ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ЛИНДОНА В МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ

Л. Л. МАКСИМОВА

В работе [1] было доказано, что существует лишь конечное число нормальных модальных логик, содержащих логику S4, в которых верна интерполяционная теорема Крейга. В [2] была доказана теорема Крейга для ряда предикатных модальных систем, а в [3, 4] — для пропозициональных модальных логик.

В настоящей работе мы рассмотрим более сильное свойство — интерполяционное свойство Линдона [5]. Мы покажем, что интерполяционным свойством Линдона обладают некоторые известные предикатные модальные системы, в том числе логики $K^{\text{п}}$, $\mathrm{K4}^{\text{п}}$, $\mathrm{S4}^{\text{п}}$, а также некоторые пропозициональные логики, содержащие S4, и ряд суперинтуиционистских логик. С другой стороны, существуют нормальные расширения логики S4, в которых верна теорема Крейга, но неверна теорема Линдона.

Напомним, что формулы предикатной модальной логики строятся из атомных формул с помощью связок $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\Box$, $\Diamond$ и кванторов $\forall$, $\exists$; к атомным формулам причисляем также **0** и **1**. Обычным образом можно определить *положительные* и *отрицательные* вхождения подформул и предикатных символов в формулу. Если α — любое множество формул, через $\Omega^+(\alpha)$ ($\Omega^-(\alpha)$) обозначим множество предикатных символов, имеющих положительные (соответственно отрицательные) вхождения в формулы из α. *Интерполяционной теоремой* (или *свойством*) *Линдона* в логике L называем предложение:

Если формула $(A \supset B)$ *входит в* L, *то существует такая формула* C, *что* $(A \supset C) \in L$, $(C \supset B) \in L$, $\Omega^+(C) \subseteq \Omega^+(A) \cap \Omega^+(B)$, $\Omega^-(C) \subseteq \Omega^-(A) \cap \Omega^-(B)$. Такую формулу C называем *интерполянтом Линдона* для формулы $(A \supset B)$.

§ 1. МОДАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

Через $K^{\text{п}}$ обозначаем предикатную модальную логику, аксиомы которой есть

а) аксиомы классического исчисления предикатов,

б) $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$,

правила вывода — обычные для классической логики предикатов, а также правило Гёделя $A/\Box A$. Далее,

$$T^{\text{п}} = K^{\text{п}} + (\Box A \supset A);$$

$$\mathrm{K4}^{\text{п}} = K^{\text{п}} + (\Box A \supset \Box\Box A),$$

$$\mathrm{S4}^{\text{п}} = T^{\text{п}} + \mathrm{K4}^{\text{п}}.$$

Мы докажем в этом параграфе, что в $K^{\text{п}}$, $T^{\text{п}}$, $\mathrm{K4}^{\text{п}}$, $\mathrm{S4}^{\text{п}}$ верна интерполяционная теорема Линдона.

Формулы, построенные из атомных формул и отрицаний атомных формул с помощью $\&$, $\vee$, $\Box$, $\Diamond$ $\forall$, $\exists$, будем называть *приведенными*.

Лемма 1. *Пусть* A — *произвольная формула исчисления* $K^{\text{п}}$. *Тогда* A *эквивалентна в* $K^{\text{п}}$ *некоторой приведенной формуле* A', *причем* $\Omega^+(A) = \Omega^+(A')$, $\Omega^-(A) = \Omega^-(A')$.

Для доказательства используются следующие эквивалентности исчисления $K^{\text{п}}$:

$$\neg\neg A \equiv A, \quad (A \supset B) \equiv (\neg A \vee B),$$

$$\neg(A \& B) \equiv (\neg A \vee \neg B), \quad \neg(A \vee B) \equiv (\neg A \& \neg B),$$

$$\neg\Box A \equiv \Diamond\neg A, \quad \neg\Diamond A \equiv \Box\neg A,$$
$$\neg(\forall x)A \equiv (\exists x)\neg A, \quad \neg(\exists x)A \equiv (\forall x)\neg A.$$

Для семейства формул α обозначим через $D(\alpha)$ множество всех предметных переменных и констант, входящих в α. Будем обозначать буквой $\mathfrak{L}$ (иногда с индексами) *язык*, состоящий из приведенных формул, т. е. множество всех приведенных формул A, удовлетворяющих условию: $\Omega^+(A) \subseteq \Omega^+(\mathfrak{L})$, $\Omega^-(A) \subseteq \Omega^-(\mathfrak{L})$, $D(A) \subseteq D(\mathfrak{L})$. Если α — множество приведенных формул, то через $\mathfrak{L}(\alpha)$ обозначаем наименьший язык, содержащий α. Язык $\mathfrak{L}'$ называется *несущественным расширением* языка $\mathfrak{L}$, если $D(\mathfrak{L}') \supseteq D(\mathfrak{L})$, $\Omega^+(\mathfrak{L}') = \Omega^+(\mathfrak{L})$, $\Omega^-(\mathfrak{L}') = \Omega^-(\mathfrak{L})$. Языки $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ называем *согласованными*, если $D(\mathfrak{L}_1) = D(\mathfrak{L}_2)$.

Зафиксируем любую предикатную модальную логику L, т. е. множество формул исчисления предикатов, содержащее все аксиомы и замкнутое относительно всех правил вывода исчисления $K^{\text{п}}$. Если α, β — множества формул, что $\alpha \vdash_L \beta$ означает, что существуют такие формулы $A_1, \ldots, A_k \in \alpha$, $B_1, \ldots, B_l \in \beta$, что $((A_1 \& \ldots \& A_k) \supset (B_1 \vee \ldots \vee B_l)) \in L$. Будем называть *$L$-теорией* языка $\mathfrak{L}$ любое множество $T \subseteq \mathfrak{L}$, удовлетворяющее условию:

$$A \in \mathfrak{L} \wedge T \vdash_L A \Rightarrow A \in T.$$

Множество $F \subseteq \mathfrak{L}$, удовлетворяющее двойственному условию:

$$A \in \mathfrak{L} \wedge A \vdash_L F \Rightarrow A \in F,$$

будем называть *L-котеорией* языка $\mathfrak{L}$. Через $\mathrm{Th}(\mathfrak{L}, L)$ будем обозначать множество всех L-теорий, а через $\mathrm{CTh}(\mathfrak{L}, L)$ — множество всех L-котеорий языка $\mathfrak{L}$.

Пусть $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ — согласованные языки, $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$, $\alpha \subseteq \mathfrak{L}_1$, $\beta \subseteq \mathfrak{L}_2$. Пару $\langle\alpha, \beta\rangle$ будем называть *L-отделимой* в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$, если существует такая формула $C \in \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$, то $\alpha \vdash_L C$ и $C \vdash_L \beta$. Заметим, что если $T \in \mathrm{Th}(\mathfrak{L}_1, L)$, $F \in \mathrm{CTh}(\mathfrak{L}_2, L)$, то пара $\langle T, F\rangle$ является L-неотделимой в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$ в том и только в том случае, когда $T \cap F = \varnothing$.

