график, а так как она всюду определена, то f $0'$-рекурсивна и, следовательно, мы построили функцию из Δ_2^0 такую, что $\nu = \mu f$. Применив теперь предложение 2, получаем

Следствие. *Если семейство конечных множеств имеет две неэквивалентные вычислимые позитивные нумерации, то существует счетное число таких неэквивалентных нумераций.*

В заключение сформулируем два вопроса, уже давно известные и неоднократно упоминавшиеся в выступлениях Ю. Л. Ершова и С.С. Марченкова.

Вопросы:

1. Всякое ли семейство рекурсивно перечислимых множеств, имеющее не менее двух неэквивалентных позитивных вычислимых нумераций, обладает счетным числом таких неэквивалентных нумераций?

2. Существуют ли семейства рекурсивно перечислимых множеств с любым заданным конечным числом неэквивалентных минимальных вычислимых нумераций?

Отметим в связи с этими проблемами, что существуют семейства рекурсивно перечислимых множеств с любым заданным числом неэквивалентных однозначных вычислимых нумераций [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мальцев А. И.** Конструктивные модели I.— Успехи мат. наук, 1961, т. 16, № 3, с. 3—60.
2. **Мальцев А. И.** О рекурсивных абелевых группах.— Докл. АН СССР, 1962, т. 146, № 5, с. 1009—1012.
3. **Гончаров С. С.** Однозначные вычислимые нумерации.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 5, с. 507—551.
4. **Гончаров С. С.** Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 2, с. 271—274.
5. **Гончаров С. С.** Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 6, с. 621—639.
6. **Гончаров С. С.** Автоустойчивость моделей и абелевых групп.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 1, с. 23—44.
7. **Бадаев С. А.** О позитивных нумерациях.— Сиб. мат. журн., 1977, т. 18, № 3, с. 483—496.
8. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
9. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций III. Новосибирск: изд. Новосиб. ун-та, 1974.
10. **Ершов Ю. Л.** Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
11. **Селиванов В. Л.** О нумерациях семейств общерекурсивных функций.— Алгебра и логика, 1976, т. 15, № 2, с. 205—226.
12. **Селиванов В. А.** О нумерациях канонически вычислимых семейств конечных множеств.— Сиб. мат. журн., 1977, т. 18, № 6, с. 1373—1380.
13. **Селиванов В. Л.** Несколько замечаний о классах рекурсивно перечислимых множеств.— Сиб. мат. журн., 1980, т. 18, № 1, с. 153—160.
14. **Lachlan A. N.** On recursive enumeration without repetition.— Z. Math. Logik Grundl. Math., 1965, Bd. 11, N 3, S. 209—220.
15. **Lachlan A. N.** On recursive enumeration without repetition: a correction.— Z. Math. Logik Grundl. Math., 1967, Bd. 13, N 2, S. 99—100.

СТРОЕНИЕ РЕШЕТОК КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ

В. А. ГОРБУНОВ, В. И. ТУМАНОВ

В работе предложен алгебраический подход к изучению квазимногообразий алгебраических систем, основанный на использовании языка подпрямых произведений и надпрямых пределов. Установлено соответствие между «внутренним» строением квазимногообразий и строением алгебраических решеток. Это позволило найти точное представление решеток квазимногообразий в виде решеток алгебраических множеств конгруэнций свободных систем счетного ранга. Проблема об описании класса всех решеток квазимногообразий была поставлена А. И. Мальцевым [1, 2], идеи и результаты которого оказали на авторов большое влияние.

Основная часть работы была изложена на V Всесоюзной конференции по математической логике, посвященной 70-летию академика А. И. Мальцева (Новосибирск, ноябрь 1979 г.).

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В работе используется, как правило, общепринятая терминология [3—5]. Приведем некоторые определения и обозначения.

Под *сигнатурой языка 1-й ступени* понимаем упорядоченную тройку $\sigma = \langle \sigma^F, \sigma^P, \nu \rangle$, состоящую из непересекающихся множеств σ^F, σ^P и отображения местности $\nu : \sigma^F \cup \sigma^P \to \omega$, где $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Элементы из σ^F называются *символами операций* (*функций*), элементы из σ^P — *символами предикатов* (*отношений*). Алгебраическая система сигнатуры σ — это тройка, состоящая из непустого множества A, набора отношений $\{r^A \subseteq A^{\nu(r)} | r \in \sigma^P\}$ и набора функций $\{f^A : A^{\nu(f)} \to A | f \in \sigma^F\}$. Для удобства считаем, что $\approx \in \sigma^P$, $\nu(\approx) = 2$, причем символ $\approx$ интерпретируем на любой системе как отношение равенства. Систему сигнатуры σ с основным множеством A обозначаем через $\langle A, \sigma \rangle$, или, если не возникает недоразумений, просто через A.

Атомной формулой сигнатуры σ в алфавите $X = \{x_i | i \in I\}$ называется формула вида $r(t_1, \ldots, t_s)$, где $r \in \sigma^P$, $t_1, \ldots, t_s$ — термы в алфавите X. Пусть $R_1, \ldots, R_m, R_{m+1}$ — атомные формулы сигнатуры σ в алфавите $\{x_1, \ldots, x_n\}$, тогда формула вида

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \ (R_1 \& \ldots \& R_m \to R_{m+1})$$

называется *квазитождеством* (универсальной строго хорновой формулой). Аксиоматизируемый класс $\mathfrak{K}$ называется *квазимногообразием*, если существует система аксиом для $\mathfrak{K}$, состоящая из квазитождеств. Подробное изложение основ теории квазимногообразий содержится в монографии А. И. Мальцева [4], результаты из которой будем иногда использовать без особых ссылок.

Считаем, что все классы алгебраических систем абстрактны, т. е. замкнуты относительно изоморфных систем, а сигнатура, если не оговорено противное, произвольная и фиксированная.

Под *оператором* X на классах систем понимаем правило, которое любому классу $\mathfrak{K}$ сопоставляет некоторый класс $X(\mathfrak{K})$. Если X, Y — два оператора, то по определению $XY(\mathfrak{K}) = X(Y(\mathfrak{K}))$.

Нам понадобятся следующие операторы:

$\mathbf{S}(\mathfrak{K})$ — класс всех подсистем $\mathfrak{K}$-систем;

$\mathbf{H}(\mathfrak{K})$ — класс всех гомоморфных образов $\mathfrak{K}$-систем;

$\mathbf{P}(\mathfrak{K})$ — класс всех прямых произведений $\mathfrak{K}$-систем, при этом считаем, что прямое произведение пустого множества систем есть единичная система;

$\mathbf{P}_r(\mathfrak{K})$ — класс всех фильтрованных произведений $\mathfrak{K}$-систем;

$\mathbf{P}_u(\mathfrak{K})$ — класс всех ультрапроизведений $\mathfrak{K}$-систем;

$\mathbf{P}_s(\mathfrak{K})$ — класс всех подпрямых произведений $\mathfrak{K}$-систем;

$\mathbf{L}(\mathfrak{K})$ — класс всех прямых пределов $\mathfrak{K}$-систем;

$\vec{\mathbf{V}}(\mathfrak{K})$ — наименьший универсальный класс, содержащий класс $\mathfrak{K}$;

$\mathbf{Q}(\mathfrak{K})$ — наименьшее квазимногообразие, содержащее класс $\mathfrak{K}$;

$\mathbf{V}(\mathfrak{K})$ — наименьшее многообразие, содержащее класс $\mathfrak{K}$.

Запись $A=(a_i|i\in I)$ означает, что система A порождена множеством $\{a_i|i\in I\}$, а запись $A\leqslant B$ — что система A изоморфна подсистеме системы B. Гомоморфизм $A\to B$ называется *собственным*, если он не является изоморфизмом A на B.

Под *кардиналом* понимаем ординал, который нельзя взаимно однозначно отобразить на меньший ординал; ω — первый бесконечный кардинал. Множество A имеет мощность α (символически: $|A|=\alpha$), если существует взаимно однозначное соответствие между A и α.

Терминология по теории решеток соответствует [6, 7]. Точную верхнюю (точную нижнюю) грань подмножества A решетки L обозначаем через $\bigvee A$ (соответственно $\bigwedge A$) и называем *суммой* (соответственно *пересечением*). Булеву решетку всех подмножеств множества X обозначаем через $P(X)$, а решетку разбиений (отношений эквивалентности) на множестве X — через $\operatorname{Part}(X)$. Если $\pi\in\operatorname{Part}(X)$, то $[x]\pi$ обозначает смежный класс, содержащий элемент $x\in X$. Везде далее $2=\{0, 1\}$ — двухэлементная решетка, в которой $0<1$.

Для чтения настоящей работы желательно знакомство с работой авторов [8].

§ 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОДМНОЖЕСТВА

Напомним, что элемент a полной решетки L называется *компактным*, если для любого подмножества $A\subseteq L$ из $a\leqslant\bigvee A$ следует, что $a\leqslant\bigvee K$ для некоторого конечного подмножества $K\subseteq A$. Решетка L называется *алгебраической*, если L — полная решетка и любой элемент из L представим в виде суммы компактных элементов.

Без труда проверяется, что полная решетка L является алгебраической тогда и только тогда, когда для любых элементов a, $b\in L$, $a<b$, существует компактный элемент $c\in L$ такой, что $c\leqslant b$ и $c\nleqslant a$. Класс всех алгебраических решеток замкнут относительно взятия прямых произведений и полных подрешеток.

В этом разделе определим одно из основных решеточных понятий, используемых в работе — понятие алгебраического подмножества полной решетки, и исследуем связь алгебраических подмножеств с алгебраическими решетками.

Лемма 2.1. *Элемент a полной решетки L компактен тогда и только тогда, когда для любой цепи $C\subseteq L$ из $a\leqslant\bigvee C$ следует, что $a\leqslant c$ для некоторого элемента $c\in C$.*

Доказательство. Предположим, что условие леммы выполнено. Пусть $a\leqslant\bigvee A$ для некоторого подмножества $A\subseteq L$. Индукцией по $|A|$ докажем, что тогда найдется конечное подмножество $K\subseteq A$ такое, что $a\leqslant\bigvee K$. Для конечных A это очевидно. Предположим, что множество A бесконечно, $|A|=\alpha$, и утверждение справедливо для всех подмножеств, мощность которых $<\alpha$. Запишем A в виде $A=\{a_0, \ldots, a_\gamma, \ldots|\gamma<\alpha\}$, и пусть по определению $A_\beta=\{a_\gamma|\gamma<\beta\}$ при $\beta<\alpha$. Тогда $|A_\beta|<\alpha$, множество $\{\bigvee A_\beta|\beta<\alpha\}$ образует цепь и $a\leqslant\bigvee A=\bigvee(\bigvee A_\beta|\beta<\alpha)$. Следовательно, согласно условию, $a\leqslant\bigvee A_\beta$ для некоторого $\beta<\alpha$, откуда, в силу индукционного предположения, $a\leqslant\bigvee K$ для некоторого конечного подмножества $K\subseteq A_\beta\subseteq A$. Лемма доказана.

Элемент a полной решетки L называется *вполне конеразложимым*, если для любого подмножества $B\subseteq L$ из $a=\bigwedge B$ следует, что $a\in B$.

Лемма 2.2. *Любой элемент a алгебраической решетки A представим в виде $a=\bigwedge M$ для некоторого множества M вполне конеразложимых элементов.*

Эта лемма известна [6], но для полноты изложения приведем ее доказательство.

Пусть M — множество всех вполне конеразложимых элементов, больших или равных a, и $m = \bigwedge M$. По определению $a \leqslant m$. Предположим, что $a < m$. Так как A — алгебраическая решетка, то найдется компактный элемент $d \in A$ такой, что $d \leqslant m$ и $d \nleqslant a$. Пусть

$$R = \{x \in A \mid a \leqslant x,\ d \nleqslant x\}.$$

Множество R не пусто, поскольку $a \in R$. Покажем, что ч. у. множество $\langle R, \leqslant \rangle$ удовлетворяет условию леммы Цорна. Пусть C — цепь в R и $c = \bigvee C$. По определению $a \leqslant c$, и если бы $d \leqslant c$, то $d \leqslant c_0$ для некоторого $c_0 \in C$, что противоречило бы включению $C \subseteq R$. Следовательно, $c \in R$.

Пусть x_0 — максимальный элемент в R. Покажем, что $x_0 \in M$. Пусть $x_0 = \bigwedge B$ для некоторого подмножества $B \subseteq A$, но $x_0 \notin B$, т. е. $x_0 < b$ для всех $b \in B$. Так как элемент x_0 максимален в R и $a \leqslant x_0$, то отсюда следует, что $d \leqslant b$ для всех $b \in B$. Следовательно, $d \leqslant \bigwedge B = x_0$, что невозможно. Итак, $x_0 \in M$ и $d \nleqslant x_0$. Полученное противоречие заканчивает доказательство леммы.

Подмножество A полной решетки L назовем *алгебраическим*, если выполнены следующие два условия:

a1) A замкнуто относительно пересечений, т. е. $\bigwedge B \in A$ для любого подмножества $B \subseteq A$;

a2) A замкнуто относительно сумм по цепям, т. е. $\bigvee C \in A$ для любой цепи $C \subseteq A$.

Отметим, что в терминологии работы [8] алгебраическое подмножество в L — это в точности полная нижняя предельно замкнутая подполурешетка в L.

Из условия a1) следует, что алгебраическое подмножество $A \subseteq L$ является полной решеткой относительно индуцированного порядка, сумма $\bigvee_A$ в которой, вообще говоря, не совпадает с суммой $\bigvee$ в решетке L.

Лемма 2.3. *Любое алгебраическое подмножество A алгебраической решетки L является алгебраической решеткой относительно индуцированного порядка.*

Доказательство. Пусть $a,\ b \in A$, $a < b$. Так как L — алгебраическая решетка, то найдется компактный элемент $d \in L$ такой, что $d \leqslant b$ и $d \nleqslant a$. Пусть $d_0 = \bigwedge (x \in A \mid d \leqslant x)$. По определению $d_0 \in A$, $d_0 \leqslant b$ и $d \leqslant d_0 \nleqslant a$. Осталось показать, что элемент d_0 компактен в решетке A. Воспользуемся леммой 2.1. Пусть C — цепь в A и $d_0 \leqslant \bigvee_A C$. Так как элемент d компактен в решетке L, $\bigvee_A C = \bigvee C$ и $d \leqslant d_0 \leqslant \bigvee_A C$, то $d \leqslant c_0$ для некоторого $c_0 \in C$. Следовательно, $d_0 \leqslant c_0$, что и требовалось.

Напомним, что ч. у. множество $\langle P, \leqslant \rangle$ называется *направленным*, если для любых элементов $a,\ b \in P$ существует элемент $c \in P$ такой, что $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$.

Лемма 2.4. *Подмножество M полной решетки L замкнуто относительно сумм по цепям тогда и только тогда, когда M замкнуто относительно сумм по направленным подмножествам.*

Доказательство. Предположим, что множество M замкнуто относительно сумм по цепям. Пусть B — произвольное направленное подмножество в M и $b = \bigvee B$. Если B конечно, то $b \in B \subseteq M$. Предположим, что множество B бесконечно. Для любых элементов $a,\ c \in B$ выберем элемент $\varphi(a,\ c)$ такой, что $a \vee c \leqslant \varphi(a,\ c)$. Докажем теперь индукцией по $|B|$, что $b \in M$.

Рассмотрим сначала случай $|B| = \omega$. Считая, что $B = \{b_n \mid n \in \omega\}$, определим элементы $c_n \in B$, $n \in \omega$, индукцией по n следующим образом:

$$c_0 = b_0,\quad c_{n+1} = \varphi(b_n,\ c_n),\ n > 0.$$

Так как множество $C = \{c_n \mid n \in \omega\}$ является цепью, то, согласно предположению, $c = \bigvee C \in M$. Из включения $C \subseteq B$ следует, что $c \leqslant b$. С другой стороны, $c \geqslant c_{n+1} \geqslant b_n$ для всех $n \in \omega$, поэтому $c \geqslant b$ и $b = c \in M$.

Пусть теперь $|B| = \beta > \omega$ и $B = \{b_\xi | \xi < \beta\}$. Тогда $B = \bigcup (B_\gamma | \omega \leqslant \gamma < \beta)$, где $B_\gamma = \{b_\xi | \xi < \gamma\}$ при $\omega \leqslant \gamma < \beta$. Для всех $\omega \leqslant \gamma < \beta$ и $n \in \omega$ определим подмножество $D_n(B_\gamma)$ индукцией по n следующим образом:

$$D_0(B_\gamma) = B_\gamma,$$

$$D_{n+1}(B_\gamma) = D_n(B_\gamma) \cup \{\varphi(b_1, b_2) | b_1, b_2 \in D_n(B_\gamma)\}, \ n > 0.$$

Очевидно, что множество $D(B_\gamma) = \bigcup (D_n(B_\gamma) | n \in \omega)$ направленно, $B_\gamma \subseteq \subseteq D(B_\gamma) \subseteq B$ и $D(B_{\gamma_1}) \subseteq D(B_{\gamma_2})$ при $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 < \beta$. Далее, в силу определения $D_n(B_\gamma)$, имеем $\omega \leqslant \gamma \leqslant |D_n(B_\gamma)| \leqslant \gamma + \gamma^2 = \gamma$, т. е. $|D_n(B_\gamma)| = \gamma$ (здесь и далее сумма кардинальная). Следовательно.

$$\omega \leqslant \gamma \leqslant |D(B_\gamma)| \leqslant \sum (|D_n(B_\gamma)| \ | n \in \omega),$$

т. е. $|D(B_\gamma)| = \gamma < \beta$. Отсюда, согласно индукционному предположению следует, что элемент $d_\gamma = \bigvee D(B_\gamma)$ лежит в M для всех $\omega \leqslant \gamma < \beta$. Поскольку множество $\{d_\gamma | \gamma < \beta\}$ является цепью, то $d = \bigvee (d_\gamma | \omega \leqslant \gamma < \beta) \in M$. Осталось показать, что $b = d$. Так как $B_\gamma \subseteq D(B_\gamma) \subseteq B$, то $\bigvee B_\gamma \leqslant d_\gamma \leqslant b$, и поэтому

$$b = \bigvee (\bigvee B_\gamma | \omega \leqslant \gamma < \beta) \leqslant \bigvee (d_\gamma | \omega \leqslant \gamma < \beta) = d \leqslant b,$$

т. е. $d = b$. Лемма доказана.

Отметим, что леммы 2.1 и 2.4 остаются справедливыми, если в них цепи заменить вполне упорядоченными множествами.

