КОНЕЧНО АКСИОМАТИЗИРУЕМЫЕ ТОТАЛЬНО ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ТЕОРИИ

М. Г. ПЕРЕТЯТЬКИН

В работе описывается один общий метод построения конечно аксиоматизируемых теорий. По произвольной машине Тьюринга M строится конечно аксиоматизируемая теория, в которой особым образом представлена работа этой машины. Сетка для интерпретации работы машины Тьюринга построена на основе ω_1-категоричной полной конечно аксиоматизируемой теории, описанной в работе автора [1]. При этом многие важные свойства получаемой теории зависят от результатов работы машины M. Таким образом, выбором машины Тьюринга мы можем управлять свойствами получаемой конечно аксиоматизируемой теории. Сформулируем несколько конкретных результатов, полученных этим методом.

а) *Существует полная конечно аксиоматизируемая тотально трансцендентная теория, у которой простая модель и счетная насыщенная модель не являются конструктивизируемыми.*

б) *Для любого конструктивного ординала $\beta \geqslant 1$ существует полная конечно аксиоматизируемая тотально трансцендентная теория T, имеющая ранг Морли $\alpha_T = \beta + 3$.*

в) *Пусть S — множество гёделевских номеров предложений, определяющих полные тотально трансцендентные теории. Тогда S является максимальным (по m-сводимости) множеством в классе Π_1^1.*

Основная конструкция описывается в первых тринадцати параграфах. В последующих параграфах содержатся конкретные результаты, причем все они выводятся из основной теоремы, приведенной в § 9.

Результаты работы анонсированы в [2, 3].

П р е д в а р и т е л ь н ы е с в е д е н и я. Пусть U — унарный, а R — n-арный предикат, $n \geqslant 1$. Будем говорить, что R *определен тривиально вне* U, если выполняется предложение, которое является универсальным замыканием формулы

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} U(x_i).$$

Если E — отношение эквивалентности, а R — n-арный предикат, то говорим, что R *корректно определен на E-классах*, если выполнено предложение.

$$\bigwedge_{i=1}^{n} E(x_i, y_i) \rightarrow [R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow R(y_1, y_2, \ldots, y_n)].$$

В случае унарного предиката U и бинарного предиката R мы в некоторых случаях вместо выражений $U(x)$ и $R(x, y)$ будем использовать более краткие $x \in U$ и xRy. В работе будет использоваться теоретико-множественная терминология, естественно связанная с семантикой понятия «предикат».

Если E — отношение эквивалентности, а R — бинарный предикат, то утверждение, что R *является отношением следования на E-классах*, будет означать следующую группу аксиом:

C1. $xEx' \,\&\, yEy' \rightarrow (xRy \leftrightarrow x'Ry')$,

C2. $xRy \rightarrow \neg\, xEy$,

C3. $xRy \,\&\, x'Ry' \rightarrow (xEx' \leftrightarrow yEy')$,

C4. $(\forall x)(\exists y)xRy$,

C5. $(\forall y)(\exists x)xRy$.

В одном случае (в § 2) нам понадобится подобная группа аксиом, в которой отсутствует лишь аксиома C5. В этом случае будем говорить, что R *является отношением следования на E-классах, допускаются начальные классы.*

Все теории рассматриваются в логике предикатов первого порядка с равенством. Общие понятия, используемые в работе, соответствуют монографиям Ю. Л. Ершова [4], Г. Кейслера — Ч. Ч. Чэна [5], Х. Роджерса [6]. Специальные понятия определяются по ходу изложения материала.

Стандартные обозначения. Через $|\mathfrak{M}|$ обозначается носитель (основное множество) модели $\mathfrak{M}$. Если E — отношение эквивалентности, то через $[a]_E$ обозначается E-класс, содержащий элемент a. $\mathscr{P}(X)$ — множество всех подмножеств X, $\overline{\overline{X}}$ — мощность этого множества. ω — первый бесконечный ординал, λ — первый неконструктивный ординал. Если X — множество ординалов, то $\sup X$ означает наименьший ординал, превосходящий все ординалы из X. Множество натуральных чисел $\{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ обозначается N. $c(x, y)$, $l(n)$, $r(n)$ — канторовские функции нумерации пар [6, с. 89].

Специальные знаки. Знак $\rightleftharpoons$ служит для введения обозначений. $\restriction$ — знак ограничения, например, $\mathfrak{M} \restriction X$ — ограничение модели $\mathfrak{M}$ до множества X. Знаком $\square$ отмечается окончание доказательства или конец группы аксиом.

Сокращения. О. р. ф. — общерекурсивная функция, ч. р. ф. — частично рекурсивная функция, р. п. — рекурсивно перечислимый, с. к. — сильно конструктивизируемый.

§ 1. МАШИНЫ ТЬЮРИНГА С ДЕЛЕНИЕМ КЛЕТОК

В этом параграфе мы опишем вариант машин Тьюринга, используемый для интерпретаций в конечно аксиоматизируемых теориях.

Машина M имеет конечный набор a_i, $i < d$, символов ленты, конечный набор q_j, $j < e$, символов внутренних состояний, а также имеет программу, состоящую из конечного множества команд вида

$$(1.1)\quad a_iq_j \Rightarrow a_mq_tL, \qquad (1.2)\quad a_iq_j \Rightarrow a_mq_tR,$$

$$(1.3)\quad a_iq_j \Rightarrow a_ma_nq_tL, \qquad (1.4)\quad a_iq_j \Rightarrow a_ma_nq_tR.$$

В каждый момент времени головка машины обозревает одну из клеток бесконечной в обе стороны ленты. В каждой клетке записан один из символов a_i, $i < d$. В каждый момент машина находится в одном из внутренних состояний q_j, $j < e$. Машина начинает работу в состоянии q_0. Команда (1.1) является инструкцией о том, что если в некоторый момент машина имеет внутреннее состояние q_j, а в обозреваемой клетке записано a_i, то машина записывает в обозреваемой клетке символ a_m, принимает внутреннее состояние q_t и сдвигает головку влево на соседнюю клетку. Команда (1.2) подобна команде (1.1), но со сдвигом головки вправо. Будем говорить, что эти команды применимы к ситуации a_iq_j. Команда (1.3) является инструкцией о том, что машина в ситуации a_iq_j должна разделить обозреваемую клетку на две новых, записать в левой из них a_m, в правой — a_n, затем изменить внутреннее состояние на q_t и сдвинуть головку влево на клетку, соседнюю к полученной паре новых клеток. В случае команды (1.4) делается то же, но со сдвигом головки вправо. Требуется, чтобы в любой ситуации было применимо не более одной команды. Машина останавливается, если встретилась ситуация, к которой неприменима ни одна из команд. Таким образом, работа машины M однозначно определяется ее программой, а также информацией на ленте в начальный момент времени.

Класс машин описанного вида обозначим через $\mathscr{M}$. Естественно назвать его *классом машин Тьюринга с делением клеток ленты.*

§ 2. АКСИОМАТИКА И ОПИСАНИЕ МОДЕЛЕЙ

По машине M описанного вида построим конечно аксиоматизируемую теорию F_M^* языка $\mathcal{L}_M$. Начнем с характеризации теории в целом. Устройство теории F_M^* носит многоступенчатый характер, причем разные ступени выполняют разные функции и мало зависят друг от друга. Поэтому исследование всей теории сводится, по существу, к изучению каждой ступени в отдельности. Можно выделить пять ступеней.

Первая ступень. (*Теория квазиследования*). Описана в работе автора [1]. Ее назначение — обеспечить плоскую форму каркаса, не допустить разного рода циклов.

Вторая ступень. (*Каркас* — КРК). Аксиомы этой ступени описывают каркас, имеющий форму плоской сети, на которой размещены все последующие ступени.

Третья ступень. (*Устройство разметки ленты для размещения оракула* — ОРК). Назначение этой ступени — выделить формульно множество клеток ленты, в которых будет размещена информация оракула. При этом клетки ленты, несущие полезную информацию, оказываются разделенными возрастающими промежутками, свободными от информации. В результате оказывается, что число типов, порождаемых оракулом, не превосходит ω. Таким образом, благодаря устройству разметки ленты, содержимое оракула не оказывает негативного влияния на существование счетной насыщенной модели и на тотальную трансцендентность.

Четвертая ступень. (*Интерпретация работы машины Тьюринга* — МТ). Эта ступень определяет в теории функционирование заданной машины M. В моделях теории с помощью специальных унарных предикатов представлены состояния ленты и внутренние состояния машины в каждый момент времени. Аксиомы ступени описывают взаимодействие головки и ленты в точном соответствии с программой машины M.

Пятая ступень. (*Транслятор* — ТРН.) Назначение этой ступени — переводить результаты работы машины Тьюринга в строение структуры формульных подмножеств специального предиката U. Таким путем работа машины M будет определять свойства простой модели и счетной насыщенной модели, а также величину ранга трансцендентности каждого пополнения теории F_M^*.

Теорию ω_1-категоричного квазиследования [1] будем обозначать через QS. Ее язык $\mathcal{L}_{QS}$ содержит, среди других, предикаты $\lhd$ и $\sim$, причем $\sim$ является отношением эквивалентности, а $\lhd$ — отношением следования на $\sim$-классах, без начальных и без конечных классов и без циклов. Если $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — модели теории QS, то всякий $\lhd$-изоморфизм фактор моделей $\mathfrak{M}/\sim$ и $\mathfrak{N}/\sim$ продолжается до изоморфизма $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{N}$.

По отношению к языку $\mathcal{L}_{QS}$ будем придерживаться соглашения: предикатные символы $\lhd$ и $\sim$ относятся к языку теории квазиследования, все другие предикатные символы, используемые в работе, предполагаются не входящими в $\mathcal{L}_{QS}$.

Приступаем к формальному описанию аксиом теории F_M^*. Будем предполагать, что M — фиксированная машина Тьюринга, имеющая d символов ленты и e внутренних состояний, как это было описано в § 1.

Язык: $\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3 \cup \mathcal{L}_4 \cup \mathcal{L}_5$,

где

$$\mathcal{L}_1 = \{\lhd^2, \sim^2, \ldots\} \text{ — язык теории квазиследования,}$$

$$\mathcal{L}_2 = \{P^2, L^2, E^2, R^2, S^2, B^1, H^1, J^1, O^1, X^1, Y^1, W^1\},$$

$$\mathcal{L}_3 = \{C^1, \Lambda^1\},$$

$$\mathscr{L}_4 = \{K^1, Ш^1, Г^1, A_0^1, \ldots, A_{d-1}^1, Q_0^1, \ldots, Q_{e-1}^1\},$$
$$\mathscr{L}_5 = \{U^1, D^2\}.$$

Часть языка $\mathscr{L}_k$ соответствует k-й ступени теории. Многоточие в $\mathscr{L}_1$ заменяет невыписанные предикатные символы языка теории QS. Верхние индексы указывают арности предикатов.

Аксиомы будем описывать по ступеням. В нумерации аксиом используется мнемоника, приведенная при описании ступеней.

Вторая ступень включает 25 аксиом:

КРК.1. X, Y, W — разбиение основного множества.

КРК.2. L — отношение эквивалентности, P — отношение следования на L-классах.

КРК.3. E — отношение эквивалентности на $X \cup W$, вне этого множества предикат E определен тривиально.

КРК.4. $xEy \to xLy$.

КРК.5. Y пересекается с каждым L-классом.

КРК.6. X пересекается с каждым E-классом и с каждым L-классом.

КРК.7. Предикаты из $\mathscr{L}_1$ на множестве $X \cup Y$ удовлетворяют всем аксиомам теории квазиследования, вне $X \cup Y$ эти предикаты определены тривиально.

КРК.8. Если $Y(a)$, то $[a]_\sim = [a]_L \cap Y$.

КРК.9. Если $X(a)$, то $[a]_\sim = [a]_E \cap X$.

КРК.10. Если $a \lhd b$, то $X(a) \Leftrightarrow X(b)$.

КРК.11. $aPb \leftrightarrow (\exists x, y)(aLx \mathbin{\&} bLy \mathbin{\&} x, y \in Y \mathbin{\&} x \lhd y)$.

КРК.12. R — отношение следования на E-классах, предикат R определен тривиально вне $X \cup W$.

КРК.13. $xRy \to xLy$.

КРК.14. $aRb \leftrightarrow (\exists x, y)(aEx \mathbin{\&} bEy \mathbin{\&} x, y \in X \mathbin{\&} x \lhd y)$.

КРК.15. S — отношение следования на E-классах, допускаются начальные классы. Предикат S определен тривиально вне $X \cup W$.

КРК.16. $xSy \to xPy$.

КРК.17. Если $xRy \mathbin{\&} xSx' \mathbin{\&} ySy'$, то y' является либо первым, либо вторым R-последователем x'. Во втором случае первый R-последователь элемента x' не имеет S-предшественника.

КРК.18. Если xRy, то из элементов x, y по меньшей мере один имеет S-предшественника.

КРК.19. Предикат J выделяет единственный L-класс.

КРК.20. B, H — разбиение основного множества.

КРК.21. Предикаты B, H корректно определены на L-классах.

КРК.22. Если xPy и $\neg J(y)$, то $B(x) \leftrightarrow B(y)$.

КРК.23. Если xPy и $J(y)$, то $H(x) \mathbin{\&} B(y)$.

КРК.24. Каждый E-класс из J имеет S-предшественника.

КРК.25. Предикат O выделяет единственный E-класс в J.

Аксиомы КРК.1—6 описывают общую форму каркаса, аксиомы КРК.7—14 вписывают в каркас теорию квазиследования с целью исключить циклы, остальные аксиомы описывают детали устройства каркаса. Форма модели приведенных аксиом показана на рис. 1 вверху. Шестиугольники изображают $\sim$-классы теории квазиследования, стрелки между ними представляют $\lhd$-связи. Элементы модели расположены внутри квадратов и шестиугольников.

Множество, определяемое предикатом H, будем называть *нижней частью модели*, здесь будет размещена третья ступень. Множество, определяемое предикатом B, будем называть *верхней частью модели*, здесь разместятся четвертая и пятая ступени теории.

Предикат J выделяет L-класс, расположенный в верхней части на стыке с нижней частью. Предикатом O отмечен единственный E-класс, расположенный в J, он играет роль «начала координат».

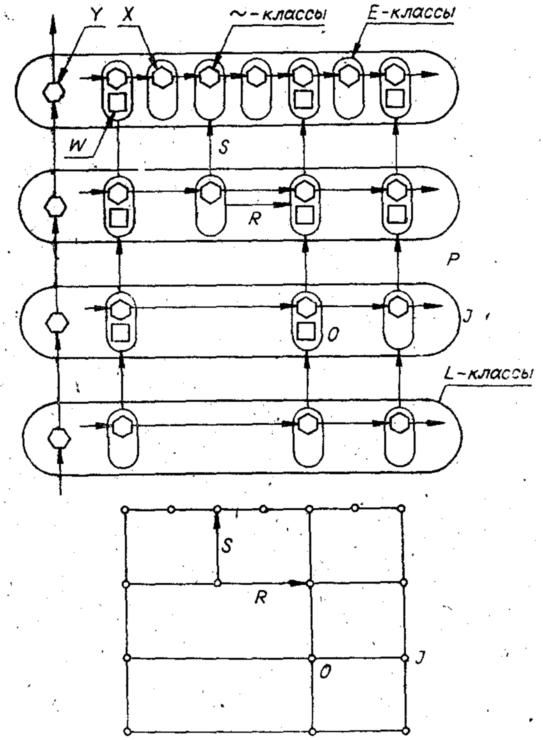

Рис. 1.

При описании следующих двух ступеней будут рассматриваться лишь R-связи и S-связи между E-классами, а также унарные предикаты, корректно определенные на E-классах. В таких случаях, чтобы опустить из рассмотрения ненужные детали, будем изображать E-классы в виде точек (рис. 2, *Б*). При этом E-классы будем называть *точками*.

Назовем *блоком* минимальную непустую совокупность точек, замкнутую относительно R-связей и S-связей. Блок, содержащий точку O, назовем *стандартным*.

Приступаем к аксиомам *третьей ступени*.

ОРК.1. $\Lambda \subset C \subset H \setminus Y$.

ОРК.2. Предикаты Λ и C корректно определены на E-классах.

ОРК.3. В каждом L-классе в нижней части предикат Λ выделяет ровно один E-класс.

ОРК.4. $xRy \mathbin{\&} ySz \to (x \in \Lambda \leftrightarrow z \in \Lambda \cap O)$.

ОРК.5. Каждая C-точка имеет S-предшественника.

ОРК.6. Если $x, y \in H$ и xSy, то $x \in C \leftrightarrow y \in C \setminus \Lambda$.

ОРК.7. Точка в нижней части модели не имеет S-предшественника тогда и только тогда, когда ее R-предшественник или R-последователь принадлежит $C \setminus \Lambda$.

ОРК.8. Если xSy и $J(y)$, то $x \in C \to y \in K \setminus O$.

Форма третьей ступени изображена на рис. 2, *Б*. Некоторые комментарии будут даны позже.

Приступим к описанию четвертой ступени. Ее строение, схематично представленное на рис. 2, *А*, будем описывать в терминах, связанных с функционированием машины Тьюринга. Не составит особого труда перевести это описание на формальный язык. Вначале свяжем терминологию работы машины Тьюринга с элементами строения моделей.

L-классы представляют *моменты времени* при работе машины Тьюринга. Перемещение по P-цепи соответствует течению времени. На рисунках: «прошлое» — вниз, «будущее» — вверх. L-класс J является *начальным моментом времени* в работе машины.