Пару $\langle T, F\rangle$ будем называть *L-насыщенной* в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$, если выполнены условия:

1) $T \in \mathrm{Th}(\mathfrak{L}_1, L)$, $F \in \mathrm{CTh}(\mathfrak{L}_2, L)$;
2) $T \cap F = \varnothing$, т. е. пара $\langle T, F\rangle$ L-неотделима в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$;
3) $(A \vee B) \in T \Rightarrow A \in T$ или $B \in T$;
4) $(\exists x)A(x) \in T \Rightarrow (\exists c \in D(\mathfrak{L}_1))(A(c) \in T)$;
5) $(A \& B) \in F \Rightarrow A \in F$ или $B \in F$;
6) $(\forall x)A(x) \in F \Rightarrow (\exists c \in D(\mathfrak{L}_2))(A(c) \in F)$.

В дальнейшем для краткости будем иногда при фиксированной логике L называть L-неотделимые (L-насыщенные) пары просто неотделимыми (насыщенными).

Лемма 2. *Пусть $\langle\alpha, \beta\rangle$ есть L-неотделимая пара в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. Тогда*

а) *если $\Diamond A_0 \in \alpha$, то $\langle\{A_0\} \cup \{A \mid \Box A \in \alpha\}, \{B \mid \Diamond B \in \beta\}\rangle$ есть L-неотделимая пара в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$;*

б) *если $\Box B_0 \in \beta$, то $\langle\{A \mid \Box A \in \alpha\}, \{B_0\} \cup \{B \mid \Diamond B \in \beta\}\rangle$ есть L-неотделимая пара в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$.*

Доказательство. а) Допустим, что

$$(A_0 \& A_1 \& \ldots \& A_k \supset C) \in L, \ (C \supset B_1 \vee \ldots \vee B_l) \in L$$

для некоторой формулы $C \in \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$, где $\Box A_1, \ldots, \Box A_k \in \alpha$; $\Diamond B_1, \ldots, \Diamond B_l \in \beta$. Тогда $(\Diamond A_0 \& \Box A_1 \& \ldots \& \Box A_k \supset \Diamond C) \in L$ и $(\Diamond C \supset \Diamond B_1 \vee \ldots \vee \Diamond B_l) \in L$, $\Diamond C \in \mathfrak{L}_0$, а значит, пара $\langle\alpha, \beta\rangle$ является L-отделимой в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$.

б) Допустим, что

$$(A_1 \& \ldots \& A_k \supset C) \in L, \ (C \supset B_0 \vee B_1 \vee \ldots \vee B_l) \in L,$$

где $C \in \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$; $\Box A_1, \ldots, \Box A_k \in \alpha$; $\Diamond B_1, \ldots, \Diamond B_l \in \beta$. Тогда $(\Box A_1 \& \ldots \& \Box A_k \supset \Box C) \in L$, $(\Box C \supset \Box B_0 \vee \Diamond B_1 \vee \ldots \vee \Diamond B_l) \in L$, $\Box C \in \mathfrak{L}_0$, т. е. пара $\langle \alpha, \beta \rangle$ является L-отделимой.

Лемма 3. *Любая L-неотделимая пара в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$, где $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ счетны, может быть расширена до L-насыщенной пары в $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$, где $\mathfrak{L}_i'$ есть счетное несущественное расширение $\mathfrak{L}_i$ для $i = 1, 2$.*

Доказательство. Пусть $\langle \alpha, \beta \rangle$ есть L-неотделимая пара в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. Расширим языки $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ до $\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2'$ соответственно, добавив в сигнатуру счетное множество новых констант $\{c_0, c_1, \ldots\}$. Заметим сразу, что $\langle \alpha, \beta \rangle$ есть L-неотделимая пара в $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$. В самом деле, если существует такая $C \in \mathfrak{L}_0' = \mathfrak{L}_1' \cap \mathfrak{L}_2'$, что $\alpha \vdash_L C$ и $C \vdash_L \beta$, то, заменяя новые константы переменными и связывая эти переменные кванторами общности, получим формулу $C' \in \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$ такую, что $\alpha \vdash_L C'$ и $C' \vdash_L \beta$.

Перенумеруем все формулы языков $\mathfrak{L}_1'$ и $\mathfrak{L}_2'$:

$$\mathfrak{L}_1' = \{A_0, A_1, \ldots\}, \mathfrak{L}_2' = \{B_0, B_1, \ldots\}.$$

Положим $T_0 = \alpha$, $F_0 = \beta$. Далее, на шаге $(2n+1)$ полагаем $F_{2n+1} = F_{2n}$ и, кроме того:

$T_{2n+1} = T_{2n} \cup \{A_n\}$, если пара $\langle T_{2n} \cup \{A_n\}, F_{2n} \rangle$ L-неотделима в $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$ и формула A_n не начинается с квантора $\exists$;

$T_{2n+1} = T_{2n} \cup \{A_n, A_n'(c_k)\}$, если пара $\langle T_{2n} \cup \{A_n\}, F_{2n} \rangle$ L-неотделима в $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$, $A_n = (\exists x) A_n'(x)$, c_k — первая константа, не входящая в формулы из $T_{2n} \cup \{A_n\} \cup F_{2n}$;

$T_{2n+1} = T_{2n}$, если пара $\langle T_{2n} \cup \{A_n\}, F_{2n} \rangle$ L-отделима.

На шаге $(2n+2)$ полагаем $T_{2n+2} = T_{2n+1}$ и, кроме того:

$F_{2n+2} = F_{2n+1}$, если пара $\langle T_{2n+1}, \{B_n\} \cup F_{2n+1} \rangle$ L-отделима в $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$;

$F_{2n+2} = F_{2n+1} \cup \{B_n, B_n'(c_k)\}$, если $\langle T_{2n+1}, F_{2n+1} \cup \{B_n\} \rangle$ L-неотделима, $B_n = (\forall x) B_n'(x)$ и c_k есть первая константа, не входящая в $T_{2n+1} \cup F_{2n+1} \cup \{B_n\}$;

$F_{2n+2} = F_{2n+1} \cup \{B_n\}$ в остальных случаях. Имеем $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots$, $F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots$.

Стандартным образом по индукции доказывается, что для любого n пара $\langle T_n, F_n \rangle$ является L-неотделимой в $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$.

Положим теперь

$$T = \{A \in \mathfrak{L}_1' \mid \exists n \, (T_n \vdash_L A)\},$$

$$F = \{B \in \mathfrak{L}_2' \mid \exists n \, (B \vdash_L F_n)\}$$

и покажем, что $\langle T, F \rangle$ есть L-насыщенная пара в $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$.