Согласно [5] полная нижняя подполурешетка булевой решетки $P(X)$, замкнутая относительно объединений по направленным подмножествам. называется *алгебраически-замкнутой системой*. Ввиду леммы 2.4 алгебраически-замкнутые системы в $P(X)$ совпадают с алгебраическими подмножествами. Поэтому в силу замечания 2.4 работы авторов [8] и леммы 2.3 имеет место

Предложение 2.5. *Для полной решетки L следующие условия равносильны:*

1) *L — алгебраическая решетка;*

2) *существует алгебраически-замкнутая система $B \subseteq P(X)$ такая, что $L \simeq \langle B, \subseteq \rangle$;*

3) *существует алгебраическое подмножество $B \subseteq P(X)$ такое, что $L \simeq \langle B, \subseteq \rangle$;*

4) *существует замкнутая нижняя подполурешетка $B \subseteq P(X)$ такая, что $L \simeq \langle B, \subseteq \rangle$.*

Замкнутость в условии 4) рассматривается в топологии произведения 2^X, где 2 — двухэлементное множество с дискретной топологией, а множество $P(X)$ отождествлено с множеством 2^X.

Заметим, что равносильность условий 1) и 2) доказана Биркгофом и Фринком (см. [5]).

§ 3. КОНГРУЭНЦИИ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

При изучении алгебраических систем важную роль играют конгруэнции, поскольку они тесно связаны с гомоморфизмами систем. Общепринятое определение конгруэнции на алгебраической системе (см. [4]) не зависит от предикатов системы и поэтому не дает, вообще говоря, известного соответствия между гомоморфными образами системы и ее конгруэнциями. Этим, в частности, объясняется тот факт, что теория конгруэнций развивалась только для алгебр, т. е. систем функциональной сигнатуры (см. обзор Б. Йонсона [9]).

В этом параграфе мы дадим новое определение конгруэнции на алгебраической системе, совпадающее со старым в случае алгебр и позволяющее использовать методы теорий конгруэнций в общем случае.

Пусть A — произвольная алгебраическая система сигнатуры $\sigma = \langle\sigma^F, \sigma^P, \nu\rangle$. Рассмотрим решетку

$$\Theta(A) = \Pi(P(A^{\nu(r)})\,|\,r \in \sigma^P).$$

Так как $P(A^{\nu(r)})$ — алгебраические решетки относительно включения, то $\Theta(A)$ — алгебраическая решетка относительно покомпонентного включения:

$$\theta_1 \subseteq \theta_2 \Leftrightarrow \forall r \in \sigma^P(\theta_1(r) \subseteq \theta_2(r)).$$

Операции в решетке $\Theta(A)$, совпадающие с покомпонентным объединением и пересечением, будем обозначать через $\cup$ и $\cap$ соответственно.

Элемент θ решетки $\Theta(A)$ назовем *конгруэнцией* на системе A, если выполнены следующие условия:

c1) $\theta(\approx)$ — отношение эквивалентности на A;

c2) для всех $f \in \sigma^F$ и $a_i, b_i \in A$, $i = 1, \ldots, m = \nu(f)$, если $\langle a_i, b_i\rangle \in \theta(\approx)$, то $\langle f^A(a_1, \ldots, a_m), f^A(b_1, \ldots, b_m)\rangle \in \theta(\approx)$;

c3) для всех $r \in \sigma^P$ и $a_i \in A$, $i = 1, \ldots, n = \nu(r)$, если $r^A(a_1, \ldots, a_n)$, то $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \theta(r)$;

c4) для всех $r \in \sigma^P$ и $a_i, b_i \in A$, $i = 1, \ldots, n = \nu(r)$, если $\langle a_i, b_i\rangle \in \theta(\approx)$ и $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \theta(r)$, то $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in \theta(r)$.

Заметим, что условие c1) является следствием условий c3) и c4). Если $\sigma^P = \{\approx\}$, т. е. σ — функциональная сигнатура, то условие c1) равносильно условиям c3), c4); в частности, в этом случае данное определение конгруэнции совпадает с общепринятым определением.

Обозначим через $\mathrm{Con}(A)$ множество всех конгруэнций на системе A. Так как пересечение любого множества конгруэнций в решетке $\Theta(A)$ является конгруэнцией, то $\mathrm{Con}(A)$ — полная решетка относительно индуцированного порядка. Пересечение в решетке $\mathrm{Con}(A)$ совпадает с пересечением в решетке $\Theta(A)$, а сумма $\vee\theta_i$ устроена следующим ообразом:

$$(\vee\theta_i)(\approx) \text{ — сумма в решетке } \mathrm{Part}(A),$$

$$\langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in (\vee\theta_i)(r) \Leftrightarrow \exists\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \cup\theta_i(r)$$

$$(\langle a_j, b_j\rangle \in (\vee\theta_i)(\approx),\ j = 1, \ldots, n).$$

Наибольшую и наименьшую конгруэнции на системе А обозначим через 1_A и 0_A соответственно.

Пример 3.1. Проиллюстрируем данное определение на графах, т. е. системах с одним бинарным предикатом r (и с отношением равенства $\approx$).

Рассмотрим неориентированный граф без петель T, изображенный на рис. 3.1. По определению $\Theta(T) = P(T^2) \times P(T^2)$. Пусть θ — произвольная конгруэнция на графе T, $\theta = \langle\theta(\approx), \theta(r)\rangle$. Ввиду условия c3) множество $\delta_0 = \{\langle i, j\rangle\,|\,i, j \in T,\ i \neq j\}$ содержится в $\theta(r)$. Всевозможные надмножества $\delta_I = \delta_0 \cup \{\langle i, i\rangle\,|\,i \in I\}$, $I \subseteq T$, множества δ_0 образуют относительно $\subseteq$ булеву решетку, изображенную на рис. 3.2, *а*. Согласно условию c1) $\theta(\approx)$ — отношение эквивалентности на T. Всевозможные отношения

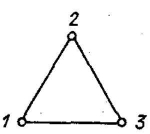


Рис. 3.1.

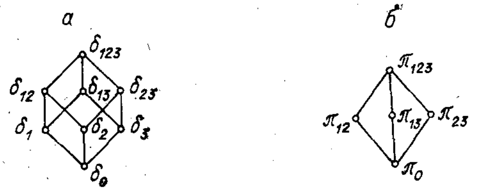


Рис. 3.2.

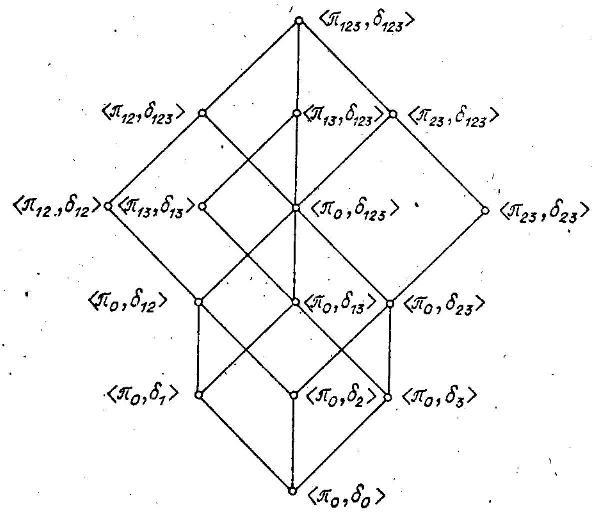


Рис. 3.3.

эквивалентности $\pi_J=\{\langle i, j\rangle | i, j\in J, i\neq j\}\cup\pi_0$ на T, где $\pi_0=\{\langle i, i\rangle | i\in T\}$, $J\subseteq T$, $|J|\neq 1$, образуют относительно включения решетку, изображенную на рис. 3.2, *б*. Следовательно, ввиду условия c4) конгруэнция θ имеет вид $\langle\pi_J, \delta_I\rangle$, где

$$\forall i\in T\ (i\in J\Rightarrow i\in I),$$

$$I, J\subseteq T,\ |J|\neq 1,$$

и такими парами исчерпываются все конгруэнции на T. Теперь нетрудно построить решетку $\mathrm{Con}(T)$, она изображена на рис. 3.3.

Предложение 3.2. $\mathrm{Con}(A)$ *является алгебраическим подмножеством решетки* $\Theta(A)$ *и, следовательно, алгебраической решеткой относительно индуцированного порядка.*

Доказательство. Уже отмечалось, что подмножество $\mathrm{Con}(A)$ замкнуто относительно пересечений. Без труда проверяется то, что объединение произвольной цепи конгруэнций снова является конгруэнцией. Поэтому алгебраичность решетки $\mathrm{Con}(A)$ следует из леммы 2.3.

Пусть $\theta\in\mathrm{Con}(A)$, $A/\theta=\{[a]\theta | a\in A\}$ — фактор-множество по отношению эквивалентности $\theta(\approx)$. Определим на множестве A/θ операций $f^{A/\theta}(m=\nu(f))$ и предикаты $r^{A/\theta}(n=\nu(r))$ сигнатуры σ следующим образом:

$$f^{A/\theta}([a_1]\theta, \ldots, [a_m]\theta)=[f^A(a_1, \ldots, a_m)]\theta,$$

$$r^{A/\theta}([a_1]\theta, \ldots, [a_n]\theta)\Leftrightarrow\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\in\theta(r).$$

Из условий c2) и c4) следует, что данное определение корректно. Полученную систему назовем *фактор-системой системы A по конгруэнции* θ и обозначим через A/θ.

Согласно условию c3) отображение $a\to[a]\theta$, $a\in A$, системы A на фактор-систему A/θ является гомоморфизмом; этот гомоморфизм называется каноническим. Пусть $\varphi: A\to B$ — произвольный гомоморфизм. Без труда проверяется, что элемент $\ker\varphi\in\Theta(A)$, определенный следующим образом:

$$(\ker\varphi)(r)=\{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\in A^n | r^B(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))\},$$

является конгруэнцией на системе A; эта конгруэнция называется *ядерной конгруэнцией гомоморфизма* φ. По определению ядерная конгруэнция канонического гомоморфизма $A\to A/\theta$ совпадает с конгруэнцией θ.

Предложение 3.3. (теорема о гомоморфизме). *Пусть φ — гомоморфизм системы A на систему B, ψ — канонический гомоморфизм $A\to A/\ker\varphi$. Тогда отображение $\alpha: A/\ker\varphi\to B$ по правилу $\alpha([a]\ker\varphi)=\varphi(a)$, $a\in A$, является изоморфизмом и $\varphi=\alpha\psi$.*

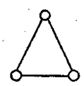
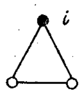
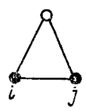
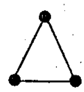
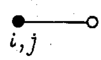
Доказательство. Нетрудно проверить, что α — взаимно однозначный гомоморфизм системы $A/\ker\varphi$ на систему B. Покажем, что α^{-1} — также гомоморфизм. Пусть $r^B(b_1, \ldots, b_n)$, где $r\in\sigma^P$, $b_i\in B$, $i=1, \ldots, n=\nu(r)$, и элементы $a_i\in A$, $i=1, \ldots, n$, таковы, что $\varphi(a_i)=b_i$. Тогда $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\in\ker\varphi(r)$, отсюда

$$r^{A/\ker\varphi}([a_1]\ker\varphi, \ldots, [a_n]\ker\varphi),$$

что и требовалось. Равенство $\varphi=\alpha\psi$ следует непосредственно из определений.

Отметим, что ввиду предложения 3.3 задачи: а) найти все гомоморфные образы системы A и б) найти все конгруэнции на системе A — равносильны (ср. [4, с. 64]).

Пример 3.4. Обратимся к примеру 3.1, в котором описаны конгруэнции графа T. Из этого описания легко находятся все гомоморфные образы графа T и соответствующие им конгруэнции согласно следующей таблице (здесь черными кружками обозначены петли графов).

$\langle \pi_0, \delta_0 \rangle$	$\langle \pi_0, \delta_i \rangle$	$\langle \pi_0, \delta_{ij} \rangle$ $i \neq j$	$\langle \pi_0, \delta_{123} \rangle$	$\langle \pi_{ij}, \delta_{ij} \rangle$ $i \neq j$	$\langle \pi_{ij}, \delta_{123} \rangle$ $i \neq j$	$\langle \pi_{123}, \delta_{123} \rangle$
						

Следует отметить, что естественным образом переформулируются также 1-я и 2-я теоремы об изоморфизме.

Определим теперь в терминах конгруэнций некоторые известные конструкции, необходимые в дальнейшем.

Подсистема A прямого произведения $\prod_i A_i$ называется *подпрямым произведением систем* A_i, если все проектирования $\pi_i : A \to A_i$ являются гомоморфизмами на (символически: $A \leqslant_s \prod_i A_i$). Согласно определению

$$A \leqslant_s \prod_i A_i \Rightarrow \bigcap_i \ker \pi_i = 0_A.$$

Справедливо и обратное утверждение.

Лемма 3.5. Если $\theta = \bigcap_i \theta_i$, $\theta_i \in \mathrm{Con}(A)$, *то* $A/\theta \leqslant_s \prod_i A/\theta_i$.

Доказательство. Определим отображение $\varphi : A/\theta \to \prod_i A/\theta_i$, полагая $\varphi([a]\theta)(i) = [a]\theta_i$, $a \in A$. Без труда проверяется, что определение корректно, φ — гомоморфизм и $\varphi(A/\theta) \leqslant_s \prod_i A/\theta_i$.

Покажем, что отображение φ является изоморфизмом A/θ на $\varphi(A/\theta)$. Пусть $r^{\varphi(A/\theta)}(b_1, \ldots, b_n)$, где $r \in \sigma^P$, $b_j \in \varphi(A/\theta)$, $j = 1, \ldots, n = \nu(r)$, и элементы $a_j \in A$, $j = 1, \ldots, n$, таковы, что $\varphi([a_j]\theta) = b_j$. Тогда

$$r^{A/\theta_i}([a_1]\theta_i, \ldots, [a_n]\theta_i) \text{ для всех } i,$$

отсюда $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \bigcap_i \theta_i(r)$. Следовательно, $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \theta(r)$, или равносильно, $r^{A/\theta}([a_1]\theta, \ldots, [a_n]\theta)$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторый класс алгебраических систем. Система $A \in \mathfrak{K}$ называется *подпрямо $\mathfrak{K}$-неразложимой*, если для любых $A_i \in \mathfrak{K}$ из $A \leqslant_s \prod_i A_i$ следует, что одно из проектирований $\pi_i : A \to A_i$ является изоморфизмом.

Следствие 3.6. *Система A подпрямо неразложима в классе всех систем данной сигнатуры тогда и только тогда, когда конгруэнция 0_A вполне конеразложима в решетке* $\mathrm{Con}(A)$.

Лемма 3.7. *Пусть $A = \prod_i A_i$ — прямое произведение систем A_i, $i \in I$, D — произвольный фильтр на I. Тогда элемент $\theta_D \in \Theta(A)$ такой, что*

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \theta_D(r) \Leftrightarrow \{i\in I\,|\,r^{A_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))\}\in D$$

для всех $r\in\sigma^P$ *и* $a_i\in A$, $i=1, \ldots, n=\nu(r)$, *является конгруэнцией на* A, *и* $A/\theta \simeq {}_D\prod_i A_i/D$.

Доказательство следует из определений (ср. [10, с. 200]).

Конгруэнция θ на алгебраической системе A называется *вполне характеристической,* если для любого гомоморфизма $\varphi: A\to A$ и для любых $r\in\sigma^P$, $a_i\in A$, $i=1, \ldots, n=\nu(r)$, имеет место импликация

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\in\theta(r) \Rightarrow \langle\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)\rangle\in\theta(r).$$

Без труда проверяется, что множество $\mathrm{Ch}(A)$ всех вполне характеристических конгруэнций на системе A является полной подрешеткой в $\mathrm{Con}(A)$.

Предложение 3.8. *Пусть* F — *свободная система счетного ранга из многообразия* $\mathfrak{M}$. *Тогда отображение*

$$\theta\to\mathbf{V}(F/\theta),\quad \theta\in\mathrm{Ch}(F),$$

является антиизоморфизмом решетки $\mathrm{Ch}(F)$ *на решетку* $L_v(\mathfrak{M})$ *всех подмногообразий многообразия* $\mathfrak{M}$.

Для многообразий функциональной сигнатуры доказательство предложения содержится в [4]. В общем случае ввиду предложения 3.3 доказательство аналогично и поэтому опускается.

В заключение несколько слов о строении решеток $\mathrm{Con}(A)$. Пусть A — произвольная система сигнатуры σ, A_F — ее σ^F-обеднение. Без труда проверяется, что отображение $\varphi:\theta\to\theta(\approx)$, $\theta\in\mathrm{Con}(A)$, является полным гомоморфизмом $\mathrm{Con}(A)$ на $\mathrm{Con}(A_F)$, причем каждый смежный класс по $\ker\varphi$ изоморфен булевой решетке вида $P(X)$. В частности, если σ состоит только из предикатных символов, т. е. $\sigma^F=\varnothing$, то $\mathrm{Con}(A)$ имеет очень специальное строение: $\mathrm{Con}(A)/\ker\varphi\simeq\mathrm{Part}(A)$, и каждый смежный класс по $\ker\varphi$ изоморфен $P(X)$ для некоторого множества X. Отметим еще, что $\mathrm{Con}(A_F)$ является полной подрешеткой в $\mathrm{Con}(A)$.

§ 4. НАДПРЯМЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Напомним, что кортеж $\mathscr{A}=\langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$, состоящий из направленного множества $\langle I, \leqslant\rangle$, семейства $\{A_i|i\in I\}$ алгебраических систем A_i фиксированной сигнатуры σ и семейства $\{\varphi_{ij}|i,\ j\in I,\ i\leqslant j\}$ гомоморфизмов $\varphi_{ij}: A_i\to A_j$, называется *прямым спектром,* если φ_{ii} — тождественное отображение и $\varphi_{ik}=\varphi_{jk}\varphi_{ij}$ для всех $i,\ j,\ k\in I,\ i\leqslant j\leqslant k$. Обозначим через A_∞ фактор-множество множества $\bigcup(A_i\times\{i\}|i\in I)$ по следующему отношению эквивалентности:

$$\langle a, i\rangle\equiv\langle b, j\rangle \Leftrightarrow \exists k\in I(i, j\leqslant k,\ \varphi_{ik}(a)=\varphi_{jk}(b)).$$

Пусть $[a, i]$ — смежный класс по отношению $\equiv$, содержащий элемент $\langle a, i\rangle$. На множестве A_∞ определим операции $f^{A_\infty}(m=\nu(f))$ и предикаты $r^{A_\infty}(n=\nu(r))$ сигнатуры σ следующим образом:

$$f^{A_\infty}([a_1, i_1], \ldots, [a_m, i_m]) = \left[f^{A_j}\left(\varphi_{i_1j}(a_1), \ldots, \varphi_{i_mj}(a_m)\right), j\right],$$

где $j\geqslant i_1, \ldots, i_m$;

$$r^{A_\infty}([a_1, i_1], \ldots, [a_n, i_n]) \Leftrightarrow \exists j\geqslant i_1, \ldots, i_n\left(r^{A_j}\left(\varphi_{i_1j}(a_1), \ldots, \varphi_{i_nj}(a_n)\right)\right).$$

Без труда проверяется корректность данного определения; полученная система называется *прямым пределом по прямому спектру* $\mathscr{A}$ и обозначается через $\varinjlim\mathscr{A}$ (см. [5]).