K-точки (т. е. E-классы, отмеченные предикатом K) одного L-класса представляют *клетки ленты* в один момент времени. Отрезок S-цепи, целиком состоящий из K-точек, будем называть K-трассой. Каждая K-трасса представляет одну клетку ленты в последовательные моменты времени.

Г-точка представляет положение *головки машины* по отношению к ленте. E-классы, удовлетворяющие $K \mathbin{\&} Г$, представляют *точки исполнения команд* машины. Другие комментарии будут даваться по ходу описания аксиом.

Четвертая ступень включает 15 аксиом:

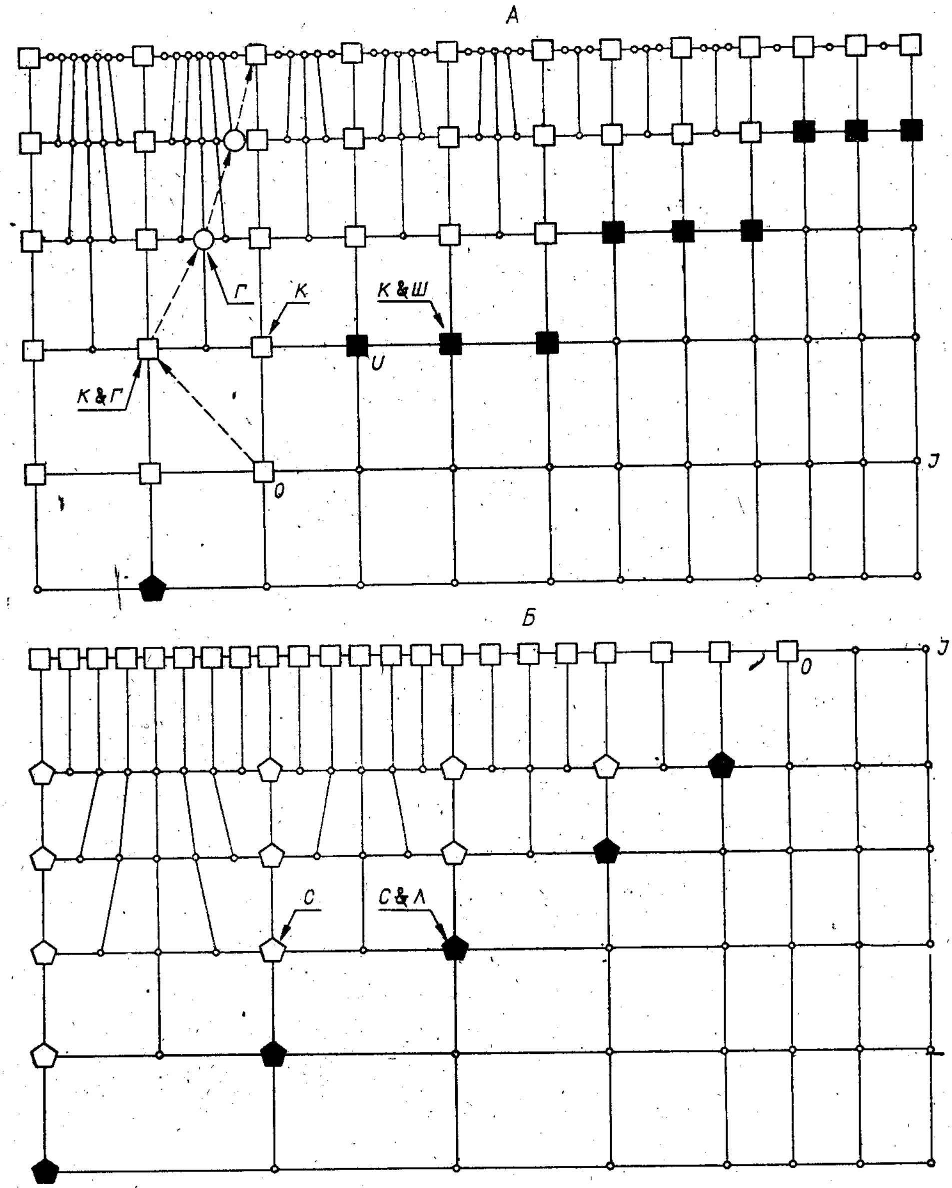

Рис. 2.

МТ.1. Все предикаты из $\mathscr{L}_4$ не пересекаются с $Y \cup H$ и корректно определены на E-классах.

МТ.2. В начальный момент лента не ограничена влево и ограничена справа точкой O.

МТ.3. Каждая K-точка удовлетворяет в точности одному из предикатов A_i, $i < d$. Вне K все предикаты A_i ложны. □

Предикат A_i означает, что в отмечаемой им клетке в данный момент времени записан символ a_i. Будем отождествлять a_0 с 0, а a_1 — с 1.

МТ.4. В начальный момент на ленте записана некоторая последовательность нулей и единиц, при этом символ 1 допустим только в тех клетках, S-предшественник которых является C-точкой. □

Посредством этой аксиомы четвертая ступень использует разметку ленты, выполненную третьей ступенью.

MT.5. В каждом L-классе в верхней части, исключая класс J, имеются элементы $x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}$, удовлетворяющие условиям:

(а) $x_0 R x_1 R \ldots R x_{d-1}$.

(б) $x_0, x_1, \ldots, x_{d-1} \in$ Ш.

(в) $[x_0]_L \cap Ш = [x_0]_E \cup \ldots \cup [x_{d-1}]_E$.

(г) $A_i(x_i)$, $0 \leqslant i < d$.

(д) Если $x_{d-1} S y$ и $y R z$, то $z \in Ш \cap A_0$.

При этом в L-классе J нет Ш-элементов. □

С течением времени лента независимо от работы машины Тьюринга наращивается справа. В каждый момент, кроме начального, пристраивается ровно d новых клеток, в которые также независимо от машины вписываются символы $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$ (рис. 2, *А* соответствует случаю $d = 3$). Пристраиваемые таким образом клетки отмечаются специальным предикатом Ш. Ряд Ш-точек данного блока, имеющий форму ступенчатой линии, будем называть *линией шума.* Сформулированная аксиома в связи с этим будет называться *аксиомой шума.*

MT.6. Вверх K-трасса обрывается только в одном случае: в точке исполнения команды с делением клетки ленты (см. рис. 3, *Б*). Вниз K-трасса обрывается в трех случаях:

(а) В L-классе J.

(б) На линии шума.

(в) Около точки исполнения команды с делением клетки. Случай (в) представлен на рис. 3, *Б*. В этом случае K-точка обрыва даже не имеет S-предшественника.

MT.7. Предикаты A_i передаются вдоль K-трасс неизменными всюду, кроме точек, удовлетворяющих Г.

MT.8. В верхней части модели, вдали от K-трасс, каждая точка имеет S-предшественника. Вблизи от K-трасс и в окрестности точек исполнения команд строение R-S-сети такое, как это показано на рис. 2, *А*, 3, *А*, 3, *Б*.

MT.9. В каждом L-классе в верхней части предикат Г выделяет ровно одну точку. Г-трассой назовем ряд Г-точек в последовательные моменты времени. Г-трасса в промежутках между точками исполнения команд имеет постоянный наклон, влево или вправо, как это показано на рис. 2, *А*, 3, *А*, 3, Б. □

Для наглядности Г-трасса отмечается пунктирной линией.

MT.10. Каждая Г-точка удовлетворяет ровно одному из предикатов Q_j, $j < e$. Вне Г все предикаты Q_j ложны. □

Предикат Q_j означает, что в данный момент времени машина имеет внутреннее состояние q_j.

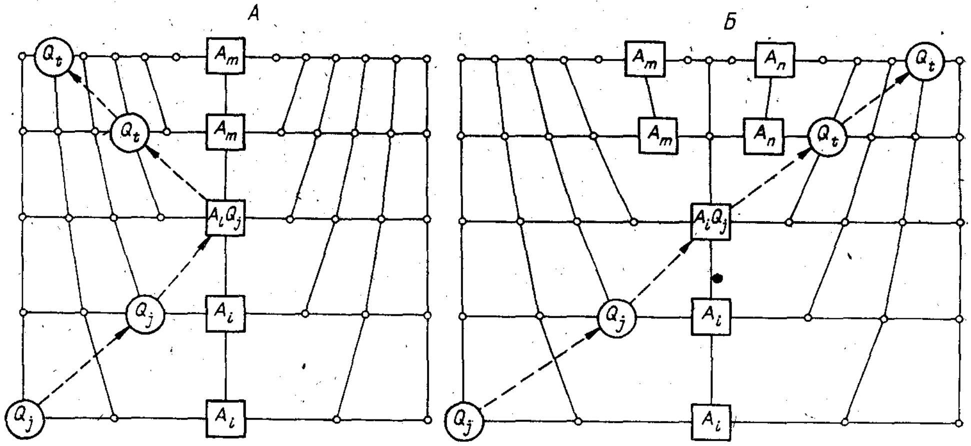

Рис. 3. Точка исполнения команды: *А* — $a_i g_j \Rightarrow a_m g_t L$; *Б* — $a_i g_j \Rightarrow a_m a_n g_t R$.

МТ.11. Предикаты Q_j передаются вдоль Г-трасс неизменными всюду, кроме точек исполнения команд.

МТ.12. Изменение предикатов A_i и Q_j в окрестности точки исполнения команды, а также направление движения головки после этой точки определяются командами машины M. □

На рис. 3, *А*, 3, *Б* показаны окрестности точек исполнения команд.

МТ.13. Точка O удовлетворяет предикату Q_0. □

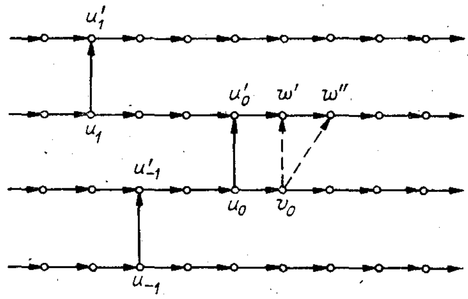

Рис. 4.

Другими словами, машина начинает работу в состоянии q_0, при этом головка обозревает клетку O.

МТ.14. Машина M не останавливается.

МТ.15. xSy & $y \in$ Ш $\rightarrow x, y \notin$ Г.

З а м е ч а н и е к аксиомам МТ.8, 9. В этих аксиомах следует особо предусмотреть поведение головки в окрестности точки O. К примеру, особым следует считать случай, когда исполнение команды в точке O вызывает движение головки вправо. В этом случае нужно потребовать, чтобы головка попадала на соседнюю клетку, а не перескакивала через нее, как того требует общее описание, данное выше.

Наша цель сейчас — указать некоторый общий способ исследования формы блоков, базирующийся на аксиомах второй ступени.

Пусть нам требуется изучить блок, содержащий точку u (рис. 4). Согласно КРК.12, 14 предикат R является отношением следования на E-классах и не имеет циклов. Построим R-цепь, содержащую точку u. По КРК.13 вся эта цепь будет расположена в одном L-классе. Выберем на построенной R-цепи точку u_0 и возьмем ее S-последователь u'_0, существующий по КРК.15. После этого построим R-цепь, содержащую точку u'_0, выберем на ней точку u_1 и возьмем ее S-последователь, и т. д. Аксиома КРК.18 обеспечивает возможность такого же процесса вниз. Благодаря теории квазиследования P-циклы невозможны. Тогда все построенные цепи будут различными, поскольку они попадут в разные L-классы по КРК.13, 16.

Рассмотрим одно из построенных звеньев, для определенности $\langle u_0, u'_0\rangle$. Выберем точки v_0, w', w'' так, что u_0Rv_0 и $u'_0Rw'Rw''$. Точка v_0 имеет S-последователя, а по КРК.17 им должен быть либо w', либо w''. Эта же аксиома гарантирует, что во втором случае точка w' не имеет S-предшественника. Определив S-последователя точки v_0, приступим к нахождению S-последователя следующей точки v_1, и т. д. Таким образом, мы «сплетем» две половинки R-цепей. Можно проделать такой же процесс плетения в обе стороны от каждого из звеньев $\langle u_i, u'_i\rangle$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Указанные звенья, играющие особую роль, будем называть *опорными звеньями.*

Описанный способ определения формы блока будем называть *методом плетения сетей.* Он может быть использован следующим образом. При исследовании конкретного блока необходимо указать такую последовательность действий, при которой результат каждого шага однозначно определяется аксиомами. При этом наряду с плетением R-S-сети должны рассматриваться унарные предикаты. Таким путем получается доказательство того, что исследуемый блок необходимо имеет заданную форму. Возможны различные модификации этого метода. Например, построение опорных звеньев может чередоваться с построением других звеньев. Можно также использовать метод плетения сетей для изучения отдельных частей блока.

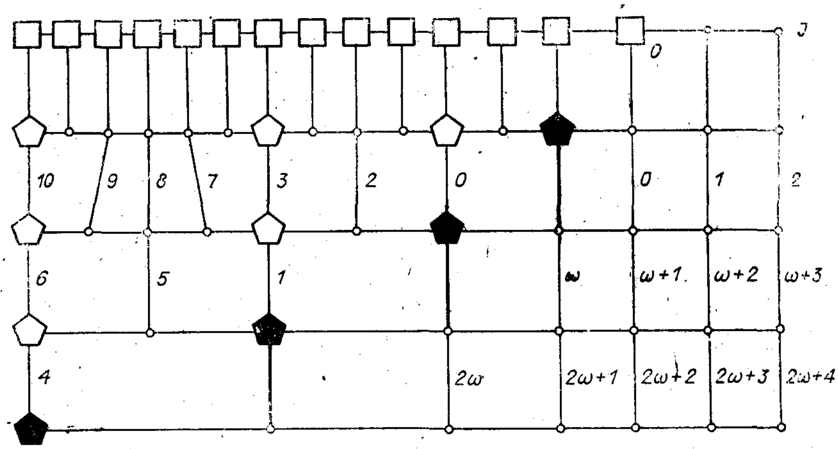

Рис. 5.

Применим описанный метод для изучения стандартного блока. Докажем, что аксиомы обеспечивают форму его нижней части, представленную на рис. 2, *Б*.

По аксиоме МТ.2 R-цепь, содержащая точку O, в левой половине состоит из K-точек, а в правой половине — из точек, не удовлетворяющих K. По КРК.17, 24 отношение S является биекцией, сохраняющей следование, между точками на стыке верхней и нижней части стандартного блока. Используя многократно аксиому ОРК.4, можно построить опорные звенья, выделенные на рис. 5 жирными линиями. Плетение правой части ведется в порядке, обозначенном ординалами до ω^2. Используются аксиомы ОРК.6—8. Левая часть плетется в порядке, обозначенном натуральными числами. Используются аксиомы ОРК.5—7.

Отметим, что форма верхней половины стандартного блока однозначно определяется информацией на ленте в начальный момент времени. Это следует из того, что верхняя часть стандартного блока согласно аксиомам МТ представляет собой развернутую во времени картину работы машины M. Но работа машины однозначно определяется ее программой, а также информацией на ленте в начальный момент времени. Развернутое доказательство этого утверждения, ввиду его громоздкости, здесь не приводится. Тем более, что идея этого доказательства вполне очевидна.

Пусть $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ — блоки некоторых моделей. Назовем эти блоки *изоморфными*, если существует взаимно однозначное соответствие между точками (т. е. E-классами) этих блоков, сохраняющее предикаты языка

$$\mathcal{L} = \{P^2, L^2, E^2, R^2, S^2, B^1, H^1, J^1, O^1\} \cup \mathcal{L}_3 \cup \mathcal{L}_4. \qquad (2.1)$$

Легко проверить, что согласно аксиомам все предикаты языка (2.1) корректно определены на E-классах.

Доказанное выше утверждение о единственности стандартного блока можно сформулировать следующим образом.

Лемма 2.1. *При заданных значениях предикатов A_0 и A_1 на R-цепи, содержащей точку O, стандартный блок (если он существует) определен однозначно, с точностью до изоморфизма.*

Приступаем, наконец, к аксиомам *пятой ступени*. Эта ступень (транслятор) базируется на множестве, выделяемом предикатом W.

ТРН.1. Класс $[a]_E$ содержит W-элементы тогда и только тогда, когда выполнено $K(a)$.

ТРН.2. Вне W предикат D определен тривиально.

ТРН.3. Для каждого $x \in W$ существует единственный элемент y такой, что xDy.

ТРН.4. Для каждого $y \in W \setminus (J \cup Ш)$ существует ровно два элемента z таких, что zDy.

ТРН.5А. Если класс $[x]_E$ не является точкой исполнения команды с делением клетки ленты, то $xDy \to xSy$.

ТРН.5Б. Если класс $[x]_E$ является точкой исполнения команды с делением клетки ленты, а z, z_1, z_2 — элементы, такие что xSz и z_1RzRz_2, тогда $xDy \to (yEz_1 \vee yEz_2)$.

ТРН.6. Предикат U выделяет E-класс, который является R-последователем S-последователя точки O (рис. 2, A).

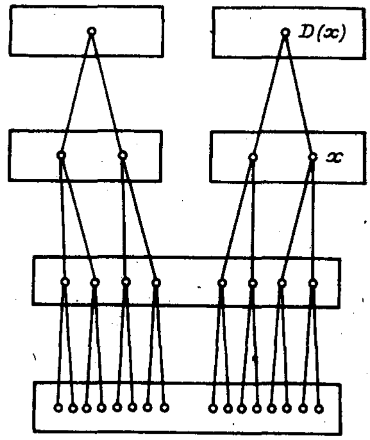

Рис. 6.

Последняя аксиома теории F_M^* будет приведена в § 5. А сейчас займемся изучением ее подтеории, определяемой аксиомами КРК, ОРК, МТ, ТРН. Указанную подтеорию будем обозначать через F_M.

