ПРЕДЕЛЬНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ КОНСТРУКТИВИЗАЦИИ

С. С. ГОНЧАРОВ

Изучение неавтоэквивалентных конструктивизаций было начато в работах А. И. Мальцева [1, 2]. За прошедшие годы получены новые, проясняющие общую картину результаты. Одной из основных в этом направлении является проблема о числе неавтоэквивалентных конструктивизаций алгебраических систем, исследованию которой посвящен ряд работ.

Будем в дальнейшем называть максимальное число неавтоэквивалентных конструктивизаций алгебраической системы $\mathfrak{A}$ ее *алгоритмической размерностью*, используя при этом обозначение $\dim_A(\mathfrak{A})$. В этой терминологии проблема о числе неавтоэквивалентных конструктивизаций может быть сформулирована как проблема описания спектра алгоритмических размерностей алгебраических систем. Многочисленные попытки дать такое описание не приводили долгое время к успеху. Задачей данной работы является выяснение причин тех трудностей, которые препятствуют полному решению указанной проблемы, а также использование полученных свойств к изучению конкретных классов моделей. Полученные результаты показывают, что для решения проблемы применение метода приоритета с конечными нарушениями, который являлся до недавнего времени основным в этом направлении, ограничено наличием неавтоэквивалентных, но предельно автоэквивалентных конструктивизаций у исследуемых моделей. Это заставило по-новому взглянуть на проблему спектра, стала ясна принципиальная трудность в изучении данной ситуации, были намечены два возможных пути ее разрешения. Первый — создание нового метода, позволяющего строить не предельно автоэквивалентные конструктивизации, и второй — доказательство существования у любой неавтоустойчивой модели предельно автоэквивалентных, но не автоэквивалентных конструкций, что позволило бы ограничиться старыми методами. Как показали дальнейшие исследования автора [3, 4], верным оказался первый из предложенных путей.

В работах [4, 5] было разработано применение метода приоритета с бесконечными нарушениями в новой ситуации — в теории конструктивных моделей, что и позволило дать полное решение проблемы возможного числа неавтоэквивалентных конструктивизаций. Основной результат данной работы был анонсирован автором без доказательства в [6]. Отметим, что изучение эквивалентных конструктивизаций оказалось полезным в теории конструктивных моделей, а также имеет интересные приложения в теории вычислимых нумераций, которые будут обсуждаться во втором параграфе. В нем основное внимание уделено вопросам существования позитивных и однозначных нумераций, привлекавших внимание многих специалистов [5, 7—15].

§ 1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

В этом параграфе будет указан теоретико-рекурсивный признак бесконечности алгоритмической размерности, основанный на понятии предельно автоэквивалентных конструктивизаций.

Будем придерживаться в этой работе определений и обозначений, касающихся теории рекурсивных функций,— из монографии [16], теории вычислимых нумераций — из монографии [8], а теории конструктивных моделей — из монографий [9, 10] и работ [1—3].

Будем обозначать через $K(x, y)$ двуместную частично рекурсивную функцию, универсальную в классе одноместных частично рекурсивных функций, через $f_n^t(x)$ — значение $K(n, x)$, если оно вычисляется меньше, чем за t, шагов и $f_n^t(x)$ не определено в противном случае. Через N, как обычно, обозначим множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Рассмотрим некоторую геделевскую нумерацию всех конечных кортежей натуральных чисел и будем обозначать через $\langle x_0, \ldots, x_n\rangle$ номер кортежа $(x_0, \ldots, x_n)$ в этой нумерации.

Алгебраическую систему

$$\mathfrak{A} = \langle A, P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots; F_0^{m_0}, \ldots, F_k^{m_k}, \ldots\rangle$$

назовем *рекурсивной*, если A — рекурсивное подмножество в N, а множества $\{\langle k, l_1, \ldots, l_{n_k}\rangle \mid (l_1, \ldots, l_{n_k}) \in P_k\}$, $\{\langle k, l_0, l_1, \ldots, l_{m_k}\rangle \mid F_k(l_1, \ldots, l_{m_k}) = l_0\}$ и функции $n(k) \leftrightharpoons n_k$, $m(k) \leftrightharpoons m_k$ рекурсивны.

Последовательность

$$\{\mathfrak{A}_n = \langle A_n, {}^nP_0, \ldots, {}^nP_k, \ldots; {}^nF_0, \ldots, {}^nF_k, \ldots\rangle, n \in N\}$$

рекурсивных алгебраических систем соответственно сигнатур

$$\left\{\langle {}^nP_0^{\overset{n}{n_0}}, \ldots, {}^nP_k^{\overset{n}{n_k}}, \ldots; {}^nF_0^{\overset{n}{m_0}}, \ldots, {}^nF_k^{\overset{n}{m_k}}, \ldots\rangle, n \in N\right\}$$

называется *вычислимой*, если множества $\{\langle n, m\rangle \mid m \in A_n\}$,

$$\left\{\langle n, \langle k, l_1, \ldots, l_{\overset{n}{n_k}}\rangle\rangle \mid \left(l_1, \ldots, l_{\overset{n}{n_k}}\right) \in {}^nP_k\right\},$$

$$\left\{\langle n, \langle k, l_0 \ldots, l_{\overset{n}{m_k}}\rangle\rangle \mid {}^nF_k\left(l_1, \ldots, l_{\overset{n}{m_k}}\right) = l_0\right\}$$

и функции $n(n, k) \leftrightharpoons \overset{n}{n_k}$, $m(n, k) \leftrightharpoons \overset{n}{m_k}$ рекурсивны.