Из определения $\varinjlim \mathscr{A}$ следует, что атомная формула $R(x_1, \ldots, x_n)$ истинна в системе $\varinjlim \mathscr{A}$ при подстановке $x_j \to [a_j, i_j]$ тогда и только тогда, когда существуют $k \in I$ и $a_j' \in A_k$, $j = 1, \ldots, n$, такие, что $A_k \models R(a_1', \ldots, a_n')$ и $[a_j, i_j] = [a_j', k]$, $j = 1, \ldots, n$. Отметим также, что отображение $\varphi_{i\infty} : \mathscr{A}_i \to \varinjlim \mathscr{A}$, $\varphi_{i\infty}(a) = [a, i]$, является гомоморфизмом и $\varphi_{j\infty}\varphi_{ij} = \varphi_{i\infty}$ для всех $i, j \in I$, $i \leqslant j$; если гомоморфизмы φ_{ij} разнозначны (на), то гомоморфизмы $\varphi_{i\infty}$ также разнозначны (на).

Пусть J — направленное подмножество в I такое, что любой элемент из I меньше (или равен) некоторого элемента из J, и $\mathscr{A}_J$ — прямой спектр, получающийся из спектра $\mathscr{A}$ естественным ограничением на J. Тогда $\varinjlim \mathscr{A} \simeq \varinjlim \mathscr{A}_J$, в частности, $\varinjlim \mathscr{A} \simeq \varinjlim \mathscr{A}_{[i)}$, где $[i) = \{j \in I \mid j \geqslant i\}$. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что множество J содержит наименьший элемент 0.

Кортеж $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$ назовем *надпрямым спектром*, если $\mathscr{A}$ — прямой спектр и отображения φ_{ij} являются гомоморфизмами A_i на A_j для всех $i, j \in I$, $i \leqslant j$. Предел по надпрямому спектру назовем *надпрямым пределом.*

Понятие надпрямого предела уже понятия прямого предела. Проиллюстрируем это на следующем примере. Рассмотрим класс $\mathfrak{K}$ всех конечно порожденных систем данной сигнатуры. Очевидно, класс $\mathfrak{K}$ замкнут относительно надпрямых пределов. В то же время класс $\mathfrak{K}$ не замкнут относительно прямых пределов, так как любая не конечно порожденная система является прямым пределом своих конечно порожденных подсистем.

Пусть $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$ — произвольный надпрямой спектр. Так как $\varphi_{i\infty}$ — гомоморфизм системы A_i на систему $\varinjlim \mathscr{A}$, то, в силу предложения 3.3, имеем $\varinjlim \mathscr{A} \simeq A_i/\theta_{i\infty}$, где $\theta_{i\infty} = \ker \varphi_{i\infty}$. Без труда находится строение конгруэнции $\theta_{i\infty}$: если $r \in \sigma^P$, $n = \nu(r)$, то

$$\theta_{i\infty}(r) = \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in A_i^n \mid \exists k \geqslant i \; r^{A_k}(\varphi_{ik}(a_1), \ldots, \varphi_{ik}(a_n))\}.$$

Дадим теперь характеризацию надпрямых пределов в терминах конгруэнций.

Предложение 4.1. *Пусть* $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$ — *надпрямой спектр,* $\theta_i = \ker \varphi_{0i}$ *и* $\theta = \bigcup_i \theta_i$. *Тогда* $\{\theta_i \mid i \in I\}$ — *направленное подмножество в* $\mathrm{Con}(A_0)$, $\theta \in \mathrm{Con}(A_0)$ и $\varinjlim \mathscr{A} \simeq A_0/\theta$.

Обратно, пусть B — *произвольная система,* I — *направленное подмножество в* $\mathrm{Con}(B)$ *и* $\theta = \bigcup I$. *Тогда* $\theta \in \mathrm{Con}(B)$, *кортеж* $\mathscr{B} = \langle I_0, B_i, \varphi_{ij}\rangle$, *где* $I_0 = I \cup \{0_B\}$, $B_i = B/i$ *и* $\varphi_{ij}: B/i \to B/j$ — *канонический гомоморфизм для всех* $i, j \in I_0$, $i \subseteq j$, *является надпрямым спектром и* $B/\theta \simeq \varinjlim \mathscr{B}$.

Доказательство. а) Так как I — направленное множество, то для любых $i, j \in I$ найдется $k \in I$ такое, что $i, j \leqslant k$. Поэтому из равенств $\varphi_{0k} = \varphi_{ik}\varphi_{0i} = \varphi_{jk}\varphi_{0j}$ следует, что $\theta_i, \theta_j \subseteq \theta_k$, т. е. $\{\theta_i \mid i \in I\}$ — направленное подмножество в $\mathrm{Con}(A_0)$. Так как $\mathrm{Con}(A_0)$ — алгебраическое подмножество в $\Theta(A_0)$, то, согласно лемме 2.4, $\theta \in \mathrm{Con}(A_0)$. В силу изоморфизма $\varinjlim \mathscr{A} \simeq A_0/\theta_{0\infty}$ осталось доказать равенство $\theta = \theta_{0\infty}$. Если $r \in \sigma^P$, $n = \nu(r)$ и $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in A_0^n$, то из определения θ и описания $\theta_{0\infty}$ получаем:

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \theta(r) \Leftrightarrow \exists i \in I \left(r^{A_i}(\varphi_{0i}(a_1), \ldots, \varphi_{0i}(a_n))\right) \Leftrightarrow \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \theta_{0\infty}(r).$$

б) Ясно, что $\mathscr{B}$ — надпрямой спектр и $\theta \in \mathrm{Con}(B)$. Так как $\varinjlim \mathscr{B} \simeq B_0/\theta_{0\infty}$ и $B_0 = B$, то требуемое утверждение следует из равенства $\theta = \theta_{0\infty}$, которое доказывается так же, как в п. а). Предложение доказано.

Надпрямой предел $\varinjlim \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$ называется *цепным*, если I — цепь.

Следствие 4.2. *Класс $\mathfrak{R}$ алгебраических систем замкнут относительно надпрямых пределов тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}$ замкнут относительно цепных надпрямых пределов.*

Действительно, предположим, что класс $\mathfrak{R}$ замкнут относительно цепных надпрямых пределов. Пусть $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$ — произвольный надпрямой спектр, где $A_i \in \mathfrak{R}$ для всех $i \in I$. Согласно предложению 4.1 $\varinjlim \mathscr{A} \simeq A_0/\theta$, где θ — сумма некоторого направленного семейства конгруэнций из множества $C_{\mathfrak{R}}(A_0) = \{\pi \in \mathrm{Con}(A_0) | A_0/\pi \in \mathfrak{R}\}$. Поэтому достаточно доказать, что множество $C_{\mathfrak{R}}(A_0)$ замкнуто относительно сумм по направленным подмножествам. Ввиду леммы 2.4 это утверждение достаточно доказать для цепей. Пусть C — произвольная цепь в $C_{\mathfrak{R}}(A_0)$ и $\theta = \cup C$. В силу предложения 4.1 имеем $A_0/\theta \simeq \varinjlim \mathscr{B}$, где $\mathscr{B} = \langle J, B_i, \psi_{ij}\rangle$, $J = C \cup \{0_{A_0}\}$ и $B_i = A_0/i$ при $i \in J$. Так как J — цепь и $B_i \in \mathfrak{R}$, то по предположению $A_0/\theta \in \mathfrak{R}$, что и требовалось.

Докажем теперь несколько вспомогательных утверждений о прямых пределах.

Лемма 4.3. *Пусть $\prod_{i\in I} A_j/D$ — фильтрованное произведение систем A_i по фильтру D и $\mathscr{A} = \langle D, A_{J_1}, \pi_{J_1J_2}\rangle$, где множество D упорядочено относительно $\supseteq$, $A_{J_1} = \prod_{j\in J_1} A_j$ и $\pi_{J_1J_2}: A_{J_1} \to A_{J_2}$ — проектирование A_{J_1} на A_{J_2} для всех $J_1, J_2 \in D$, $J_1 \supseteq J_2$. Тогда $\mathscr{A}$ — надпрямой спектр и $\prod_i A_i/D \simeq \varinjlim \mathscr{A}$.*

Доказательство. Имеем $\varinjlim \mathscr{A} \simeq A_I/\theta$, $\prod_i A_i/D \simeq A_I/\theta_D$, где θ — ядерная конгруэнция гомоморфизма $\pi_{I\infty}: A_I \to \varinjlim \mathscr{A}$, а конгруэнция θ_D определена в лемме 3.7. Без труда проверяется, что $\theta = \theta_D$. Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Пусть $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$ — надпрямой спектр и $B = (b_k | k \in K) \leqslant \varinjlim \mathscr{A}$. Выбрав в A_0 элементы a_k, $k \in K$, такие, что $\varphi_{0\infty}(a_k) = b_k$, полагаем $B_i = (\varphi_{0i}(a_k) | k \in K)$, ψ_{ij} — сужение φ_{ij} на B_i для всех $i, j \in I$, $i \leqslant j$. Тогда $\mathscr{B} = \langle I, B_i, \psi_{ij}\rangle$ — надпрямой спектр и $B \simeq \varinjlim \mathscr{B}$.*

Доказательство. Проверим, что $\psi_{ij}(B_i) = B_j$ для всех $i, j \in I$, $i \leqslant j$. Пусть $a \in B_i$, тогда $a = \psi_{0i}(a_0)$ для некоторого $a_0 \in B_0$, и поскольку $\psi_{0j} = \psi_{ij}\psi_{0i}$, то $\psi_{ij}(a) = \psi_{ij}\psi_{0i}(a_0) = \psi_{0j}(a_0) \in B_j$. Следовательно, $\psi_{ij}(B_i) \subseteq B_i$. Аналогично проверяется обратное включение. Так как гомоморфизмы ψ_{ij} согласованы, то $\mathscr{B}$ — надпрямой спектр.

По предложению 4.1 $\varinjlim \mathscr{B} \simeq B_0/\pi$, где $\pi = \bigcup_i \ker \psi_{0i}$. С другой стороны, сужение φ гомоморфизма $\varphi_{0\infty}$ на B_0 отображает B_0 на B. Следовательно, $B \simeq B_0/\theta$, где $\theta = \ker \varphi$. Без труда проверяется, что $\pi = \theta$. Лемма доказана.

Напомним [4, с. 171], что *локальными подмоделями системы A* называются конечные обеднения конечных подмоделей системы A.

Лемма 4.5. *Пусть $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$ — прямой спектр, $\langle M, \sigma'\rangle$ — локальная подмодель системы $\varinjlim \mathscr{A}$. Тогда найдутся символ $i \in I$ и локальная подмодель $\langle M_i, \sigma'\rangle$ в A_i такие, что сужение $\varphi_{i\infty}$ на $\langle M_i, \sigma'\rangle$ является изоморфизмом на $\langle M, \sigma'\rangle$.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму подмодели $\langle M, \sigma'\rangle$, т. е. множество D всех атомных формул вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) \approx x_{n+1},\ r(x_1, \ldots, x_s),$$
$$f,\ r \in \sigma',\ x_i \in \{x_m | m \in M\},$$

и их отрицаний, истинных в $\underrightarrow{\lim}\, \mathcal{A}$ при подстановке $x'_m \to m$. Пусть $D = D_1 \cup D_2$, где D_1 — множество атомных формул, D_2 — множество отрицаний атомных формул.

По определению для любой формулы $k \in D_1$ найдутся элементы $i_k \in I$ и $a_{mi_k} \in A_{i_k}$, $m \in M$, такие, что $\varphi_{i_k\infty}(a_{mi_k}) = m$, и формула k истинна в системе A_{i_k} при подстановке $x_m \to a_{mi_k}$. Так как множество D_1 конечно, то для любого $m \in M$ существуют элементы $j_m \in I$ и $b_{j_m} \in A_{j_m}$ такие, что $j_m \geqslant i_k$ и $\varphi_{i_k j_m}(a_{mi_k}) = b_{j_m}$ для всех $k \in D_1$. Выберем элемент $d \in I$ такой, что $d \geqslant j_m$ для всех $m \in M$, и рассмотрим элементы $c_m = \varphi_{j_m d}(b_{j_m})$, $m \in M$. Поскольку произвольная формула $k \in D_1$ истинна в системе A_{i_k} при подстановке $x_m \to a_{mi_k}$ и

$$c_m = \varphi_{j_m d}(b_{j_m}) = \varphi_{j_m d}\varphi_{i_k j_m}(a_{mi_k}) = \varphi_{i_k d}(a_{mi_k}),$$

то все формулы из D_1 истинны в системе A_d при подстановке $x_m \to c_m$.

Так как формулы из D_2 истинны в системе $\underrightarrow{\lim}\, \mathcal{A}$ при подстановке $x_m \to m$ и $m = [c_m, d]$, то они истинны и в системе A_d при подстановке $x_m \to c_m$.

Таким образом, все формулы из D истинны в системе A_d при подстановке $x_m \to m$. Это означает. что локальная подмодель $\langle M_d, \sigma'\rangle$, где $M_d = \{c_m | m \in M\}$, изоморфна подмодели $\langle M, \sigma'\rangle$. Так как $\varphi_{d\infty}(c_m) = m$ для всех $m \in M$, то подмодель $\langle M_d, \sigma'\rangle$ является требуемой.

Из теоремы Тарского — Лося [4, с. 174] получаем

Следствие 4.6. *Любой универсальный класс замкнут относительно прямых пределов.*

§ 5. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ

Согласно теореме Мальцева [10] класс $\mathfrak{K}$ алгебраических систем тогда и только тогда является квазимногообразием, когда он замкнут относительно подсистем и фильтрованных произведений. В частности, имеет место равенство

$$\mathbf{Q}(\mathfrak{K}) = \mathbf{SP}_r(\mathfrak{K}). \tag{1}$$

Используя это равенство, можно получить другие характеризации квазимногообразий (см. [11—14]). В этом параграфе мы дадим характеризацию квазимногообразий в терминах подпрямых произведений и надпрямых пределов.

Обозначим через $\underrightarrow{\mathbf{L}}_s(\mathfrak{K})$ класс всех систем, изоморфных надпрямым пределам систем из класса $\mathfrak{K}$.

Лемма 5.1. *Для любого класса $\mathfrak{K}$ алгебраических систем имеют место равенства*

$$\mathbf{Q}(\mathfrak{K}) = \mathbf{S}\underrightarrow{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}(\mathfrak{K}) = \underrightarrow{\mathbf{L}}_s\mathbf{SP}(\mathfrak{K}) = \underrightarrow{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}_s\mathbf{S}(\mathfrak{K}).$$

Доказательство. Ввиду следствия 4.6 имеем $\underrightarrow{\mathbf{L}}_s(\mathfrak{K}) \subseteq \mathbf{Q}(\mathfrak{K})$, а так как $\mathbf{SP}(\mathfrak{K}) \subseteq \mathbf{Q}(\mathfrak{K})$, то

$$\mathbf{S}\underrightarrow{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}(\mathfrak{K}) \subseteq \mathbf{Q}(\mathfrak{K}). \tag{2}$$

С другой стороны, по лемме 4.3 $\mathbf{P}_r(\mathfrak{R}) \subseteq \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}(\mathfrak{R})$, поэтому из (1), (2) получаем

$$\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \mathbf{S}\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}(\mathfrak{R}). \tag{3}$$

Далее, в силу леммы 4.4, $\mathbf{S}\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s(\mathfrak{R}) \subseteq \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s\mathbf{S}(\mathfrak{R})$, следовательно, из (3) получаем $\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \mathbf{S}\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}(\mathfrak{R}) \subseteq \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s\mathbf{SP}(\mathfrak{R}) \subseteq \mathbf{Q}(\mathfrak{R})$, т. е.

$$\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s\mathbf{SP}(\mathfrak{R}). \tag{4}$$

Так как $\mathbf{SP}(\mathfrak{R}) = \mathbf{P}_s\mathbf{S}(\mathfrak{R})$, то формулу (4) можно переписать в виде

$$\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}_s\mathbf{S}(\mathfrak{R}). \tag{5}$$

Лемма доказана.

Поскольку $\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s(\mathfrak{R}) \subseteq \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}(\mathfrak{R})$, то из (4) вытекает формула Т. Фудзивара [15] (см. также Т. Кашиваги [14], Г. Гретцер и Х. Лаксер [13]): $\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}\mathbf{SP}(\mathfrak{R})$.

Отметим, что формула $\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \mathbf{SP}\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s(\mathfrak{R})$, вообще говоря, не верна. Действительно, рассмотрим класс $\mathfrak{R}$ всех циклических групп $\mathbf{Z}_{p_i}$, где p_i — простое число, $i = 0, 1, \ldots$; $p_0 = 1$, $p_1 = 2, \ldots$. Тогда $\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}$. Пусть D — какой-нибудь неглавный ультрафильтр над ω. Без труда проверяется (см. [4, с. 206]), что группа $G = \prod_i \mathbf{Z}_{p_i}/D$ изоморфна прямому произведению континуума копий аддитивной группы рациональных чисел. Следовательно, G финитно не аппроксимируема и, в частности, $G \notin \mathbf{SP}(\mathfrak{R})$. Отсюда следует, что $\mathbf{SP}\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s(\mathfrak{R}) = \mathbf{SP}(\mathfrak{R}) \neq \mathbf{Q}(\mathfrak{R})$.

Докажем теперь, что в формуле (5) оператор $\mathbf{S}$ на самом деле можно опустить.

Теорема 5.2. *Для любого класса $\mathfrak{R}$ алгебраических систем имеет место равенство* $\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}_s(\mathfrak{R})$.

Доказательство. Достаточно доказать импликацию $\mathbf{P}_s(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \Rightarrow \mathbf{S}\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s(\mathfrak{R}) = \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s(\mathfrak{R})$, так как тогда из (3) получаем $\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \mathbf{S}\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}(\mathfrak{R}) = \mathbf{S}\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}_s(\mathfrak{R}) = \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}_s(\mathfrak{R})$.

Предположим, что $\mathbf{P}_s(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}$ и $A \leqslant B$, где $B \simeq \underset{\rightarrow}{\lim}\mathscr{B}$, $\mathscr{B} = \langle I, B_i, \varphi_{ij}\rangle$ — надпрямой спектр и $B_i \in \mathfrak{R}$ для всех $i \in I$. Пусть $\omega_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Рассмотрим множество $D(i, n)$ всех функций $b \in B_i^{\omega_n}$ таких, что

$$\exists a \in A\ \exists k \geqslant n\ \forall s, l \geqslant k (b(s) = b(l),\ \varphi_{i\infty}(b(s)) = a).$$

Ясно, что для данной функции $b \in D(i, n)$ соответствующий элемент a определен однозначно; обозначим его через $d_{(i, n)}(b)$.