Согласно ТРН.2, 3 предикат D можно считать операцией на множестве W. Поэтому вместо записи xDy будем использовать запись $y = D(x)$. Из аксиом следует, что D-связи имеют форму бинарного перевернутого дерева (рис. 6), при этом D-циклы невозможны по аксиомам ТРН.5А, 5Б.

Назовем *компонентой* минимальное непустое подмножество $\varkappa \subseteq W$, замкнутое относительно D-образов и D-прообразов. Из ТРН.1 с использованием аксиом предшествующих ступеней получаем, что $W \subset B$, поэтому любая компонента расположена в верхней части модели. Из аксиом ТРН.5А, 5Б следует, что каждая компонента расположена в пределах одного блока.

Для характеризации положения компоненты в блоке введем следующее понятие, определенное в терминах четвертой ступени. Назовем *K-путем* блока $\mathfrak{B}$ произвольную непустую совокупность $\mathcal{K}$ его K-трасс, удовлетворяющую условиям:

(а) Любой L-класс, проходящий через $\mathfrak{B}$, пересекает не более чем одну K-трассу из $\mathcal{K}$;

(б) Если в результате выполнения команды с делением клетки K-трасса η блока $\mathfrak{B}$ делится на две K-трассы ζ_1 и ζ_2, то $\eta \in \mathcal{K} \leftrightarrow \zeta_1 \in \mathcal{K} \vee \vee \zeta_2 \in \mathcal{K}$.

Из определения следует, что любой K-путь неограниченно продолжается вверх. Снизу K-путь неограничен, или же обрывается на J-точке, или на Ш-точке. Каждая компонента необходимо располагается по какому-либо K-пути, причем по одному K-пути может проходить много компонент. Возможен также случай, когда в модели по некоторому K-пути не пройдет ни одной компоненты (например, в случае, когда в стандартном блоке имеется 2^ω различных K-путей, а модель — счетная).

На рис. 6 схематично изображены части двух компонент в окрестности точки исполнения команды с делением клетки ленты. Прямоугольники изображают множества W-элементов внутри E-классов, удовлетворяющих K.

Снизу компонента будет ограниченной или же неограниченной в соответствии с тем, каков K-путь, определяемый этой компонентой. Отметим, что в стандартном блоке все компоненты будут ограниченными снизу. Так как вверх K-путь неограничен, то любая компонента содержит в каждом E-классе, который она пересекает, бесконечное множество элементов.

§ 3. ОДНОБЛОЧНЫЕ МОДЕЛИ

В этом параграфе мы получим условия непротиворечивости теории F_M. С этой целью изучим модели, состоящие из одного стандартного блока, которые будем называть *одноблочными*.

Устройство третьей ступени и аксиома МТ.4 обеспечивают то, что в начальный момент информация $\delta_i \in \{0, 1\}$, $i < \omega$, размещена в ячейках $Я_0$, $Я_1$, $Я_2$, ..., как это показано на рис. 7. Здесь и далее *ячейкой* будем называть клетку или группу клеток ленты с информацией специального назначения. Простой расчет показывает, что ячейка $Я_i$ находится на расстоянии $i^2 + i + 1$ слева от точки O.

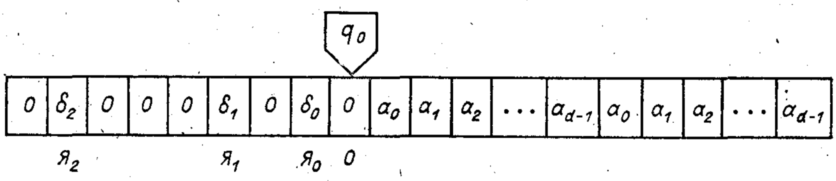

Рис. 7.

Так как линия шума строится независимо от работы машины, то мы можем предполагать, что в начальный момент лента неограничена в обе стороны и содержит в правой части периодически повторяющуюся последовательность символов, как это изображено на рис. 7.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная модель теории F_M. Рассмотрим начальный момент работы машины M (рис. 7), соответствующий стандартному блоку этой модели. Положим

$$\Delta = \{i \mid \text{в ячейке } Я_i \text{ записан символ } 1\}.$$

Указанное множество Δ, определяемое моделью $\mathfrak{M}$, будем обозначать через Oracle($\mathfrak{M}$). Будем говорить также, что в модели $\mathfrak{M}$ на R-цепи слева от точки O размещена *информация оракула*.

Пусть $\Delta \subseteq N$. Назовем *Δ-вычислением* работу машины M начиная из положения, показанного на рис. 7, где информация на левой половине ленты определяется множеством Δ следующим образом:

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \notin \Delta. \\ 1, & \text{если } i \in \Delta, \end{cases}$$

Через Nonstop(M) обозначим множество всех $\Delta \subseteq N$ таких, что Δ-вычисление на машине M не приводит к останову.

Основные зависимости между введенными понятиями описываются следующей леммой.

Лемма 3.1. *Пусть $M \in \mathcal{M}$, тогда*

(а) *Для любой модели $\mathfrak{M}$ теории F_M выполняется* Oracle($\mathfrak{M}$) $\in$ Nonstop(M).

(б) *Для любого $\Delta \in$ Nonstop(M) существует модель $\mathfrak{M} \in \operatorname{Mod} F_M$, состоящая из одного лишь стандартного блока, такая что* Oracle($\mathfrak{M}$) $= \Delta$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} \in \operatorname{Mod} F_M$, $\Delta = $ Oracle($\mathfrak{M}$). Согласно аксиомам МТ стандартный блок модели $\mathfrak{M}$ представляет собой развернутое во времени Δ-вычисление на машине M. Тогда в силу МТ.14 имеем $\Delta \in$ Nonstop (M).

Докажем второе утверждение. Пусть $\Delta \in$ Nonstop (M). Развернув Δ-вычисление на машине M во времени, мы можем построить верхнюю половину стандартного блока, удовлетворяющего всем аксиомам МТ, но пока еще не связанного ни с какой моделью. После этого «приклеим» нижнюю половину, поставим полученный блок на каркас и вложим в каждый его K-путь по одной компоненте. В итоге получим нужную модель. □

Следствие 3.2. (а) $\mathrm{Nonstop}(M) = \{\mathrm{Oracle}(\mathfrak{M}) | \mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F_M\}$.

(б) *Теория* F_M *непротиворечива тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Nonstop}(M) \neq \varnothing$.

§ 4. СТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ В ЦЕЛОМ

Вначале получим описание всех возможных типов блоков.

Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольный блок модели $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F_M$. Через Σ, где Σ есть одна из букв O, K, Ш, Г, C, Λ, обозначим условие, что блок $\mathfrak{B}$ имеет хотя бы одну Σ-точку. Например, условие O означает, что $\mathfrak{B}$ — стандартный блок. Введем еще три альтернативных условия:

В — блок целиком расположен в верхней части,

Н — блок целиком расположен в нижней части,

ВН — блок содержит J-точки.

Установим некоторые зависимости.

Лемма 4.1. (а) $ВН \,\&\, Г \to O$.

(б) $ВН \,\&\, Ш \to O$.

(в) $ВН \,\&\, \Lambda \to O$.

(г) *Если* $d > 2$, *то* $Ш \,\&\, Г \to O$.

(д) $ВН \,\&\, C \to K$.

(е) $\Lambda \to C$.

(ж) $Ш \to K$.

Доказательство. (а) Предположим, что блок $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условиям $ВН$ и Г. Двигаясь по Г-трассе вниз, мы, не выходя за пределы блока $\mathfrak{B}$, достигнем точки O.

(б), (в) — доказываются аналогично.

(г) Предположим, что блок $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условиям Ш и Г, причем $d > 2$. Справа от линии шума по МТ.6 не может быть K-точек, поэтому R-S-связи в этой части блока по аксиоме МТ.8 имеют форму простой сетки. Отсюда вытекает, что Г-трасса не может оказаться правее линии шума. Действительно, предположим противное. Согласно МТ.9 «коэффициент наклона» Г-трассы по отношению к R-S-сети равен $1/2$ или $-1/2$, а по МТ.5 «коэффициент наклона» линии шума равен $1/d$, причем $d > 2$. Поэтому, двигаясь по Г-трассе вверх, мы неизбежно встретимся с линией шума, в противоречие с аксиомой МТ.15. Таким образом, мы доказали, что Г-трасса должна находиться слева от линии шума. Двигаясь вниз, мы необходимо дойдем до обрыва Г-трассы, что даст нам точку O.

(д) Предположим, что блок $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условиям $ВН$ и C. Рассмотрим C-точку u этого блока. S-цепь, идущая вверх от u, должна состоять из C-точек вплоть до стыка с верхней частью. Применяя аксиому ОРК.8, найдем в блоке $\mathfrak{B}$ точку $v \in K$.

(е) Следует из аксиомы ОРК.1.

(ж) Следует из аксиом МТ.3, 5. □

Лемма 4.2. *Если блок* $\mathfrak{B}$ *содержит более одной точки исполнения команд, то* $\mathfrak{B}$ *— стандартный блок.*

Доказательство. Возьмем в блоке $\mathfrak{B}$ два L-класса l_0 и l_1 с условием, что эти классы содержат точки исполнения команд u_0 и u_1, причем расстояние t от l_0 до l_1 минимально возможное для блока $\mathfrak{B}$ (см. рис. 8).

Из минимальности t следует, что в промежутке между l_0 и l_1 нет точек исполнения команд. Поэтому K-трассы, проходящие через точки u_0 и u_1, различны, следовательно, они не могут неограниченно продолжаться вниз. Согласно МТ.6 обрыв K-трасс вниз возможен в трех слу-

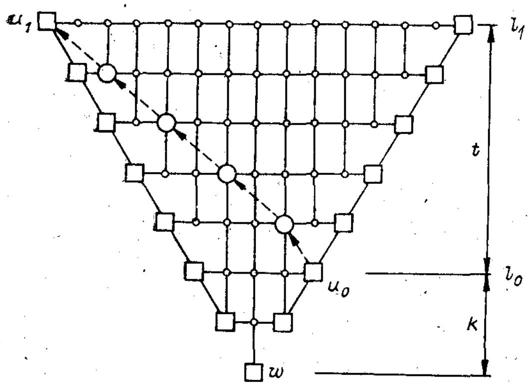

Рис. 8.

чаях. В случаях (а), (б), указанных в этой аксиоме, блок будет стандартным по лемме 4.1. Случай (в) невозможен, так как он противоречит минимальности t. Действительно, на рис. 8 представлен случай, когда расстояние k до ближайшей предшествующей точки w исполнения команды максимально при данном t, но даже в этом случае $t = 2k + 1$ (в действительности между точками w и u_0 должна быть еще одна точка исполнения команды). □

Назовем *типом блока* его полное описание в терминах условий

$$BH,\ B,\ H,\ O,\ K,\ \text{Ш},\ \Gamma,\ C,\ \Lambda.$$

В табл. 1 приведены все возможные типы блоков при условии $d > 2$. В дальнейшем будем считать, что это условие выполнено. Символ 1 в графе таблицы означает, что соответствующее условие выполнено, символ 0 — ложно, незаполненная графа означает, что условие ложно из тривиальных соображений.

Типы блоков обозначены буквами Б_0, Б_1, …, Б_{11}. Так, например, тип Б_6 имеет описание B, K, $\neg\text{Ш}$, $\neg\Gamma$, условия O, C, Λ предполагаются ложными (их ложность вытекает из условия B). Невозможность других типов следует из леммы 4.1.

Теперь коснемся параметров Δ, δ, ν, i, j, используемых в табл. 1. Запись $\text{Б}_0(\Delta)$ означает тип изоморфизма стандартного блока модели $\mathfrak{M}$, такой что $\text{Oracle}(\mathfrak{M}) = \Delta$. Согласно леммам 2.1, 3.1 блок с такими условиями определен в точности тогда, когда $\Delta \in \text{Nonstop}(M)$. Блок типа Б_5

Таблица 1. **Типы блоков**

Место блока	Условия: О	К	Ш	Г	С	Λ	Обозначение типа	Название
ВН	1	1	1	1	1	1	$\text{Б}_0(\Delta)$	Стандартный блок
ВН	0	1	0	0	1	0	$\text{Б}_1(\delta)$	Блок нестандартного куска ленты с битом информации
ВН	0	1	0	0	0	0	Б_2	Блок нестандартного куска ленты без информации
ВН	0	0	0	0	0	0	Б_3	Пустой блок на стыке верхней и нижней части
В		1	1	0			Б_4	Блок шума
В		1	0	1			$\text{Б}_5(\nu, i, j)$	Блок исполнения команды
В		1	0	0			$\text{Б}_6(i)$	Блок, пересеченный одной K-трассой
В		0	0	1			$\text{Б}_7(\nu, j)$	Блок движения головки
В		0	0	0			Б_8	Пустой блок в верхней части
Н					1	1	Б_9	Блок с Λ-линией, порождающей веер C-трасс
Н					1	0	Б_{10}	Блок, пересеченный одной C-трассой
Н					0	0	Б_{11}	Пустой блок в нижней части

Примечание. $\Delta \in \text{Nonstop}(M)$, $\sigma \in \{0,1\}$, $\nu\{L, R\}$, $0 \leqslant i < d$, $0 \leqslant j < e$.

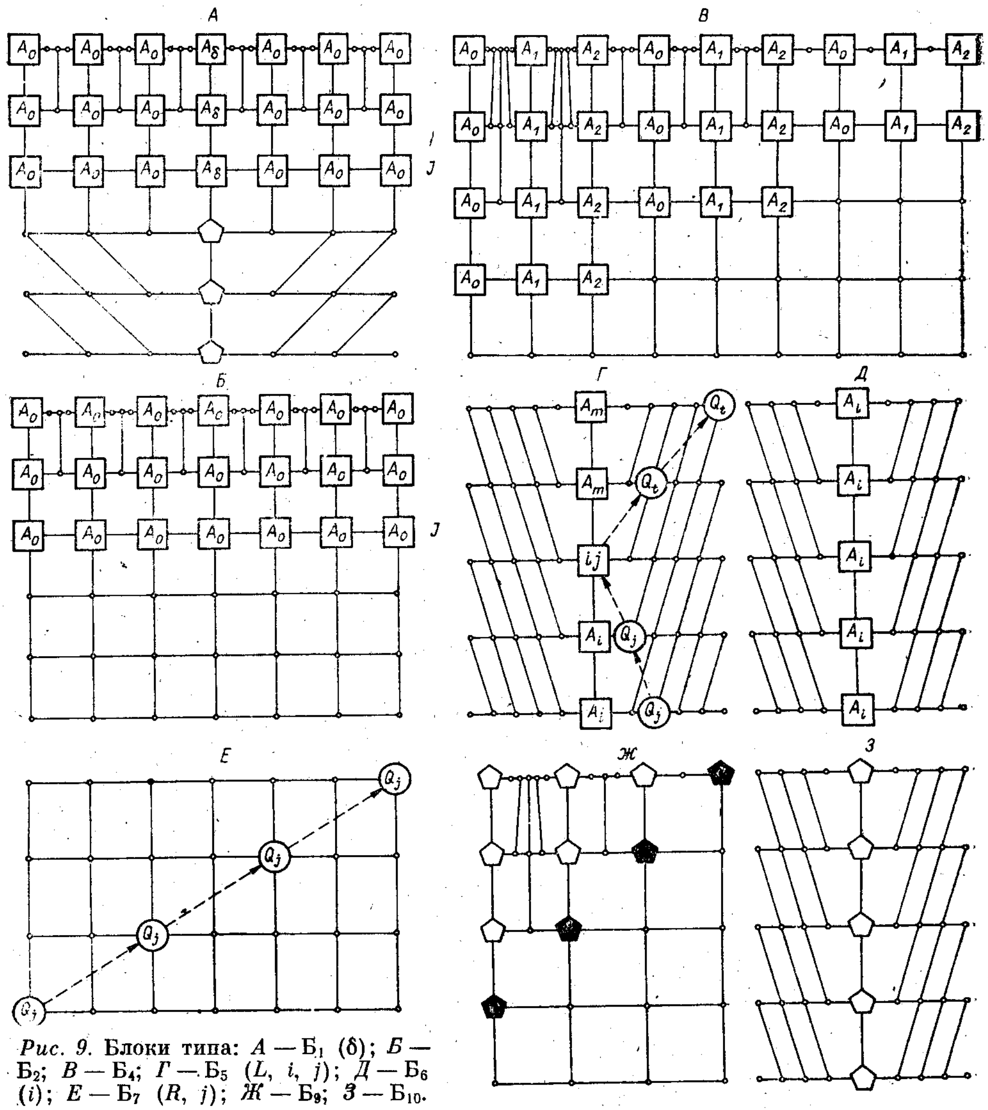

Рис. 9. Блоки типа: *А* — $Б_1$ (δ); *Б* — $Б_2$; *В* — $Б_4$; *Г* — $Б_5$ (L, i, j); *Д* — $Б_6$ (i); *Е* — $Б_7$ (R, j); *Ж* — $Б_9$; *З* — $Б_{10}$.

должен содержать точку исполнения команды. Так как условие O ложно для типа $Б_5$, то по лемме 4.2 в любом блоке такого типа должна быть ровно одна точка исполнения команды. На рис. 9, *А* — *З* показано устройство блоков всех типов, кроме стандартного и трех пустых типов. Эти рисунки показывают также смысл параметров δ, ν, i, j. Отметим, что аксиомой МТ.14 запрещены блоки $Б_5(\nu, i, j)$ такие, что к ситуации $a_i q_j$ неприменима ни одна из команд машины M.