Очевидно, $T \in \mathrm{Th}(\mathfrak{L}_1', L)$, $F \in \mathrm{CTh}(\mathfrak{L}_2', L)$ и пара $\langle T, F \rangle$ L-неотделима в $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$.

По построению имеем

а) для любой формулы $A \in \mathfrak{L}_1'$:

$A \in T \Leftrightarrow \langle T \cup \{A\}, F \rangle$ есть L-неотделимая пара,

б) для любой формулы $B \in \mathfrak{L}_2'$:

$B \in F \Leftrightarrow \langle T, \{B\} \cup F \rangle$ есть L-неотделимая пара.

Действительно, пусть $A = A_k$. Тогда из неотделимости пары $\langle T \cup \{A\}, F \rangle$ следует неотделимость пары $\langle T_{2k} \cup \{A\}, F_{2k} \rangle$, поэтому $A \in T_{2k+1} \subseteq T$. С другой стороны, из $A \in T$ следует неотделимость пары $\langle T \cup \{A\}, F \rangle$ ввиду неотделимости пары $\langle T, F \rangle$. Аналогично доказывается б).

Пусть теперь $(A \vee B) \in T$. Допустим, что $A \notin T$, $B \notin T$. Тогда пары $\langle T \cup \{A\}, F\rangle$ и $\langle T \cup \{B\}, F\rangle$ являются отделимыми, поэтому

$$T, \ A \vdash_L C_1 \vdash_L F \ \text{ и } \ T, \ B \vdash_L C_2 \vdash_L F$$

для некоторых $C_1, C_2 \in \mathfrak{L}_0' = \mathfrak{L}_1' \cap \mathfrak{L}_2'$. Отсюда

$$T, A \vee B \vdash_L C_1 \vee C_2 \vdash_L F, \ C_1 \vee C_2 \in \mathfrak{L}_0',$$

т. е. пара $\langle T, F\rangle$ является отделимой, вопреки доказанному. Таким образом, имеем $(A \vee B) \in T \Rightarrow (A \in T$ или $B \in T)$. Аналогично доказывается $(A \,\&\, B) \in F \Rightarrow (A \in F$ или $B \in F)$.

Наконец, пусть $(\exists x)A(x) \in T$, $(\exists x)A(x) = A_n$. Тогда пара $\langle T_{2n} \cup \cup \{A_n\}, F_{2n}\rangle$ является неотделимой; по построению $A(c_k) \in T_{2n+1} \subseteq T$ для некоторого k. Аналогично проверяется п. 6) определения насыщенной пары. Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Пусть L — любая из логик $K^{\text{п}}$, $T^{\text{п}}$, $K4^{\text{п}}$, $S4^{\text{п}}$ и пусть $(A_0 \supset B_0) \in L$. Тогда существует такая формула C, что $(A_0 \supset C) \in L$, $(C \supset B_0) \in L$ и*

$$\Omega^+(C) \subseteq \Omega^+(A_0) \cap \Omega^+(B_0), \ \Omega^-(C) \subseteq \Omega^-(A_0) \cap \Omega^-(B_0).$$

Доказательство. Допустим, что $(A_0 \supset B_0) \in L$ и не существует интерполянта C с указанными свойствами. Построим такую счетную семантическую модель $\langle W, R, D, \Vdash\rangle$, в которой опровергается формула $(A_0 \supset B_0)$.

Можем считать, ввиду леммы 1, что A_0, B_0 — приведенные формулы.

Пара $\langle\{A_0\}, \{B_0\}\rangle$ является L-неотделимой в $(\mathfrak{L}_1^0, \mathfrak{L}_2^0)$, где $\Omega^+(\mathfrak{L}_1^0) = \Omega^+(A_0), \Omega^-(\mathfrak{L}_1^0) = \Omega^-(A_0)$, $\Omega^+(\mathfrak{L}_2^0) = \Omega^+(B_0), \Omega^-(\mathfrak{L}_2^0) = \Omega^-(B_0), D(\mathfrak{L}_1^0) = D(\mathfrak{L}_2^0) = D(A_0 \supset B_0)$.

По лемме 3 пару $\langle\{A_0\}, \{B_0\}\rangle$ можно расширить до L-насыщенной пары $\langle T_0, F_0\rangle$ в $(\mathfrak{L}_1^*, \mathfrak{L}_2^*)$, где $\mathfrak{L}_i^*$ есть счетное несущественное расширение $\mathfrak{L}_i^0$ $(i = 1, 2)$. Полагаем

$$W_0 = \{\langle T_0, F_0\rangle\}.$$

Предположим, что W_k уже построено и все элементы W_k являются насыщенными парами в подходящих счетных языках. Пусть $\langle T, F\rangle \in W_k$ — любая насыщенная пара в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. Для любой формулы $\Diamond A \in T$ добавляем к W_k насыщенную пару $\langle T', F'\rangle$ в подходящих счетных языках $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$ такую, что $T' \supseteq \{A\} \cup \{B \mid \Box B \in T\}$, $F' \supseteq \{B \mid \Diamond B \in F\}$, $D(\mathfrak{L}_1') = D(\mathfrak{L}_2') \subseteq D(\mathfrak{L}_1) = D(\mathfrak{L}_2)$, $\mathfrak{L}_i'$ есть несущественное расширение $\mathfrak{L}_i$. Кроме того, для любой формулы $\Box B \in F$ добавляем насыщенную пару $\langle T', F'\rangle$ в подходящих счетных $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$ такую, что $T' \supseteq \{A \mid \Box A \in T\}$, $F' \supseteq \{B\} \cup \cup \{A \mid \Diamond A \in F\}$, $\mathfrak{L}_i'$ есть несущественное расширение $\mathfrak{L}_i$. Такие пары $\langle T', F'\rangle$ существуют в силу лемм 2 и 3. Проводя построение для всех $\langle T, F\rangle \in W_k$, получаем множество $W_{k+1} \supseteq W_k$. Заметим, что так как все языки счетны, для любой $\langle T, F\rangle \in W_k$ добавляется не более чем счетное множество пар. Поэтому все W_k счетны. Полагаем, наконец, $W = \bigcup_{k<\omega} W_k$.

Если $\langle T, F\rangle \in W$ — насыщенная в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$, то

$$D(\langle T, \ F\rangle) \leftrightharpoons D(\mathfrak{L}_1) = D(\mathfrak{L}_2),$$

$$\langle T, F\rangle R \langle T', F'\rangle \leftrightharpoons D(\langle T, F\rangle) \subseteq D(\langle T', F'\rangle) \ \wedge$$

$$\wedge \ (\forall A \in \mathfrak{L}_1)(\Box A \in T \Rightarrow A \in T') \ \wedge \ (\forall B \in \mathfrak{L}_2)(\Diamond B \in F \Rightarrow B \in F').$$

Если $\langle T, F\rangle \in W$, P — n-местный предикатный символ в $\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2$,

$c_1, \ldots, c_n \in D(\langle T, F\rangle)$, то полагаем

$$\langle T, F\rangle \Vdash P(c_1, \ldots, c_n) \rightleftharpoons (P(c_1, \ldots, c_n) \in T \text{ или } \neg P(c_1, \ldots, c_n) \in F).$$

Тогда $\mathfrak{W} = \langle W, R, D, \Vdash\rangle$ есть семантическая модель логики $K^{\text{п}}$.