а) Докажем, что множество $D(i, n)$ является подсистемой в $B_i^{\omega_n}$. Пусть f — произвольная m-арная операция системы $B_i^{\omega_n}$, $b_1, \ldots, b_m \in D(i, n)$ и $b = f(b_1, \ldots, b_m)$. Согласно определению существуют элементы $k_j \geqslant n$ и $a_j \in A$, $j = 1, \ldots, m$, такие, что

$$b_j(s) = b_j(l),\ \varphi_{i\infty}(b_j(s)) = a_j \text{ для всех } s, l \geqslant k_j. \tag{6}$$

Поэтому для всех $s, l \geqslant \max(k_1, \ldots, k_m)$ имеем

$$b(s) = f(b_1(s), \ldots, b_m(s)) = f(b_1(l), \ldots, b_m(l)) = b(l),$$
$$\varphi_{i\infty}(b(s)) = \varphi_{i\infty}(f(b_1(s), \ldots, b_m(s))) = f(\varphi_{i\infty}(b_1(s), \ldots, \varphi_{i\infty}(b_m(s))) = f(a_1, \ldots, a_m).$$

Так как $f(a_1, \ldots, a_m) \in A$, то $b \in D(i, n)$. В частности, справедливо равенство

$$f(d_{(i,n)}(b_1), \ldots, d_{(i,n)}(b_m)) = d_{(i,n)}(f(b_1, \ldots, b_m)). \tag{7}$$

б) Докажем, что $D(i, n) \in \mathfrak{R}$. Так как $\mathfrak{R} = \mathbf{P}_s(\mathfrak{R})$ и $B_i \in \mathfrak{R}$, то достаточно проверить, что $D(i, n) \leqslant_s B_i^{\omega_n}$, т. е.

$$\forall k \geqslant n \ \forall b \in B_i \ \exists c \in D(i, n) \ (c(k) = b).$$

Фиксируя произвольный элемент $a \in A$, выберем элемент $a_i \in B_i$ такой, что $\varphi_{i\infty}(a_i) = a$. Теперь для данных элементов $b \in B_i$ и $k \geqslant n$ определим элемент $c \in B_i^{\omega_n}$, полагая

$$c(s) = \begin{cases} b, & \text{если } n \leqslant s \leqslant k, \\ a_i, & \text{если } s \geqslant k+1. \end{cases}$$

По определению $c \in D(i, n)$ и $c(k) = b$, что и требовалось.

в) Построим теперь надпрямой спектр. Рассмотрим множество $K = I \times \omega$, упорядоченное следующим образом:

$$\langle i, n\rangle \leqslant \langle j, m\rangle \Leftrightarrow (i \leqslant j \text{ и } n \leqslant m).$$

Так как множества I, ω направленны, то множество K также направленно. Для любых $\langle i, n\rangle$, $\langle j, m\rangle \in K$, $\langle i, n\rangle \leqslant \langle j, m\rangle$, определим отображение $\psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle} : D(i, n) \to D(j, m)$ по формуле

$$\left[\psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle}(b)\right](s) = \varphi_{ij}(b(s)), \quad b \in D(i, n), \ s \geqslant m. \tag{8}$$

Покажем, что $\psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle}(D(i, n)) = D(j, m)$. Пусть $b \in D(j, m)$, т. е. $\varphi_{j\infty}(b(s)) = a \in A$ и $b(s) = b(l)$ для всех s, $l \geqslant k \geqslant m$. Выберем элементы $c^*(s) \in B_i$, $s \geqslant m$, такие, что $\varphi_{ij}(c^*(s)) = b(s)$. Можно считать, что $c^*(s) = c^*(l)$ при s, $l \geqslant k$, поскольку $b(s) = b(l)$. Теперь, фиксируя произвольный элемент $b_i \in B_i$, определим элемент $c \in B_i^{\omega_n}$, полагая

$$c(s) = \begin{cases} c^*(s), & \text{если } s \geqslant m, \\ b_i, & \text{если } n \geqslant s \geqslant m-1. \end{cases}$$

Для всех $s \geqslant k$ имеем

$$\varphi_{i\infty}(c(s)) = \varphi_{i\infty}(c^*(s)) = \varphi_{j\infty}\varphi_{ij}(c^*(s)) = \varphi_{j\infty}(b(s)) = a,$$

поэтому $c \in D(i, n)$. А так как $\left[\psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle}(c)\right](s) = \varphi_{ij}(c^*(s)) = b(s)$, $s \geqslant m$, то $\psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle}(c) = b$. Еще проще проверяется включение $\psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle}(D(i, n)) \subseteq D(j, m)$.

Из (8) следует, что отображения $\psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle}$ являются гомоморфизмами. Так как гомоморфизмы φ_{ij} согласованы, то гомоморфизмы $\psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle}$ также согласованы. Таким образом, кортеж $\mathscr{D} = \langle K, D(i, n), \psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle}\rangle$ образует надпрямой спектр.

г) Докажем, что $A \simeq \varinjlim \mathscr{D}$. Имеем $\varinjlim \mathscr{D} \simeq D(0, 0)/\theta$, где $\theta = \ker \psi_{\langle 0,0\rangle}^{\infty}$. С другой стороны, в силу определения системы $D(0, 0)$ и равенства (7), отображение $d: D(0, 0) \to A$ по правилу $d(b) = d_{(0,0)}(b)$, $b \in D(0, 0)$, является гомоморфизмом на систему A. Следовательно, $A \simeq D(0, 0)/\pi$, где $\pi = \ker d$.

Осталось показать, что $\theta = \pi$. Пусть $r \in \sigma^P$, $n = \nu(r)$ и $b_1, \ldots, b_n \in D(0, 0)$. Выберем элементы $k_j \in \omega$, $a_j \in A$, $j = 1, \ldots, n$, удовлетворяющие условию (6). Пусть $k = \max(k_1, \ldots, k_n)$. Согласно определению конгруэнции θ

$$\langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in \theta(r) \Leftrightarrow \exists \langle i, m\rangle \in K \left(r^{D(i,m)}\left(\psi_{\langle 0,0\rangle}^{\langle i,m\rangle}(b_1), \ldots, \psi_{\langle 0,0\rangle}^{\langle i,m\rangle}(b_n)\right)\right).$$

Так как $D(i, m) \leqslant B_i^{\omega m}$, то ввиду (8) последнее условие равносильно следующему:

$$\exists i \in I \exists m \geqslant k \forall s \geqslant m \left(r^{B_i}(\varphi_{0i}(b_1(s)), \ldots, \varphi_{0i}(b_n(s)))\right). \qquad (9)$$

Но функции $b_j \in D(0, 0)$, $j = 1, \ldots, n$, постоянны при $s \geqslant k$, следовательно, (9) равносильно условию

$$\exists i \in I \exists s \geqslant k \left(r^{B_i}(\varphi_{0i}(b_1(s)), \ldots, \varphi_{0i}(b_n(s)))\right). \qquad (10)$$

Наконец, так как $\varphi_{i\infty}\varphi_{0i}(b_j(s)) = a_j = d(b_j)$, $i \in I$, $s \geqslant k$, то согласно определению предела,

$$(10) \Leftrightarrow r^A(d(b_1), \ldots, d(b_n)) \Leftrightarrow \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in \pi(r).$$

Таким образом, $A \simeq \underrightarrow{\lim}\, \mathscr{D} \in \underrightarrow{\mathbf{L}}_s(\mathfrak{R})$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 5.3. *Класс алгебраических систем тогда и только тогда является квазимногообразием, когда он замкнут относительно подпрямых произведений и надпрямых пределов.*

Из теоремы 5.2 вытекает также равенство:

$$\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \underrightarrow{\mathbf{L}}\mathbf{P}_s(\mathfrak{R}). \qquad (11)$$

Заметим [16], что оператор $\underrightarrow{\mathbf{L}}$ не идемпотентен, т. е. существуют такие классы $\mathfrak{R}$, что $\underrightarrow{\mathbf{L}}^2(\mathfrak{R}) \neq \underrightarrow{\mathbf{L}}(\mathfrak{R})$.

С л е д с т в и е 5.4. *Если класс $\mathfrak{R}$ алгебраических систем замкнут относительно подпрямых произведений, то*

$$\underrightarrow{\mathbf{L}}^2(\mathfrak{R}) = \underrightarrow{\mathbf{L}}(\mathfrak{R}) = \underrightarrow{\mathbf{L}}_s^2(\mathfrak{R}) = \underrightarrow{\mathbf{L}}_s(\mathfrak{R}).$$

Действительно, используя (11), получаем $\underrightarrow{\mathbf{L}}(\mathfrak{R}) \subseteq \underrightarrow{\mathbf{L}}\underrightarrow{\mathbf{L}}(\mathfrak{R}) = \underrightarrow{\mathbf{L}}\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) \subseteq \subseteq \mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \underrightarrow{\mathbf{L}}(\mathfrak{R})$, поэтому включения можно заменить равенствами. Для оператора $\underrightarrow{\mathbf{L}}_s$ доказательство аналогично.

Следующее утверждение для систем функциональной сигнатуры было доказано С. Р. Когаловским [17].

С л е д с т в и е 5.5. *Для любого класса $\mathfrak{R}$ алгебраических систем имеет место равенство* $\mathbf{V}(\mathfrak{R}) = \mathbf{HP}_s(\mathfrak{R})$.

Действительно, по теореме Биркгофа [4, с. 339] $\mathbf{V}(\mathfrak{R}) = \mathbf{HSP}(\mathfrak{R})$, отсюда $\mathbf{V}(\mathfrak{R}) = \mathbf{HQ}(\mathfrak{R}) = \mathbf{H}\underrightarrow{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}_s(\mathfrak{R}) \subseteq \mathbf{HP}_s(\mathfrak{R}) \subseteq \mathbf{V}(\mathfrak{R})$.

В заключение отметим, что оператор $\underrightarrow{\mathbf{L}}_s$ играет в квазимногообразиях такую же роль, какую оператор $\mathbf{H}$ играет в многообразиях. В некоторых случаях это позволяет по данным утверждениям (понятиям) для многообразий получать (определять) аналогичные утверждения (понятия) для квазимногообразий.

§ 6. ПРЕДЕЛЬНО ПРОЕКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

В теории многообразий важную роль играет понятие проективной системы. Напомним, что система P из класса $\mathfrak{R}$ называется $\mathfrak{R}$-п р о е к т и в н о й, если для любого гомоморфизма $\tau : A \to B$ системы $A \in \mathfrak{R}$ на систему $B \in \mathfrak{R}$ и любого гомоморфизма $\varphi : P \to B$ существует гомоморфизм $\psi : P \to A$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ A \arrow[rr, "\tau"'] & & B \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $\varphi = \tau\psi$. Например, любая $\mathfrak{R}$-свободная система является $\mathfrak{R}$-проективной.

Заменяя в этом определении оператор $\mathbf{H}$ оператором $\mathbf{L}_{\vec{s}}$, приходим к понятию предельно проективной системы. Пусть $\mathfrak{R}$ — какой-нибудь класс алгебраических систем, замкнутый относительно надпрямых пределов. По определению система $A \in \mathfrak{R}$ *предельно $\mathfrak{R}$-проективна*, если для любого надпрямого спектра $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$, $A_i \in \mathfrak{R}$, и для любого гомоморфизма $\alpha : A \to \varinjlim \mathscr{A}$ существуют $i \in I$ и гомоморфизм $\beta : A \to A_i$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ A_i \arrow[rr, "\varphi_{i\infty}"'] & & \varinjlim \mathscr{A} \end{tikzcd}$$

коммутативна. В частности, если α — вложение A в $\varinjlim \mathscr{A}$, то β — вложение A в A_i такое, что сужение $\varphi_{i\infty}$ на $\beta(A)$ является изоморфизмом на $\alpha(A)$.

Оказывается, что если проективные системы тесно связаны со свободными системами, то предельно проективные системы — с конечно определенными.

Обозначим через $F_{\mathfrak{R}}(X, \Delta)$ систему, определенную в классе $\mathfrak{R}$ множеством соотношений Δ в порождающих $X = \{x_i | i \in I\}$ (см. [4]). В силу теоремы Мальцева любую систему из квазимногообразия $\mathfrak{R}$ можно представить в виде $F_{\mathfrak{R}}(X, \Delta)$ для подходящих X и Δ. По определению система A из класса $\mathfrak{R}$ *конечно определена* (*имеет конечное число соотношений*) в $\mathfrak{R}$, если $A \simeq F_{\mathfrak{R}}(X, \Delta)$ для некоторых конечных X и Δ (конечного Δ). Любая система с конечным числом соотношений из класса $\mathfrak{R}$ изоморфна $\mathfrak{R}$-свободному произведению конечно определенной и свободной систем.

Л е м м а 6.1. *Пусть $\mathfrak{R}$ — квазимногообразие, $A \in \mathfrak{R}$ и $A \simeq F_{\mathfrak{R}}(X, \Delta)$ в порождающих a_i, $i \in I$. Тогда кортеж $\mathscr{K} = \langle K, A_k, \varphi_{kh}\rangle$, где K — множество всех конечных подмножеств в Δ, упорядоченное относительно включения, $A_k \simeq F_{\mathfrak{R}}(X, k)$ в порождающих a_{ki}, $i \in I$, и φ_{kh} — естественный гомоморфизм A_k на A_h при $k \subseteq h$, является надпрямым спектром и $A \simeq \varinjlim \mathscr{K}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, $\mathscr{K}$ — надпрямой спектр. Согласно определению $\varphi_{kh}(a_{ki}) = a_{hi}$ при $k \subseteq h$. Поэтому $[a_{ki}, k] = [a_{hi}, h]$ для всех $k, h \in K$, т. е. элемент $[a_{ki}, k]$ не зависит от k, обозначим его через b_i. Так как $\varinjlim \mathscr{K} = (b_i | i \in I)$ и формулы из Δ истинны в системе $\varinjlim \mathscr{K}$ при подстановке $x_i \to b_i$, то существует гомоморфизм $\varphi : A \to \varinjlim \mathscr{K}$ такой, что $\varphi(a_i) = b_i$.

Покажем, что φ — изоморфизм. Пусть атомная формула R истинна в системе $\varinjlim \mathscr{K}$ при подстановке $x_i \to b_i$. Тогда найдется элемент $k \in K$

такой, что формула R истинна в A_k при подстановке $x_i \to a_{ki}$, $i \in I$. Поскольку отображение $\varphi_k : A_k \to A$, $\varphi_k(a_{ki}) = a_i$, $i \in I$, является гомоморфизмом, то формула R истинна в системе A при подстановке $x_i \to a_i$. Это означает, что $\varphi : A \simeq \varinjlim \mathscr{K}$. Лемма доказана.

Надпрямой спектр из леммы 6.1 назовем *каноническим спектром системы* A.

Теорема 6.2. *Любая система с конечным числом соотношений из квазимногообразия $\mathfrak{R}$ предельно $\mathfrak{R}$-проективна. Конечно порожденная $\mathfrak{R}$-система предельно $\mathfrak{R}$-проективна тогда и только тогда, когда она конечно определена в $\mathfrak{R}$.*

Доказательство. а) Пусть $A \in \mathfrak{R}$ — система с конечным числом соотношений, $A \simeq F_{\mathfrak{R}}(X, \Delta)$ в порождающих a_i, $i \in I$, $\alpha : A \to B$ — произвольный гомоморфизм и $B \simeq \varinjlim \mathscr{B}$, где $\mathscr{B} = \langle J, B_j, \varphi_{ij}\rangle$ — надпрямой спектр, $B_j \in \mathfrak{R}$.

Рассмотрим локальную подмодель $\langle M, \sigma'\rangle$ в A, где σ' — множество всех сигнатурных символов, входящих в запись хотя бы одной формулы из Δ, M — множество всех элементов вида $t(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ таких, что соответствующий терм $t(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$входит в запись хотя бы одной формулы из Δ; эти множества конечны, так как $|\Delta| < \omega$. Тогда $\langle\alpha(M), \sigma'\rangle$ — локальная подмодель в B. Следовательно, по лемме 4.5 найдутся $j \in J$ и локальная подмодель $\langle M', \sigma'\rangle$ в B_j такие, что сужение $\varphi_{j\infty}$ на $\langle M', \sigma'\rangle$ является изоморфизмом на $\langle\alpha(M), \sigma'\rangle$. Выбрав элементы $b_i \in B_j$, $i \in I$, такие, что $\psi_{j\infty}(b_i) = \alpha(a_i)$, $i \in I$, определим элементы $a_{ji} \in B_j$, $i \in I$, следующим образом:

$$a_{ji} \rightleftharpoons \begin{cases} b_i, & \text{если } a_i \notin M, \\ \varphi_{j\infty}^{-1}\alpha(a_i), & \text{если } a_i \in M. \end{cases}$$

По определению формулы из Δ истинны в системе B_j при подстановке $x_i \to a_{ji}$, $i \in I$, следовательно, существует гомоморфизм $\beta : A \to B_j$ такой, что $\beta(a_i) = a_{ji}$ при $i \in I$. Поскольку гомоморфизм α совпадает с гомоморфизмом $\varphi_{j\infty}\beta$ на порождающих a_i, $i \in I$, то $\alpha = \varphi_{j\infty}\beta$. Тем самым предельная проективность системы A доказана.

б) Пусть A — конечно порожденная предельно $\mathfrak{R}$-проективная система, $A \simeq F_{\mathfrak{R}}(x_1, \ldots, x_n; \Delta)$ в порождающих $a_1, \ldots, a_n$. Согласно лемме 6.1 $A \simeq \varinjlim \mathscr{K}$, где $\mathscr{K} = \langle K, A_k, \varphi_{kh}\rangle$ — канонический спектр системы A, $A_k \simeq F_{\mathfrak{R}}(x_1, \ldots, x_n; k)$ в порождающих a_{ki}, $i = 1, \ldots, n$, и $\varphi_{k\infty}(a_{ki}) = a_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Так как система A предельно $\mathfrak{R}$-проективна, то найдутся $k \in K$ и вложение $\beta : A \to A_k$ такие, что $\varphi_{k\infty}(b_{ki}) = a_i$, где $b_{ki} = \beta(a_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Поскольку $[b_{ki}, k] = [a_{ki}, k]$, то существует элемент $h_i \in K$ такой, что $k \leqslant h_i$ и $\varphi_{kh_i}(b_{ki}) = \varphi_{kh_i}(a_{ki}) = a_{h_i i} \in A_{h_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $h \in K$, $h \geqslant h_1, \ldots, h_n$. Тогда $a_{hi} = \varphi_{h_i h}(a_{h_i i}) \in A_h$, $i = 1, \ldots, n$, и поскольку $\varphi_{kh}(b_{ki}) = \varphi_{h_i h}\varphi_{kh_i}(b_{ki}) = \varphi_{h_i h}(a_{h_i i}) = a_{hi}$, то φ_{kh} отображает $\beta(A)$ на A_h.

Покажем, что φ_{kh} — изоморфизм. Пусть атомная формула $R(x_1, \ldots, x_n)$ истинна в системе A_h при подстановке $x_i \to a_{hi}$, $i = 1, \ldots, n$. Поскольку $A = \varphi_{h\infty}(A_h)$, то формула R истинна в системе A при подстановке $x_i \to [a_{hi}, h]$. Но $[a_{hi}, h] = [b_{ki}, k]$, следовательно, формула R истинна в системе $\beta(A)$ при подстановке $x_i \to [b_{ki}, k]$, $i = 1, \ldots, n$.