Существование и единственность блоков типа $Б_0(\Delta)$ мы доказали выше. Существование блоков других типов, указанных в табл. 1, доказывается путем построения моделей, единственность доказывается методом плетения сетей. Мы опускаем детали. Таким образом, в табл. 1 представлены все возможные типы изоморфизма блоков (понятие изоморфизма блоков определено в § 2).

Приступим теперь к описанию моделей теории F_M в целом. Назовем *зоной* модели $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F_M$ совокупность $\mathfrak{C}$ блоков, расположенных в пределах одной P-цепи этой модели. Зону, пересекаемую L-классом J, назовем *стандартной*.

Таблица 2. **Типы зон**

Обозначение типа зоны	Типы блоков в зоне		Название зоны
	существенные	несущественные	
$Z_0(\Delta)$	$Б_0(\Delta)$	$Б_1, Б_2, Б_3$	Стандартная зона
$Z'_В(\nu, i, j)$	$Б_4, Б_5(\nu, i, j)$	$Б_6, Б_8$	Зона в верхней части с точкой исполнения команды
$Z''_В(\nu, j)$	$Б_4, Б_7(\nu, j)$	$Б_6, Б_8$	Зона в верхней части без точки исполнения команды
$Z_Н$	$Б_9$	$Б_{10}, Б_{11}$	Зона в нижней части

Устройство зон различных типов описывается в табл. 2. В графе «Существенные» указаны типы блоков, которые должны быть в зоне ровно в одном экземпляре. Существование таких блоков вытекает из аксиом КРК.25, ОРК.3, МТ.5, 9. В графе «Несущественные» приведены типы блоков, которые могут быть в зоне в любом количестве.

Пусть $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ — зоны некоторых моделей. Назовем эти зоны *изоморфными*, если существует взаимно однозначное соответствие между точками (т. е. E-классами) этих зон, сохраняющее предикаты языка (2.1). Очевидно, что две зоны будут изоморфными, если они имеют одинаковый тип и, кроме того, если они содержат одинаковые наборы блоков несущественных типов.

В любой модели стандартная зона должна быть ровно одна, зоны других типов могут быть в любом количестве. Отметим, что модели, имеющие идентичные описания на языке типов блоков и зон, могут оказаться неизоморфными из-за различий в числе компонент.

§ 5. АКСИОМА НОРМАЛИЗАЦИИ

Перейдем к описанию последней аксиомы теории F^*_M. Основная роль этой аксиомы состоит в том, чтобы обеспечить модельную полноту теории. Предварительно введем ряд вспомогательных понятий.

Пусть $\nu \in \{L, R\}$, $0 \leqslant i < d$, $0 \leqslant j < e$, $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F_M$.

а) Назовем $\langle \nu, i, j \rangle$-*точкой* модели $\mathfrak{M}$ ее E-класс, который является точкой исполнения команды в ситуации $a_i q_j$ с дополнительным условием, что непосредственно перед исполнением команды головка движется в направлении ν.

б) Назовем $\langle \nu, j \rangle$-*точкой* модели $\mathfrak{M}$ ее точку, лежащую на участке Г-трассы с наклоном ν и отмеченную предикатом Q_j.

Будем придерживаться соглашения, что каждая $\langle \nu, i, j \rangle$-точка является $\langle \nu, j \rangle$-точкой.

в) Через J_k, $k < \omega$, обозначим L-класс, который является k-м P-последователем класса J.

г) Назовем *весом тройки* $\langle \nu, i, j \rangle$ *в модели* $\mathfrak{M}$ число

$$\| \langle \nu, i, j \rangle \|_{\mathfrak{M}} = \begin{cases} m, & \text{если множество } \langle \nu, i, j \rangle\text{-точек стандартного блока модели } \mathfrak{M} \text{ конечно, и последняя из них (считая по } P\text{-цепи), находится в классе } J_m. \\ \omega, & \text{если множество } \langle \nu, i, j \rangle\text{-точек стандартного блока модели } \mathfrak{M} \text{ бесконечно.} \end{cases}$$

д) Подобным образом определяется число $\|\langle\nu, j\rangle\|_{\mathfrak{M}}$ — *вес пары* $\langle\nu, j\rangle$ *в модели* $\mathfrak{M}$.

Определение 1. Назовем машину M *нормальной*, если существует натуральное число n_M такое, что для любой тройки $\langle\nu, i, j\rangle$ выполнено одно из двух условий:

$$(\forall\mathfrak{M}\in\operatorname{Mod}F_M)\,\|\langle\nu, i, j\rangle\|_{\mathfrak{M}}<n_M, \tag{5.1}$$

$$(\forall\mathfrak{M}\in\operatorname{Mod}F_M)\,\|\langle\nu, i, j\rangle\|_{\mathfrak{M}}=\omega. \tag{5.2}$$

Будем называть тройку $\langle\nu, i, j\rangle$ *конечно* или же *бесконечно реализуемой* в соответствии с тем, какой из случаев, (5.1) или (5.2), имеет место.

Утверждения следующей леммы достаточно очевидны.

Лемма 5.1. *Пусть* $0\leqslant j<e$, $\nu\in\{L, R\}$, $\mathfrak{M}\in\operatorname{Mod}F_M$, n — *произвольное натуральное число, тогда*

(а) *если* $(\forall i<d)\,\|\langle\nu, i, j\rangle\|_{\mathfrak{M}}<n$, *то* $\|\langle\nu, j\rangle\|_{\mathfrak{M}}<n$;

(б) *если* $(\exists i<d)\,\|\langle\nu, i, j\rangle\|_{\mathfrak{M}}=\omega$, *то* $\|\langle\nu, j\rangle\|_{\mathfrak{M}}=\omega$.

Из леммы вытекает, что если M — нормальная машина, то для любой пары $\langle\nu, j\rangle$ выполняется одно из двух условий:

$$(\forall\mathfrak{M}\in\operatorname{Mod}F_M)\,\|\langle\nu, j\rangle\|_{\mathfrak{M}}<n_M, \tag{5.3}$$

$$(\forall\mathfrak{M}\in\operatorname{Mod}F_M)\,\|\langle\nu, j\rangle\|_{\mathfrak{M}}=\omega. \tag{5.4}$$

Будем говорить, что пара $\langle\nu, j\rangle$ является *конечно* или же *бесконечно реализуемой* в соответствии с тем, какой из случаев, (5.3) или (5.4), имеет место для этой пары.

В случае, когда M — нормальная машина, определим следующую аксиому, которую будем называть аксиомой нормализации:

НОРМ. В каждом случае, когда тройка $\langle\nu, i, j\rangle$ является конечно реализуемой, за пределами классов J_k, $k=0, 1, \ldots, n_M$, не должно быть $\langle\nu, i, j\rangle$-точек. То же самое требуется для каждой конечно реализуемой пары.

Присоединяя к F_M аксиому НОРМ, получим теорию F_M^*. Отметим, что для эффективного построения аксиомы нормализации достаточно знать величину n_M и список всех конечно реализуемых троек.

Аксиома нормализации запрещает в моделях нестандартные зоны следующих типов:

$Z'_B(\nu, i, j)$ *в случае конечно реализуемой тройки* $\langle\nu, i, j\rangle$,

$Z''_B(\nu, j)$ *в случае конечно реализуемой пары* $\langle\nu, j\rangle$.

Вместе с тем аксиома нормализации не оказывает влияния на стандартную зону. Это позволяет доказать следующий факт:

Лемма 5.2. *Если модель* $\mathfrak{M}\in\operatorname{Mod}F_M$ *состоит из одного стандартного блока, то* $\mathfrak{M}\in\operatorname{Mod}F_M^*$.

Доказательство. Легко видеть, что НОРМ является верным утверждением о стандартном блоке любой модели $\mathfrak{M}\in\operatorname{Mod}F_M$. □

Следствие 5.3. *Утверждения леммы 3.1 и следствия 3.2 в случае, когда* M — *нормальная машина, останутся верными при замене* F_M *на* F_M^*

§ 6. СОВЕРШЕННЫЕ МОДЕЛИ

В этом параграфе разрабатывается теоретико-модельная техника исследования теории F_M^*.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная модель теории F_M^* мощности α. Назовем модель $\mathfrak{M}$ *совершенной над множеством* $V \subset |\mathfrak{M}|$, если выполнены условия:

(6.1) Модель $\mathfrak{M}$ имеет α зон типа $Z'_B(\nu, i, j)$, не пересекающихся с V, для каждой бесконечно реализуемой тройки $\langle \nu, i, j \rangle$.

(6.2) Модель $\mathfrak{M}$ имеет α зон типа $Z''_B(\nu, j)$, не пересекающихся с V, для каждой бесконечно реализуемой пары $\langle \nu, j \rangle$.

(6.3) Модель $\mathfrak{M}$ имеет α зон типа Z_H, не пересекающихся с V.

(6.4) В зоне типа Z_0 модель $\mathfrak{M}$ имеет по α блоков, не пересекающихся с V, каждого из типов $Б_1(0)$, $Б_1(1)$, $Б_2$, $Б_3$.

(6.5) В каждой зоне в верхней части модель $\mathfrak{M}$ имеет по α блоков, не пересекающихся с V, каждого из типов $Б_6(0)$, $Б_6(1)$, ..., $Б_6(d-1)$, $Б_8$.

(6.6) В каждой зоне в нижней части модель $\mathfrak{M}$ имеет α блоков, не пересекающихся с V, типов $Б_{10}$ и $Б_{11}$.

(6.7) Каждый K-путь модели $\mathfrak{M}$ содержит по α компонент, не пересекающихся с V.

Непосредственно из определения вытекает свойство:

Лемма 6.1. *Если* $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F_M^*$, $V_0 \subset V \subset |\mathfrak{M}|$, *и модель* $\mathfrak{M}$ *является совершенной над* V, *то* $\mathfrak{M}$ *будет совершенной над* V_0.

Модель, совершенную над пустым множеством, будем называть *совершенной моделью. Если* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ и модель $\mathfrak{N}$ является совершенной над $|\mathfrak{M}|$, то будем называть $\mathfrak{N}$ *совершенным расширением модели* $\mathfrak{M}$.

Введем обозначения:

$\mathbf{K}(\mathfrak{M}) \rightleftharpoons$ семейство всех K-путей модели $\mathfrak{M}$,

$\mathbf{K}_0(\mathfrak{M}) \rightleftharpoons$ семейство всех K-путей стандартного блока модели $\mathfrak{M}$,

$k(\mathfrak{M}) \rightleftharpoons$ мощность $\mathbf{K}(\mathfrak{M})$,

$k_0(\mathfrak{M}) \rightleftharpoons$ мощность $\mathbf{K}_0(\mathfrak{M})$.

Лемма 6.2. *Для любой модели* $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F_M^*$ *выполняются соотношения*

(а) $\omega \leqslant k_0(\mathfrak{M}) \leqslant 2^\omega$;

(б) $k_0(\mathfrak{M}) \leqslant k(\mathfrak{M}) \leqslant \max\{k_0(\mathfrak{M}), \overline{\overline{\mathfrak{M}}}\}$;

(в) *если* $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \omega$, *то* $k(\mathfrak{M}) = k_0(\mathfrak{M})$;

(г) *если* $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} \geqslant 2^\omega$, *то* $k(\mathfrak{M}) \leqslant \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$.

Доказательство. Утверждение (а) и первое неравенство в (б) очевидны. Чтобы доказать второе неравенство в (б), перечислим все K-пути в модели $\mathfrak{M}$. В стандартном блоке, по определению, имеется $k_0(\mathfrak{M})$ различных K-путей, в блоках типов $Б_1$, $Б_2$, $Б_4$ — счетное число, в $Б_5$ — один или два, в $Б_6$ — один, в блоках других типов нет K-путей. Пункты (в) и (г) являются следствиями двух предыдущих соотношений. □

Две следующие леммы устанавливают важнейшие свойства совершенных расширений. Предварительно дадим одно определение.

Определение 2. Назовем машину $M \in \mathcal{M}$ *допустимой*, если для любого $\Delta \in \mathrm{Nonstop}(M)$ множества Δ и $N \setminus \Delta$ являются бесконечными.

Класс нормальных допустимых машин из $\mathcal{M}$ будем обозначать в дальнейшем через $\mathcal{M}^*$.

Лемма 6.3. *Пусть* $M \in \mathcal{M}^*$, *тогда каждая модель* $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F_M^*$ *имеет элементарное совершенное расширение любой мощности* $\alpha \geqslant \max\{k_0(\mathfrak{M}), \mathfrak{m}\}$.

Доказательство. Возьмем произвольное элементарное расширение $\mathfrak{N}$ модели $\mathfrak{M}$ мощности α. Из леммы 6.2 следует, что $k(\mathfrak{N}) \leqslant \alpha$. Рассмотрим язык

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_M \cup \{c_a \mid a \in |\mathfrak{N}|\}.$$

Через $\mathfrak{N}^*$ обозначим естественное обогащение модели $\mathfrak{N}$ до языка $\mathcal{L}^*$. Наша цель сейчас — описать различные типы расширений модели $\mathfrak{N}$, необходимые для построения совершенной модели.

Для построения элементарного расширения $\mathfrak{N}' \succ \mathfrak{N}$ мощности α, в котором имеется хотя бы одна новая зона типа $Z'_B(\nu, i, j)$, указанного в (6.1), рассмотрим множество формул $\Sigma(x)$, утверждающее

а) x является $\langle \nu, i, j\rangle$-точкой,

б) $\neg xLc_a$ для всех $a \in |\mathfrak{N}|$.

Так как тройка $\langle \nu, i, j\rangle$ бесконечно реализуема, то множество $\Sigma(x)$ локально совместно с $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}^*)$. Элементарное расширение $\mathfrak{N}'$ модели $\mathfrak{N}^*$ мощности α, реализующее $\Sigma(x)$, будет искомой моделью. Подобным образом рассматриваются типы зон, указанные в (6.2), (6.3).

Предположим, что $\mathfrak{C}$ — зона модели $\mathfrak{N}$ типа Z_B. Для построения элементарного расширения $\mathfrak{N}' \succ \mathfrak{N}$ мощности α, которое в зоне $\mathfrak{C}$ имеет новый блок типа Б$_6(i)$, рассмотрим множество формул

$$\Sigma(x) = \{xLc_b\} \cup \{\neg xEc_a \mid a \in |\mathfrak{N}|\} \cup \{A_i(x)\} \cup p(x),$$

где $b \in \mathfrak{C}$, а $p(x)$ — множество формул, утверждающее, что R-S-связи в окрестности x имеют форму типа Б$_6$. Согласно описанию моделей в зоне $\mathfrak{C}$ модели $\mathfrak{N}$ имеется блок шума, в котором можно реализовать любую конечную часть множества $\Sigma(x)$. В качестве $\mathfrak{N}'$ можно взять элементарное расширение модели $\mathfrak{N}^*$ мощности α, реализующее $\Sigma(x)$. Подобным образом рассматриваются другие типы зон и блоков, указанные в (6.4)—(6.6). Отметим, что при рассмотрении блоков типа Б$_1(0)$ и Б$_1(1)$ используется допустимость машины M.

Рассмотрим теперь произвольный K-путь $\mathcal{K} \in \mathbf{K}(\mathfrak{N})$. Возьмем элемент $b \in |\mathfrak{N}|$, находящийся в $\mathcal{K}$. Построим следующее множество формул:

$$\Sigma(x) = \{xEc_b\} \cup \{x \neq c_a \mid a \in |\mathfrak{N}|\} \cup$$
$$\cup \{D^k(x) \text{ находится в } \mathcal{K} \mid k < \omega\}.$$

Здесь $D^0(x) = x$, $D^{k+1}(x) = D(D^k(x))$. Так как всякий конечный участок пути $\mathcal{K}$ покрыт какой-либо компонентой модели $\mathfrak{N}$, то множество $\Sigma(x)$ локально совместно с теорией $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}^*)$. Элементарное расширение $\mathfrak{N}'$ модели $\mathfrak{N}^*$, реализующее $\Sigma(x)$, будет, очевидно, содержать новую компоненту, проходящую по $\mathcal{K}$.

Используя три вида расширений, описанные выше, можно построить элементарную цепь длины α, объединение которой будет элементарным совершенным расширением модели $\mathfrak{M}$ мощности α. □

Лемма 6.4. *Для любой машины $M \in \mathscr{M}^*$ справедливы утверждения*

(а) *Пусть* $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F^*_M$, $\alpha \geqslant \max\{k_0(\mathfrak{M}), \overline{\overline{\mathfrak{M}}}\}$, *тогда совершенное расширение модели $\mathfrak{M}$ мощности α определено однозначно с точностью до изоморфизма над $\mathfrak{M}$.*

(б) *Любые две совершенные модели* $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2 \in \mathrm{Mod}\, F^*_M$ *одной мощности с условием* $\mathrm{Oracle}(\mathfrak{N}_1) = \mathrm{Oracle}(\mathfrak{N}_2)$ *изоморфны.*

Доказательство. (а) Пусть $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ — произвольные совершенные расширения модели $\mathfrak{M}$, имеющие мощность α.

Устанавливая соответствие между зонами одинаковых типов, затем переходя к L-классам и блокам и, наконец, к E-классам этих моделей, мы построим в итоге биективное соответствие f между точками (т. е. E-классами) моделей $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$, обладающее свойствами:

А) *f сохраняет предикаты P, L, E, R, S, B, H, J, O, U, а также все предикаты из* $\mathscr{L}_3 \cup \mathscr{L}_4$;

Б) $f([x]_E) = [x]_E$ *для всех* $x \in |\mathfrak{M}|$.