Если $L = T^{\text{п}} = K^{\text{п}} + (\Box A \supset A)$, то отношение R рефлексивно. В самом деле, так как $\Box A \vdash_{T^{\text{п}}} A$ и $B \vdash_{T^{\text{п}}} \Diamond B$, имеем для любой $\langle T, F\rangle W \in$:

$$\Box A \in T \Rightarrow A \in T, \quad \Diamond B \in F \Rightarrow B \in F.$$

Поэтому все аксиомы логики $L = T^{\text{п}}$ общезначимы в $\mathfrak{W}$.

Если $L = \text{K}4^{\text{п}} = K^{\text{п}} + (\Box A \supset \Box\Box A)$, то отношение R транзитивно. В самом деле, $\Box A \vdash_L \Box\Box A$ и $\Diamond\Diamond B \vdash_L \Diamond B$. Поэтому для любых $\langle T, F\rangle$, $\langle T', F'\rangle$, $\langle T'', F''\rangle \in W$, таких что $\langle T, F\rangle R \langle T', F'\rangle$ и $\langle T', F'\rangle R \langle T'', F''\rangle$, имеем:

$$D(\langle T, F\rangle) \subseteq D(\langle T', F'\rangle) \subseteq D(\langle T'', F''\rangle),$$
$$\Box A \in T \Rightarrow \Box\Box A \in T \Rightarrow \Box A \in T' \Rightarrow A \in T'',$$
$$\Diamond B \in F \Rightarrow \Diamond\Diamond B \in F \Rightarrow \Diamond B \in F' \Rightarrow B \in F'',$$

т. е. $\langle T, F\rangle R \langle T'', F''\rangle$. Значит, в этом случае аксиома $\Box A \supset \Box\Box A$ общезначима в $\mathfrak{W}$.

Из доказанного выше следует, что при $L = \text{S}4^{\text{п}}$ построенная модель $\mathfrak{W}$ является моделью для $\text{S}4^{\text{п}}$.

Докажем теперь, что формула $(A_0 \supset B_0)$ опровергается в $\mathfrak{W}$; более точно, $\langle T_0, F_0\rangle \Vdash A_0$ и неверно $\langle T_0, F_0\rangle \Vdash B_0$. Это сразу вытекает из следующей леммы.

Лемма 4. *Пусть $\langle T, F\rangle \in W$ есть L-насыщенная пара в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. Тогда*

а) $(\forall A \in \mathfrak{L}_1)(A \in T \Rightarrow \langle T, F\rangle \Vdash A)$,

б) $(\forall B \in \mathfrak{L}_2)(B \in F \Rightarrow$ неверно $\langle T, F\rangle \Vdash B)$.

Доказательство а). Индукцией по построению приведенной формулы A. Для атомной формулы A — по определению. Пусть A есть отрицание атомной формулы, $A = \neg P(c_1, \ldots, c_n)$. Тогда из $A \in T$ следует $P(c_1, \ldots, c_n) \notin T$, в противном случае было бы $T \vdash_L \mathbf{0} \vdash_L F$, т. е. пара $\langle T, F\rangle$ была бы L-отделимой. Кроме того, $A \notin F$ ввиду насыщенности пары $\langle T, F\rangle$. Поэтому неверно $\langle T, F\rangle \Vdash P(c_1, \ldots, c_n)$), $\langle T, F\rangle \Vdash \neg P(c_1, \ldots, c_n)$.

Пусть $A = A_1 \& A_2 \in T$. Тогда $T \vdash_L A_1$ и $T \vdash_L A_2$, а значит, $A_1 \in T$, $A_2 \in T$. По индукционному предположению $\langle T, F\rangle \Vdash A_1 \& A_2$.

Пусть $A = A_1 \vee A_2 \in T$. Тогда $A_1 \in T$ или $A_2 \in T$ ввиду насыщенности $\langle T, F\rangle$. По индукционному предположению $\langle T, F\rangle \Vdash A_1 \vee A_2$. Аналогично рассматривается случай $A = (\exists x)A_1$.

Пусть $A = (\forall x)A_1(x)$. Тогда $A_1(c) \in T$ для любой $c \in D(\mathfrak{L}_1)$, так как $T \vdash_L A_1(c)$ и $A_1(c) \in \mathfrak{L}_1$. По индукционному предположению имеем $\langle T, F\rangle \Vdash A_1(c)$ для любой $c \in D(\langle T, F\rangle)$, а значит, $\langle T, F\rangle \Vdash (\forall x)A_1(x)$.

Пусть $A = \Box A_1 \in T$. Тогда для любой $\langle T', F'\rangle$ такой, что $\langle T, F\rangle R \langle T', F'\rangle$, имеем $A_1 \in T'$, а значит, $\langle T', F'\rangle \Vdash A_1$. Поэтому $\langle T, F\rangle \Vdash \Box A_1$.

Пусть, наконец, $A = \Diamond A_1 \in T$. По построению модели имеем $\langle T, F\rangle \in W_k$ для некоторого k. Тогда существует пара $\langle T', F'\rangle \in W_{k+1} \subseteq W$ такая, что $\langle T, F\rangle R \langle T', F'\rangle$ и $A_1 \in T'$. По индукционному предположению $\langle T', F'\rangle \Vdash A_1$, а значит, $\langle T, F\rangle \Vdash \Diamond A_1$. Лемма 4 а) доказана.

Доказательство п. б) проводится аналогично, индукцией по построению приведенной формулы B.

Таким образом, при $L = K^{\text{п}}$, $T^{\text{п}}$, $\text{K}4^{\text{п}}$, $\text{S}4^{\text{п}}$ все верные в L формулы общезначимы в построенной модели $\mathfrak{W}$, а формула $(A_0 \supset B_0)$ опровергается в $\mathfrak{W}$. Следовательно, $(A_0 \supset B_0) \notin L$. Теорема 1 доказана.

§ 2. ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ, СОДЕРЖАЩИЕ S4, И СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКИЕ ЛОГИКИ

Очевидно, если предикатная модальная логика обладает интерполяционным свойством Линдона, то и ее пропозициональная часть тоже обладает этим свойством. Интерполяционная теорема Линдона в пропозициональной логике L формулируется точно так же, как и в предикатной системе; под $\Omega^+(\alpha)$ (соответственно $\Omega^-(\alpha)$) следует, естественно, понимать множество пропозициональных переменных, имеющих положительные (соответственно отрицательные) вхождения в формулы из α.