Последовательность

$$\{\mathfrak{A}_n = \langle A_n, {}^nP_0, \ldots, {}^nP_k, \ldots; {}^nF_0, \ldots, {}^nF_k, \ldots\rangle, n \in N\}$$

конечных рекурсивных моделей называется *строго вычислимой*, если она вычислима, а последовательность конечных множеств $\{A_n, n \in N\}$ сильно вычислима [8].

Определение 1. Пусть ν и μ — две конструктивизации модели $\mathfrak{M}$. Назовем ν и μ *предельно автоэквивалентными*, если существует автоморфизм φ модели $\mathfrak{M}$ и функция f из Δ_2^0 такие, что $\varphi\nu = \mu f$.

Теорема 1. *Если $\mathfrak{M}$ имеет две неавтоэквивалентные, но предельно автоэквивалентные конструктивизации, то* $\dim_A(\mathfrak{M}) = \infty$.

Доказательство. Пусть ν и μ — две однозначные конструктивизации модели $\mathfrak{M}$, которые неавтоэквивалентны, но предельно автоэквивалентны, и φ — автоморфизм, а g — функция из Δ_2^0 такие, что $\varphi\nu = \mu g$. Нетрудно заметить, что существует вычислимая последовательность разнозначных рекурсивных функций $\{g_n | n \in N\}$ такая, что $\lim g_n = g$.

Построение искомой последовательности $\{\gamma_n, n \in N\}$ конструктивизаций модели $\mathfrak{M}$ будем вести по шагам, используя метод приоритета с конечными нарушениями. В результате будет построена вычислимая последовательность рекурсивных моделей $\{\mathfrak{M}_m,\ m\in N\}$, которые с естественной нумерацией будут представлять конструктивную модель, изоморфную $(\mathfrak{M}, \gamma_m)$, $m\in N$, а также вспомогательные функции $r(n, m, k, t)$, ζ^t_m, η^t_m равномерно по t.

Будем также ставить на γ_n- и γ_m-номера метки $S_{\langle n, m, k\rangle}$ и $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$, где $m\neq n$, упорядоченные по номерам троек $\langle n, m, k\rangle$ в некоторой геделевской нумерации всех троек, а из двух меток с одним и тем же номером большей будем считать метку со звездочкой.

Шаг 0. Определим $\gamma^0_n=\varnothing$, $\mathfrak{M}^n_0=\varnothing$, $\zeta^0_n=\eta^0_n=\varnothing$ и $r(n, m, k)\leftrightharpoons \langle n, m, k\rangle$ для всех $n, m, k\in N$.

Шаг $t+1$. Этот шаг состоит из трех этапов.

Этап 1. Рассмотрим наименьшую S-метку $S_{\langle n, m, k\rangle}$, которая стоит на некоторых числах, и наименьшее l такое, что функции $g_t\zeta^t_l$ и η^t_l не совпадают на множестве $[l]^t_{(n,m,k)}\leftrightharpoons\{x\mid$ на γ_l-номере x стоит метка $S_{\langle n, m, k\rangle}$, либо $S^*_{\langle n,m,k\rangle}\}$, но совпадают на множестве $\langle l\rangle^t_{(n,m,k)}\leftrightharpoons\{x\mid$ на γ_l-номере x стоит метка, меньшая $S_{\langle n, m, k\rangle}\}$, и $l=n$ либо $l=m$.

Если такой метки нет, то переходим к следующему этапу, если же есть, то ищем такое $t'\geqslant t+1$, что либо

A) найдутся конечные функции

$$\zeta\supseteq\zeta^t_l\restriction\langle l\rangle^t_{(n,m,k)}\ \text{и}\ \eta\supseteq\eta^t_l\restriction\langle l\rangle^t_{(n,m,k)}$$

такие, что

1) $\mu g_{t'}\zeta$ и $\mu\eta$ совпадают на $[l]^t_{(n,m,k)}$ и существует изоморфизм φ подмодели с основным множеством $\nu\zeta\left(\left|\mathfrak{M}^l_t\right|\right)$ модели $\mathfrak{M}\restriction\Sigma^t$ на подмодель этой же модели, но с основным множеством $\mu\eta\left(\left|\mathfrak{M}^l_t\right|\right)$, такой, что $\varphi\nu\zeta(x)=\mu g_{t'}\eta(x)$ для $x\in\langle l\rangle^t_{(n,m,k)}$, и $\nu\zeta$ и $\mu g_{t'}\eta$ — изоморфные вложения модели $\mathfrak{M}^l_t$ в модель $\mathfrak{M}$;

2) $\zeta=\zeta^t_m$, если $l=m$, и $\eta=\eta^t_n$, если $l=n$;

либо

B) $\mu g_{t'}\zeta^t_l$ и $\mu\eta_l$ не совпадают на $\langle l\rangle^t_{(n,m,k)}$.