После этого приступим к построению поэлементного отображения $h: \mathfrak{N}_1 \to \mathfrak{N}_2$, отдельно рассматривая части $X \cup Y$ и W этих моделей.

1. Отображение на множестве $X \cup Y$. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — модели теории квазиследования, полученные из моделей $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ огра-

ничением до множества $X \cup Y$. Легко видеть, что $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ являются расширениями модели $\mathfrak{A}$. Требуется построить изоморфизм

$$h^{(1)} : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2, \tag{6.8}$$

тождественный на $\mathfrak{A}$ и согласованный с отображением f между точками каркасов $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$. В данном случае можно использовать следующее свойство продолжения изоморфизмов:

Предложение [1, лемма 12]. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — модели теории QS, причем $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_2$. Пусть $h^* : \mathfrak{A}_1/_\sim \to \mathfrak{A}_2/_\sim$ — произвольный $\lhd$-изоморфизм фактор-моделей с условием, что $h^*([a]_\sim) = [a]_\sim$ для всех $a \in |\mathfrak{A}|$. Тогда h^* продолжается до изоморфизма $h : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$, тождественного на $|\mathfrak{A}|$.*

Это предложение и дает изоморфизм (6.8) с нужными свойствами.

2. Отображение на множестве W. Используя (6.7), построим биекцию

$$g : \mathbf{K}(\mathfrak{R}_1) \to \mathbf{K}(\mathfrak{R}_2), \tag{6.9}$$

тождественную на $\mathbf{K}(\mathfrak{M})$, такую, чтобы соответствующие компоненты проходили по соответствующим K-путям. Не составит труда переделать отображение (6.9) в поэлементное отображение $h^{(2)}$, тождественное на $|\mathfrak{M}|$ и сохраняющее D-связи.

Объединяя две построенные части $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$, получим изоморфизм $h : \mathfrak{R}_1 \to \mathfrak{R}_2$, тождественный на $|\mathfrak{M}|$. Этим доказана первая часть леммы.

Вторая часть доказывается по той же схеме, лишь с некоторыми упрощениями, связанными с тем, что отпадает необходимость заботиться о тождественности h на подмодели. Условие $\mathrm{Oracle}(\mathfrak{R}_1) \equiv \mathrm{Oracle}(\mathfrak{R}_2)$ обеспечит изоморфизм стандартных блоков, необходимый на этапе построения функции f. □

Следствие 6.5. *Каждое совершенное расширение является элементарным расширением.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная модель теории F_M^*, $\mathfrak{R}$ — ее совершенное расширение мощности α. По лемме 6.3 модель $\mathfrak{M}$ имеет элементарное совершенное расширение $\mathfrak{R}'$ мощности α, а по лемме 6.4 модели $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ изоморфны над $\mathfrak{M}$. □

§ 7. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТЕОРИИ F_M^*.

Применим разработанную технику совершенных расширений для изучения свойств теории F_M^*.

Лемма 7.1. *Пусть $M \in \mathcal{M}^*$, тогда теория F_M^* модельно полна.*

Доказательство. Возьмем произвольные модели $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ теории F_M^* такие, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$. Для доказательства леммы достаточно показать, что $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_2$. По лемме 6.3 модель $\mathfrak{M}_2$ имеет совершенное элементарное расширение $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \prec \mathfrak{R}.$$

Из леммы 6.1 следует, что $\mathfrak{R}$ будет совершенным расширением модели $\mathfrak{M}_1$. Тогда следствие 6.5 дает $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{R}$. В результате получаем $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_2$. □

Лемма 7.2. *Пусть $M \in \mathcal{M}^*$, тогда для любых моделей $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2 \in \mathrm{Mod}\, F_M^*$ выполняется*

$$\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2 \leftrightarrow \mathrm{Oracle}(\mathfrak{M}_1) = \mathrm{Oracle}(\mathfrak{M}_2).$$

Доказательство. Импликация $\to$ очевидна. Обратно, предположим, что $\mathrm{Oracle}(\mathfrak{M}_1) = \mathrm{Oracle}(\mathfrak{M}_2)$. Положим

$$\alpha = \max\{k_0(\mathfrak{M}_1),\ k_0(\mathfrak{M}_2),\ \overline{\overline{\mathfrak{M}_1}},\ \overline{\overline{\mathfrak{M}_2}}\}.$$

По лемме 6.3 модели $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ имеют элементарные совершенные расширения $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ мощности α. По лемме 6.1 получаем, что $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ — совершенные модели одной мощности, при этом

$$\text{Oracle}(\mathfrak{N}_1) = \text{Oracle}(\mathfrak{M}_1) = \text{Oracle}(\mathfrak{M}_2) = \text{Oracle}(\mathfrak{N}_2).$$

По лемме 6.4 имеем $\mathfrak{N}_1 \cong \mathfrak{N}_2$, отсюда $\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2$. □

Теперь мы имеем возможность описать все пополнения теории F_M^*. Для этого рассмотрим последовательность предложений, касающихся содержимого оракула

$$\Omega_i \rightleftharpoons \text{«}\textit{В ячейке Я}_i\ \textit{содержится единица}\text{»},\ i < \omega. \tag{7.1}$$

Пусть Δ — произвольное подмножество N. Обозначим

$$F_M^*[\Delta] \rightleftharpoons F_M^* \cup \{\Omega_i \mid i \in \Delta\} \cup \{\neg\, \Omega_j \mid j \in N \setminus \Delta\}.$$

Лемма 7.3. *Пусть $M \in \mathscr{M}^*$, тогда*

(а) *если $\Delta \in \mathrm{Nonstop}(M)$, то теория $F_M^*[\Delta]$ полна;*

(б) *если $\Delta \notin \mathrm{Nonstop}(M)$, то теория $F_M^*[\Delta]$ противоречива;*

(в) *предложения Ω_i, $i < \omega$, порождают алгебру Линденбаума теории F_M^*.*

Доказательство. Из определений следует, что для любой модели $\mathfrak{M}$ теории F_M^* выполняется

$$\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F_M^*[\Delta] \to \text{Oracle}(\mathfrak{M}) = \Delta.$$

Используя лемму 7.3 и следствие 5.3, получаем (а), (б). Пункт (в) является непосредственным следствием двух предыдущих пунктов. □

Охарактеризуем строение простых моделей. Предварительно дадим одно определение. Назовем K-путь $\mathscr{K}$ модели $\mathfrak{M}$ *конечнозвенным*, если $\mathscr{K}$ состоит из конечного числа K-трасс. В противном случае $\mathscr{K}$ назовем *бесконечнозвенным* K-путем.

Лемма 7.4. *Модель $\mathfrak{M}$ теории $F_M^*[\Delta]$ будет простой тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(П.1) *$\mathfrak{M}$ — одноблочная модель;*

(П.2) *конечнозвенные K-пути модели $\mathfrak{M}$ содержат по одной компоненте;*

(П.3) *бесконечнозвенные K-пути модели $\mathfrak{M}$ не содержат компонент.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{M}$ — простая модель. Необходимость условия (П.1) очевидна. От противного докажем (П.2). Предположим, что по конечнозвенному K-пути $\mathscr{K}$ в модели $\mathfrak{M}$ проходит β компонент и $\beta \neq 1$. Случай $\beta = 0$ невозможен, поскольку последняя K-трасса из $\mathscr{K}$ не покрывалась бы в этом случае компонентами, в противоречие с ТРН.1. Следовательно, $\beta \geqslant 2$. Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ модель, которая получается из $\mathfrak{M}$ выбрасыванием всех компонент, проходящих по $\mathscr{K}$, кроме одной. Тогда $\mathfrak{M}$ не вложима в $\mathfrak{M}_1$, что противоречит простоте $\mathfrak{M}$. Также от противного докажем (П.3). Предположим, что по бесконечнозвенному K-пути $\mathscr{K}$ в модели $\mathfrak{M}$ проходит хотя бы одна компонента. Так как $\mathscr{K}$ — бесконечнозвенный путь, то каждый конечный его участок покрыт компонентами других K-путей. Выбрасывая из $\mathfrak{M}$ все компоненты, проходящие по $\mathscr{K}$, получим модель $\mathfrak{M}_1$, в которую нельзя вложить $\mathfrak{M}$, что противоречит простоте этой модели.

Предположим теперь, что модель $\mathfrak{M}$ теории $F_M^*[\Delta]$ удовлетворяет условиям (П.1—3), и $\mathfrak{M}'$ — произвольная модель этой теории. Стандартные блоки этих моделей изоморфны по лемме 2.1. Кроме того, по любому конечнозвенному K-пути в модели $\mathfrak{M}'$ должна проходить хотя бы одна компонента. Это обеспечивает существование изоморфного вложения $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}'$. В силу модельной полноты оно будет элементарным. □

Непосредственно из доказанной леммы вытекает следующее условие существования простой модели.

Лемма 7.5. *Теория* $F_M^*[\Delta]$ *имеет простую модель тогда и только тогда, когда через любую К-точку блока* $Б_0(\Delta)$ *проходит хотя бы один конечнозвенный К-путь.*

Теперь исследуем насыщенные модели и тотальную трансцендентность.

Лемма 7.6. *Пусть* $M \in \mathscr{M}^*$, $\Delta \in \mathrm{Nonstop}(M)$, *тогда*

(а) *если блок* $Б_0(\Delta)$ *содержит счетное число К-путей, то теория* $F_M^*[\Delta]$ *является тотально трансцендентной;*

(б) *если блок* $Б_0(\Delta)$ *содержит несчетное число К-путей, то теория* $F_M^*[\Delta]$ *не тотально трансцендентна и не имеет счетной насыщенной модели.*

Доказательство. (а) Предположим, что выполнены все условия леммы. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная счетная модель теории $F_M^*[\Delta]$. По условию $k_0(\mathfrak{M}) = \omega$, тогда по лемме 6.3 модель $\mathfrak{M}$ имеет счетное элементарное совершенное расширение $\mathfrak{N}$. Достаточно показать, что каждый тип $p(\dot{x})$ над $\mathfrak{M}$ реализуется в $\mathfrak{N}$. Для этого реализуем тип p в некотором счетном элементарном расширении $\mathfrak{M}'$ модели $\mathfrak{M}$. Так как $k_0(\mathfrak{M}') = k_0(\mathfrak{M}) = \omega$, то по лемме 6.3 модель $\mathfrak{M}'$ имеет счетное элементарное совершенное расширение $\mathfrak{N}'$. Ясно, что тип p реализуется в $\mathfrak{N}'$. По лемме 6.1 $\mathfrak{N}'$ будет совершенным расширением модели $\mathfrak{M}$, тогда по лемме 6.4 модели $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$ изоморфны над $\mathfrak{M}$. Следовательно, тип p реализуется в $\mathfrak{N}$.

(б) Снова предположим, что выполнены условия леммы. Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный K-путь стандартного блока $Б_0(\Delta)$. Обозначим через $\mathscr{K}^*(x)$ множество формул, утверждающее, что $x \in (J \cup Ш) \cap W$ и компонента, порожденная элементом x, проходит по $\mathscr{K}$. Ясно, что объединение $\mathscr{K}_1^*(x) \cup \mathscr{K}_2^*(x)$ при $\mathscr{K}_1 \neq \mathscr{K}_2$ несовместно с $F_M^*[\Delta]$. Следовательно, теория $F_M^*[\Delta]$ имеет несчетное множество 1-типов, что и доказывает п. (б) леммы. □

Замечание. Пусть $M \in \mathscr{M}^*$, тогда теория $F_M^*[\Delta]$ будет суперстабильной при любом $\Delta \in \mathrm{Nonstop}(M)$.

Доказательство проводится так же, как в п. (а) леммы, с использованием утверждений (б), (г) леммы 6.2. □

Лемма 7.7. *Модель* $\mathfrak{M}$ *теории* $F_M^*[\Delta]$ *является счетной насыщенной в том и только в том случае, когда* $\mathfrak{M}$ *является счетной совершенной моделью.*

Доказательство. Достаточно очевидно, что счетная насыщенная модель удовлетворяет всем пунктам определения совершенной модели (см. § 6) для случая $\alpha = \omega$. Обратно, предположим, что $\mathfrak{M}$ — счетная совершенная модель теории $F_M^*[\Delta]$. Из условия (6.7) получаем, что $k_0(\mathfrak{M}) = \omega$, тогда по лемме 7.6 теория $F_M^*[\Delta]$ имеет счетную насыщенную модель $\mathfrak{M}'$. Так как $\mathfrak{M}'$ необходимо удовлетворяет определению совершенной модели, то $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ по лемме 6.4. □

§ 8. ДЕРЕВЬЯ

В этом параграфе мы опишем понятия, связанные с деревьями. Используемый вариант понятия дерева введен в работе автора [7]. Инструмент деревьев будет играть важную роль в конструкции конечно аксиоматизируемых теорий, содержащих вычисления машин Тьюринга.

Перейдем к определениям.

Полным бинарным деревом назовем частично упорядоченное множество $\mathscr{D}_0 = \langle N; \preccurlyeq \rangle$ формы, изображенной на рис. 10. Выше по указанным связям расположены бо́льшие относительно $\preccurlyeq$ элементы.

$$\left.\begin{aligned} L(x) &= 2x+1 \text{ — } \textit{левый последователь элемента } x, \\ R(x) &= 2x+2 \text{ — } \textit{правый последователь элемента } x. \end{aligned}\right\} \qquad (8.1)$$

Деревом назовем всякое множество $\mathscr{D} \subseteq N$, удовлетворяющее условиям

Д1. $x \preccurlyeq y \,\&\, y \in \mathscr{D} \to x \in \mathscr{D}$.

Д2. $L(x) \in \mathscr{D} \leftrightarrow R(x) \in \mathscr{D}$, *для всех* $x \in N$.

На рис. 11 изображены три примера деревьев. Два первые — конечные деревья, третье дерево — бесконечное.

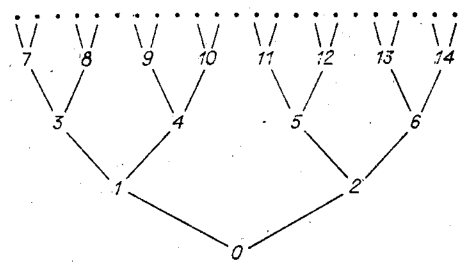

Рис. 10.

Элемент $x \in \mathscr{D}$ такой, что $L(x) \notin \mathscr{D}$, называется *тупиком* дерева $\mathscr{D}$. Дерево называется *атомным*, если над каждым его элементом есть хотя бы один тупик.

Цепью назовем множество $\pi \subseteq N$, удовлетворяющее условиям

Ц1. $x,\ y \in \pi \to x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$.

Ц2. $x \preccurlyeq y \,\&\, y \in \pi \to x \in \pi$.

Множество всех максимальных цепей дерева $\mathscr{D}$ будем обозначать через $\Pi(\mathscr{D})$, а множество всех конечных максимальных цепей этого дерева — через $\Pi^{\text{fin}}(\mathscr{D})$.

Для произвольного натурального числа n определим о. р. ф. $f_n(x)$ следующей схемой:

$$\begin{cases} f_n(0) = n, \\ f_n(L(x)) = L(f_n(x)), \\ f_n(R(x)) = R(f_n(x)), \end{cases}$$

где L и R определены формулами (8.1). Легко видеть, что функция f_n изоморфно отображает полное дерево в область $\{x \mid n \preccurlyeq x\}$ полного дерева.

Пусть $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ — деревья. Назовем их *прямой суммой* следующее дерево:

$$\mathscr{D}_1 \oplus \mathscr{D}_2 \rightleftharpoons \{0\} \cup f_1(\mathscr{D}_1) \cup f_2(\mathscr{D}_2)$$

(легко показать, что так определенное множество действительно является деревом). Дерево $\mathscr{D}_1 \oplus \mathscr{D}_2$ может быть получено путем прикрепления изоморфных копий слагаемых к тупикам трехэлементного дерева, изображенного на рис. 11, *б*.

Нам понадобится еще одна операция над деревьями. Назовем *прямой суммой последовательности деревьев* $\mathscr{D}_i$, $i < \omega$, следующее дерево:

$$\oplus\langle \mathscr{D}_i \mid i < \omega\rangle \rightleftharpoons \{0\} \cup \{2, 6, \ldots, k_n+1, \ldots, n<\omega\} \cup$$
$$\cup f_1(\mathscr{D}_0) \cup f_5(\mathscr{D}_1) \cup \cdots \cup f_{k_n}(\mathscr{D}_n) \cup \cdots,$$

где $k_n = 2^{n+2} - 3$. Это дерево может быть получено путем прикрепления изоморфных копий деревьев $\mathscr{D}_i$ к последовательным тупикам дерева, изображенного на рис. 11, *в*.

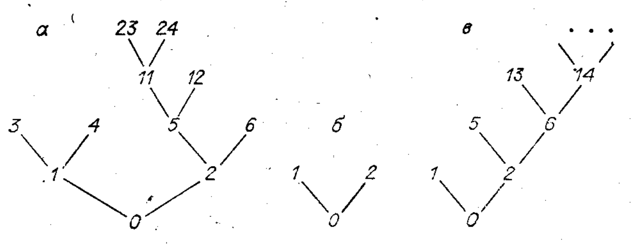

Рис. 11.