Используя обозначения из [4, 6], обозначим через $\Gamma(L_5, 1, 1)$ логику, которая характеризуется двухэлементной шкалой $\langle\{0, 1\}, R\rangle$, где $xRy \leftrightharpoons x \leqslant y$.

Теорема 2. *Логика* $\Gamma(L_5, 1, 1)$ *обладает интерполяционным свойством Линдона.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Точно так же, как и в § 1, для данной логики мы можем определить понятия L-неотделимой и L-насыщенной пары, опуская пункты, относящиеся к кванторам, и доказать леммы 2 и 3. Далее, заметим, что формула $(\Box\Diamond A \equiv \Diamond\Box A)$ верна в $\Gamma(L_5, 1, 1)$, и докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть* $L \supseteq S4$, $L \ni (\Box\Diamond A \equiv \Diamond\Box A)$ *и* $\langle T, F\rangle$ *есть* L-*насыщенная пара в* $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. *Тогда пара* $\langle T^*, F^*\rangle$, *где* $T^* = \{A \mid \Box\Diamond A \in T\}$, $F^* = \{B \mid \Diamond\Box B \in F\}$ *является* L-*насыщенной в* $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$ *и, сверх того, удовлетворяет для любых* $A \in \mathfrak{L}_1$, $B \in \mathfrak{L}_2$ *условиям*:

а) $A \in T^* \Leftrightarrow \Box A \in T^* \Leftrightarrow \Diamond A \in T^*$,

б) $B \in F^* \Leftrightarrow \Box B \in F^* \Leftrightarrow \Diamond B \in F^*$,

в) $\Box A \in T \Rightarrow A \in T^*$, $\Diamond B \in F \Rightarrow B \in F^*$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что T^* есть L-теория в $\mathfrak{L}_1$, а F^* есть L-котеория в $\mathfrak{L}_2$. Допустим, что $\langle T^*, F^*\rangle$ L-отделима в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. Тогда существует $C \in \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$ такая, что $T^* \vdash_L C$ и $C \vdash_L F^*$. Следовательно, для некоторых $A_1, \ldots, A_k \in T^*$, $B_1, \ldots, B_l \in F^*$ имеем $(A_1 \& \ldots \& A_k \supset C) \in L$ и $(C \supset B_1 \vee \ldots \vee B_l) \in L$. Отсюда $\Box\Diamond A_i \in T$, $\Diamond\Box B_j \in F$ $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, l)$ и

$$(\Box\Diamond(A_1 \& \ldots \& A_k) \supset \Box\Diamond C) \in L, \quad (\Diamond\Box C \supset \Diamond\Box(B_1 \vee \ldots \vee B_l)) \in L.$$

Учитывая $(\Box\Diamond(A_1 \& \ldots \& A_k)) \equiv (\Box\Diamond A_1 \& \ldots \& \Box\Diamond A_k) \in L$, $(\Box\Diamond C \equiv \Diamond\Box C) \in L$, $(\Diamond\Box(B_1 \vee \ldots \vee B_l) \equiv (\Diamond\Box B_1 \vee \ldots \vee \Diamond\Box B_l)) \in L$, получаем, что пара $\langle T, F\rangle$ отделима формулой $\Box\Diamond C \in \mathfrak{L}_0$, вопреки условию. Таким образом, пара $\langle T^*, F^*\rangle$ является L-неотделимой. Далее,

$$(A \vee B) \in T^* \Rightarrow \Box\Diamond(A \vee B) \in T \Rightarrow (\Box\Diamond A \vee \Box\Diamond B) \in T \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\Box\Diamond A \in T \text{ или } \Box\Diamond B \in T) \Rightarrow (A \in T^* \text{ или } B \in T^*).$$

Аналогично $(A \& B) \in F^* \Rightarrow (A \in F^*$ или $B \in F^*)$. Значит, пара $\langle T^*, F^*\rangle$ — насыщенная в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. Условия а) и б) вытекают из определения T^*, F^* и соотношений $(\Box\Box A \equiv \Box A) \in L$, $(\Diamond\Diamond A \equiv \Diamond A) \in L$, $(\Box\Diamond\Box A \equiv \Box\Diamond A) \in L$, $(\Diamond\Box\Diamond A \equiv \Diamond\Box A) \in L$.

Заметим, наконец, что

$$\Box A \in T \Rightarrow \Box\Diamond A \in T \Rightarrow A \in T^*,$$
$$\Diamond B \in F \Rightarrow \Diamond\Box B \in F \Rightarrow B \in F^*.$$

Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим следующую модель $\mathfrak{M} = \langle W, R, \Vdash\rangle$: $W = \{\langle T_0, F_0\rangle, \langle T_0^*, F_0^*\rangle\}$, где пара $\langle T_0, F_0\rangle$ определяется, как в доказательстве теоремы 1, и для $\pi_0, \pi_1 \in W : \pi_0 R \pi_1 \leftrightharpoons (\pi_0 = \pi_1$ или $\pi_0 = \langle T_0, F_0\rangle, \pi_1 = \langle T^*, F_0^*\rangle)$. Для $\langle T, F\rangle \in W$ и пропозициональной переменной $P \in \mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2$ полагаем

$$\langle T, F\rangle \Vdash P \leftrightharpoons (P \in T \text{ или } \neg P \in F).$$

Очевидно, $\mathfrak{W}$ есть модель логики $\Gamma(L_5, 1, 1)$.

Докажем теперь, что для нашей модели справедлива лемма, аналогичная лемме 4.

Лемма 6. *Пусть* $A \in \mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}(T_0)$, $B \in \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}(F_0)$. *Тогда для любой* $\langle T, F\rangle \in W$:

а) $A \in T \Rightarrow \langle T, F\rangle \Vdash A$,

б) $B \in F \Rightarrow \langle T, F\rangle \Vdash B$.

Доказательство вполне аналогично доказательству леммы 4, за исключением случаев $A = \Diamond A_1$ и $B = \Box B_1$. Рассмотрим эти случаи. Допустим, что $A = \Diamond A_1 \in T$ и утверждение а) верно для формулы A_1. Ввиду $(\Diamond A_1 \equiv (A_1 \vee \Diamond \Box A_1)) \in \Gamma(L_5, 1, 1)$ имеем $A_1 \in T$ или $\Diamond \Box A_1 \in T$; во втором случае получаем $\Box \Diamond A_1 \in T$ и $A_1 \in T^*$. Так как $T_0^{**} = T_0^*$, $F_0^{**} = F_0^*$, ввиду леммы 5 а, б, то множество W замкнуто относительно операции *. Таким образом, получаем

$$\langle T, F\rangle \in W \wedge \Diamond A_1 \in T \Rightarrow (\exists \langle T', F'\rangle)(\langle T, F\rangle R \langle T', F'\rangle \wedge A_1 \in T').$$

Учитывая индукционное предположение, заключаем, что для любой $\langle T, F\rangle \in W$

$$\Diamond A_1 \in T \Rightarrow \langle T, F\rangle \Vdash \Diamond A_1.$$

Для случая $B = \Box B_1$ надо использовать соотношение

$$(\Box B_1 \equiv (B_1 \& \Box \Diamond B_1)) \in \Gamma(L_5, 1, 1).$$

Из леммы 6 и построения модели сразу следует, что неверно $\langle T_0, F_0\rangle \Vdash A_0 \supset B_0$, что и требовалось. Теорема доказана.