Если выполнено условие B), то переходим к следующему шагу. Если выполнено условие A), то полагаем $\zeta^{t+1}_l\leftrightharpoons\zeta\restriction\left|\mathfrak{M}^t_l\right|$, $\eta^{t+1}_l\leftrightharpoons\eta\restriction\left|\mathfrak{M}^t_l\right|$ и $r(n, m, k, t+1)\leftrightharpoons(n, m, k, t)+1$.

Все метки с номерами, большими номера метки $S_{\langle n, m, k\rangle}$, снимаем, а на все $x\in\left(\zeta^{t+1}_l\right)^{-1}(\{0, 1, \ldots, r(n,m,k,t+1)\})$ поставим метку $S_{\langle n, m, k\rangle}$. Определим $\gamma^{t+1}_n(x)=\nu\zeta^t_n(x)$ для $n\in N$ и $x\in\left|\mathfrak{M}^t_n\right|$. Определим $\mathfrak{M}^{t+1}_l$, доопределив на $\mathfrak{M}^t_l$ еще не определенные предикаты из Σ^{t+1}, используя вложение $\nu\zeta^{t+1}_l$, все остальное оставляем без изменений и переходим к следующему шагу.

Этап 2. Проделаем последовательно для всех $i\leqslant t$ следующие построения.

Подэтап i, $i\leqslant t$. Найдем наименьшие числа $n\notin\zeta^t_i\left(\left|\mathfrak{M}^t_i\right|\right)$ и $m\notin\left|\mathfrak{M}^t_i\right|$ и определим ζ, доопределив ζ^t_i в точке m значением n.

Ищем теперь $t'\geqslant t+1$ такое, что либо

a$_i$) существует изоморфизм φ подмоделей модели $\mathfrak{M}\restriction\Sigma^t$ с основным множеством из $\nu\zeta\left(\left|\mathfrak{M}^t_i\right|\cup\{m\}\right)$ и $\mu g_{t'}\zeta\left(\left|\mathfrak{M}^t_i\right|\cup\{m\}\right)$, причем $\mu g_{t'}\zeta$ и $\mu\eta^t_m$ совпадают на всех x, на которых стоят метки, а $\nu\zeta$ и $\mu g_{t'}\zeta$ изоморфно вкладывают $\mathfrak{M}^t_i$ в $\mathfrak{M}$; либо

b$_i$) $\mu g_{t'}\zeta(x)\neq\mu\eta^t_m(x)$ для некоторого x, на котором стоит метка.

Если выполнено условие b$_i$), то, оставив все без изменений, переходим к подэтапу $i+1$, если $i<t$, и к этапу 3, если $i=t$.

Если выполнено условие a$_i$), то положим $\zeta_i^{t+1} \rightleftharpoons \zeta$, $\eta_i^{t+1} \rightleftharpoons g_{t'}\zeta$, определим $\mathfrak{M}_i^{t+1}$, взяв $|\mathfrak{M}_i^{t+1}| \rightleftharpoons |\mathfrak{M}_i^t| \cup \{m\}$ и доопределив все предикаты из Σ^{t+1} на $|\mathfrak{M}_i^{t+1}|$, используя отображение $\nu\zeta$ из $|\mathfrak{M}_i^{t+1}|$ в $\mathfrak{M}$. Если $m \leqslant r(j_0, j_1, k', t)$ для некоторой тройки $\langle j_0, j_1, k' \rangle$, где $j_0 = i \vee j_1 = i$, а на m стоит метка $S_{\langle j_0, j_1, k' \rangle}$ то поставим на m метку $S^*_{\langle j_0, j_1, k' \rangle}$, и переходим к подэтапу $i+1$, если $i < t$, и к этапу 3, если $i = t$.

Этап 3. Выбираем наименьшую тройку $\langle n, m, k \rangle \leqslant t$, $n \neq m$, такую, что f_k^t — разнозначная функция и существует $f \subseteq f_k^t$ такая, что

3.1. $\delta f \supseteq \{x|$ на γ_n-номере x стоит метка с номером, не большим $\langle n, m, k \rangle\} \cup \{x | x \leqslant r(n, m, k)\}$;

3.2. $\rho f \supseteq \{x|$ на γ_m-номере x стоит метка с номером, не большим $\langle n, m, k \rangle\} \cup \{x | x \leqslant r(n, m, k, t)\}$;

3.3. $g_t \zeta_m^t(\rho f) \supseteq \{x \mid x \leqslant r(n, m, k, t)\}$,

$\zeta_n^t(\delta f) \supseteq \{x \mid x \leqslant r(n, m, k, t)\}$;

3.4. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n^t & \xrightarrow{\zeta_n^t} & N \\ f \downarrow & & \downarrow g_t \\ \mathfrak{M}_m^t & \xrightarrow{\eta_m^t} & N \end{array}$$

коммутативна, $\eta_m^t f = g_t \zeta_n^t$.

Если такой тройки нет, то переходим к следующему шагу. В противном случае снимем все метки с номерами, большими $\langle n, m, k \rangle$, на все γ_n-номера x такие, что $x \in \delta f$, поставим метку $S^*_{\langle n,m,k \rangle}$. И на все γ_m-номера x такие, что $x \in \rho f$, поставим метку $S^*_{\langle n,m,k \rangle}$, а на все γ_n-номера x такие, что $\zeta_n^{t+1}(x)$ определено, поставим метку $S_{\langle n, m, k \rangle}$. И на γ_m-номера x такие, что $\eta_m^{t+1}(x)$ определено, поставим метку $S_{\langle n, m, k \rangle}$. Положим $r(n, m, k, t+1) = r(n, m, k, t) + 1$ и перейдем, оставив все остальное без изменений, к следующему шагу.