Итак, $A \simeq A_h$, т. е. система A конечно определена.

Из теоремы 6.2 и леммы 6.1 вытекает

Следствие 6.3. *Любая система из квазимногообразия $\mathfrak{R}$ изоморфна надпрямому пределу предельно $\mathfrak{R}$-проективных систем.*

Заметим, что это следствие «двойственно» следующей теореме Мальцева: любая система из квазимногообразия $\mathfrak{R}$ изоморфна подпрямому произведению подпрямо $\mathfrak{R}$-неразложимых систем (см. следствие 7.8).

Так как любая $\mathfrak{R}$-проективная система предельно $\mathfrak{R}$-проективна, то имеет место

Следствие 6.4. *Любая конечно порожденная проективная система из квазимногообразия $\mathfrak{R}$ конечно определена в $\mathfrak{R}$.*

Покажем, что не всякая предельно проективная система определяется конечным множеством соотношений.

Пример 6.5. *Пусть* $\mathbf{D}$ — *многообразие дистрибутивных решеток и* $C_\omega = \langle \omega, \leqslant \rangle$. *Тогда решетка* C_ω *проективна, но не определяется конечным множеством соотношений в* $\mathbf{D}$.

Для доказательства проективности решетки C_ω воспользуемся следующим почти очевидным утверждением: если все гомоморфные образы $P \in \mathfrak{R}$ системы $A \in \mathfrak{R}$ *слабо* $\mathfrak{R}$-*проективны*, т. е. для любого гомоморфизма $\tau : B \to P$ системы $B \in \mathfrak{R}$ на систему P существует такой гомоморфизм $\varphi : P \to B$, что $\tau\varphi = \mathrm{id}_P$, то система A $\mathfrak{R}$-проективна.

Гомоморфными образами решетки C_ω являются цепи $C_n = \langle \{0, 1, \ldots \ldots, n-1\}, \leqslant \rangle$, C_ω, $n < \omega$. Покажем, что они слабо $\mathbf{D}$-проективны. Пусть τ — гомоморфизм дистрибутивной решетки L на решетку C_n. Выбрав элементы $b_m \in L$ такие, что $\tau(b_m) = m$, $m \in C_n$, полагаем

$$a_0 = b_0, \ \ldots, \ a_m = a_{m-1} \vee b_m, \ \ldots, \ a_{n-1} = a_{n-2} \vee b_{n-1}.$$

Тогда для всех $m \in C_n$ имеем

$$\tau(a_m) = \tau(a_{m-1} \vee b_m) = \tau(a_{m-1}) \vee \tau(b_m) = (m-1) \vee m = m.$$

Следовательно, гомоморфизм $\varphi : C_n \to L$, где $\varphi(m) = a_m$, $0 \leqslant m \leqslant n-1$, удовлетворяет равенству $\tau\varphi = \mathrm{id}_{C_n}$.

Покажем, что решетка C_ω не имеет конечного числа соотношений.

Предположим противное, т. е. что существует конечное множество соотношений Δ, определяющее решетку C_ω в многообразии $\mathbf{D}$ в порождающих a_n, $n \in \omega$. Выбрав максимальный порождающий элемент a_n такой, что x_n входит в запись термов из Δ, определим отображение $\varphi : C_\omega \to \mathbf{2}$ так:

$$\varphi(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \leqslant a_n, \\ 0, & \text{если } m > a_n. \end{cases}$$

По определению формулы из Δ истинны в решетке $\mathbf{2}$ при подстановке $x_m \to \varphi(m)$, но φ не гомоморфизм, ибо $a_n < a_n + 1$ и $\varphi(a_n) > \varphi(a_n + 1)$. Противоречие.

Представляется интересным вопрос: для каких квазимногообразий $\mathfrak{R}$ все предельно $\mathfrak{R}$-проективные системы определяются в $\mathfrak{R}$ конечным множеством соотношений? Укажем одно простое достаточное условие.

Предложение 6.6. *Пусть* $\mathfrak{R}$ — *квазимногообразие, в котором подсистемы систем с конечным числом соотношений также имеют конечное число соотношений. Тогда любая предельно* $\mathfrak{R}$-*проективная система имеет в* $\mathfrak{R}$ *конечное число соотношений.*

Доказательство. Пусть A — предельно $\mathfrak{R}$-проективная система и $A \simeq F_{\mathfrak{R}}(X, \Delta)$. По лемме 6.1 $A \simeq \varinjlim \mathscr{K}$, где $\mathscr{K}$ — канонический спектр системы A. Следовательно, $A \leqslant A_k$ для некоторого $k \in K$. Так как система A_k с конечным числом соотношений, то по предположению система A также с конечным числом соотношений. Предложение доказано.

Предложение 6.6 очевидным образом применимо к многообразию $\mathfrak{A}$ абелевых групп, так что любая предельно $\mathfrak{A}$-проективная группа имеет конечное число соотношений в $\mathfrak{A}$.

В заключение покажем, что многие свойства конечно определенных систем остаются справедливыми для предельно проективных систем.

Предложение 6.7. *Если $\mathfrak{K} = \mathbf{Q}(\mathfrak{N})$ для некоторого наследственного класса $\mathfrak{N}$, то любая предельно $\mathfrak{K}$-проективная система аппроксимируется $\mathfrak{N}$-системами.*

Для конечно определенных систем предложение доказано в [11]. В общем случае доказательство следует из формулы $\mathbf{Q}(\mathfrak{N}) = \mathbf{L}_s\mathbf{P}_s(\mathfrak{N})$ (см. теорему 5.2).

В теории квазимногообразий важную роль играет лемма о невложимости [11]. Обобщим ее на предельно проективные системы.

Рассмотрим какой-нибудь класс $\mathfrak{K}$ алгебраических систем. Для любого подкласса $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{K}$ обозначим через $\mathbf{N}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{N})$ класс всех $\mathfrak{K}$-систем, в каждую из которых не вложима ни одна система из класса $\mathfrak{N}$. Пусть далее $A \in \mathfrak{K}$, $A = (a_i | i \in I)$ и Δ — некоторое множество атомных формул в алфавите $X = \{x_i | i \in I\}$, ложных в A при подстановке $x_i \to a_i$. По определению $[A, \Delta]$ — множество всех таких гомоморфных образов $\varphi(A) \in \mathfrak{K}$, что хотя бы одна формула из Δ остается ложной в $\varphi(A)$ при подстановке $x_i \to \varphi(a_i)$.

Предложение 6.8. *Если $\mathfrak{K}$ — квазимногообразие, A — неединичная предельно $\mathfrak{K}$-проективная система, то $\mathbf{N}_{\mathfrak{K}}[A, \Delta]$ — собственное подквазимногообразие в $\mathfrak{K}$.*

Доказательство. В силу следствия 5.3 достаточно доказать, что класс $\mathbf{N}_{\mathfrak{K}}[A, \Delta]$ замкнут относительно подпрямых произведений и надпрямых пределов.

Пусть $B \leqslant_s \prod_j B_j$, где $B_j \in \mathbf{N}_{\mathfrak{K}}[A, \Delta]$, но $B \notin \mathbf{N}_{\mathfrak{K}}[A, \Delta]$. Тогда найдутся гомоморфизм $\varphi : A \to B$ и формула $R \in \Delta$ такие, что $\varphi(A) \models \neg R$ при подстановке $x_i \to \varphi(a_i)$. Поскольку $\varphi(A) \leqslant \prod_j B_j$, то $B_{j_0} \models \neg R$ для некоторого j_0 при подстановке $x_i \to \pi_{j_0}\varphi(a_i)$, $i \in I$. Следовательно, $B_{j_0} \notin \mathbf{N}_{\mathfrak{K}}[A, \Delta]$, что противоречит предположению.

Пусть далее $B \simeq \varinjlim \mathscr{B}$ для некоторого надпрямого спектра $\mathscr{B} = \langle J, B_j, \varphi_{ij} \rangle$ и $B_j \in \mathbf{N}_{\mathfrak{K}}[A, \Delta]$. Если $B \notin \mathbf{N}_{\mathfrak{K}}[A, \Delta]$, то существуют гомоморфизм $\varphi : A \to B$ и формула $R \in \Delta$ такие, что $\varphi(A) \models \neg R$ при подстановке $x_i \to \varphi(a_i)$. Поскольку система A предельно $\mathfrak{K}$-проективна, то существуют $j_0 \in J$ и гомоморфизм $\psi : A \to B_{j_0}$ такие, что $\varphi = \varphi_{j_0\infty}\psi$. Поэтому $\psi(A) \models \neg R$ при подстановке $x_i \to \psi(a_i)$, что противоречит включению $B_{j_0} \in \mathbf{N}_{\mathfrak{K}}[A, \Delta]$. Предложение доказано.

§ 7. РЕШЕТКИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

Часто удобно рассматривать не все конгруэнции на данной системе, а только те, фактор-системы по которым удовлетворяют некоторому свойству. Например, при изучении неориентированных графов естественно рассматривать только такие конгруэнции, фактор-графы по которым также неориентированны.

В связи с этим для произвольной системы A и для произвольного класса $\mathfrak{K}$ алгебраических систем той же сигнатуры полагаем

$$C_{\mathfrak{K}}(A) = \{\theta \in \mathrm{Con}(A) \mid A/\theta \in \mathfrak{K}\}.$$

Множество $C_{\mathfrak{K}}(A)$ частично упорядоченно относительно включения, но, вообще говоря, не является решеткой.

Лемма 7.1. *Класс $\mathfrak{K}$ алгебраических систем замкнут относительно подпрямых произведений тогда и только тогда, когда для любой системы*

A частично упорядоченное множество $C_{\mathfrak{R}}(A)$ является полной нижней подполурешеткой в $\mathrm{Con}\,(A)$.

Необходимость. Пусть A — произвольная система и $\theta_i \in C_{\mathfrak{R}}(A)$, $i \in I$. Тогда по лемме 3.5

$$A/\bigcap_i \theta_i \leqslant_s \prod_i A/\theta_i,$$

и так как по условию $A/\theta_i \in \mathfrak{R}$, то $A/\bigcap_i \theta_i \in \mathfrak{R}$. Следовательно, $C_{\mathfrak{R}}(A)$ — полная нижняя подполурешетка в $\mathrm{Con}\,(A)$.

Достаточность. Пусть $A \leqslant_s \prod_i A_i$, где $A_i \in \mathfrak{R}$. Тогда если π_i — проектирование A на A_i, то

$$A_i \simeq A/\ker \pi_i, \quad \bigcap_i \ker \pi_i = 0_A. \tag{1}$$

Так как $C_{\mathfrak{R}}(A)$ — полная нижняя подполурешетка в $\mathrm{Con}\,(A)$ и $\ker \pi_i \in C_{\mathfrak{R}}(A)$, то $0_A \in C_{\mathfrak{R}}(A)$. Следовательно, $A \in \mathfrak{R}$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольный класс алгебраических систем и A — какая-нибудь система этой же сигнатуры. Гомоморфизм α системы A на некоторую $\mathfrak{R}$-систему B будем называть *$\mathfrak{R}$-морфизмом*, если для любого гомоморфизма γ системы A на $\mathfrak{R}$-систему C существует гомоморфизм $\beta : B \to C$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & B \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

коммутативной. Каждый $\mathfrak{R}$-морфный образ системы A называется *$\mathfrak{R}$-репликой* и обозначается $A_{\mathfrak{R}}$. Ясно, что любые две $\mathfrak{R}$-реплики системы A изоморфны.

Отметим, что наше определение $\mathfrak{R}$-морфизма отличается от определения, данного А. И. Мальцевым [4].

Следствие 7.2. *Для произвольного класса $\mathfrak{R}$ алгебраических систем следующие условия равносильны:*

а) *класс $\mathfrak{R}$ замкнут относительно подпрямых произведений,*

б) *любая система имеет $\mathfrak{R}$-реплику в классе $\mathfrak{R}$,*

в) *для любой системы A частично упорядоченное множество $C_{\mathfrak{R}}(A)$ имеет наименьший элемент.*

Действительно, по определению б) $\Rightarrow$ в). Покажем, что в) $\Rightarrow$ а). Пусть $A \leqslant_s \prod_i A_i$, где $A_i \in \mathfrak{R}$. Если π_i — проектирование A на A_i, то справедливо условие (1). Так как $\ker \pi_i \in C_{\mathfrak{R}}(A)$, то $\ker \pi_i \supseteq \varkappa_A$, где $\varkappa_A$ — наименьший элемент в $C_{\mathfrak{R}}(A)$. Следовательно, $\varkappa_A = 0_A$, т. е. $A \in \mathfrak{R}$.

Ввиду леммы 7.1 а) $\Rightarrow$ в). Покажем, что в) $\Rightarrow$ б). Пусть A — произвольная система, $\varkappa_A$ — наименьшая конгруэнция в $C_{\mathfrak{R}}(A)$. Тогда $A/\varkappa_A$ есть $\mathfrak{R}$-реплика системы A, а канонический гомоморфизм $\alpha : A \to A/\varkappa_A$ есть $\mathfrak{R}$-морфизм. Действительно, пусть γ — произвольный гомоморфизм системы A на $\mathfrak{R}$-систему C. Согласно предложению 3.3 существует естественный изоморфизм $\varphi : A/\ker \gamma \simeq C$, отсюда $\varkappa_A \subseteq \ker \gamma$. Поэтому если ρ — канонический гомоморфизм $A/\varkappa_A$ на $A/\ker \gamma$, то $\gamma = (\varphi\rho)\alpha$, что и требовалось.

Отметим, что если класс $\mathfrak{R}$ алгебраических систем замкнут относительно подпрямых произведений, то из леммы 7.1 следует, что $C_{\mathfrak{R}}(A)$ —

полная решетка относительно включения. В силу 2-й теоремы об изоморфизме для любой конгруэнции $\theta \in c_{\mathfrak{R}}(A)$ имеет место изоморфизм

$$C_{\mathfrak{R}}(A/\theta) \simeq [\theta) = \{\eta \in C_{\mathfrak{R}}(A) \mid \theta \subseteq \eta \subseteq 1_A\}. \tag{2}$$

Поэтому из следствия 7.2 получаем

Следствие 7.3. *Если класс $\mathfrak{R}$ алгебраических систем замкнут относительно подпрямых произведений, то $C_{\mathfrak{R}}(A) \simeq C_{\mathfrak{R}}(A_{\mathfrak{R}})$ для любой системы A.*

Следующая лемма в некотором смысле двойственна лемме 7.1.

Лемма 7.4. *Класс $\mathfrak{R}$ алгебраических систем замкнут относительно надпрямых пределов тогда и только тогда, когда для любой системы A частично упорядоченное множество $C_{\mathfrak{R}}(A)$ замкнуто относительно объединений по цепям.*

Необходимость. Пусть A — произвольная система, $\{\theta_i | i \in I\}$ — произвольная цепь в $C_{\mathfrak{R}}(A)$ и $\theta = \bigcup_i \theta_i$. Тогда, согласно предложению 4.1, $A/\theta \simeq \varinjlim \mathscr{A}$ для некоторого надпрямого спектра $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$, где $A_i \simeq A/\theta_i$. Так как $A/\theta_i \in \mathfrak{R}$, то по условию $A/\theta \in \mathfrak{R}$ и, следовательно, $\theta \in C_{\mathfrak{R}}(A)$.

Достаточность. Предположим, что $A \simeq \varinjlim \mathscr{A}$ для некоторого надпрямого спектра $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$, где $A_i \in \mathfrak{R}$. Пусть 0 — наименьший элемент в I, $\theta_i = \ker \varphi_{0i}$ и $\theta = \bigcup_i \theta_i$. По предложению 4.1 $A \simeq A_0/\theta$ и $\{\theta_i | i \in I\}$ — направленное подмножество в $\mathrm{Con}(A_0)$. Так как $C_{\mathfrak{R}}(A_0)$ замкнуто относительно объединений по цепям и $\theta_i \in C_{\mathfrak{R}}(A_0)$, то по лемме 2.4 $\theta \in C_{\mathfrak{R}}(A_0)$. Следовательно, $A \in \mathfrak{R}$. Лемма доказана.

Предложение 7.5. *Класс $\mathfrak{R}$ алгебраических систем является квазимногообразием тогда и только тогда, когда $C_{\mathfrak{R}}(A)$ — алгебраическое подмножество в $\mathrm{Con}(A)$ для любой системы A.*

Доказательство ввиду следствия 5.3 следует непосредственно из лемм 7.1 и 7.4.

Следствие 7.6. *Если $\mathfrak{R}$ — квазимногообразие, то $C_{\mathfrak{R}}(A)$ — алгебраическая решетка относительно включения для любой системы A.*

Следует из леммы 2.3 и предложения 3.2.

Рассмотрим в качестве примера класс Λ всех неориентированных графов без петель, дополненный единичным графом; Λ — квазимногообразие, так как он задается в классе всех графов квазитождествами:

$$\forall xy(r(x, y) \to r(y, x)), \ \forall xy(r(x, x) \to x \approx y).$$

Пусть T — трехэлементный граф из примера 3.1, тогда $|\mathrm{Con}(T)| = 15$, а, в силу примера 3.4, $C_\Lambda(T) \simeq 2$. Пусть K — четырехэлементный граф, изображенный на рис. 7.1. Можно показать, что $|\mathrm{Con}(K)| = 351$. С другой стороны, решетка $C_\Lambda(K)$ легко описывается (см. рис. 7.2) и имеет всего 10 элементов.

Предложение 7.5 устанавливает связь между квазимногообразиями и алгебраическими решетками. Используя эту связь, дадим, например, простое решеточное доказательство теоремы Мальцева о подпрямом разложении [18].

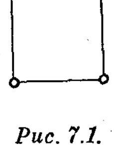


Рис. 7.1.

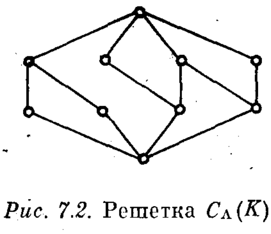


Рис. 7.2. Решетка $C_\Lambda(K)$.

Обобщим сначала следствие 3.6.

Предложение 7.7. *Если класс $\mathfrak{K}$ замкнут относительно подпрямых произведений, то система $A \in \mathfrak{K}$ подпрямо $\mathfrak{K}$-неразложима тогда и только тогда, когда конгруэнция 0_A вполне конеразложима в $C_{\mathfrak{K}}(A)$.*

Доказательство. Предположим, что система A подпрямо $\mathfrak{K}$-неразложима, но $0_A = \bigcap_i \theta_i$ для некоторых конгруэнций $\theta_i \in C_{\mathfrak{K}}(A)$, $\theta_i \neq 0_A$. Тогда по предложению 3.5 $A/0_A \leqslant_s \prod_i A/\theta_i$, и ни одно из проектирований $A \to A/\theta_i$ не является изоморфизмом. Противоречие.