Обозначим через $F_1(P)$ формулу $\Box(\Box \Diamond P \supset \Diamond \Box P)$, $F_2(P) \leftrightharpoons \Box(\Box \Diamond P \equiv \Diamond \Box P)$, $F_3(P) \leftrightharpoons \Box(\Box P \equiv \Diamond P)$. В соответствии с [1, 4, 6] обозначаем

$$\Gamma(\mathrm{Int}, 1, \omega) = \mathrm{S4} + F_1(P),$$
$$\Gamma(\mathrm{KC}, 1, \omega) = \mathrm{S4} + F_2(P),$$
$$\Gamma(\mathrm{Cl}, 1, 0) = \mathrm{S4} + F_3(P).$$

Мы выведем интерполяционную теорему Линдона для этих трех логик из интерполяционного свойства для логики S4.

Лемма 7. *Для любой формулы* A, *все переменные которой входят в список* $P_1, \ldots, P_n$, *и для* $i = 1, 2, 3$ *имеем*

$$F_i(P_1), \ldots, F_i(P_n) \vdash_{\mathrm{S4}} F_i(A).$$

Напомним, что $A_1, \ldots, A_n \vdash_L B$ есть сокращение для $(A_1 \& \ldots \& A_n \supset B) \in L$. Для доказательства леммы достаточно заметить, что для $i = 1, 2, 3$ справедливы соотношения:

$$F_i(P) \vdash_{\mathrm{S4}} F_i(\neg P),$$
$$F_i(P), F_i(Q) \vdash_{\mathrm{S4}} F_i(P \& Q),$$
$$\vdash_{\mathrm{S4}} F_1(P),$$
$$F_2(P) \vdash_{\mathrm{S4}} F_2(\Box P),\ F_3(P) \vdash_{\mathrm{S4}} F_3(\Box P).$$

Из леммы 7 вытекает

Лемма 8. *Для любой формулы* A, *содержащей лишь переменные* $P_1, \ldots, P_n$, *и для* $i = 1, 2, 3$:

$$A \in \mathrm{S4} + F_i(P) \Leftrightarrow \vdash_{\mathrm{S4}} F_i(P_1) \& \ldots \& F_i(P_n) \supset A.$$

Доказательство. Пусть $A \in L = S4 + F_i(P)$. Тогда существует вывод $A_1, \ldots, A_k = A$ формулы A из аксиом логики $S4 + F_i(P)$. Можно преобразовать его в бесподстановочный вывод формулы A, т. е. такой вывод, где правило подстановки применяется лишь к аксиомам. Полученный вывод можно рассматривать как бесподстановочный вывод в S4 формулы A из формул $F_i(B_1), \ldots, F_i(B_m)$ для подходящих $B_1, \ldots, B_m$, причем можно предполагать, что $B_1, \ldots, B_m$ не содержат переменных, отличных от $P_1, \ldots, P_n$. Учитывая, что формула $F_i(P)$ начинается с символа $\Box$, получаем $\vdash_{S4} F_i(B_1) \& \ldots \& F_i(B_m) \supset A$. Из леммы 7 следует $\vdash_{S4} F_i(P_1) \& \ldots \& F_i(P_n) \supset A$.

Лемма 9. *Для любых формул A, B обозначим через $[A]^P_B$ результат подстановки B вместо P в A. Тогда*

а) *если P входит в A лишь положительно, то*

$$\vdash_{S4} A \supset [A]^P_1 \text{ и } \vdash_{S4} [A]^P_0 \supset A;$$

б) *если P входит в A лишь отрицательно, то*

$$\vdash_{S4} A \supset [A]^P_0 \text{ и } \vdash_{S4} [A]^P_1 \supset A.$$

Доказательство. Ввиду леммы 1 можем считать формулу A приведенной. Индукцией по построению формулы A нетрудно доказать более сильное утверждение:

Пусть $\vdash_{S4} B_1 \supset B_2$. Если P входит в A лишь положительно, то $\vdash_{S4} [A]^P_{B_1} \supset [A]^P_{B_2}$. Если P входит в A лишь отрицательно, то $\vdash_{S4} [A]^P_{B_2} \supset [A]^P_{B_1}$.

Отсюда сразу следует утверждение леммы.

Теорема 3. *Логики*

$$\Gamma(\mathrm{Int}, 1, \omega) = S4 + \Box(\Box \Diamond P \supset \Diamond \Box P),$$
$$\Gamma(\mathrm{KC}, 1, \omega) = S4 + \Box(\Box \Diamond P \equiv \Diamond \Box P),$$
$$\Gamma(\mathrm{Cl}, 1, 0) = S4 + \Box(\Box P \equiv \Diamond P)$$

обладают интерполяционным свойством Линдона.

Доказательство. Пусть $L = S4 + F_i(P)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ и $(A_0 \supset B_0) \in L$. По лемме 8 получаем

$$\vdash_{S4} F_i(P_1) \& \ldots \& F_i(P_n) \supset (A_0 \supset B_0),$$

где $P_1, \ldots, P_n$ — все переменные формулы $(A_0 \supset B_0)$.

Индукцией по j построим формулы $(A_j \supset B_j)$ для $j \leqslant n$ так, чтобы для любого j выполнялись условия:

а) $\Omega^+(A_j) \cap \Omega^+(B_j) \subseteq \Omega^+(A_0) \cap \Omega^+(B_0)$,

б) $\Omega^-(A_j) \cap \Omega^-(B_j) \subseteq \Omega^-(A_0) \cap \Omega^-(B_0)$,

в) $(A_0 \supset A_j) \in L$, $(B_j \supset B_0) \in L$,

г) $\vdash_{S4} F_i(P_{j+1}) \& \ldots \& F_i(P_n) \supset (A_j \supset B_j)$.

Шаг $(j+1)$. Допустим, что A_j, B_j уже построены.

Случай 1. Переменная P_{j+1} не имеет положительных вхождений в A_j и отрицательных вхождений в B_j. Подставив в формулу г) $\mathbf{0}$ вместо P_{j+1}, получаем

$$\vdash_{S4} F_i(P_{j+2}) \& \ldots \& F_i(P_n) \supset ([A_j]_0^{P_{j+1}} \supset [B_j]_0^{P_{j+1}}.$$

По лемме 9 $\vdash_{S4} A_j \supset [A_j]_0^{P_{j+1}}$, $\vdash_{S4} [B_j]_0^{P_{j+1}} \supset B_j$.

