$. Тем самым задача минимизации функционала $N(T)$ сводится в задаче минимизации

$$\text{функционала } M \left\{ \int_0^{\lambda_0(T)} \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i^{(T)}(t) dt \right\}.$$

Замечание 3. Пусть $I = \{\alpha\}$ — некоторое индексное множество и при каждом $\alpha \in I$ задано n последовательностей случайных векторов $\{\bar{m}_{1,j}^{(\alpha)}\}_{j=1}^{\infty}, \dots, \{\bar{m}_{n,j}^{(\alpha)}\}_{j=1}^{\infty}$, удовлетворяющих (1). Пусть при любых $\alpha, \beta \in I$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots$ случайные векторы $\bar{m}_{i,j}^{(\alpha)}$ и $\bar{m}_{i,j}^{(\beta)}$ одинаково распределены. Определим при $\alpha \in I$ и $T \in K_0$ функционал

$$L(T/\alpha) = M \left\{ \int_0^{\lambda(T)} \sum_{i=1}^n c_i \eta_i^{(T)}(t) dt \right\}$$

в системе, задаваемой набором $\{\bar{m}_{i,j}^{(\alpha)}; 1 \leq i \leq n; j \geq 1\}$. Тогда $L(T/\alpha)$ не зависит от $\alpha \in I$.

Определим теперь в системе с пуассоновским входным потоком некоторый набор случайных векторов вида (1). Пусть для $T \in K_0$ число вызовов 1-го, 2-го, ..., n -го типов, пришедших из входного потока за время j -го обслуживания вызовов i -го типа (при условии, что таковое происходит), есть соответственно $q_{i,j}^{(1)}(T), \dots, q_{i,j}^{(n)}(T)$ (в системе с пуассоновским входным потоком). Положим

$$\bar{m}_{i,j}^{(T)} = (\tau_{i,j}, \psi_{i,j}^{(1)} + q_{i,j}^{(1)}(T), \dots, \psi_{i,j}^{(n)} + q_{i,j}^{(n)}(T)).$$

Тогда, в силу пуассоновости входного потока набор случайных векторов $X(T) = \{\bar{m}_{i,j}^{(T)}; 1 \leq i \leq n; j \geq 1\}$ удовлетворяет условию (1) и при любых $T_1, T_2 \in K_0$; $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots$ случайные векторы $\bar{m}_{i,j}^{(T_1)}$ и $\bar{m}_{i,j}^{(T_2)}$ одинаково распределены.

Заметим, что если при $T \in K_0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots$ величина $\eta_i^{(T)}(t)$ есть число вызовов i -го типа в приемнике в момент времени t при функции переключения T в системе, задаваемой набором векторов $X(T)$, то $\eta_i^{(T)}(t) = \varphi_i^{(T)}(t)$ п. н. и, следовательно,

$$L(T/T) = M \left\{ \int_0^{\lambda_0(T)} \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i^{(T)}(t) dt \right\}.$$

Зафиксируем произвольно $T' \in K_0$. В соответствии с теоремой данной работы можно построить приоритетную функцию переключения $T_0 \in K_0$ такую, что

$$L(T_0/T') = \min_{T \in K_0} L(T/T').$$

Но так как в силу замечания 3 $L(T_0/T') = L(T_0/T_0)$, $L(T_0/T_0) = N(T_0) - C$ и для любой функции переключения $T \in K_0$ $L(T/T') = L(T/T)$, $L(T/T) = N(T) - C$, то, следовательно, $N(T_0) = \min_{T \in K_0} N(T)$. Таким об-

разом, приоритетная функция переключения T_0 , построенная в соответствии с (13) и (21), минимизирует функционал $N(T)$ в классе K_0 .

Автор выражает глубокую благодарность Б. А. Рогозину за ценные замечания и большую поддержку в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Климов Г. П. Системы обслуживания с разделением времени. 1.— Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, № 3, с. 558—576.
2. Климов Г. П. Система обслуживания с разделением времени. 2.— Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. 23, № 2, с. 331—339.
3. Рыков В. В. Применение регенерирующих процессов при исследовании управляемых систем.— Труды III Всесоюз. школы-совещ. по теории массового обслуживания. Т. 1. Пущино-на-Оке. М.: Изд-во МГУ, 1976, с. 135—148.
4. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.