Обратно, предположим, что 0_A — вполне конеразложимая конгруэнция в $C_{\mathfrak{K}}(A)$ и $A \leqslant_s \prod_i A_i$ для некоторых систем $A_i \in \mathfrak{K}$. Так как $A_i \simeq A/\theta_i$, где $\theta_i = \ker \pi_i$, и $0_A = \bigcap_i \theta_i$, то существует i такое, что $0_A = \theta_i$. Следовательно, π_i — изоморфизм. Предложение доказано.

Следствие 7.8 (А. И. Мальцев [18]). *Любая система из квазимногообразия $\mathfrak{K}$ изоморфна подпрямому произведению подпрямо $\mathfrak{K}$-неразложимых систем.*

Доказательство. Если $A \in \mathfrak{K}$, то ввиду следствия 7.6 $C_{\mathfrak{K}}(A)$ — алгебраическая решетка, отсюда по лемме 2.2 $0_A = \bigcap_i \theta_i$ для некоторых вполне конеразложимых конгруэнций $\theta_i \in C_{\mathfrak{K}}(A)$. Следовательно, ввиду предложения 3.5 $A \leqslant_s \prod_i A/\theta_i$. Осталось показать, что системы A/θ_i подпрямо $\mathfrak{K}$-неразложимы. В силу условия (2) $C_{\mathfrak{K}}(A/\theta_i) \simeq [\theta_i)$. Так как конгруэнция θ_i вполне конеразложима в $C_{\mathfrak{K}}(A)$, то конгруэнция $0_{A/\theta_i}$ вполне конеразложима в $C_{\mathfrak{K}}(A/\theta_i)$. Следовательно, согласно предложению 7.8 система A/θ_i подпрямо $\mathfrak{K}$-неразложима.

По теореме Г. Гретцера и Е. Шмидта [19] любая алгебраическая решетка представима в виде $\mathrm{Con}(B)$ для некоторой алгебры B. Какие решетки представимы в виде $C_{\mathfrak{K}}(A)$?

Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Предложение 7.9. *Для любой полной решетки L найдутся класс $\mathfrak{K}$ алгебраических систем предикатной сигнатуры, замкнутый относительно подпрямых произведений, и свободная система $F \in \mathfrak{K}$ такие, что $L \simeq C_{\mathfrak{K}}(F)$.*

Для любой алгебраической решетки A найдутся квазимногообразие $\mathfrak{K}$ алгебраических систем предикатной сигнатуры и свободная система $F \in \mathfrak{K}$ такие, что $A \simeq C_{\mathfrak{K}}(F)$. При этом если A — конечная решетка, то F — конечная система конечной сигнатуры.

Доказательство. а) Пусть L — произвольная полная решетка. Отображение $\psi: L \to P(L)$ по правилу $\psi(a) = \{b \in L | b \leqslant a\}$, $a \in L$, является изоморфизмом L на $\psi(L)$ как полных нижних полурешеток. Следовательно, если $\psi(L)$ рассматривать как полную решетку относительно включения, то $L \simeq \psi(L)$.

Рассмотрим многообразие $\mathcal{O}_L$ систем предикатной сигнатуры $\sigma = \langle P_\alpha | \alpha \in L\rangle$, заданное тождеством $\forall xy(x \approx y)$. Отображение $\varphi: P(L) \to \mathcal{O}_L$ по правилу

$$(\varphi(a) \models P_\alpha \Leftrightarrow \alpha \in a),\ a \in P(L),\ \alpha \in L,$$

взаимно однозначно и сохраняет пересечения, т. е. $\varphi(\bigcap A) = \prod_{a \in A} \varphi(a)$ для $A \subseteq P(L)$. Поэтому если A — полная нижняя подполурешетка в $P(L)$, то подкласс $\varphi(A) = \{\varphi(a) | a \in A\}$ замкнут относительно подпрямых произведений. Пусть $\mathfrak{K} = \varphi\psi(L)$, F — свободная система в $\mathfrak{K}$. Тогда ввиду вышесказанного класс $\mathfrak{K}$ замкнут относительно подпрямых произведений и

$F=\varphi(f)$, где f — наименьший элемент в $\psi(L)$, т. е. $f=\bigcap(a|a\in\psi(L))$. Так как отображение φ взаимно однозначно и система $\varphi(a)$ является гомоморфным образом системы $\varphi(b)$ тогда и только тогда, когда $a\supseteq b$, то $C_{\mathfrak{R}}(F)\simeq\psi(L)$. Следовательно, $C_{\mathfrak{R}}(F)\simeq L$.

б) Пусть A — произвольная алгебраическая решетка, ψ, φ — отображения из п. а). В силу предложения 2.5 $\psi(A)$ — замкнутая подполурешетка в $P(A)$. Поэтому из доказательства леммы 2.1 [8] следует, что $\mathfrak{R}=\varphi\psi(A)$ — подквазимногообразие в $\mathcal{O}_A$. Теперь так же, как в п. а), устанавливается, что если F — свободная система в $\mathfrak{R}$, то $C_{\mathfrak{R}}(F)\simeq\psi(A)\simeq L$.

Предложение доказано.

§ 8. КОДИСТРИБУТИВНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И РЕШЕТКИ $S_p(A, \varkappa)$

Бинарное отношение $\varkappa$ на полурешетке L назовем *кодистрибутивным*, если

$$\forall a,\ b,\ c\in L[a\varkappa(b\wedge c)\Rightarrow\exists b',\ c'\in L(b'\varkappa b,\ c'\varkappa c,\ a=b'\wedge c')].$$

Это определение соответствует определению дистрибутивной полурешетки (см. [7]). Отметим также, что решетка L дистрибутивна тогда и только тогда, когда двойственный порядок $\geqslant$ кодистрибутивен на L. Действительно, пусть L — дистрибутивная решетка и $a\geqslant(b\wedge c)$, $b,\ c\in L$. Тогда $a=a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ и $a\vee b\geqslant b$, $a\vee c\geqslant c$, т. е. порядок $\geqslant$ кодистрибутивен. Обратно, предположим, что порядок $\geqslant$ кодистрибутивен на решетке L, но L не дистрибутивна. Тогда одна из решеток M_3, N_5 (см. рис. 8.1) вложима в L. Так как $a\geqslant(b\wedge c)$, то по условию найдутся элементы b', $c'\in L$ такие, что $b'\geqslant b$, $c'\geqslant c$ и $a=b'\wedge c'$. Но $b'\geqslant(a\vee b)\geqslant c$, отсюда $a=b'\wedge c'\geqslant c$, что невозможно.

Ясно, что отношение равенства кодистрибутивно на любой полурешетке.

Рис. 8.1. Слева — решетка M_3, справа — N_5.

Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольное квазимногообразие и $A\in\mathfrak{R}$. Определим на решетке $C_{\mathfrak{R}}(A)$ *отношение изоморфизма* τ и *отношение вложения* ε следующим образом:

$$\theta_1\tau\theta_2\Leftrightarrow A/\theta_1\simeq A/\theta_2,\quad \theta_1\varepsilon\theta_2\Leftrightarrow A/\theta_1\leqslant A/\theta_2.$$

Лемма 8.1. *Отношения τ и ε являются кодистрибутивными предпорядками на решетке $C_{\mathfrak{R}}(A)$.*

Доказательство. Без труда проверяется, что отношения τ, ε являются предпорядками на множестве $C_{\mathfrak{R}}(A)$. Докажем кодистрибутивность отношения ε. Пусть $\theta_1\varepsilon(\theta_3\cap\theta_2)$ для некоторых конгруэнций $\theta_i\in C_{\mathfrak{R}}(A)$. Тогда по лемме 3.5 $A/\theta_1\leqslant A/(\theta_3\cap\theta_2)\leqslant_s A/\theta_2\times A/\theta_3$. Пусть φ — канонический гомоморфизм A на A/θ_1, π_i — проектирование A/θ_1 в A/θ_i, $A_i=\pi_i(A/\theta_1)$, $i=2,\ 3$. По определению $A/\theta_1\leqslant_s A_2\times A_3$, отсюда $\theta_1=\theta_2'\cap\theta_3'$, где $\theta_i'=\ker\pi_i\varphi$, $i=2,\ 3$. А так как $A/\theta_i'\simeq A_i\leqslant A/\theta_i$, то $\theta_i'\varepsilon\theta_i$, $i=2,\ 3$.

Кодистрибутивность отношения τ доказывается аналогично. Лемма доказана.

Пусть $\varkappa$ — произвольное бинарное отношение на полурешетке L. Будем говорить, что подмножество $M\subseteq L$ *$\varkappa$-наследственно*, если $\forall a,\ b\in L(a\varkappa b,\ b\in M\Rightarrow a\in M)$.

Например, если $\geqslant$ — двойственный порядок полурешетки L, то $\geqslant$-наследственные подполурешетки в L совпадают с *фильтрами* полурешетки L.

Для любой полной решетки L и для любого бинарного отношения $\varkappa$ на L обозначим через $S_p(L, \varkappa)$ множество всех алгебраических $\varkappa$-наследственных подмножеств в L. Так как пересечение любого семейства алгебраических $\varkappa$-наследственных подмножеств является алгебраическим $\varkappa$-наследственным подмножеством, то $S_p(L, \varkappa)$ — полная решетка относительно включения.

Отметим, что решетки вида $S_p(L) = S_p(L, \approx)$, где $\approx$ есть отношение равенства на L, были введены авторами в работе [8] для описания одного класса решеток квазимногообразий. Напомним некоторые результаты из этой работы.

Пусть $\mathscr{P}$ — класс всех решеток квазимногообразий вида $L_q(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M} \models \forall xy(x \approx y)$.

Теорема 8.2 [8]. *Решетка L принадлежит классу $\mathscr{P}$ тогда и только тогда, когда L изоморфна решетке вида $S_p(A)$ для некоторой алгебраической решетки A.*

Для любого множества X обозначим через $T(X)$ решетку всех замкнутых нижних подполурешеток булевой решетки $P(X)$ относительно включения (см. замечание к предложению 2.5), и пусть $\mathscr{T}$ — класс всех решеток вида $T(X)$.

Теорема 8.3 [8]. *Класс $\mathbf{S}(\mathscr{P})$ замкнут относительно прямых произведений, т. е. $\mathbf{S}(\mathscr{P}) = \mathbf{SP}(\mathscr{P})$, и $\mathbf{S}(\mathscr{P}) = \mathbf{S}(\mathscr{T})$.*

Теорема 8.4 [8]. *Любая свободная решетка принадлежит классу $\mathbf{S}(\mathscr{P})$.*

Пусть $\mathscr{R}$ — класс всех решеток вида $S_p(A, \varkappa)$, где A — алгебраическая решетка, $\varkappa$ — кодистрибутивное отношение на A.

В силу теоремы 8.2 $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{R}$. Следующая лемма показывает, что класс $\mathscr{R}$ шире класса $\mathscr{P}$.

Лемма 8.5. *Если L — дистрибутивная коалгебраическая решетка, то $L \simeq S_p(M, \trianglelefteq)$, где M — двойственная L решетка, $\trianglelefteq$ — порядок на M. В частности, $L \in \mathscr{R}$.*

Доказательство. Действительно, если $B \in S_p(M, \trianglelefteq)$, то множество B совпадает с фильтром $[\bigwedge B)$, поэтому $S_p(M, \trianglelefteq) = \{[a) \mid a \in M\}$. Далее, для любых $a, b \in M$ имеем $[a) \subseteq [b) \Leftrightarrow b \trianglelefteq a \Leftrightarrow a \leqslant b$. Следовательно, отображение $a \to [a)$, $a \in L$, является изоморфизмом L на $S_p(M, \trianglelefteq)$. Лемма доказана.

Покажем теперь, что в определении $\mathscr{R}$-решетки бинарное отношение можно заменить предпорядком.

Лемма 8.6. *Пусть $\varkappa$ — кодистрибутивное отношение на полной решетке L. Тогда наименьший предпорядок $\bar{\varkappa}$, содержащий отношение $\varkappa$, кодистрибутивен и $S_p(L, \varkappa) = S_p(L, \bar{\varkappa})$.*

Доказательство. Пусть $a, b \in L$. Без труда проверяется, что $a\bar{\varkappa}b$ тогда и только тогда, когда $a = b$ либо

$$\exists n \geqslant 1 \ \exists c_0, \ldots, c_n \in L(a = c_0\varkappa c_1\varkappa \ldots \varkappa c_n = b).$$

Поэтому если $a\bar{\varkappa}(c \wedge b)$ и $a \neq (b \wedge c)$, то существуют элементы $c_i \in L$ такие, что

$$a = c_0\varkappa c_1\varkappa \ldots \varkappa c_n = (c \wedge b).$$

Так как отношение $\varkappa$ кодистрибутивно, то по индукции можно выбрать элементы $c_i', b_i' \in L$, удовлетворяющие условиям

$$c_i = c_i' \wedge b_i', \ c_i'\varkappa c_{i+1}', \ b_i'\varkappa b_{i+1}', \quad i = 0, \ldots, n-1, \ b_n' = b, \ c_n' = c.$$

Следовательно, $a = c_0' \wedge b_0'$ и $c_0'\bar{\varkappa}c$, $b_0'\bar{\varkappa}b$. Таким образом, $\bar{\varkappa}$ — кодистрибутивный предпорядок на L.

Докажем, что $S_p(L, \varkappa) = S_p(L, \bar{\varkappa})$. Так как $\varkappa \subseteq \bar{\varkappa}$, то $S_p(L, \bar{\varkappa}) \subseteq S_p(L, \varkappa)$. Обратно, пусть $M \in S_p(L, \varkappa)$ и $a\bar{\varkappa}b$ для некоторых элементов $a \in L$, $b \in M$. По определению, если $a \neq b$, то существуют элементы $c_i \in L$ такие, что $a = c_0\varkappa c_1\varkappa \ldots \varkappa c_n = b$. Так как множество M $\varkappa$-наследственно и $b \in M$, то $c_{n-1} \in M$; далее по индукции получаем, что $a \in M$. Следовательно, множество M $\bar{\varkappa}$-наследственно и $M \in S_p(L, \bar{\varkappa})$. Лемма доказана.

Лемма 8.7. *Пусть A — алгебраическая решетка и $\varkappa$ — кодистрибутивное отношение на A. Тогда $S_p(A, \varkappa) \leqslant S_p(A)$.*

Доказательство. По определению $S_p(A, \varkappa)$ — нижняя подполурешетка в $S_p(A)$. Пусть $B, C \in S_p(A, \varkappa)$. Обозначим через $+$ сумму в решетке $S_p(A)$. В силу следствия 1.4 работы [8] имеем $B + C = \{b \wedge c \mid b \in B, c \in C\}$. Покажем, что $B + C \in S_p(A, \varkappa)$, т. е. что множество $B + C$ $\varkappa$-наследственно. Пусть $z \in B + C$, $y \in A$ и $y\varkappa z$. Надо доказать, что $y \in B + C$. Так как $z = (b \wedge c)$ для некоторых элементов $b \in B$, $c \in C$ и отношение $\varkappa$ кодистрибутивно, то существуют элементы $b', c' \in A$ такие, что $b'\varkappa b$, $c'\varkappa c$ и $y = b' \wedge c'$. По условию множества B, C $\varkappa$-наследственны, поэтому $b' \in B$, $c' \in C$. Отсюда следует, что $y \in B + C$. Итак, $B + C$ — сумма множеств B и C в решетке $S_p(A, \varkappa)$. Лемма доказана.

§ 9. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕТОК КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ

Систему G из квазимногообразия $\mathfrak{R}$ назовем *$\mathfrak{R}$-определяющей*, если G предельно $\mathfrak{R}$-проективна и любое подквазимногообразие в $\mathfrak{R}$ порождается системами вида G/θ, где $\theta \in C_{\mathfrak{R}}(G)$.

Примером $\mathfrak{R}$-определяющей системы является $\mathfrak{R}$-свободная система счетного ранга; $\mathfrak{R}$-свободная система конечного ранга n тогда и только тогда является $\mathfrak{R}$-определяющей, когда любое подквазимногообразие в $\mathfrak{R}$ порождается не более чем n-порожденными системами, или, что равносильно, аксиоматический квазиранг (см. [4]) любого подквазимногообразия в $\mathfrak{R}$ не превосходит n.

Теорема 9.1. *Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольное квазимногообразие, G — некоторая $\mathfrak{R}$-определяющая система. Тогда*

$$L_q(\mathfrak{R}) \simeq S_p\left(C_{\mathfrak{R}}(G), \varepsilon\right),$$

где ε — отношение вложения на решетке $C_{\mathfrak{R}}(G)$.

Доказательство. Для любого квазимногообразия $\mathfrak{N} \in L_q(\mathfrak{R})$ полагаем $C(\mathfrak{N}) = C_{\mathfrak{N}}(G) = \{\theta \in C_{\mathfrak{R}}(G) \mid G/\theta \in \mathfrak{N}\}$.

а) $C(\mathfrak{N}) \in S_p\left(C_{\mathfrak{R}}(G), \varepsilon\right)$. Действительно, ввиду предложения 7.5 $C(\mathfrak{N})$ — алгебраическое подмножество в $C_{\mathfrak{R}}(G)$. Пусть $\theta_1, \theta_2 \in C_{\mathfrak{R}}(G)$, $\theta_1\varepsilon\theta_2$ и $\theta_2 \in C(\mathfrak{N})$. Тогда $G/\theta_2 \in \mathfrak{N}$ и $G/\theta_1 \leqslant G/\theta_2$, поэтому $G/\theta_1 \in \mathfrak{N}$, т. е. $\theta_1 \in C(\mathfrak{N})$. Следовательно, множество $C(\mathfrak{N})$ ε-наследственно.

б) Отображение $C: L_q(\mathfrak{R}) \to S_p\left(C_{\mathfrak{R}}(G), \varepsilon\right)$ разнозначно. В самом деле, пусть $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2 \in L_q(\mathfrak{R})$ и $\mathfrak{N}_1 \nsubseteq \mathfrak{N}_2$. Так как система G является $\mathfrak{R}$-определяющей, то существует система A такая, что $A \in \mathfrak{N}_1 \backslash \mathfrak{N}_2$ и $A \simeq G/\theta$ для некоторой конгруэнции $\theta \in C_{\mathfrak{R}}(G)$. Следовательно, $\theta \in C(\mathfrak{N}_1) \backslash C(\mathfrak{N}_2)$, т. е. $C(\mathfrak{N}_1) \nsubseteq C(\mathfrak{N}_2)$.

в) C является отображением на. Для произвольного $B \in S_p\left(C_{\mathfrak{R}}(G), \varepsilon\right)$ полагаем $\mathfrak{B} = \{G/\theta \mid \theta \in B\}$ и $\mathfrak{N} = \mathbf{Q}(\mathfrak{B})$. По определению $\mathfrak{N} \in L_q(\mathfrak{R})$ и $B \subseteq C(\mathfrak{N})$.