Полагаем

$$A_{j+1} \rightleftharpoons [A_j]_0^{P_{j+1}}, B_{j+1} \rightleftharpoons [B_j]_0^{P_{j+1}}.$$

Условия а) — в) выполняются вследствие предположения индукции.

Случай 2. Переменная P_{j+1} не имеет положительных вхождений в B_j и отрицательных вхождений в A_{j}. Полагаем

$$A_{j+1} \rightleftharpoons [A_j]_1^{P_{j+1}},\ B_{j+1} \rightleftharpoons [B_j]_1^{P_{j+1}}.$$

Условия а) — г) доказываются аналогично случаю 1.

Случай 3. Случаи 1, 2 не выполняются и $P_{j+1} \notin \Omega^+(B_j) \cap \Omega^-(B_j)$. Полагаем

$$A_{j+1} \rightleftharpoons A_j \& F_i(P_{j+1}),\ B_{j+1} \rightleftharpoons B_j.$$

Проверим условия а) — г). Пусть $P_{j+1} \in \Omega^+(A_{j+1}) \cap \Omega^+(B_{j+1})$. Тогда $P_{j+1} \in \Omega^+(B_j)$, а значит, $P_{j+1} \notin \Omega^-(B_j)$. Поскольку случай 1 не имеет места, получаем $P_{j+1} \in \Omega^+(A_j)$, а значит, $P_{j+1} \in \Omega^+(A_j) \cap \Omega^+(B_j)$, и условие а) выполнено. Аналогично доказывается условие б), так как случай 2 не имеет места. Так как $L = \mathrm{S4} + F_i(P)$, имеем $(A_j \supset A_{j+1}) \in L$, и ввиду индукционного предположения $(A_0 \supset A_{j+1}) \in L$. Так как формула $F_i(P_{j+2}) \& \ldots \ldots \& F_i(P_n) \supset (F_i(P_{j+1}) \& A_j \supset B_j)$ равносильна в S4 формуле

$$F_i(P_{j+1}) \& \ldots \& F_i(P_n) \supset (A_j \supset B_j),$$

получаем условие г).

Случай 4. $P_{j+1} \in \Omega^+(B_j) \cap \Omega^-(B_j)$. Полагаем

$$A_{j+1} \rightleftharpoons A_j,\ B_{j+1} \rightleftharpoons (F_i(P_{j+1}) \supset B_j).$$

Имеем $\Omega^+(B_{j+1}) = \Omega^+(B_j)$, $\Omega^-(B_{j+1}) = \Omega^-(B_j)$, поэтому условия а), б) выполняются по индукционному предположению. Условия в), г) доказываются аналогично случаю 3.

Рассмотрим теперь формулу $(A_n \supset B_n)$. По условию г) $\vdash_{\mathrm{S4}} (A_n \supset B_n)$. По теореме 1 существует интерполянт Линдона C для формулы $(A_n \supset B_n)$ в S4. Из условий а)—в) следует, что C является одновременно интерполянтом Линдона для $(A_0 \supset B_0)$ в L. Теорема доказана.

Интерполяционное свойство Линдона для суперинтуиционистских логик можно легко получить из свойства Линдона для их модальных напарников. Напомним [7, 8], что существует перевод T из интуиционистской логики Int в модальную логику S4, т. е. $A \in \mathrm{Int} \Leftrightarrow T(A) \in \mathrm{S4}$ для любой пропозициональной формулы A. Этот перевод определяется следующим образом:

$$T(P) = \Box P \text{ для пропозициональной переменной } P,$$

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0},\ T(\mathbf{1}) = \mathbf{1},$$

$$T(A \& B) = T(A) \& T(B),\ T(A \vee B) = T(A) \vee T(B),$$

$$T(A \supset B) = \Box(\neg T(A) \vee T(B)),\ T(\neg A) = \Box\neg T(A).$$

Для любой нормальной модальной логики $M \supseteq \mathrm{S4}$ обозначим (см. [9]) через $\rho(M)$ суперинтуиционистский фрагмент логики M, т. е. $\rho(M) = \{A \mid T(A) \in M\}$.

Предложение. *Пусть M — нормальная модальная логика, содержащая* S4, *в которой верна интерполяционная теорема Линдона. Тогда в $\rho(M)$ также верна интерполяционная теорема Линдона.*

Доказательство. Пусть $(A \supset B) \in \rho(M)$. Тогда $(T(A) \supset T(B)) \in M$ и существует интерполянт Линдона C для формулы $(T(A) \supset T(B))$. Имеем $(T(A) \supset C) \in M$, $(C \supset T(B)) \in M$. Так как $(T(A) \equiv \Box T(A)) \in M$, то $(T(A) \supset \Box C) \in M$ и $(\Box C \supset T(B)) \in M$, т. е. $\Box C$ также является интерполянтом Линдона для формулы $(T(A) \supset T(B))$. Подставим теперь вместо каждой переменной P формулу $\Box P$. Результаты подстановки в $T(A)$ и в $T(B)$ будут эквивалентны в S4 самим формулам $T(A)$ и $T(B)$ соответственно; обозначим через C' результат указанной подстановки в формулу C, получаем

$$(T(A) \supset \Box C') \in M \text{ и } (\Box C' \supset T(B)) \in M.$$

По лемме из [10] существует такая формула E без модальностей, что $\vdash_{S4} \Box C' \equiv T(E)$; при этом $\Omega^+(C') = \Omega^+(T(E))$ и $\Omega^-(C') = \Omega^-(T(E))$. Отсюда получаем $(A \supset E) \in \rho(M)$ и $(E \supset B) \in \rho(M)$. Заметим, что при переводе T положительные вхождения переменных переходят в положительные, а отрицательные — в отрицательные, т. е. $\Omega^+(A) = \Omega^+(T(A))$ и $\Omega^-(A) = \Omega^-(T(A))$. Поэтому формула E является интерполянтом Линдона для формулы $(A \supset B)$ в $\rho(M)$. Предложение доказано.

Из этого предложения, а также из теорем 1—3 сразу вытекает

Теорема 4. *Следующие суперинтуиционистские логики обладают интерполяционным свойством Линдона*:

$$L_1 = \mathrm{Int} — \text{интуиционистская логика},$$
$$L_2 = \mathrm{KC} = \mathrm{Int} + (\neg A \vee \neg\neg A),$$
$$L_5 = \mathrm{KC} + (A \vee (A \supset (B \vee \neg B))),$$
$$L_7 = \mathrm{Cl} = \mathrm{Int} + (A \vee \neg A),$$
$$L_8 = \mathrm{Пр} = \mathrm{Int} + (A \,\&\, \neg A).$$

Напомним [11, 12], что существует точно 8 суперинтуиционистских логик, обладающих интерполяционным свойством Крейга. Остается открытым вопрос, существует ли суперинтуиционистская логика со свойством Крейга, не обладающая интерполяционным свойством Линдона.