Лемма 1. *Каждая метка ставится лишь конечное число раз.*

Доказательство. Рассмотрим наименьшую метку, которая ставится бесконечно часто. Пусть это $S_{\langle n, m, k \rangle}$. Рассмотрим шаг t_0, после которого никакая метка с меньшим номером больше не ставится и не снимается. Рассмотрим функции γ_n^t и γ_m^t, $t \geqslant 0$. Так как после шага t_0 метка $S_{\langle n, m, k \rangle}$ не может сниматься, то после шага t_0 для всех l таких, что на γ_n-номер l ставится метка $S_{\langle n, m, k \rangle}$ на шаге $t' \geqslant t_0$, имеем $\gamma_n^{t'}(l) = \gamma_n^t(l)$ для всех $t \geqslant t'$, аналогично и для γ_m-номеров l. Кроме того, так как $S_{\langle n', m, k \rangle}$ ставится бесконечно часто, то $\lambda t r(n, m, k, t)$ возрастает и $\lim r(n, m, k, t) = \infty$. Для γ_n-номеров, на которые поставится метка $S_{\langle n, m, k \rangle}$ после шага t_0, будет выполняться $\gamma_n^t(l) = \nu\zeta_n^t(l)$, $\gamma_m^t(l) = \mu\eta_m^t(l)$ для $t \geqslant t' \geqslant t_0$ и значения $\lambda t \zeta_n^t(l)$ и $\lambda t \eta_m^t(l)$ не изменяются после этого шага. Поэтому из определения подэтапа 3, который для метки $S_{\langle n, m, k \rangle}$ выполняется бесконечно часто, следует, что функция $\lambda x K(k, x)$ всюду определена и осуществляет изоморфизм $(\mathfrak{M}, \gamma_n)$ на $(\mathfrak{M}, \gamma_m)$, где $\gamma_n = \lim \gamma_n^t$, $\gamma_m = \lim \gamma_m^t$, но в таком случае, как видно из вышесказанного, функция $\zeta(l) = \zeta_n^{t'}(l)$, где $t' \geqslant t_0$ и $\zeta_n^{t'}(l)$ определено, задает рекурсивный изоморфизм $(\mathfrak{M}, \gamma_n)$ и $(\mathfrak{M}, \nu)$, а функция $\eta(l) = \eta_m^{t'}(l)$, где $t' \geqslant t_0$ и $\eta_m^{t'}(l)$ определено, задает рекурсивный изоморфизм $(\mathfrak{M}, \gamma_m)$ на $(\mathfrak{M}, \mu)$, но это противоречит тому, что выбранные нумерации ν и μ не автоэквивалентны. Таким образом, S-метка не может ставиться бесконечно часто.

Осталось рассмотреть лишь следующий случай: наименьшая метка, которая бесконечно часто ставится, это $S^*_{\langle n,m,k \rangle}$. Рассмотрим шаг t_0, после которого никакая метка, меньшая $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$, уже больше не ставится и не снимается, но в этом случае метка $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$ уже больше не снимается, а только ставится. Но так как метка $S_{\langle n,m,k\rangle}$ больше не ставится, то $\lambda tr(n, m, k, t)$ после шага t_0 не изменяется, а $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$ ставится лишь на элементы с $\zeta^t_n, g_t\zeta^t_m$ образами, $t \geqslant t_0$ меньшими $r(n, m, k, t)$, но таких образов после шага t_0 может быть лишь конечное число, а поэтому $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$ также не может ставиться бесконечно. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Лемма 2. *Если $\gamma^t_n(l)$ определено, то значения $\lambda t\zeta^t_n(l)$ и $\lambda t\eta^t_n(l)$ могут изменяться лишь конечное число раз.*

Доказательство. Рассмотрим наименьшее n, для которого не выполнено условие леммы, и наименьшее l такое, что $\lambda t\zeta^t_n(l)$, либо $\lambda t\eta^t_n(l)$ принимает бесконечно много значений. Если на γ_n-номер l не ставится никакая метка, то начиная с некоторого шага t_0 никакая метка $S_{\langle m,n,k\rangle}$, $S_{\langle n,m,k\rangle}$, $S^*_{\langle m,n,k\rangle}$, либо $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$, где k, $m \in N$, больше не ставится. Рассмотрим шаг $t_1 \geqslant t_0$, после которого значения $\lambda t\zeta^t_n(l')$ и $\lambda t\zeta^t(l')$ для $l' < l$ уже не изменяются. Это означает, что ни для какой метки $S_{\langle n,m,k\rangle}$ и $S_{\langle n,m,k\rangle}$, где k, $m \in N$, не выполняются условия этапа 1. Но в таком случае мы не можем изменить и значения $\zeta^t_n(l)$ и $\eta^t_n(l)$. Если же на γ_n-номер l ставится на некотором шаге какая-нибудь метка, то рассмотрим наименьшую метку $\varkappa$, которая ставится на γ_n-номер l. Рассмотрим шаг t_0, после которого $\lambda t\zeta^t_n(l')$ и $\lambda t\eta^t_n(l')$ для $l' < l$ уже не изменяются и метка $\varkappa$ больше не ставится. Заметим, что для метки $\varkappa$ условия этапа 1 могут выполняться только конечное число раз. Это происходит в силу того, что если на l ставится и больше не снимается некоторая метка, то $\lambda t\zeta^t_n(l)$, либо $\lambda t\eta^t_n(l)$ уже не изменяется, а вторая из этих функций определяется так, что $g_t\zeta^t_n(l) = \eta^t_n(l)$, но $g = \lim g_t$, а поэтому с некоторого шага $t' \geqslant t_0$ и вторая функция для l не будет изменяться.