Докажем обратное включение. Пусть $\theta \in C(\mathfrak{N})$, $A = G/\theta$ и φ_θ — канонический гомоморфизм G на A. Тогда, выбрав в G произвольную систему порождающих $\{x_k | k \in K\}$, будем иметь $A = (b_k | k \in K)$, где $b_k = \varphi_\theta(x_k)$. По теореме 5.2 $\mathfrak{R} = \mathbf{L}_s\mathbf{P}_s(\mathfrak{B})$, поэтому

$$A \simeq \varinjlim \mathscr{A}, \tag{1}$$

где $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij} \rangle$ — надпрямой спектр, и

$$A_i \leqslant_s \prod_{j \in J_i} A_{ij}, A_{ij} \in \mathfrak{B},\ i \in I, j \in J_i. \tag{2}$$

Поскольку система G предельно $\mathfrak{R}$-проективна, то существуют $i_0 \in I$ и гомоморфизм $\psi : G \to A_{i_0}$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi_\theta"] & \\ A_{i_0} \arrow[rr, "\varphi_{i_0\infty}"'] & & A \end{tikzcd}$$

коммутативна. Если $\mathscr{A}_{I_0}$ — надпрямой спектр, получающийся из спектра $\mathscr{A}$ сужением на $I_0 = \{i \in I | i_0 \leqslant i\}$, то ввиду (1) $A \simeq \varinjlim \mathscr{A}_{I_0}$. Пусть далее $B_{i_0} = \psi(G)$ и $a_{i_0 k} = \psi(x_k)$, $k \in K$. По определению $B_{i_0} = (a_{i_0 k} | k \in K)$ и $\varphi_{i_0\infty}(a_{i_0 k}) = b_k$. Поэтому, в силу леммы 4.4, кортеж $\mathscr{B} = \langle I_0; B_i, \psi_{ij} \rangle$, где $B_i = (\varphi_{i_0 i}(a_{i_0 k}) | k \in K)$, ψ_{ij} — сужение φ_{ij} на B_i при $i, j \in I_0$, $i \leqslant j$, образует надпрямой спектр и

$$\varinjlim \mathscr{B} \simeq \varinjlim \mathscr{A}_{I_0} \simeq A. \tag{3}$$

Пусть θ_i — ядерная конгруэнция композиции гомоморфизмов

$$G \xrightarrow{\psi} B_{i_0} \xrightarrow{\psi_{i_0 i}} B_i. \tag{4}$$

По предложению 3.3 $B_i \simeq G/\theta_i$, следовательно, $\theta_i \in C_{\mathfrak{R}}(G)$. Так как для любых $i, j \in I_0$ существует $s \in I_0$ такой, что $i, j \leqslant s$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\psi"] & B_{i_0} \arrow[r, "\psi_{i_0 i}"] \arrow[d, "\psi_{i_0 j}"'] \arrow[dr, "\psi_{i_0 s}"] & B_i \arrow[d, "\psi_{is}"] \\ & B_j \arrow[r, "\psi_{js}"'] & B_s \end{tikzcd}$$

коммутативна, то $\{\theta_i | i \in I_0\}$ — направленное подмножество в $C_{\mathfrak{R}}(G)$. Следовательно, если

$$\overline{\theta} = \cup (\theta_i | i \in I_0), \tag{5}$$

то ввиду предложения 4.1 и условия (3) имеем $\theta \in C_{\mathfrak{R}}(G)$ и

$$G/\overline{\theta} \simeq A. \tag{6}$$

Из условия (2) следует, что $B_i \leqslant \prod_{j \in J_i} A_{ij}$, $i \in I_0$. Поэтому если $B_{ij} = \pi_{ij}(B_i)$, где π_{ij} — проектирование B_i в A_{ij}, $i \in I_0$, $j \in J_i$, то

$$B_i \leqslant_s \prod_{j \in J_i} B_{ij}. \tag{7}$$

Пусть θ_{ij} — ядерная конгруэнция композиции гомоморфизмов

$$G \xrightarrow{\psi} B_{i_0} \xrightarrow{\psi_{i_0 i}} B_i \xrightarrow{\pi_{ij}} B_{ij}. \tag{8}$$

Так как $G/\theta_{ij} \simeq B_{ij} \leqslant A_{ij}$, $A_{ij} \in \mathfrak{B}$ и множество B ε-наследственно, то $\theta_{ij} \in B$, $i \in I_0$, $j \in J_i$.

Далее, из определения гомоморфизмов (4), (8) и условия (7) получаем $\theta_i = \cap (\theta_{ij} | j \in J_i)$, $i \in I_0$. Поскольку B — алгебраическое подмножество в $C_{\mathfrak{R}}(G)$, то $\theta_i \in B$, $i \in I_0$, поэтому ввиду (5) $\overline{\theta} \in B$. Так как в силу условия (6) $G/\overline{\theta} \simeq A \simeq G/\theta$ и множество B ε-наследственно, то $\theta \in B$. Таким образом, $B = C(\mathfrak{R})$.

г) Отображение C сохраняет порядок. Из пп. б), в) следует, что для любого $B \in S_p(C_{\mathfrak{R}}(G), \varepsilon)$ имеет место равенство $C^{-1}(B) = \mathbf{Q}\{G/\theta | \theta \in B\}$. Поэтому если $B_1, B_2 \in S_p(C_{\mathfrak{R}}(G), \varepsilon)$ и $B_1 \subseteq B_2$, то $C^{-1}(B_1) \subseteq C^{-1}(B_2)$. С другой стороны, в силу определения C, если $\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_i \in L_q(\mathfrak{R})$, то $C(\mathfrak{R}_1) \subseteq C(\mathfrak{R}_2)$. Теорема доказана.

Следствие 9.2. *Если F — свободная система счетного ранга из квазимногообразия $\mathfrak{R}$, то*

$$L_q(\mathfrak{R}) \simeq S_p(C_{\mathfrak{R}}(F), \varepsilon),$$

где ε — отношение вложения на решетке $C_{\mathfrak{R}}(F)$.

Отметим, что выбор «хорошей» $\mathfrak{R}$-определяющей системы может значительно облегчить вычисление решетки $L_q(\mathfrak{R})$. Рассмотрим два примера.

Пример 9.3. а) Пусть $\mathfrak{M}$ — квазимногообразие алгебр сигнатуры $\langle f, g, e\rangle$ типа $\langle 1, 1, 0\rangle$, заданное квазитождествами

$$\forall x (fg(x) \approx gf(x) \approx x),$$

$$\forall x (f(x) \approx x \,\&\, g(x) \approx x \leftrightarrow x \approx e).$$

Пусть $N^0 = \langle \omega, \trianglelefteq \rangle$, где

$$n \trianglelefteq m \Leftrightarrow (m \text{ делит } n), \tag{9}$$

при этом считаем, что $0/n = 0$ для всех $n \in \omega$. В работе [22] доказано, что

$$L_q(\mathfrak{M}) \simeq S_\wedge(N^0), \tag{10}$$

где $S_\wedge(N^0)$ — решетка полных нижних подполурешеток в N^0.

Докажем формулу (10), используя теорему 9.1. Введем обозначения:

$$x^0 = x,\ x^{n+1} = f(x^n),\ x^{-(n+1)} = g(x^{-n}),\ n \geqslant 0,$$

$$C_n = F_{\mathfrak{M}}(x, x^n = x),$$

в частности, C_1 — единичная алгебра, $C_0 = \{x^n | n \in \mathbf{Z}\} \cup \{e\}$ — свободная алгебра в $\mathfrak{M}$ ранга 1.

Без труда проверяется, что любую алгебру $A \in \mathfrak{M}$ можно представить в виде $A = \cup (C_{n_i} | i \in I)$, и отображение $\varphi_i : A \to C_i$ по правилу

$$\varphi_i(a) = \begin{cases} a, \text{ если } a \in C_{n_i}, \\ e, \text{ если } a \notin C_{n_i}, \end{cases}$$

является гомоморфизмом; в частности, A аппроксимируется алгебрами вида C_n, $n \in \omega$. Отсюда следует, что любое подквазимногообразие в $\mathfrak{M}$ порождается 1-порожденными алгебрами, поэтому C_0 является $\mathfrak{M}$-определяющей алгеброй.

Определим конгруэнции $\theta_n \in \mathrm{Con}(C_0)$, $n \in \omega$, следующим образом:

$$\theta_0 = 0_{C_0},\ \theta_1 = 1_{C_0},$$

$$\theta_k = \{\langle x^m, x^n\rangle | m \equiv n (\mathrm{mod}\, k)\} \cup \{\langle e, e\rangle\},\ k \geqslant 2.$$

Поскольку других конгруэнций на C_0 нет и $\theta_k \subseteq \theta_s \Leftrightarrow k \trianglelefteq s$, то $C_{\mathfrak{M}}(C_0) \simeq \simeq N^0$. Поэтому, в силу изоморфизма $C_0/\theta_k \simeq C_k$, имеем $\langle m, n\rangle \in \varepsilon \Leftrightarrow \Leftrightarrow C_0/\theta_m \leqslant C_0/\theta_n \Leftrightarrow (m = n$ либо $m = 1)$. Отсюда, в силу теоремы 9.1, получаем

$$L_q(\mathfrak{M}) \simeq S_p(N^0, \varepsilon) \simeq S_p(N^0, =) \simeq S_p(N^0) \simeq S_\wedge(N^0).$$

б) Пусть $\mathfrak{A}$ — многообразие всех абелевых групп. Так как любая конечно порожденная абелева группа изоморфна прямой сумме циклических групп, то группа $\mathbf{Z}$ является $\mathfrak{A}$-определяющей. Без труда проверяется, что $\mathrm{Con}(\mathbf{Z}) \simeq \mathrm{Sub}(\mathbf{Z}) \simeq N^0$. Поэтому, в силу теоремы 9.1, имеем $L_q(\mathfrak{A}) \simeq S_\wedge(N^0, \varepsilon)$, где $S_\wedge(N^0, \varepsilon)$ — решетка полных нижних ε-наследственных подполурешеток в N^0. Так как

$$\langle n, m\rangle \in \varepsilon \Leftrightarrow \mathbf{Z}/(n) \leqslant \mathbf{Z}/(m) \Leftrightarrow (m \trianglelefteq n,\ mn \neq 0 \text{ либо } n = m = 0),$$

то $S_\wedge(N^0, \varepsilon)$ совпадает с решеткой полных нижних подполурешеток решетки N^0, в которых с каждым ненулевым числом содержатся все его делители.

Далее мы воспользуемся следующей конструкцией. Пусть L — произвольная решетка, I — ее идеал, $2 = \{0, 1\}$, $0 < 1$. Без труда проверяется, что множество $D(L, I) = \{\langle 0, a\rangle, \langle 1, b\rangle | a \in I, b \in L\}$ является подрешеткой в $2 \times L$ (см. рис. 9.1).

Пусть $F(N)$ — решетка фильтров решетки N положительных целых чисел относительно порядка, определенного условием (9). Так как N — дистрибутивная решетка и для любых A, $B \in F(N)$ имеет место равенство $A \vee B = \{c \in N | \exists a \in A \exists b \in B (c = a \wedge b)\}$, то $F_\omega(N) = \{A \in F(N) | |A| < \omega\}$ — идеал в $F(N)$. Теперь без труда проверяется, что $L_q(\mathfrak{A}) \simeq D(F(N), F_\omega(N))$.

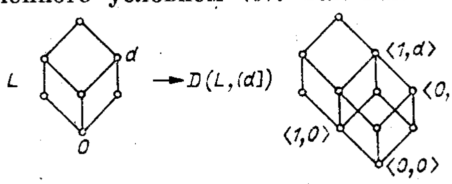


Рис. 9.1.

В частности, отсюда вытекает, что $L_q(\mathfrak{A})$ — дистрибутивная решетка, ибо решетка фильтров дистрибутивной решетки дистрибутивна.

Несколько слов о решетках $F(N)$, $F_\omega(N)$. Пусть $\omega + 1 = \{0, 1, \ldots, \omega\}$ — цепь относительно естественного порядка, $p_0 = 2$, $p_1 = 3, \ldots$ — последовательность всех простых чисел. Тогда отображение $\varphi : F(N) \to (\omega + 1)^\omega$ по правилу

$$(\varphi(A))(n) = \sup\{k \in \omega \mid p_n^k \in A\},\ A \in F(N),\ n \in \omega,$$

является изоморфизмом, и φ переводит $F_\omega(N)$ в идеал

$$\{f \in (\omega + 1)^\omega | \sup\{f(k) | k \in \omega\} < \omega\}.$$

Это, в частности, дает представление решетки $L_q(\mathfrak{A})$ в терминах бесконечных последовательностей, найденное А. А. Виноградовым [20].

Пример 9.3 б) показывает, что в теореме 9.1 отношение вложения нельзя, вообще говоря, заменить отношением изоморфизма. Действительно, отношение τ на $\mathbf{Z}$ совпадает с отношением равенства, следовательно,

$$S_p(\mathrm{Con}(\mathbf{Z}), \tau) \simeq S_p(N^0, \tau) \simeq S_p(N^0) \simeq S_\wedge(N^0).$$

Но ввиду следствия 5.4 работы [8] решетка $S_\wedge(N^0)$ не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству, поэтому она не изоморфна решетке $L_q(\mathfrak{A})$.

Оказывается, если рассматривать не произвольные $\mathfrak{K}$-определяющие системы, а только $\mathfrak{K}$-свободные системы счетного ранга, то теорему 9.1 можно усилить. Основой для этого является следующая

Лемма 9.4. *Пусть A, B — счетно порожденные системы и $A \leqslant B$. Тогда существует надпрямой спектр $\mathscr{B} = \langle \omega, C_n, \psi_{nm} \rangle$ такой, что все системы C_n счетно порождены, $C_n \in \mathbf{P}_s(B)$ и $A \simeq \varinjlim \mathscr{B}$.*

Доказательство. Для любых n, $m \in \omega$, $n \leqslant m$, пусть $\omega_n = \{n, n+1, \ldots\}$ и φ_{nm} — гомоморфизм B^{ω_n} на B^{ω_m}, определенный следующим образом: $(\varphi_{nm}(b))(k) = b(k)$, $b \in B^{\omega_n}$, $k \in \omega_m$. По определению $\mathscr{A} = \langle \omega, B^{\omega_n}, \varphi_{nm} \rangle$ — надпрямой спектр.

Пусть далее $A = (a_n | n \in \omega)$, $B = (b_n | n \in \omega)$. Для любой пары $\langle k, s \rangle \in \omega^2$ определим элемент $c_{ks} \in B^{\omega}$, полагая

$$c_{ks}(n) = \begin{cases} b_k, \text{ если } 0 \leqslant n \leqslant s, \\ a_k \text{ если } n > s. \end{cases}$$

Пусть C_0 — подсистема в B^{ω}, порожденная множеством $\{c_{ks} | \langle k, s \rangle \in \omega^2\}$. По определению $C_0 \leqslant_s B^{\omega}$, и для любого $c \in C_0$ существуют $k \in \omega$ и $a \in A$ такие, что $c(n) = a$ для всех $n \geqslant k$. Элемент a определен однозначно; если его обозначить через $d(c)$, то для любых $f \in \sigma^F$, $c_i \in C_0$, $i = 1, \ldots, m = \nu(f)$, будем иметь

$$f(d(c_1), \ldots, d(c_m)) = d(f(c_1, \ldots, c_m)). \tag{11}$$

Рассмотрим кортеж $\mathscr{B} = \langle \omega, C_n, \psi_{nm} \rangle$, где $C_n = \varphi_{0n}(C_0)$ и ψ_{nm} — сужение φ_{nm} на C_n при n, $m \in \omega$, $n \leqslant m$. По определению все системы C_n счетно порождены и $C_n \leqslant_s B^{\omega_n}$. Так как $\mathscr{A}$ — надпрямой спектр, то $\mathscr{B}$ — также надпрямой спектр.

Докажем, что $A \simeq \varinjlim \mathscr{B}$. Согласно определению $\varinjlim \mathscr{B} \simeq C_0/\theta$, где $\theta = \ker \psi_{0\infty}$. С другой стороны, ввиду формулы (11) отображение $c \to d(c)$, $c \in C_0$, является гомоморфизмом C_0 на A; в частности, $A \simeq C_0/\overline{\theta}$, где $\overline{\theta} = \ker d$. Осталось показать, что $\theta = \overline{\theta}$. Пусть $r \in \sigma^P$; $n = \nu(r)$ и $c_1, \ldots, c_n \in C_0$, тогда найдутся $k_i \in \omega$ и $a_i \in A$ такие, что $c_i(m) = a_i = d(c_i)$ для всех $m \geqslant k_i$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $k = \max(k_1, \ldots, k_n)$. Имеем

$$\langle c_1, \ldots, c_n \rangle \in \theta(r) \Leftrightarrow \exists\, m \geqslant k\,(r^{C_m}(\psi_{0m}(c_1), \ldots, \psi_{0m}(c_n))). \tag{12}$$

Так как на C_m функции $\psi_{0m}(c_i)$ постоянны и равны $d(c_i)$, то

$$(12) \Leftrightarrow r^A(d(c_1), \ldots, d(c_n)) \Leftrightarrow \langle c_1, \ldots, c_n \rangle \in \overline{\theta}(r).$$

Лемма доказана.

Теорема 9.5. *Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольное квазимногообразие, F — свободная система в $\mathfrak{R}$ счетного ранга. Тогда*

$$L_q(\mathfrak{R}) \simeq S_p(C_{\mathfrak{R}}(F), \tau),$$

где τ — отношение изоморфизма на решетке $C_{\mathfrak{R}}(F)$.

Доказательство. Согласно следствию 9.2 $L_q(\mathfrak{R}) \simeq S_p(C_{\mathfrak{R}}(F), \varepsilon)$, где ε — отношение вложения на $C_{\mathfrak{R}}(F)$. Докажем, что $S_p(C_{\mathfrak{R}}(F), \varepsilon) = S_p(C_{\mathfrak{R}}(F), \tau)$. Так как $\tau \subseteq \varepsilon$, то достаточно установить, что любое алгебраическое τ-наследственное подмножество $M \subseteq C_{\mathfrak{R}}(F)$ является ε-наследственным.

Пусть $\theta \in C_{\mathfrak{R}}(F)$, $\overline{\theta} \in M$ и $\theta \varepsilon \overline{\theta}$. Тогда системы $A = F/\theta$ и $B = F/\overline{\theta}$ счетно порождены и $A \leqslant B$. Следовательно, в силу леммы 9.4, существует надпрямой спектр $\mathscr{B} = \langle \omega, C_n, \psi_{nm} \rangle$ такой, что все системы C_n счетно порождены, $C_n \in \mathbf{P}_s(B)$ и $A \simeq \varinjlim \mathscr{B}$.

Пусть $C_0 \simeq F/\theta_0$, $\theta_0 \in C_{\mathfrak{R}}(F)$, ψ — канонический гомоморфизм F на C_0 и θ_n — ядерная конгруэнция композиции гомоморфизмов

$$F \xrightarrow{\psi} C_0 \xrightarrow{\psi_{0n}} C_n. \tag{13}$$

Так как подмножество $\{\theta_n | n \in \omega\}$ направлено в $C_{\mathfrak{R}}(F)$ и $F/\theta_n \simeq C_n$, то ввиду предложения 4.1 имеем $\widetilde{\theta} = \bigcup (\theta_n | n \in \omega) \in C_{\mathfrak{R}}(F)$ и $F/\widetilde{\theta} \simeq \varinjlim \mathscr{B}$. Следовательно, $A \simeq F/\theta \simeq \varinjlim \mathscr{B} \simeq F/\widetilde{\theta}$, отсюда $\widetilde{\theta}\tau\theta$.