Изучим семейство всех максимальных цепей произвольного дерева $\mathscr{D}$. Пусть G — подмножество $\Pi(\mathscr{D})$. Цепь $\pi \in G$ назовем *изолированной в* G, если существует элемент $a \in \pi$

такой, что π — единственная цепь из G, проходящая через a. Через G' обозначим множество цепей $\pi \in G$, которые не являются изолированными в G. Индукцией по ординалам определим подмножества $\Pi_\alpha(\mathscr{D}) \subseteq \Pi(\mathscr{D})$ следующим образом:

а) $\Pi_0(\mathscr{D}) = \Pi(\mathscr{D})$,

б) $\Pi_{\alpha+1}(\mathscr{D}) = (\Pi_\alpha(\mathscr{D}))'$,

в) $\Pi_\gamma(\mathscr{D}) = \bigcap\limits_{\beta<\gamma} \Pi_\beta(\mathscr{D})$, *если* γ *— предельный ординал.*

Наименьшее α такое, что $\Pi_{\alpha+1}(\mathscr{D}) = \Pi_\alpha(\mathscr{D})$, назовем *рангом дерева* $\mathscr{D}$ и будем обозначать через $\operatorname{Rank} \mathscr{D}$. *Рангом цепи* $\pi \in \Pi(\mathscr{D})$ назовем ординал α, который обозначим через $\operatorname{Rank} \pi$, такой, что $\pi \in \Pi_\alpha(\mathscr{D})\setminus\Pi_{\alpha+1}(\mathscr{D})$. Ясно, что в общем случае функция ранга будет частично определена на множестве $\Pi(\mathscr{D})$. Назовем $\mathscr{D}$ *суператомным деревом*, если функция ранга всюду определена на $\Pi(\mathscr{D})$. Другими словами, дерево $\mathscr{D}$ будет суператомным, если $\Pi_\alpha(\mathscr{D}) = \varnothing$ при некотором α.

Данное выше определение функции ранга предложено С. С. Гончаровым и Б. Н. Дроботуном.

Из определения легко выводится, что для любого ординала $\alpha < \operatorname{Rank} \mathscr{D}$ существуют цепи $\pi \in \Pi(\mathscr{D})$, имеющие ранг α. При этом выполнено соотношение

$$\operatorname{Rank} \mathscr{D} = \sup \{\operatorname{Rank} \pi \mid \pi \in \Pi(\mathscr{D}) \,\&\, \operatorname{Rank} \pi \text{ определено}\}. \qquad (8.2)$$

Исследуем некоторые свойства функции ранга.

Лемма 8.1. *Для любого дерева* $\mathscr{D}$ *множество цепей* $\pi \in \Pi(\mathscr{D})$, *имеющих ранг, не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть $\pi \in \Pi_\alpha(\mathscr{D})\setminus\Pi_{\alpha+1}(\mathscr{D})$. Обозначим через $I(\pi)$ множество, состоящее из элементов, изолирующих цепь π в $\Pi_\alpha(\mathscr{D})$. Легко показать, что если цепи π_1 и π_2 имеют ранги, то $I(\pi_1) \cap I(\pi_2) = \varnothing$ при $\pi_1 \neq \pi_2$. Это вместе со счетностью множества N доказывает лемму. □

Лемма 8.2. *Ранг любого дерева является счетным ординалом. Если* $\mathscr{D}$ *— суператомное дерево, то* $\operatorname{Rank} \mathscr{D}$ *— непредельный ординал.*

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 8.1. Докажем второе утверждение. Предположим, что $\mathscr{D}$ — суператомное дерево. В силу (8.2) достаточно показать, что если γ — предельный ординал, такой что для любого $\beta < \gamma$ в $\Pi(\mathscr{D})$ есть цепи ранга β, то в $\Pi(\mathscr{D})$ найдется цепь ранга γ или больше. С этой целью выберем в $\Pi(\mathscr{D})$ последовательность цепей π_i, $i < \omega$, с условием, что

$$\sup \{\operatorname{Rank} \pi_i \mid i < \omega\} = \gamma.$$

Существует цепь $\pi^* \in \Pi(\mathscr{D})$, через каждый элемент которой проходит бесконечно много цепей из последовательности π_i. Так как $\mathscr{D}$ — суператомное дерево, то ранг цепи π^* определен. Применяя определение, получаем $\operatorname{Rank} \pi^* \geqslant \gamma$. □

Следующая теорема характеризует с разных сторон суператомные деревья.

Теорема 8.1. *Для любого дерева* $\mathscr{D}$ *равносильны следующие условия:*

(а) *Дерево* $\mathscr{D}$ *является суператомным.*

(б) *Множество* $\Pi(\mathscr{D})$ *не более чем счетно.*

(в) *Множество* $\Pi(\mathscr{D})$ *имеет мощность, меньшую чем* 2^ω.

(г) *Каждое счетное множество* $G \subseteq \Pi(\mathscr{D})$ *имеет изолированные цепи.*

(д) *Каждое множество* $G \subseteq \Pi(\mathscr{D})$ *имеет изолированные цепи.*

Доказательство проведем по схеме

$$(а) \to (б) \to (в) \to (г) \to (д) \to (а).$$

(а) $\to$ (б). Следует из леммы 8.1.

(б) $\to$ (в). Очевидно.

(в) → (г). От противного предположим, что существует счетное множество $G \subseteq \Pi(\mathscr{D})$, не имеющее изолированных цепей. Легко видеть, что множество $V = \cup \{\pi | \pi \in G\}$ является подмножеством $\mathscr{D}$ и удовлетворяет условиям

1) $x \preccurlyeq y \,\&\, y \in V \to x \in V$,

2) $(\forall y \in V)\ (\exists z_1, z_2 \in V)\,(y \preccurlyeq z_1 \,\&\, y \preccurlyeq z_2 \,\&\, \urcorner(z_1 \preccurlyeq z_2) \,\&\, \urcorner(z_2 \preccurlyeq z_1))$.

Поэтому среди подмножеств V имеется 2^ω бесконечных цепей, причем все они принадлежат $\Pi(\mathscr{D})$.

(г) → (д). Следует из того, что из любого непустого множества $G \subseteq \Pi(\mathscr{D})$, не имеющего изолированных цепей, можно выбрать счетное подмножество $G_0 \subseteq G$, в котором нет изолированных цепей.

(д) → (а). Вытекает из определений. □

Пусть λ — первый неконструктивный ординал. Отметим без доказательства, что если $\mathscr{D}$ — рекурсивно перечислимое суператомное дерево, то $\operatorname{Rank} \mathscr{D} < \lambda$. Отсюда следует, что если $\mathscr{D}$ — рекурсивно перечислимое дерево, то $\operatorname{Rank} \mathscr{D} \leqslant \lambda$.

§ 9. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Построение машины M, обеспечивающей заданные свойства теории F^*_M, связано с определенными трудностями. Прежде всего машина M должна «строить» определенную конфигурацию K-путей в стандартном блоке, используя при этом содержание оракула. Вместе с тем машина M должна быть нормальной и допустимой. Основная теорема, к которой мы сейчас перейдем, имеет своей целью облегчить применение конструкции $M \to F^*_M$. Предварительно дадим несколько определений.

W_s, $s < \omega$,— постовская нумерация всех р. п. множеств, W^A_s, $s < \omega$,— нумерация множеств, рекурсивно перечислимых относительно заданного множества $A \subseteq N$ [6, с. 85, 176]. Через $[B]_{\mathscr{D}}$ обозначим замыкание множества $B \subseteq N$ до дерева. Будем использовать обозначения

$$\mathscr{D}_s \rightleftharpoons [W_s]_{\mathscr{D}}, \quad s < \omega, \tag{9.1}$$

$$\mathscr{D}^A_s \rightleftharpoons [W^A_s]_{\mathscr{D}}, \quad s < \omega, \ A \subseteq N. \tag{9.2}$$

Через ε_k, $k < \omega$, обозначим табличное условие, утверждающее, что «множество содержит элемент k». *Табличным условием* (*tt-условием*) будем называть пропозициональную формулу, построенную из элементарных высказываний ε_k. Утверждение, что табличное условие τ истинно на множестве A, будем символически записывать в виде $A \models \tau$. Посредством τ_k, $k < \omega$, будем обозначать фиксированную геделевскую нумерацию всех tt-условий.

Еще одно специальное определение:

$$\mathscr{R}_m \rightleftharpoons \{A \subseteq N | (\forall k \in W_m) A \models \tau_k\}, \ m < \omega. \tag{9.3}$$

Теорема 9.1 (основная теорема). *Эффективно по заданной паре натуральных чисел $\langle m, s\rangle$ строятся конечно аксиоматизируемая модельно полная теория $F(m, s)$ языка с 17 бинарными предикатами и рекурсивная последовательность предложений Ψ_i, $i < \omega$, имеющие свойства:*

1. *Предложения Ψ_i, $i < \omega$, порождают алгебру Линденбаума теории $F(m, s)$.*

2. *Теория*

$$F(m, s)[A] \rightleftharpoons F(m, s) \cup \{\Psi_i | i \in A\} \cup \{\urcorner \Psi_j | j \in N \setminus A\}, \ A \subseteq N,$$

является непротиворечивой тогда и только тогда, когда $A \in \mathscr{R}_m$.

3. *При любом $A \in \mathscr{R}_m$ справедливы соотношения*

(А) *Теория* $F(m, s)$ $[A]$ *имеет простую модель* $\leftrightarrow$ *дерево* $\mathscr{D}_s^A$ — *атомное.*

(Б) *Простая модель теории* $F(m, s)[A]$, *если она существует, сильно конструктивизируема* $\leftrightarrow$ *множество* A *рекурсивно и семейство* $\Pi^{\text{fin}}(\mathscr{D}_s^A)$ *вычислимо.*

(В) *Теория* $F(m, s)[A]$ *имеет счетную насыщенную модель* $\leftrightarrow$ *дерево* $\mathscr{D}_s^A$ *является суператомным.*

(Г) *Счетная насыщенная модель теории* $F(m, s)[A]$ *сильно конструктивизируема* $\leftrightarrow$ *множество* A *рекурсивно и семейство* $\Pi(\mathscr{D}_s^A)$ *вычислимо.*

(Д) *Теория* $F(m, s)[A]$ *тотально трансцендентна* $\leftrightarrow$ *дерево* $\mathscr{D}_s^A$ *является суператомным.*

(Е) *Ранг Морли теории* $F(m, s)[A]$ *равен*

$$\max\{17{,}1 + \operatorname{Rank}\mathscr{D}_s^A + \gamma\},$$

$$\text{где } \gamma = \begin{cases} 2, & \text{если дерево } \mathscr{D}_s^A \text{ суператомное,} \\ 0, & \text{если дерево } \mathscr{D}_s^A \text{ не является суператомным.} \end{cases}$$

Доказательство. Теория $F(m, s)$ будет иметь вид F_M^* для некоторой машины $M \in \mathscr{M}^*$. Доказательство теоремы проведем в три этапа. Вначале опишем вычисления, которые должна делать машина M, затем покажем, как можно построить такую машину, и, наконец, докажем, что полученная теория имеет все нужные свойства.

Будем использовать конкретную геделевскую нумерацию табличных условий, которую сейчас опишем. Это позволит упростить некоторые выкладки.

Как известно, штрих Шеффера, определяемый соотношением

$$\xi_1|\xi_2 \leftrightarrow \neg(\xi_1 \,\&\, \xi_2),$$

образует функционально полную систему [8, § 05, 24]. В качестве табличных условий будем использовать пропозициональные формулы, построенные из элементарных табличных условий ε_k, $k < \omega$, с помощью штриха Шеффера.

Каждому табличному условию τ припишем номер, который обозначим через $\operatorname{Nom}(\tau)$. А именно, положим

а) $\operatorname{Nom}(\varepsilon_k) = 2k$,

б) $\operatorname{Nom}(\tau_1|\tau_2) = 2c(\operatorname{Nom}(\tau_1), \operatorname{Nom}(\tau_2)) + 1$.

Здесь $c(x, y)$ — канторовская функция нумерации пар. Например, число 49 является номером тождественно ложного tt-условия. Через τ_k обозначается табличное условие, имеющее номер k.

Доказательству основной теоремы посвящены последующие три параграфа.

§ 10. ВЫЧИСЛЕНИЯ МАШИНЫ ТЬЮРИНГА

Пусть A — произвольное подмножество N. Следуя X. Роджерсу [6, с. 149], обозначим

$$A^{tt} \rightleftharpoons \{k \mid A \vDash \tau_k\}.$$

Указанное множество называется *tt-степенью* заданного множества $A \subseteq N$.

Пусть $M \in \mathscr{M}^*$, $\mathfrak{M} \in \operatorname{Mod} F_M^*$. Существует множество $A \subseteq N$ такое, что

$$\operatorname{Oracle}(\mathfrak{M}) = A^{tt} \tag{10.1}$$

тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{M}$ истинны все предложения следующего вида:

$$\Omega_n \leftrightarrow \Omega_i|\Omega_j,\ i, j < \omega,\ n = 2c(i, j) + 1. \tag{10.2}$$

Первым вычислением машины M будет проверка истинности условий (10.2). Программа этой машины должна предусматривать анализ каждого из этих условий и останов в случае, если анализируемое условие окажется ложным. Истинность всех указанных условий будет гарантирована аксиомой МТ. 14.

Предложения Ψ_i, фигурирующие в формулировке основной теоремы, определим следующим образом:

$$\Psi_i = \Omega_{2i},\ i < \omega, \tag{10.3}$$

где Ω_i определено в (7.1). Отметим, что, согласно нумерации tt-условий, предложение Ω_i соответствует табличному условию τ_i, а предложение Ψ_i соответствует элементарному табличному условию ε_i.

Следующее вычисление машины M направлено на выполнение п. 2 основной теоремы. Обозначим через R множество номеров тождественно истинных tt-условий. Очевидно, что R бесконечно и рекурсивно. Выберем число $\mu < \omega$ такое, что $W_\mu = W_m \cup R$. При этом, согласно определению (9.3), имеем $\mathscr{R}_\mu = \mathscr{R}_m$.

Второе вычисление машины M будет заключаться в проверке истинности следующих предложений:

$$\Omega_i,\ i \in W_\mu. \tag{10.4}$$

В случае, если в этой последовательности будет обнаружено ложное условие, машина должна останавливаться. Аксиома МТ. 14 обеспечит выполнение всех условий.

Отметим, что замена W_m на бесконечное множество W_μ нужна для эффективного построения аксиомы нормализации.

Последнее вычисление машины M связано с построением некоторого дерева путем выполнения команд с делением клеток ленты. Сформулируем это более подробно.

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель теории F^*_M, w — точка стандартного блока модели $\mathfrak{M}$, удовлетворяющая $K\,\&\,J$ или же расположенная на линии шума. Обозначим через $\mathbf{K}(\mathfrak{M}, w)$ множество точек стандартного блока, через которые проходят K-пути, начинающиеся с точки w. Определим отображение

$$h : \mathbf{K}(\mathfrak{M}, w) \to N$$

индуктивно следующим образом:

а) $h(w) = 0$,

б) $h(v) = h(u)$ — *если* $u, v \in \mathbf{K}(\mathfrak{M}, w)$, uSv, и u *не является точкой исполнения команды с делением клетки ленты,*

в) $\left.\begin{aligned} h(v_1) &= L(h(u)) \\ h(v_2) &= R(h(u)) \end{aligned}\right\}$ — *если* $u, v_1, v_2 \in \mathbf{K}(\mathfrak{M}, w)$, *и* u *является точкой исполнения команды с делением клетки ленты, а* v_1, v_2 — *начала* K-*трасс, полученных в результате этого деления, причем* v_1 *находится слева от* v_2.

Грубо говоря, h отображает K-трассы из $\mathbf{K}(\mathfrak{M}, w)$ в элементы полного дерева таким образом, что деления K-трасс соответствуют ветвлениям в дереве. Длина K-трассы в расчет не берется: как следует из б), каждая K-трасса будет целиком отображена в единственный элемент полного дерева.

Нетрудно видеть, что множество $\mathscr{D}$ значений функции h является деревом. Будем говорить, что *дерево* $\mathscr{D}$ *вычисляется машиной* M *над точкой* w. Ясно, что построение этого дерева будет зависеть от содержимого оракула.

Третье вычисление машины M будет состоять в построении дерева

$$\mathscr{D}^* = \mathscr{D}_s^A \oplus \mathscr{D}' \tag{10.5}$$

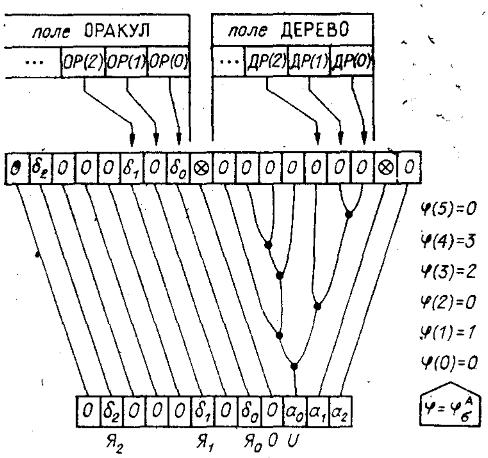

Рис. 12.

над точкой U (см. рис. 2, A) и тривиальных деревьев над другими точками стандартного блока.

Здесь предполагается, что s — параметр из формулировки основной теоремы, A — множество, связанное с содержимым оракула формулой (10.1), $\mathscr{D}'$ — дерево, изображенное на рис. 11, в.

Процесс вычисления дерева (10.5) представлен на рис. 12. В нижней части рисунка изображена лента в начальный момент времени (см. рис. 7). В верхней части изображена лента в процессе работы машины. Линии представляют K-трассы, ветвления — точки исполнения команд с делением клеток ленты (движение головки не показано). На этом же рисунке обозначены поля ОРАКУЛ и ДЕРЕВО и показана их прямая адресация, на которую мы будем ссылаться в дальнейшем.