Лемма 3. *Этап 1 для каждой тройки $\langle n, m, k\rangle$ может выполняться лишь конечное число раз.*

Доказательство. Рассмотрим наименьшую тройку $\langle n, m, k\rangle$, для которой не выполнена лемма.

Рассмотрим шаг t_0, после которого никакая метка не большая $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$ уже не ставится и не снимается и для троек, меньших $S_{\langle n,m,k\rangle}$, больше не выполняется этап 1. Рассмотрим шаг $t_1 \geqslant t_0$, после которого значения $\lambda t\zeta^t_n(l)$ и $\lambda t\eta^t_n(l)$ для γ_n-номеров, на которых стоит метка $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$, либо $S_{\langle n,m,k\rangle}$, уже не изменяются. Аналогично для γ_m-номеров. Но тогда для тройки $\langle n, m, k\rangle$ после шага $t_2 > t_1$ такого, что $\lambda tg_t\zeta^t_n(l)$ больше не изменяется для $t \geqslant t_2$, этап 1 не может выполниться для $\langle n, m, k\rangle$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 4. *Бесконечно часто для каждого n выполняется условие $\mathrm{a}_n)$ подэтапа n этапа 2.*

Доказательство. Предположим противное и рассмотрим наименьшее n, для которого это не так. Заметим, что этап 2 выполняется бесконечно часто, так как в противном случае может выполняться лишь этап 1, но через конечное число шагов, когда для всех i и n таких, что $\gamma^t_n(i)$ определено, мы определим ζ^t_n и η^t_n таким образом, что $g_t\zeta^t_n(i) = \eta^t_n(i)$ и $g_t\zeta^t_n(i)$ больше не изменяется, этап 1 больше не будет выполняться и мы должны будем перейти к этапу 2. Таким образом, этап 2 выполняется бесконечно часто. Так как для n условие $\mathrm{a}_n)$ по предположению выполняется лишь конечное число раз, область определения γ^t_n, начиная с некоторого шага t_0, уже не изменяется, и в силу леммы 2 существует шаг $t_1 \geqslant t_0$, после которого значения $\lambda t \zeta_n^t(l)$ и $\lambda t \eta_n^t(l)$ для $l \in \rho\gamma_n^{t_0}$ уже не изменяются. Пусть $\varkappa = S_{\langle l_1, l_2, k\rangle}$, либо $\varkappa = S^*_{\langle l_1, l_2, k\rangle}$, где $l_1 = n$, либо $l_2 = n$. Рассмотрим шаг $t_2 \geqslant t_1$, после которого для тройки $\langle l_1, l_2, k\rangle$ не выполняется этап 1. Такой шаг существует в силу леммы 3. Тогда для всех $l \in \rho\gamma_n^{t_0}$ и $t \geqslant t_2$ выполняется $g_t\zeta_n^t(l) = \eta_n^t(l)$, а значит, взяв шаг $t_3 \geqslant t_2$, после которого выполняется этап 2, придем к тому, что для t_2 выполнено условие a_n) подэтапа n. Полученное противоречие заканчивает доказательство леммы.

Лемма 5. *Для всех n и l существует* $\gamma_n(l) = \lim \gamma_n^t(l)$.

Доказательство. В силу леммы 4 для любых n и l существует шаг t такой, что $\gamma_n^t(l)$ определено, и отсюда по лемме 2 существует $\lim \gamma_n^t(l) \in M$.

Таким образом, мы определяем нумерацию γ_n некоторой подмодели модели $\mathfrak{M}$. Эта нумерация разнозначна, так как все γ_n^t разнозначны. Покажем, что это нумерация всей модели $\mathfrak{M}$.

Лемма 6. *Для любых $n \in N$ и $d \in N$ существует $l \in N$ такое, что* $\gamma_n(l) = \nu(d)$.

Доказательство. Рассмотрим наименьшее n, а для него и наименьшее d такие, что для них не справедлива наша лемма. Если существует бесконечно много меток $S_{\langle m, n, k\rangle}$, $S_{\langle n, m, k\rangle}$, m, $k \in N$, которые ставятся на некотором шаге, то существует бесконечно много таких меток, которые будут поставлены и больше не снимутся. Выберем среди них такую, что $\langle n, m, k\rangle > \max\{d, d'\}$, где $\mu(d') = \nu(d)$. Для того, чтобы эта метка поставилась на шаге t_0, нужно, чтобы существовали l и l' такие, что $\zeta_n^{t_0}(l) = d$ и $\eta_n^{t_0}(l') = d'$, в таком случае на l и l_1 поставится метка, которая больше не снимется. А отсюда либо $\lambda t \zeta_n^t(l)$, либо $\lambda t \eta_n^t(l')$ больше не изменяется после этого шага, в зависимости от того, стоит $S_{\langle n, m, k\rangle}$, либо $S_{\langle n, m, k\rangle}$. Поэтому $\gamma_n(l) = \nu\zeta_n^{t_0}(l)$, либо $\gamma_n(l') = \mu\eta_n^{t_0}(l')$, а отсюда $\gamma_n(l) = \nu d$, либо $\gamma_n(l') = \nu(d)$ и лемма доказана.