Далее, поскольку $C_n \in \mathbf{P}_s(B)$, то

$$C_n \leqslant_s B^{I_n} \tag{14}$$

для некоторого множества I_n. Для любого $i \in I_n$ пусть π_{ni} — проектирование C_n на i-ю копию B, а θ_{ni} — ядерная конгруэнция композиции гомоморфизмов

$$F \xrightarrow{\Phi} C_0 \xrightarrow{\psi_{0n}} C_n \xrightarrow{\pi_{ni}} B. \tag{15}$$

Так как $F/\theta_{ni} \simeq B \simeq F/\overline{\theta}$, то $\theta_{ni}\tau\overline{\theta}$, и поскольку множество M τ-наследственно, то $\theta_{ni} \in M$, $n \in \omega$, $i \in I_n$. Из определения гомоморфизмов (13), (15) и условия (14) следует, что $\theta_n = \bigcap (\theta_{ni} | i \in I_n)$, $n \in \omega$. Поэтому также $\theta_n \in M$, $n \in \omega$, отсюда $\widetilde{\theta} \in M$. Поскольку $\theta\tau\widetilde{\theta}$, то $\theta \in M$.

Таким образом, множество M ε-наследственно. Теорема доказана.

§ 10. ТЕОРЕМА О СЖАТИИ

Напомним (см. § 8), что $\mathcal{Q}$ — класс всех решеток квазимногообразий; $\mathscr{P}$ — класс всех решеток вида $S_p(A)$, где A — алгебраическая решетка; $\mathscr{R}$ — класс всех решеток вида $S_p(A, \varkappa)$, где A — алгебраическая решетка, $\varkappa$ — кодистрибутивное отношение на A.

Теорема 10.1. *Имеют место строгие включения*

$$\mathscr{P} \subset \mathcal{Q} \subset \mathscr{R}, \tag{1}$$

и равенства

$$\mathbf{S}(\mathscr{P}) = \mathbf{S}(\mathcal{Q}) = \mathbf{S}(\mathscr{R}). \tag{2}$$

Доказательство. В силу теоремы 8.2 $\mathscr{P} \subseteq \mathcal{Q}$. Поскольку все $\mathscr{P}$-решетки являются точечными (предложение 3.1 из работы [8]), а 5-элементная немодулярная решетка $N_5 \in \mathcal{Q}$ неточечная, то $\mathscr{P} \subset \mathcal{Q}$. В силу теоремы 9.1 леммы 8.1 и следствия 7.6 справедливо включение $\mathcal{Q} \subseteq \mathscr{R}$. Пусть α — несчетный ординал, тогда по теореме 4.1 [8] $P(\alpha) \notin \mathcal{Q}$, а ввиду леммы 8.5 $P(\alpha) \in \mathscr{R}$, так что $\mathcal{Q} \subset \mathscr{R}$.

Из условия (1) следует, что $\mathbf{S}(\mathscr{P}) \subseteq \mathbf{S}(\mathcal{Q}) \subseteq \mathbf{S}(\mathscr{R})$. Пусть $S_p(A, \varkappa) \in \mathscr{R}$, тогда по лемме 8.7 $S_p(A, \varkappa) \leqslant S_p(A)$, отсюда, в силу теоремы 8.2, имеем $S_p(A, \varkappa) \in \mathbf{S}(\mathscr{P})$. Следовательно, $\mathbf{S}(\mathscr{R}) \subseteq \mathbf{S}(\mathscr{P})$, тем самым равенства (2) доказаны.

Следствие 10.2. *Класс $\mathbf{S}(\mathcal{Q})$ замкнут относительно прямых произведений, т. е. $\mathbf{S}(\mathcal{Q}) = \mathbf{SP}(\mathcal{Q})$.*

Следует из теоремы 8.3 и равенства (2).

Следствие 10.3. *Универсальные классы и квазимногообразия, порожденные классами $\mathscr{P}$, $\mathcal{Q}$ и $\mathscr{R}$, совпадают между собой, т. е. $\mathbf{V}(\mathcal{Q}) = \mathbf{Q}(\mathcal{Q}) = \mathbf{V}(\mathscr{P}) = \mathbf{Q}(\mathscr{P}) = \mathbf{V}(\mathscr{R}) = \mathbf{Q}(\mathscr{R})$.*

Доказательство. В силу следствия 2 теоремы 3 [11] и следствия 10.2 имеем $\mathbf{Q}(\mathcal{Q}) = \mathbf{SP}_u\mathbf{P}(\mathcal{Q}) = \mathbf{SP}_u\mathbf{SP}(\mathcal{Q}) = \mathbf{SP}_u\mathbf{S}(\mathcal{Q}) = \mathbf{SP}_u(\mathcal{Q}) = \mathbf{V}(\mathcal{Q})$. Осталось воспользоваться равенствами (2).

Следствие 10.4. *Имеют место равенства $\mathbf{S}(\mathcal{Q}) = \mathbf{S}(\mathscr{T})$ и $\mathbf{Q}(\mathcal{Q}) = \mathbf{Q}(\mathscr{T})$.*

Следует из теоремы 8.3 и теоремы 10.1 (определение класса $\mathscr{T}$ см. в § 8).

§ 11. ПРЕДПОЛНЫЕ ПОДРЕШЕТКИ РЕШЕТОК КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ

Здесь мы дадим описание класса $\mathscr{R}$ в терминах подрешеток $\mathscr{Q}$-решеток.

Напомним, что решетка L называется *непрерывной*, если L — полная решетка и

$$a \wedge (\vee C) = \vee(a \wedge c | c \in C)$$

для любого $a \in L$ и для любой цепи $C \subseteq L$. Например, любая алгебраическая решетка является непрерывной. Подмножество B полной решетки L называется *непрерывным* в L, если для любого элемента $a \in L$ имеет место равенство $a \wedge (\vee B) = \vee(a \wedge (\vee K) | K \in F(B))$, где $F(B)$ — множество всех конечных подмножеств в B. Ясно, что если подмножество B имеет наибольший элемент или конечно, то B непрерывно в L. Без труда проверяется (см. [6]), что полная решетка L непрерывна тогда и только тогда, когда любое подмножество в L непрерывно.

Подмножество M полной решетки L назовем *предполным*, если выполнены следующие условия:

п1) M имеет наибольший элемент и $\wedge A \in M$ для любого непустого подмножества $A \subseteq M$,

п2) $\vee B \in M$ для любого непрерывного в L, подмножества $B \subseteq M$.

Из определения следует, что предполное подмножество является подрешеткой в L и любая полная подрешетка в L предполна; если L — непрерывная решетка, то справедливо обратное утверждение: любая предполная подрешетка в L полна.

Согласно условию п1) предполная подрешетка в L является полной решеткой относительно индуцированного порядка, «бесконечные» суммы в которой, вообще говоря, не совпадают с суммами в L.

Лемма 11.1. *Если $L_1 \leqslant L_2 \leqslant L_3$ и L_i предполна в L_{i+1}, $i = 1, 2$, то L_1 предполна в L_3.*

Доказательство. Условие п1) выполнено автоматически. Докажем условие п2). Пусть подмножество $B \subseteq L_1$ непрерывно в L_3. Для любого $M \subseteq L_2$ пусть $\vee M$ — сумма в L_3, а $\sqcup M$ — сумма в L_2. Так как подрешетка L_2 предполна в L_3, то $\vee B = \sqcup B \in L_2$. Отсюда для любого $a \in L_2$ имеем

$$a \wedge (\sqcup B) \geqslant \sqcup (a \wedge (\sqcup K) | K \in F(B)) = \sqcup (a \wedge (\vee K) | K \in F(B)) =$$
$$= \vee (a \wedge (\vee K) | K \in F(B)) = a \wedge (\vee B) = a \wedge (\sqcup B).$$

Следовательно, неравенства можно заменить равенствами, и подмножество B непрерывно в L_2. Так как подрешетка L_1 предполна в L_2, то $\vee B \in L_1$. Лемма доказана.

Теорема 11.2. *Для произвольной решетки M следующие условия равносильны:*

а) *M — предполная подрешетка некоторой $\mathscr{P}$-решетки,*

б) *M — предполная подрешетка некоторой $\mathscr{Q}$-решетки,*

в) *$M \in \mathscr{R}$, т. е. $M \simeq S_p(A, \varkappa)$ для некоторой алгебраической решетки A и некоторого кодистрибутивного отношения $\varkappa$ на A.*

Доказательство. Так как $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{Q}$, то а) $\Rightarrow$ б).

в) $\Rightarrow$ а). Пусть A — произвольная алгебраическая решетка, $\varkappa$ — кодистрибутивное отношение на A и $M = S_p(A, \varkappa)$. По теореме 8.2 $S_p(A) \in \mathscr{P}$, а по лемме 8.7 M — подрешетка в $S_p(A)$. Докажем, что на самом деле M — предполная подрешетка в $S_p(A)$. Достаточно проверить условие п2). Пусть $B \subseteq M$ и B непрерывно в $S_p(A)$, пусть $\sqcup B$ — сумма в решетке $S_p(A)$.

Докажем, что множество $\sqcup B$ $\varkappa$-наследственно (отсюда будет следовать, что $\vee B \in M$). Пусть элементы a, $b \in A$ таковы, что $b \in \sqcup B$ и

$a\varkappa b$. Так как подмножество B непрерывно в $S_p(A)$, то

$$\{b, 1\} = \{b, 1\} \cap (\sqcup B) = \sqcup (\{b, 1\} \cap (\sqcup K) \mid K \in F(B)),$$

отсюда $b \in \sqcup K$ для некоторого $K \in F(B)$, $K = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. В силу леммы 1.4 [8] существуют $b_i \in \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $b = b_1 \wedge \ldots \wedge b_n$. Так как отношение $\varkappa$ кодистрибутивно, то $a = b_1' \wedge \ldots \wedge b_n'$ для некоторых $b_i' \varkappa b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Но множества β_i $\varkappa$-наследственны, значит, $b_i' \in \beta_i$, отсюда $a \in \beta_1 \sqcup \ldots \sqcup \beta_n \subseteq \sqcup B$, что и требовалось.

а) $\Rightarrow$ в). Пусть A — алгебраическая решетка, M — предполная подрешетка в $S_p(A)$. Докажем, что $M \in \mathcal{R}$. Пусть B — наибольший элемент в M. Так как $S_p(B)$ — полная подрешетка в $S_p(A)$, то ввиду леммы 11.1 M — предполная подрешетка в $S_p(B)$. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что $A \in M$.

Для любого $a \in A$ полагаем $\mu(a) = \cap (\mu \in M \mid a \in \mu)$. По определению $\mu(a) \in M$. Определим на решетке A отношение $\varkappa$ следующим образом: $a \varkappa b \Leftrightarrow \mu(a) \subseteq \mu(b) \Leftrightarrow a \in \mu(b)$.

Покажем, что $\varkappa$ — кодистрибутивное отношение на A. Пусть a, b_1, $b_2 \in A$ и $a \varkappa (b_1 \wedge b_2)$. Так как $b_1 \wedge b_2 \in \mu(b_1) \sqcup \mu(b_2) \in M$, то $a \in \mu(b_1 \wedge \wedge b_2) \subseteq \mu(b_1) \sqcup \mu(b_2)$. Отсюда, в силу леммы 1.4 [8], $a = b_1' \wedge b_2'$ для некоторых $b_i' \in \mu(b_i)$, $i = 1, 2$. Так как $b_i' \in \mu(b_i)$, то $b_i' \varkappa b_i$.

Покажем теперь, что $M \simeq S_p(A, \varkappa)$, т. е. для любого алгебраического подмножества $\beta \subseteq A$ справедливо условие: (β $\varkappa$-наследственно) $\Leftrightarrow \beta \in M$.

Пусть $\beta \in M$, a, $b \in A$, $a \varkappa b$ и $b \in \beta$. Тогда $\mu(a) \subseteq \mu(b) \subseteq \beta$, отсюда $a \in \beta$, т. е. β $\varkappa$-наследственно. Обратно, пусть β — алгебраическое $\varkappa$-наследственное подмножество в A. Тогда $\beta = \cup (\mu(b) \mid b \in \beta)$.

Покажем, что подмножество $B = \{\mu(b) \mid b \in \beta\} \subseteq M$ непрерывно в $S_p(A)$. Пусть $\alpha \in S_p(A)$, тогда, очевидно, $\alpha \cap (\sqcup B) \subseteq \sqcup (\alpha \cap (\sqcup K) \mid K \in F(B))$. Обратно, пусть $a \in \alpha \cap (\sqcup B)$. Так как

$$\alpha \cap (\sqcup B) = \alpha \cap (\sqcup (\mu(b) \mid b \in B)) = \alpha \cap (\cup (\mu(b) \mid b \in B)) = \alpha \cap \beta,$$

то $a \in \alpha \cap \mu(b)$ для некоторого $b \in B$, что и требовалось. Теорема доказана.

§ 12. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В силу теоремы 9.5 вопрос об описании решетки $L_q(\mathfrak{R})$ подквазимногообразий данного квазимногообразия $\mathfrak{R}$ сводится к следующим двум вопросам:

1) описанию решетки $C_{\mathfrak{R}}(F)$ конгруэнций $\mathfrak{R}$-свободной системы счетного ранга F;

2) решению алгебраической проблемы изоморфизма для системы F, т. е. описанию отношения изоморфизма τ на решетке $C_{\mathfrak{R}}(F)$.

Если по первому вопросу (например, в случае многообразий) существует достаточно обширная информация, то по второму почти ничего не известно.

Для «больших» многообразий второй вопрос представляется достаточно трудным. Естественно попытаться сначала решить этот вопрос для многообразий, решетки подмногообразий которых описаны и не очень сложны, например, для многообразия дваступенно нильпотентных групп (идемпотентных полугрупп, дистрибутивных решеток с псевдодополнениями). Отметим, что вопросы об описании решеток подквазимногообразий указанных многообразий обсуждались в литературе и пока не решены (см. [7, 21]).

В силу теоремы 9.1 сказанное выше остается справедливым, если $\mathfrak{R}$-свободную систему F заменить $\mathfrak{R}$-определяющей системой A, а отношение изоморфизма — отношением вложения на $C_{\mathfrak{R}}(A)$.

В связи с проблемой А. И. Мальцева [2] об описании класса всех решеток квазимногообразий особый интерес представляет следующий вопрос: описать пары $\langle A, \varkappa\rangle$, где A — алгебраическая решетка, $\varkappa$ — кодистрибутивный предпорядок на A, такие, что $A \simeq C_{\mathfrak{R}}(F)$ и $\varkappa$ совпадает с отношением изоморфизма на $C_{\mathfrak{R}}(F)$ для некоторого квазимногообразия $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}$-свободной системы F счетного ранга.

В работе [12] была высказана гипотеза о том, что квазимногообразие $Q(\mathcal{Q})$, порожденное классом $\mathcal{Q}$, определяется в классе всех решеток одним квазитождеством

$$\mathrm{SD}_{\vee} \rightleftharpoons \forall xyz(x \vee y \approx x \vee z \rightarrow x \vee y \approx x \vee (y \wedge z)).$$

До сих пор эта гипотеза не решена. В силу следствий 10.3 и 10.4 вопрос о нахождении базиса квазитождеств класса $\mathcal{Q}$ сводится к нахождению базиса квазитождеств одного из классов $\mathscr{P}$ либо $\mathscr{T}$, описание которых дано в чисто решеточных терминах.

Остается нерешенным также вопрос (см. [12]): верно ли, что класс $\mathbf{S}(\mathcal{Q})$ всех подрешеток $\mathcal{Q}$-решеток не аксиоматизируем? В силу следствия 10.2 этот вопрос равносилен следующему: будет ли класс $\mathbf{SP}(\mathscr{P})$ квазимногообразием?

Заметим, что решение указанных вопросов в значительной степени зависит от построения глубокой структурной теории для квазимногообразия решеток, определенного квазитождеством $\mathrm{SD}_{\vee}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мальцев А. И.** Математическая логика и общая теория алгебраических систем: Избранные труды, т. 2. М.: Наука, 1976.
2. **Мальцев А. И.** О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики.— В кн.: Труды Международного конгресса математиков: Москва, 1966. М.: Мир, 1968, с. 217—231.
3. **Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.** Математическая логика. М.: Наука, 1979.
4. **Мальцев И. А.** Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
5. **Grätzer G.** Universal algebra.— Berlin a. o.: Springer-Verlag, 1979.
6. **Grawley P., Dilworth R.** Algebraic theory of lattices. New Jersey: Prentice-Hall, 1973.
7. **Grätzer G.** General lattice theory.— Berlin: Akademie-Verlag, 1978.
8. **Горбунов В. А., Туманов В. И.** Об одном классе решеток квазимногообразий.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 1, с. 59—80.
9. **Jónsson B.** Congruence varieties.— Algebra Univers., 1980, v. 10, № 3, p. 355—394.
10. **Мальцев А. И.** Несколько замечаний о квазимногообразиях алгебраических систем.— Алгебра и логика, 1966, т. 5, № 3, с. 3—9.
11. **Будкин А. И., Горбунов В. А.** К теории квазимногообразий алгебраических систем.— Алгебра и логика, 1975, т. 14, № 2, с. 123—142.
12. **Горбунов В. А.** О решетках квазимногообразий.— Алгебра и логика, 1976, т. 15, № 4, с. 436—457.
13. **Grätzer G., Lakser H.** A note on implicational class generated by a class of structures.— Canad. Math. Bull., 1974, v. 16, № 4, p. 603—605.
14. **Kashiwagi T.** On implicational classes.— Math. Japonical, 1972, v. 17, № 1, p. 1—12.
15. **Fujiwara T.** On the construction of the least universal Horn class containing a given class.— Osaka J. Math., 1971, v. 8, № 3, p. 425—436.
16. **Platt C.** Iterated limits of universal algebras.— Algebra Univers., 1971, v. 1, № 2, p. 167—181.
17. **Когаловский С. Р.** О теореме Биркгофа.— Успехи мат. наук, 1965, т. 20, вып. 4, с. 206—207.
18. **Мальцев А. И.** Подпрямые произведения моделей.— Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 2, с. 264—266.
19. **Grätzer G., Schmidt E.** Characterizations of congruence lattices of abstract algebras.— Acta scient. Math., 1963, v. 24, p. 34—59.
20. **Виноградов А. А.** Квазимногообразия абелевых групп.— Алгебра и логика, 1965, т. 4, № 6, с. 15—19.
21. **Коуровская** тетрадь.— Новосибирск: изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1976.
22. **Горбунов В. А.** Покрытия в решетках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость.— Алгебра и логика, 1977, т. 10, № 5, с. 507—548.