§ 3. МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ СО СВОЙСТВОМ КРЕЙГА, НЕ ОБЛАДАЮЩИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМ СВОЙСТВОМ ЛИНДОНА

В соответствии с [4, 6] через $\Gamma(\mathrm{Cl}, 2, 0)$ обозначаем логику, которая характеризуется двуэлементной шкалой $Q_1 = \langle\{0, 1\}, R_1\rangle$, где $0R_1R0$; $\Gamma(L_3, 1, 2)$ полна относительно класса $K(L_3, 1, 2)$ шкал с единственным внутренним сгустком, мощность которого не превосходит 2, и с одноэлементными внешними сгустками; $\Gamma(L_4, 1, 2)$ полна относительно класса шкал из $K(L_3, 1, 2)$, имеющих не более двух внешних сгустков; $\Gamma(L_5, 1, 2)$ характеризуется трехэлементной шкалой $Q_2 = \langle\{0, 1, 2\}, R_2\rangle$ с двухэлементным внутренним и одноэлементным внешним сгустками. Напомним [4], что все эти логики обладают интерполяционным свойством Крейга.

Теорема 5. *Логики* $\Gamma(\mathrm{Cl}, 2, 0)$, $\Gamma(L_3, 1, 2)$, $\Gamma(L_4, 1, 2)$, $\Gamma(L_5, 1, 2)$ *не обладают интерполяционным свойством Линдона.*

Доказательство. а) Рассмотрим $M = \Gamma(\mathrm{Cl}, 2, 0)$. Нетрудно проверить, что формула

$$\Diamond P \,\&\, \neg P \,\&\, \Box(\neg P \vee Q) \supset \neg Q \vee \Box Q$$

верна в шкале Q_1 и, следовательно, принадлежит M. Допустим, что для этой формулы существует интерполянт Линдона C, т. е.

$$(\Diamond P \,\&\, P \,\&\, \Box(\neg P \vee Q) \supset C) \in M,$$
$$(C \supset \neg Q \vee \Box Q) \in M,$$
$$\Omega^+(C) = \{Q\},\ \Omega^-(C) = \varnothing.$$

По лемме 1 можно считать C приведенной формулой.

Рассмотрим следующее означивание v_1 в топобулевой алгебре $\mathscr{P}(Q_1)$ всех подмножеств шкалы Q_1: $v_1(P) = v_1(Q) = \{0\}$. Ввиду $\mathscr{P}(Q_1) \vDash M$ получаем

$$v_1(\Diamond P \,\&\, \neg P \,\&\, \Box(\neg P \vee Q)) = Q_1 \,\&\, \{1\} \,\&\, Q_1 = \{1\} \leqslant v_1(C),$$
$$v_1(C) \leqslant v_1(\neg Q \vee \Box Q) = \{1\} \cup \varnothing = \{1\},$$

т. е. $v_1(C) = \{1\}$.

С другой стороны, множество $S_1 = \{\varnothing, \{0\}, Q_1\}$ содержит $v_1(Q)$ и замкнуто относительно $\&$, $\vee$, $\Box$, $\Diamond$. Поскольку C не содержит отрицательных вхождений Q, то $v_1(C) \in S_1$, а значит, $v_1(C) \neq \{1\}$. Полученное противоречие доказывает, что интерполянта C не существует.

б) Пусть M — любая из логик $\Gamma(L_3, 1, 2)$, $\Gamma(L_4, 1, 2)$, $\Gamma(L_5, 1, 2)$. Тогда M содержит формулу

$$\Box\Diamond\Box P \& \Diamond(P \& \neg\Box P) \& \neg P \supset \Diamond(P \& R) \vee \Box\neg R \vee R,$$

так как она верна в любой шкале из класса $K(L_3, 1, 2)$. Допустим, что для этой формулы существует интерполянт Линдона C, т. е.

$$(\Box\Diamond\Box P \& \Diamond(P \& \neg\Box P) \& \neg P \supset C) \in M,$$

$$(C \supset \Diamond(P \& R) \vee \Box\neg R \vee R) \in M,$$

$$\Omega^+(C) = \{P\},\ \Omega^-(C) = \phi.$$

Рассмотрим означивание v_2 в топобулевой алгебре $\mathcal{P}(Q_2)$: $v_2(P) = \{1, 2\}$, $v_2(R) = \{0\}$. Тогда, так как $\mathcal{P}(Q_2) \models M$, имеем

$$v_2(\Box\Diamond\Box P \& \Diamond(P \& \neg\Box P) \& \neg P) = Q_2 \& \{0, 1\} \& \{0\} = \{0\} \leqslant v_2(C),$$

$$v_2(C) \leqslant v_2(\Diamond(P \& R) \vee \Box\neg R \vee R) = \{2\} \cup \{0\} = \{0, 2\}.$$

С другой стороны, $v_2(P) \in S_2 = \{\phi, \{2\}, \{1, 2\}, Q_2\}$, и множество S_2 замкнуто относительно операций $\&$, $\vee$, $\Box$, $\Diamond$. Так как C не содержит отрицательных вхождений P, то $v_2(C) \in S_2$, что противоречит ранее полученному соотношению $\{0\} \leqslant v_2(C) \leqslant \{0, 2\}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Максимова Л. Л.** Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр.— Алгебра и логика, 1979, т. 18, № 5, с. 556—586.
2. **Gabbay D.** Craig's interpolation theorem for modal logics.— In: Conference in mathematical logic — London, 70. Berlin a. o., Springer — Verlag, 1972, p. 111—127.
3. **Schumm G. F.** Interpolation in S5 and related systems.— Reports Math. Logic, 1976, v. 6, p. 107—110.
4. **Максимова Л. Л.** Интерполяционные теоремы в модальных логиках. Достаточные условия.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 2, с. 194—213.
5. **Lyndon R.** An interpolation theorem in the predicate calculus.— Pacific J. Math., 1959, v. 9, N 1, p. 129—142.
6. **Максимова Л. Л.** Об одной классификации модальных логик.— Алгебра и логика, 1979, т. 18, № 3, с. 328—340.
7. **Gödel K.** Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalkül.— Epgebnisse math. Koll., 1933, Bd. 4, S. 39—40.
8. **McKinsey J., Tarski A.** Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting.— J. Symbolic Logic, 1948, v. 13, N 1, p. 1—15.
9. **Максимова Л. Л., Рыбаков В. В.** О решетке нормальных модальных логик.— Алгебра и логика, 1974, т. 13, № 2, с. 188—216.
10. **Maksimova L.** Interpolation properties of superintuitionistic logics.— Studia Logica, 1979, v. 38, N 4, p. 419—428.
11. **Максимова Л. Л.** Интерполяционная теорема Крейга и амальгамируемые многообразия.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1281—1284.
12. **Максимова Л. Л.** Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр.— Алгебра и логика, 1977, т. 16, № 6, с. 643—681.