Лемма 7. *Для любого n отображение γ_n задает конструктивизацию модели $\mathfrak{M}$ равномерно по n, т. е. $\{\gamma_n | n \in N\}$ — вычислимая последовательность конструктивизаций $\mathfrak{M}$.*

Доказательство следует из того, что $\{\mathfrak{M}_n^t \mid n, t \in N\}$ — вычислимая последовательность конструктивных моделей, $\mathfrak{M}_n^0 \subseteq \mathfrak{M}_n^1 \subseteq \ldots$, $\bigcup_t \mathfrak{M}_n^t$ — рекурсивная модель, изоморфная $\mathfrak{M}$, а для любого t отображение $\gamma_n^t : \mathfrak{M}_n^t \to \mathfrak{M}$ является изоморфным вложением.

Лемма 8. *Для любых $n \neq m$ конструктивизации γ_n и γ_m неавтоэквивалентны.*

Доказательство. Предположим противное, пусть φ — автоморфизм модели $\mathfrak{M}$ и f_k — рекурсивная функция такая, что $\varphi\gamma_n = \gamma_m f_k$. Рассмотрим метку $S_{\langle n, m, k\rangle}$ и шаг t_0, после которого метки, не больше $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$, уже не ставятся и не снимаются. В силу леммы 6 на всех γ_n-номерах x таких, что $\zeta_n^t(l) \leqslant r(n, m, k, t_0)$, и всех γ_m-номерах l' таких, что $\eta_m^t(l') \leqslant r(n, m, k, t_0)$ и $t \geqslant t_0$, уже стоит метка $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$ и $\zeta_n^t(l)$ и $\eta_m^t(l')$ определены на таких числах, соответственно $\eta_n^{t_0}(l)$ и $\eta_m^{t_0}(l')$. Рассмотрим шаг $t_1 \geqslant t_0$, после которого для тройки $\langle n, m, k\rangle$ не выполняется этап 1. Рассмотрим шаг $t_2 \geqslant t_1$ такой, что для всех $l \leqslant r(n, m, k, t_0)$ найдется d_l, $\zeta_n^{t_2}(d_l) = l$ и $\lambda t \zeta_n^t(d_l)$ после t_2 не изменяется, аналогично для $l' \leqslant r(n, m, k, t_0)$ найдется d_l', $\eta_m^{t_2}(d_l') = l'$ и $\lambda t \eta_m^t(d_l')$ не изменяется. Выберем l_0, больший всех таких d_l и $d_{l'}$, а также больше $r(n, m, k, t)$ и всех чисел, на которых стоят меньшие метки. Существует $t_3 \geqslant t_2$ такое, что $\delta f_k^{t_3} \supseteq \{0, \ldots l_0\}$ и $\rho f_k^{t_3} \supseteq \{0, \ldots, l_0\}$. Выберем $t_4 \geqslant t_3$ такое, что для всех $x \in \{0, \ldots, l_0\}$ $\lambda t \zeta_n^t(x)$ и $\lambda t \eta_n^t(x)$ при $t \geqslant t_4$ не изменяются, $\lambda t \zeta_m^t f_k(x)$ и $\lambda t \eta_m^t f_k(x)$ при $t \geqslant t_4$ также не изменяются и $\lambda t g_t(\zeta_n^t(x))$ при $t \geqslant t_4$ тоже не изменяется. Рассмотрим теперь шаг $t_5 > t_4$, на котором ставится метка $S_{\langle n', m', k' \rangle}$, большая метки $S_{\langle n, m, k \rangle}$. Тогда на этом шаге для тройки $\langle n, m, k \rangle$ выполнятся все условия этапа 3, и должна будет поставиться метка $S_{\langle n, m, k \rangle}$, что противоречит предположению.

Если же такого шага не найдется, то так как после t_4 не ставится никакой метки $S_{\langle n', m', k' \rangle}$, большей $S_{\langle n, m, k \rangle}$, то тоже выполнится этап 3 для $S_{\langle n, m, k \rangle}$ на некотором шаге $t \geqslant t_4$.

§ 2. ПРИЛОЖЕНИЯ К ВЫЧИСЛИМЫМ НУМЕРАЦИЯМ

Как было сказано выше, все определения относящиеся к вычислимым нумерациям, взяты из [8]. В этой части укажем некоторые приложения теоремы 1 к изучению позитивных и однозначных нумераций.

Определение 2. Нумерация γ_0 *Δ_2^0-сводится* к γ_1 ($\gamma_0 \leqslant_{\Delta_2^0} \gamma_1$), если существует функция f из Δ_2^0 класса арифметической иерархии такая, что $\gamma_0(n) = \gamma_1 f(n)$ для любого $n \in N$.