Дерево (10.5) является, очевидно, рекурсивно перечислимым относительно A, поэтому найдется число $\sigma < \omega$ такое, что это дерево будет построено следующей последовательностью действий:

$$\textit{разделить клетку} \qquad \text{ДР}\,(\varphi_\sigma^A(t)), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.6}$$

Здесь φ_z^A — нумерация функций, частично рекурсивных относительно A [6, с. 173]. Легко понять, что индекс σ может быть найден эффективно по заданному параметру s. По выбору σ имеем:

$$\text{функция } \varphi_\sigma^A \text{ всюду определена при любом } A \subseteq N, \tag{10.7}$$

$$0 \leqslant \varphi_\sigma^A(t) \leqslant t \text{ для всех } t < \omega, \ A \subseteq N. \tag{10.8}$$

На рис. 12 показаны результаты действий (10.6) для $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (в предположении, что функция φ_σ^A имеет заданные значения).

§ 11. ТЕХНИКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Внешний алфавит машины M будет содержать 5 символов: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, которые будем отождествлять соответственно со следующими знаками: 0, 1, 0′, 1′, ⊗. Если a — один из символов ленты, то через a^k, $k < \omega$, будет обозначаться ряд, состоящий из $k+1$ символа a в последовательных клетках ленты. Последовательность 1^k0, которой предшествует символ 0, будем называть *числовой ячейкой со значением* k.

На рис. 13 приведена блок-схема программы машины M, а на рис. 14 представлены состояния ленты в моменты переходов между блоками, а также названия различных участков ленты. Отметим, что на этом рисунке показана разбивка ленты на поля; каждое поле включает определенное число клеток ленты. Например, поле Z содержит $i+1$ клетку, заполненную нулями.

Программа машины M состоит из трех блоков, выполняющих следующие функции: блок 1 — блок установки начальных значений, блок 2 — вычислительный, блок 3 — исполнительный.

Охарактеризуем назначение каждого обозначенного участка.

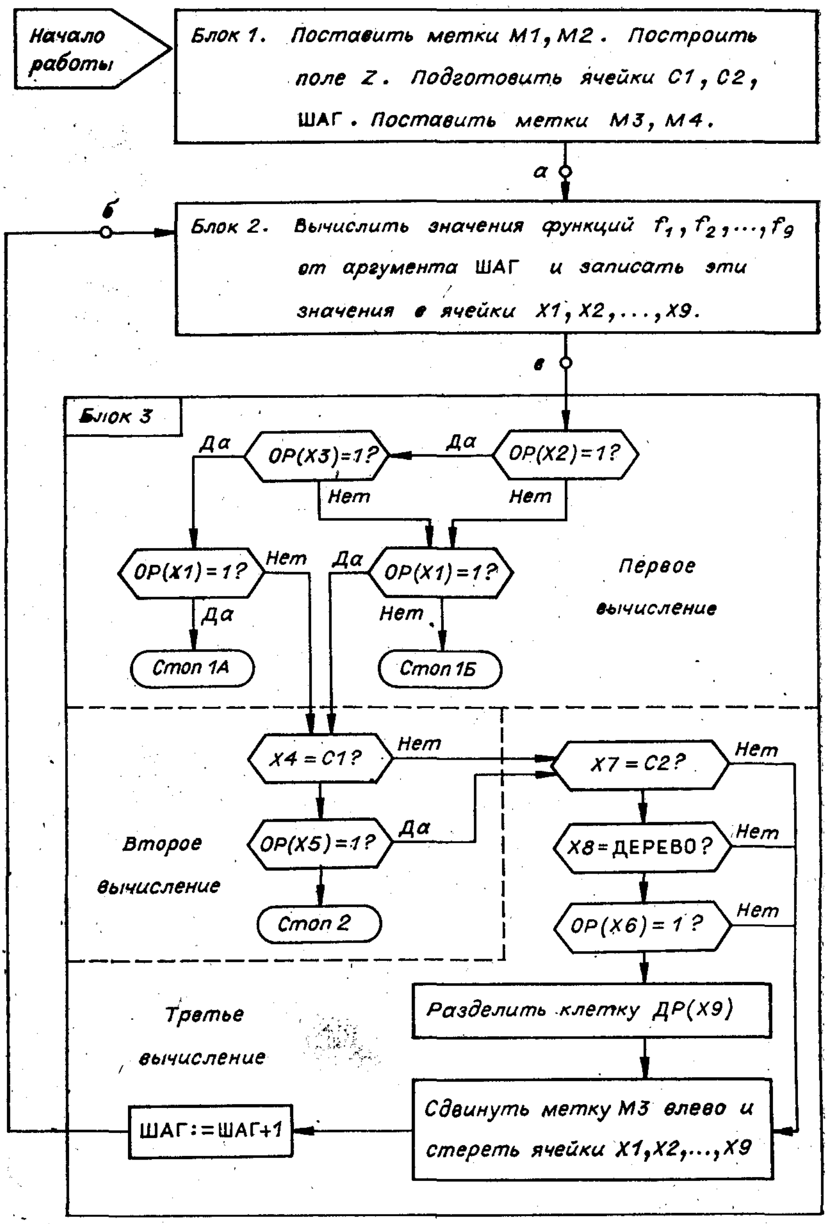

Рис. 13.

ОРАКУЛ — левая половина ленты, содержащая информацию оракула. Программа должна предусматривать, чтобы эта информация не портилась в процессе работы машины.

ДЕРЕВО — поле роста дерева (10.5). В процессе работы машины этот участок растет за счет исполнения команд машины M с делением клеток ленты.

$C1$, $C2$ — числовые ячейки, в которых хранятся параметры μ и σ, определенные в § 10. Эти ячейки формируются блоком 1 и сохраняются неизменными в течение всей последующей работы машины M.

ШАГ — числовая ячейка, координирующая весь процесс вычислений. Блок 1 устанавливает значение ШАГ = 0. После этого начинается беско-

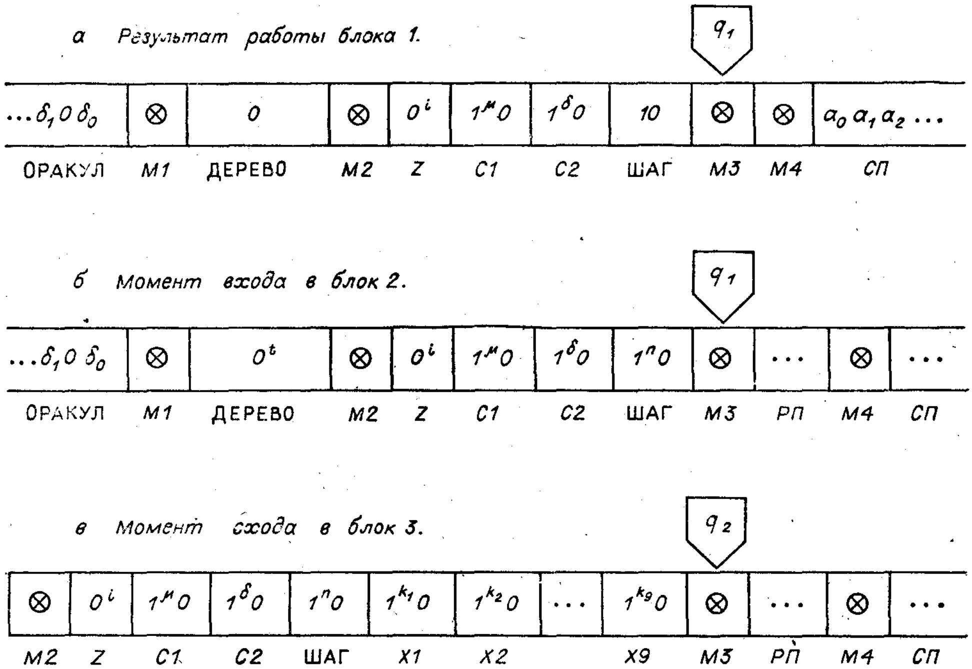

Рис. 14.

нечный цикл, на каждом витке которого последовательно работают блок 2 и блок 3. Будем называть этот цикл *глобальным*. При завершении очередного витка глобального цикла величина ячейки ШАГ увеличивается на 1 и начинается новый виток этого цикла.

$X1$, $X2$, …, $X9$ — числовые ячейки, с помощью которых передается информация из блока 2 в блок 3. В первой половине витка глобального цикла блок 2 вычисляет значения девяти специально выбранных о. р. ф. f_1, f_2, …, f_9 от аргумента ШАГ и записывает их в ячейки $X1, X2, \dots, X9$. Во второй половине витка в работу включается блок 3, который надлежащим образом использует значения этих ячеек. На следующем витке глобального цикла то же повторяется для возросшего на 1 значения ячейки ШАГ, и т. д.

РП — рабочее поле блока 2.

СП — свободное поле, где в данный момент еще не побывала головка машины. Эта область содержит периодически повторяющуюся последовательность символов, построенную аксиомой шума.

$M1$, $M2$ — метки, ограничивающие участок ДЕРЕВО.

$M3$, $M4$ — метки, ограничивающие рабочее поле. Предполагается, что поле РП не содержит вхождений символа ⊗. Метка $M4$, ограничивающая поле РП справа, по мере необходимости сдвигается вправо, но не должна сдвигаться влево. Метка $M3$ может сдвигаться как вправо, так и влево.

Z — поле, состоящее из нулей. Его длина $i+1$, $i \geqslant 0$, выбирается с таким расчетом, чтобы в момент перехода из блока 1 в блок 2 участок СП начинался с символа a_0, как это показано на рис. 14, *а*.

Приступим теперь к выбору функций f_i, $1 \leqslant i \leqslant 9$. Предварительно отметим следующий факт (см. рис. 7 и 12):

$$\text{\textit{ячейка} } Я_i \text{ \textit{совпадает с} } \mathrm{ОР}(i^2+i),\ i < \omega. \tag{11.1}$$

Выбор f_1, f_2, f_3. Согласно блок-схеме первая часть блока 3 проверяет условие $\mathrm{ОР}(X1) = 1 \leftrightarrow [\mathrm{ОР}(X2) = 1 | \mathrm{ОР}(X3) = 1]$. Сравнивая это с (7.1), (10.2), (11.1), заключаем, что функции f_1, f_2, f_3 должны представлять адреса ячеек, относящихся к условиям (10.2). Таким образом, первое вычисление будет реализовано, если эти функции определить следующим образом:

$$f_1(n) = (2n+1)^2 + (2n+1),$$
$$f_2(n) = l^2(n) + l(n),$$
$$f_3(n) = r^2(n) + r(n).$$

Здесь l и r — функции нумерации пар.

Выбор f_4, f_5. Как видно из блок-схемы, вторая часть блока 3 приводит к останову в случае, если нарушено условие $X4 = \mu \to \text{OP}(X5) = 1$. Следовательно, для проверки условий (10.4) достаточно определить функции f_4, f_5 следующим образом, используя вспомогательную функцию g:

$$\{\langle g(n), f_4(n)\rangle \mid n \in N\} = \{\langle x, y\rangle \mid x \in W_y\},$$
$$f_5(n) = g^2(n) + g(n).$$

Выбор f_6, f_7, f_8, f_9. Шаги (10.6) построения дерева (10.5) будут замедлены по отношению к шагам глобального цикла. Это связано с тем, что для вычисления значений $\varphi_\sigma^A(t)$ может потребоваться многократное обращение к оракулу. В качестве счетчика шагов при вычислении дерева будет использоваться текущая длина поля ДЕРЕВО. Так, приведенное на блок-схеме условие «$X8 =$ ДЕРЕВО?» имеет следующий смысл: «совпадает ли число единиц поля $X8$ с длиной поля ДЕРЕВО?». Очередной шаг (10.6) увеличивает на 1 длину поля ДЕРЕВО, тем самым происходит автоматический переход к следующему шагу построения дерева.

Согласно X. Роджерсу [6, с. 173], существует о. р. ф. $\rho(x)$ такая, что для всех x, y, $z \in N$, $A \subseteq N$, имеет место

$$\varphi_x^A(y) = z \leftrightarrow (\exists u, v)\,[\langle y, z, u, v\rangle \in W_{\rho(x)} \;\&\; D_u \subseteq A \;\&\; D_v \subseteq N \setminus A].$$

Здесь D_n, $n < \omega$,— стандартная геделевская нумерация семейства всех конечных подмножеств N [6, с. 97].

Назовем четверку $\langle j, x, y, z\rangle$ *элементарной*, если существуют $u, v \in N$, при которых выполнены условия:

а) $\langle y, z, u, v\rangle \in W_{\rho(x)}$,

б) j является номером табличного условия, утверждающего, что $D_u \subseteq A \;\&\; D_v \subseteq N \setminus A$. Легко видеть, что множество Э всех элементарных четверок является рекурсивно перечислимым.

Непосредственно из определения выводится следующее основное свойство этого множества:

$$\varphi_x^A(y) = z \leftrightarrow (\exists j)\,[\langle j, x, y, z\rangle \in Э \;\&\; A \models \tau_j]. \tag{11.2}$$

Таким образом, элементарные четверки суть «кванты вычислений» для значений вида $\varphi_x^A(y)$; каждое такое значение, если оно определено, вычисляется элементарной четверкой.

Пусть j_0 — фиксированный номер тождественно ложного табличного условия. Например, можно получить $j_0 = 49$. Определим следующие множества:

$$Э' = \{\langle j_0, x, y, 0\rangle \mid x, y \in N\},$$
$$Э^* = Э \cup Э'.$$

Будем называть элементы множества Э′ *псевдоэлементарными четверками*. Легко видеть, что свойство (11.2) останется верным при замене Э на Э*:

$$\varphi_x^A(y) = z \leftrightarrow (\exists j)\,[\langle j, x, y, z\rangle \in Э^* \;\&\; A \models \tau_j].$$

Выберем о. р. ф. f_6, f_7, f_8, f_9, используя вспомогательную функцию h, так, чтобы выполнялись условия:

(а) $\{\langle h(n), f_7(n), f_8(n), f_9(n)\rangle | n \in N\} = Э^*$;

(б) $f_6(n) = h^2(n) + h(n)$;

(в) в пересчете (а) каждый элемент из Э повторяется бесконечно много раз;

(г) если $m < n$, $h(m) \neq j_0$, $h(n) \neq j_0$, причем для любого i выполнено $m < i < n \to h(i) = j_0$, то $(\forall a < n)(\forall b < n)(\exists i)[m < i < n \,\&\, f_7(i) = a \,\&\, \&\, f_8(i) = b]$.

Для выполнения условия (г) нужно в пересчет (а) после каждого элемента из Э включить достаточное количество элементов из Э′.

Согласно блок-схеме на каждом витке глобального цикла блок 2 через ячейки

$$X6,\ X7,\ X8,\ X9 \qquad (11.3)$$

передает в блок 3 модифицированные элементарные и псевдоэлементарные ячейки. Суть модификации в том, что в ячейке $X6$ вместо номера tt-условия передается адрес ячейки, кодирующей это условие.

В целом вычисление дерева протекает следующим образом. Блок 2 через ячейки (11.3) посылает в блок 3 «кванты вычислений» для всевозможных значений вида $\varphi_x^B(y)$. Третья часть блока 3 ожидает благоприятной ситуации, когда полученный «квант» представляет собой вычисление для $\varphi_\sigma^A(t)$, где t — уменьшенная на 1 длина поля ДЕРЕВО. В этой ситуации ячейка $X9$, содержащая значение указанной функции, используется для выполнения очередного действия (10.6). Условия (10.7), (10.8), (в) обеспечивают успешное завершение каждого действия в последовательности (10.6).

Таким образом, имеем блок-схему программы машины M, которая выполняет все нужные вычисления. Покажем теперь, что, программируя согласно этой блок-схеме, можно получить допустимую нормальную машину, а также эффективно построить аксиому нормализации.

Допустимость машины M. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная модель теории F_M^*. Благодаря первому вычислению, множество Oracle ($\mathfrak{M}$) представляет собой A^{tt} при некотором $A \subseteq N$. Этим обеспечена допустимость машины.

Нормальность машины M. Это свойство обеспечивается особой формой блок-схемы. Основная идея состоит в следующем.

1) Команды блока 1 работают однократно.

2) Работа блока 2 не зависит от μ, σ и от содержимого оракула.

3) Блок 3 выполняет простейшие действия вида «сравнить две числовые ячейки», «проверить содержимое оракула в ячейке, адрес которой записан в данной числовой ячейке» и т. д. Эти действия можно организовать в виде челночных движений головки машины с использованием символов ленты 0′, 1′. При построении программы, реализующей такие операции, не составит труда проанализировать число исполнений каждой команды в процессе работы машины. При этом нужно учитывать тот факт, что вычисления по каждой ветви блока 3, кроме тех, которые ведут к останову, будут повторяться бесконечное множество раз. Отметим, что при анализе условия «$X4 = C1$?» в случае несовпадения этих ячеек может быть два разных подслучая: $X4 < C1$ и $X4 > C1$. Они ведут к некоторым различиям в исполнении команд. Однако не составит труда проверить, что каждый из указанных подслучаев будет повторяться бесконечно много раз. То же самое справедливо и для других ветвей блок-схемы. При доказательстве бесконечной повторяемости следующих двух случаев:

$$X7 = C2 \,\&\, X8 > \text{ДЕРЕВО},$$

$$X7 = C2 \,\&\, X8 = \text{ДЕРЕВО} \,\&\, \text{OP}\,(X6) \neq 1$$

нужно использовать условие (г), а также очевидный факт, что псевдоэлементарная четверка не может увеличить длину поля ДЕРЕВО.

Легко понять, что, программируя по приведенной блок-схеме, можно эффективно построить аксиому нормализации.