Определение 3. Нумерации γ_0 и γ_1 *Δ_2^0-эквивалентны*, если они Δ_2^0-сводятся друг к другу.

Заметим, что если $\gamma_0 \leqslant_{\Delta_2^0} \gamma_1$ и γ_1-позитивная нумерация, а γ_0 и γ_1 — вычислимые нумерации одного и того же семейства, то γ_0 и γ_1 Δ_2^0-эквивалентны.

Предложение 1. *Семейство р. п. множеств S, имеющее две неэквивалентные вычислимые однозначные нумерации, но Δ_2^0-эквивалентные, имеет счетное число неэквивалентных однозначных вычислимых нумераций.*

Доказательство. Пусть γ_0 и γ_1 — две неэквивалентные однозначные вычислимые нумерации семейства S, тогда существует $0'$-рекурсивная функция f такая, что $\gamma_0(n) = \gamma_1 f(n)$ для всех $n \in N$.

Рассмотрим модель $\mathfrak{M}_S$, построенную в работе [3] для семейства S, и ее две конструктивизации ν_{γ_0} и ν_{γ_1}. Используя f, нетрудно построить теперь функцию g, также $0'$-рекурсивную, такую что $\varphi \nu_{\gamma_0}(n) = \nu_{\gamma_1} g(n)$ для всех $n \in N$, где φ — автоморфизм модели $\mathfrak{M}_S$. Теперь, применяя теорему 1, получаем, что класс конструктивизаций модели $\mathfrak{M}_S$ бесконечен, а в силу предложения из [3] существует бесконечно много однозначных вычислимых нумераций и у S.

Следствие 1 [10]. *Семейство о. р. ф. S с двумя неэквивалентными однозначными вычислимыми нумерациями имеет счетное число неэквивалентных однозначных вычислимых нумераций.*

Пусть γ_0 и γ_1 — две неэквивалентные вычислимые нумерации S, тогда $\{(n, m) \mid \gamma_0(n) = \gamma_1(m)\} \in \Sigma_2^0$ и, следовательно, применимо предложение 1.

Следствие 2 [10, 13]. *Семейство конечных множеств с двумя неэквивалентными однозначными вычислимыми нумерациями имеет счетное число неэквивалентных однозначных вычислимых нумераций.*

Пусть γ_0 и γ_1 — две неэквивалентные однозначные вычислимые нумерации семейства S. Тогда множество $\{(n, m) \mid \gamma_0(n) = \gamma_1(m)\} \in \Sigma_2^0$

и, следовательно, функция f с этим графиком принадлежит Δ_2^0 и применяется предложение 1.

Предложение 2. *Если семейство р. п. множества S имеет две неэквивалентные, но Δ_2^0-эквивалентные позитивные вычислимые нумерации, то существует счетное число неэквивалентных позитивных нумераций.*

Доказательство. Пусть γ — вычислимая позитивная нумерация семейства S с бесконечными смежными классами по нумерационной эквивалентности η_γ. Определим модель $\mathfrak{M}_S^*$ сигнатуры $\langle A^1, P^3, Q^3, R_n^3, S_n^2 \mid n \in N\rangle$.

Пусть $\eta_\gamma = \cup \eta^t$, где η^t, $t \geqslant 0$,— сильно вычислимая возрастающая последовательность конечных множеств. Основное множество $\mathfrak{M}_S^*$ будет $M \leftrightharpoons N \cup N^3 \cup N^3 \times \{0\}$. Определим теперь предикаты: $A \leftrightharpoons N$, $P \leftrightharpoons \{(n, m, (n, m, k)) | m, k, n \in N\}$, $R_n \leftrightharpoons \{(m, (m, n, k)) | m, k \in N\}$, $Q \leftrightharpoons \{(n, m, (n, m, t, 0)) | (n, m) \in \eta^{t+1} \setminus \eta^t\}$, $S_n \leftrightharpoons \{(m, (m, n, t)) | n \in \gamma^{t+1}(m) \setminus \gamma^t(m)\}$, где $\{\gamma^t(m)\}$ — сильно вычислимая двойная последовательность, монотонно возрастающая по t для любого m и $\cup \gamma^t(m) = \gamma(m)$. Ясно, что с точностью до изоморфизма определение модели $\mathfrak{M}_S^*$ от нумерации γ не зависит. Определим

$$\nu_\gamma(n) \leftrightharpoons \begin{cases} m & , \text{ если } n = 3m, \\ (ll(m), rl(m), r(m)), & \text{если } n = 3m+1, \\ (ll(m), rl(m), r(m)), & \text{если } n = 3m+2. \end{cases}$$

Ясно, что ν_γ — конструктивизация $\mathfrak{M}_S^*$.

Рассмотрим формулы $\varphi_n(x) \leftrightharpoons (\exists y) S_n(x, y)$ и $\psi(x, y) \leftrightharpoons (\exists z) Q(x, y, z)$.

Нетрудно непосредственно проверить следующие леммы.

Лемма 1.

$$\text{(i) } \mathfrak{M}_S^* \models \varphi_n(a) \Leftrightarrow a \in A \text{ и } n \in \gamma(a).$$

$$\text{(ii) } \mathfrak{M}_S^* \models \psi(a, b) \Leftrightarrow a, b \in A \text{ и } \gamma(a) = \gamma(b).$$

Лемма 2. *γ_1 и γ_2 неэквивалентные $\Leftrightarrow \nu_{\gamma_1}$ и ν_{γ_2} — неавтоэквивалентные конструктивизации.*

Если ν — конструктивизация $\mathfrak{M}_S^*$, то определим рекурсивную функцию $f: N \xrightarrow{1-1} \nu^{-1}(A)$.

Положим $\gamma_\nu(n) \leftrightharpoons \{m \mid \mathfrak{M}_S^* \models \varphi_m(\nu f(n))\}$. Нетрудно видеть, что γ_ν — позитивная нумерация.

Лемма 3. *ν и μ — неавтоэквивалентные конструктивизации тогда и только тогда, когда γ_ν и γ_μ неэквивалентны.*

Пусть γ_0 и γ_1 — неэквивалентные позитивные вычислимые нумерации семейства S, которые Δ_2^0-эквивалентны, тогда существует $0'$-рекурсивная функция f такая, что $\gamma_0 = \gamma_1 f$. Нетрудно добиться того, чтобы f отображала N на N.

Используя эту функцию, легко определить $0'$-рекурсивную функцию h, для которой выполнено равенство $\nu_{\gamma_0} = \nu_{\gamma_1} h$. Применив теперь теорему 1, получаем в силу леммы 3, что S имеет счетное число неэквивалентных позитивных вычислимых нумераций.

Пусть S — семейство конечных множеств, ν и μ — две позитивные нумерации семейства S. Значение $f(n)$ положим равным m такому, что существует t такое, что выполнено условие A: для всех $t' \geqslant t$ множества $\mu^t(i)$ и $\mu^{t'}(i)$ для $i \leqslant m$ равны и множества $\nu^t(i)$ и $\nu^{t'}(i)$, $i \leqslant m$, также равны, и $\nu^t(n) = \mu^t(m)$, но $\mu^t(m) \neq \mu^t(i)$ для всех $i < m$. Условие A рекурсивно относительно $0'$, поэтому функция f имеет $0'$-перечислимый график, а так как она всюду определена, то f $0'$-рекурсивна и, следовательно, мы построили функцию из Δ_2^0 такую, что $\nu = \mu f$. Применив теперь предложение 2, получаем

Следствие. *Если семейство конечных множеств имеет две неэквивалентные вычислимые позитивные нумерации, то существует счетное число таких неэквивалентных нумераций.*

В заключение сформулируем два вопроса, уже давно известные и неоднократно упоминавшиеся в выступлениях Ю. Л. Ершова и С.С. Марченкова.

Вопросы:

1. Всякое ли семейство рекурсивно перечислимых множеств, имеющее не менее двух неэквивалентных позитивных вычислимых нумераций, обладает счетным числом таких неэквивалентных нумераций?

2. Существуют ли семейства рекурсивно перечислимых множеств с любым заданным конечным числом неэквивалентных минимальных вычислимых нумераций?

Отметим в связи с этими проблемами, что существуют семейства рекурсивно перечислимых множеств с любым заданным числом неэквивалентных однозначных вычислимых нумераций [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мальцев А. И.** Конструктивные модели I.— Успехи мат. наук, 1961, т. 16, № 3, с. 3—60.
2. **Мальцев А. И.** О рекурсивных абелевых группах.— Докл. АН СССР, 1962, т. 146, № 5, с. 1009—1012.
3. **Гончаров С. С.** Однозначные вычислимые нумерации.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 5, с. 507—551.
4. **Гончаров С. С.** Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 2, с. 271—274.
5. **Гончаров С. С.** Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 6, с. 621—639.
6. **Гончаров С. С.** Автоустойчивость моделей и абелевых групп.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 1, с. 23—44.
7. **Бадаев С. А.** О позитивных нумерациях.— Сиб. мат. журн., 1977, т. 18, № 3, с. 483—496.
8. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
9. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций III. Новосибирск: изд. Новосиб. ун-та, 1974.
10. **Ершов Ю. Л.** Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
11. **Селиванов В. Л.** О нумерациях семейств общерекурсивных функций.— Алгебра и логика, 1976, т. 15, № 2, с. 205—226.
12. **Селиванов В. А.** О нумерациях канонически вычислимых семейств конечных множеств.— Сиб. мат. журн., 1977, т. 18, № 6, с. 1373—1380.
13. **Селиванов В. Л.** Несколько замечаний о классах рекурсивно перечислимых множеств.— Сиб. мат. журн., 1980, т. 18, № 1, с. 153—160.
14. **Lachlan A. N.** On recursive enumeration without repetition.— Z. Math. Logik Grundl. Math., 1965, Bd. 11, N 3, S. 209—220.
15. **Lachlan A. N.** On recursive enumeration without repetition: a correction.— Z. Math. Logik Grundl. Math., 1967, Bd. 13, N 2, S. 99—100.

СТРОЕНИЕ РЕШЕТОК КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ

В. А. ГОРБУНОВ, В. И. ТУМАНОВ

В работе предложен алгебраический подход к изучению квазимногообразий алгебраических систем, основанный на использовании языка подпрямых произведений и надпрямых пределов. Установлено соответствие между «внутренним» строением квазимногообразий и строением алгебраических решеток. Это позволило найти точное представление ре-