§ 12. ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Докажем, что если положить $F(m, s) = F^*_M$, а предложения Ψ_i, $i < \omega$, определить формулами (10.3), то будут выполнены все условия теоремы за исключением условия, утверждающего, что язык содержит 17 бинарных предикатов (легко подсчитать, что язык $\mathscr{L}_M$ теории F^*_M содержит 16 бинарных и $22 + d + e$ унарных предикатов).

Конечная аксиоматизируемость и эффективность построения аксиом являются прямыми следствиями конструкции. Модельную полноту дает лемма 7.1.

Перейдем теперь к проверке всех пунктов теоремы.

1. Достаточно показать, что при каждом $A \subseteq N$ теория $F(m, s)[A]$ полна, если она является непротиворечивой. Предположим, что эта теория непротиворечива. Первое вычисление машины M обеспечивает, что

$$\mathfrak{M} \in \operatorname{Mod} F(m, s)[A] \to \operatorname{Oracle}(\mathfrak{M}) = A^{tt}.$$

Используя лемму 7.2, получаем, что теория $F(m, s)[A]$ полна.

2. Предположим, что теория $F(m, s)[A]$ непротиворечива. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель этой теории. Благодаря первому вычислению имеем $\operatorname{Oracle}(\mathfrak{M}) = A^{tt}$. Так как второе вычисление не приводит к останову, то $W_\mu \subseteq \operatorname{Oracle}(\mathfrak{M})$. Учитывая, что $W_m \subseteq W_\mu$, получаем в итоге $W_m \subseteq A^{tt}$. Это означает, что на множестве A истинны табличные условия τ_i, $i \in W_m$, следовательно, $A \in \mathscr{R}_m$.

Обратно, предположим, что $A \in \mathscr{R}_m$. По определению на множестве A истинны табличные условия τ_i, $i \in W_m$. По выбору μ имеем, что на множестве A истинны все условия τ_i, $i \in W_\mu$, следовательно, $W_\mu \subseteq A^{tt}$. Пусть $\Delta = A^{tt}$. Из полученных соотношений следует, что Δ-вычисление на машине M не приведет к останову, поэтому $A^{tt} \in \operatorname{Nonstop}(M)$. Тогда по лемме 7.3 теория $F^*_M[A^{tt}]$ будет непротиворечивой. Осталось заметить, что $F(m, s)[A] \subseteq F^*_M[A^{tt}]$. Тем самым доказана непротиворечивость теории $F(m, s)[A]$.

Далее, рассматривая части п. 3, будем предполагать, что $A \in \mathscr{R}_m$.

3(А). Используя лемму 7.5, получаем, что теория $F(m, s)[A]$ имеет простую модель тогда и только тогда, когда в стандартном блоке, определяемом этой теорией, через каждую K-точку проходит хотя бы один конечнозвенный K-путь. Это эквивалентно тому, что через каждый элемент дерева (10.5) проходит конечная цепь, а это, в свою очередь, равносильно атомности дерева $\mathscr{D}^A_s$.

3(Б). Предположим, что простая модель $\mathfrak{M}$ теории $F(m, s)[A]$ сильно конструктивизируема. Из разрешимости этой теории следует рекурсивность множества A. Имея конструктивизацию модели $\mathfrak{M}$, можно устроить пересчет всех компонент этой модели, а это, с учетом леммы 7.4, дает вычислимость семейства всех конечнозвенных K-путей, начинающихся с точки $\bar{U}$. Отсюда получается вычислимость семейства $\Pi^{\text{fin}}(\mathscr{D}^A_s)$.

Предположим теперь, что множество A рекурсивно, дерево $\mathscr{D}^A_s$ — атомное и семейство его конечных цепей вычислимо. Нетрудно видеть, что семейство $\Pi^{\text{fin}}(\mathscr{D}^*)$ также будет вычислимым. Пусть ν — его вычислимая нумерация. Так как это семейство состоит из максимальных цепей дерева, то ν — негативная нумерация. Отсюда следует [9, с. 57], что семейство $\Pi^{\text{fin}}(\mathscr{D}^*)$ имеет однозначную вычислимую нумерацию ν'. Используя рекурсивность множества A, атомность дерева (10.5) и нумерацию ν', можно построить конструктивную модель $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ теории $F(m, s)[A]$, удовлетворяющую условиям (П. 1—3) леммы 7.4. Из модельной полноты следует, что ν_0 — сильная конструктивизация.

3(В, Д). Согласно основной конструкции число K-путей в стандартном блоке Б_0, определяемом теорией $F(m, s)[A]$, равно

$$k(\text{Б}_0) = \max\{\omega, \overline{\overline{\Pi(\mathscr{D}_s^A)}}\}.$$

Если $\mathscr{D}_s^A$ — суператомное дерево, то, используя теорему 8.1, получаем, что $k(\text{Б}_0) = \omega$. Тогда по лемме 7.6 теория $F(m, s)[A]$ является тотально трансцендентной и, как следствие, имеет счетную насыщенную модель. Если же дерево $\mathscr{D}_s^A$ не является суператомным, то $k(\text{Б}_0) = 2^\omega$, тогда по лемме 7.6 теория $F(m, s)[A]$ не имеет счетной насыщенной модели и не тотально трансцендентна.

3(Г). Предположим, что счетная насыщенная модель $\mathfrak{M}$ теории $F(m, s)[A]$ является сильно конструктивизируемой. Из разрешимости этой теории следует рекурсивность множества A. Далее, по лемме 7.7 модель $\mathfrak{M}$ будет совершенной. Перечисляя компоненты этой модели, берущие начало в U, мы, благодаря (6.7), вычислим семейство всех K-путей, начинающихся с точки U. Переходя от K-путей к соответствующим цепям дерева, получим вычислимость семейства $\Pi(\mathscr{D}^*)$, а поэтому и $\Pi(\mathscr{D}_s^A)$.

Теперь предположим, что A рекурсивно и семейство $\Pi(\mathscr{D}_s^A)$ вычислимо. Из вычислимости вытекает счетность этого семейства, тогда по теореме 8.1 дерево $\mathscr{D}_s^A$ будет суператомным. Следовательно, теория $F(m, s)[A]$ имеет счетную насыщенную модель $\mathfrak{M}$. Используя рекурсивность множества A, а также вычислимость семейства $\pi(\mathscr{D}_s^A)$, можно построить конструктивную совершенную модель $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ теории $F(m, s)[A]$. Из модельной полноты следует, что ν_0 — сильная конструктивизация. По лемме 7.7 модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_0$ изоморфны, отсюда следует, что $\mathfrak{M}$ является с. к. моделью.

3(Е). Мы будем придерживаться системы понятий, принятой в книге [10, § 31]. В приводимом здесь доказательстве опущены отдельные громоздкие выкладки рутинного характера. При желании они могут быть восстановлены.

Теорию $F(m, s)[A]$ для краткости будем обозначать через T. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель теории T. Через $\mathfrak{M}^*$ обозначим естественное обогащение этой модели до языка

$$\mathscr{L}^* = \mathscr{L}_M \cup \{c_a \mid a \in |\mathfrak{M}|\}.$$

Обозначим через T^* теорию модели $\mathfrak{M}^*$, а через $C_k\mathfrak{M}$ — стоуновское пространство k-типов над $\mathfrak{M}^*$. Вместо $S_1\mathfrak{M}$ будем писать $S\mathfrak{M}$.

Ранг (по Морли) типа $p \in S\mathfrak{M}$ будем обозначать через $\text{Rank}\, p$. Назовем *рангом формулы* $\varphi(x)$ языка $\mathscr{L}^*$ следующий ординал:

$$\text{Rank}\, \varphi \rightleftharpoons \sup\{\text{Rank}\, p \mid p \in S\mathfrak{M}\ \&\ \varphi \in p\ \&\ \text{Rank}\, p \text{ определено}\}.$$

Непосредственно из определений вытекают свойства

$$\alpha_T = \text{Rank}\,(x = x);$$

$$\text{Rank}\,(\varphi \vee \psi) = \max\{\text{Rank}\, \varphi, \text{Rank}\, \psi\};$$

$$\textit{если } T^* \vdash \varphi \leftrightarrow \psi, \textit{ то } \text{Rank}\, \varphi = \text{Rank}\, \psi.$$

Таким образом, в силу аксиомы КРК.1 для определения α_T достаточно вычислить ранги следующих двух формул:

$$\varphi_0(x) = X(x) \vee Y(x), \quad \varphi_1(x) = W(x). \tag{12.1}$$

Для доказательства п. (Е) основной теоремы достаточно доказать следующее утверждение

Лемма 12.1. (а) $\operatorname{Rank}\varphi_0 = 17$.

(б) $\operatorname{Rank}\varphi_1 = \max\{5, 1 + \operatorname{Rank}\mathscr{D}_s^A + \gamma\}$, где γ *определено в формулировке основной теоремы.*

Доказательство. В качестве $\mathfrak{M}$ возьмем счетно насыщенную модель теории T, которая является универсальной областью для T [10, § 31]. По лемме 31.3 из указанной книги в стоуновском пространстве $S\mathfrak{M}$ ранг Морли будет совпадать с рангом Кантора — Бендиксона. Это даст нам реальный метод вычисления рангов типов. Приступим непосредственно к вычислению рангов.

(а) Пусть $\varphi(x)$ — произвольная формула языка $\mathscr{L}^*$ такая, что $T^* \vdash \vdash \varphi(x) \to \varphi_0(x)$. Тогда существует формула $\psi(x)$ такая, что $T^* \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, причем в формуле ψ все константы находятся в $X \cup Y$ и все кванторы релятивизованы по множеству $X \cup Y$. Сформулированное утверждение будем называть *принципом отделимости.* Доказательство этого принципа использует аксиоматику и основывается на модельной полноте. Мы опускаем детали.

Из принципа отделимости следует, что ранг формулы ψ_0 в теории T равен рангу формулы $x = x$ в теории $T_1 = T \restriction \varphi_0$. Язык $\mathscr{L}'$ теории T_1 получается из $\mathscr{L}_M$ выбрасыванием предикатов W, U, D.

Рассмотрим теорию T_2, которая получается из T_1 заменой теории квазиследования на обычное отношение следования без циклов. Соответственно из языка нужно выбросить все предикаты языка теории квазиследования, кроме $\triangleleft$.

Пусть $\mathfrak{M}_1$ — модель теории T, которая является универсальной областью этой теории, и пусть $\mathfrak{M}_2$ — соответствующая ей модель теории T_2. Так как элементы в моделях теории квазиследования характеризуются четырьмя координатами, то пространства $S\mathfrak{M}_1$ и $S_4\mathfrak{M}_2$ имеют одинаковый ранг Кантора — Бендиксона. Прямые вычисления показывают, что ранг пространства $S_4\mathfrak{M}_2$ равен 17.

(б) Сначала рассмотрим случай, когда $\mathscr{D}_s^A$ является суператомным деревом ранга $\beta > 1$. Тогда и дерево (10.5) будет, очевидно, суператомным того же ранга:

$$\operatorname{Rank}\mathscr{D}^* = \beta.$$

Пусть $\mathfrak{N}$ — совершенное расширение модели $\mathfrak{M}$, определенной ранее. Если $c \in |\mathfrak{N}|$, то через p_c обозначим тип элемента c над моделью $\mathfrak{M}^*$. Так как все типы над $\mathfrak{M}^*$ реализуются в $\mathfrak{N}$, то стоуновское пространство формулы φ_1 допускает следующее представление:

$$S\mathfrak{M} \restriction W = \{p_c \mid c \in |\mathfrak{N}| \;\&\; W(c)\}. \tag{12.2}$$

Введем функцию ранга на множестве K-путей модели $\mathfrak{N}$. Пусть $G \subseteq \subseteq \mathbf{K}(\mathfrak{N})$, $\mathscr{K} \in G$. Назовем путь $\mathscr{K}$ *изолированным* в G, если в модели $\mathfrak{N}$ имеется точка v такая, что $\mathscr{K}$ — единственный путь из G, проходящий через v. Через G' обозначим множество K-путей из G, которые не являются изолированными в G.

Определим индукцией по ординалам:

а) $\mathbf{K}_0(\mathfrak{N}) = \mathbf{K}(\mathfrak{N})$,

б) $\mathbf{K}_{\alpha+1}(\mathfrak{N}) = (\mathbf{K}_\alpha(\mathfrak{N}))'$,

в) $\mathbf{K}_\gamma(\mathfrak{N}) = \bigcap\limits_{\beta<\gamma} \mathbf{K}_\beta(\mathfrak{N})$, если γ — *предельный ординал.* Скажем, что путь $\mathscr{K}$ имеет ранг α, символически $\operatorname{Rank}\mathscr{K} = \alpha$, если $\mathscr{K} \in \mathbf{K}_\alpha(\mathfrak{N}) \setminus \mathbf{K}_{\alpha+1}(\mathfrak{N})$. Легко показать, что функция ранга на $\mathbf{K}(\mathfrak{N})$ согласована с функцией ранга на $\Pi(\mathscr{D}^*)$. А именно, если путь $\mathscr{K}$ начинается с точки U и соответствует цепи $\pi \in \Pi(\mathscr{D}^*)$, то $\operatorname{Rank}\mathscr{K} = \operatorname{Rank}\pi$. Если же $\mathscr{K}$ не проходит через точку U, то $\operatorname{Rank}\mathscr{K} = 0$.

Пусть c — произвольный W-элемент из $\mathfrak{N}$. Обозначим через $\mathscr{K}[c]$ путь, по которому проходит компонента, порожденная c. Положим

$$\operatorname{Rank}(c)=\begin{cases}-1, \text{ если } c\in|\mathfrak{M}|,\\ \operatorname{Rank}\mathscr{K}[c], \text{ если } c\in|\mathfrak{N}|\setminus|\mathfrak{M}|.\end{cases}$$

Прежде чем приступить к описанию функции ранга в пространстве (12.1), введем одно понятие, связанное с работой машины M. Напомним, что по определению каждая $\langle\nu,\ i,\ j\rangle$-точка является $\langle\nu,\ j\rangle$-точкой.

В соответствии с § 11 можем считать, что в каждый момент работы машины в поле ДЕРЕВО имеется не более одной клетки, отмеченной символом $0'$. Остальные клетки этого поля должны быть отмечены символом 0. Напомним, что 0 отождествляется с a_0, а $0'$ отождествляется с a_2.

Назовем пару $\langle\nu,\ j\rangle$ *особенной*, если в стандартном блоке имеется бесконечное множество L-классов, которые содержат $\langle\nu,\ j\rangle$-точку и одновременно содержат клетку в поле ДЕРЕВО, отмеченную предикатом A_2.

Пусть $\langle\nu_t,\ j_t\rangle$, $t=0,\ 1,\ \ldots,\ k$, — список всех особенных пар. Определим формулы

$$\psi(z)=\bigvee_{t=0}^{k}(z \text{ является } \langle\nu_t, j_t\rangle\text{-точкой}),$$

$$\theta(x)=A_0(x)\vee[A_2(x)\ \&\ (\exists\, z)(xLz\ \&\ \psi(z))].$$

Табл. 3 характеризует ранги всех типов пространства (12.2). Дадим некоторые комментарии. Через $\Sigma_n(m)$ будем обозначать клетку этой таблицы, расположенную на пересечении строки Σ_n и столбца, отмеченного (внизу) номером m. Любой тип p_c пространства (12.2) будет отнесен к определенной клетке этой таблицы. Найти эту клетку можно по описанию в верхней части таблицы.

Через Σ_α, $-1\leqslant\alpha\leqslant\beta+1$, обозначим множество типов, относящихся к клеткам строки Σ_α указанной таблицы. Ранги типов пространства (12.2)

Таблица 3. **Классификация типов над моделью $\mathfrak{M}$**

Обозначение классов типов	Место расположения константы $c\in\|\mathfrak{N}\|$, реализующей тип p_c над моделью $\mathfrak{M}$						
	В одном из блоков модели $\mathfrak{M}$. Константа удовлетворяет условию:	За пределами блоков модели $\mathfrak{M}$					
		В зоне, пересекающей модель $\mathfrak{M}$		В зоне, которая не пересекается с $\mathfrak{M}$			
				Константа удовлетворяет формуле $\theta(x)$		Константа удовлетворяет формуле $\neg\theta(x)$	
		z_0	z_B	z'_B	z''_B	z'_B	z''_B
Σ_{-1}	Rank$(c)=-1$						
Σ_0	Rank$(c)=0$						
Σ_1	Rank$(c)=1$	$Б_1$	$Б_6$	$Б_4$		$Б_4$, $Б_5$	
Σ_2	Rank$(c)=2$	$Б_2$			$Б_4$	$Б_6$	$Б_4$
Σ_3	Rank$(c)=3$						$Б_6$
...	...						
Σ_α	Rank$(c)=\alpha$						
...	...						
$\Sigma_{\beta-1}$	Rank$(c)=\beta-1$						
Σ^{*}_{β}				$Б_5$, $Б_6$			
$\Sigma_{\beta+1}$					$Б_6$		
	1	2	3	4	5	6	7

описываются соотношением $p \in \Sigma_\alpha \leftrightarrow \mathrm{Rank}\, p = 1 + \alpha$. Его можно доказать индукцией по α, используя определение ранга по Кантору — Бендиксону.

Отметим, что если тип p относится к клетке $\Sigma_2(2)$, то в каждой его окрестности имеется бесконечное множество типов, относящихся к клетке $\Sigma_1(2)$. Будем говорить, что *клетка* $\Sigma_2(2)$ *делится клеткой* $\Sigma_1(2)$. Как правило, клетки таблицы делятся вышележащими клетками (в том же столбце). Исключения из этого правила отражены в нижеследующей таблице:

Клетки таблицы	$\Sigma_1(2, 3, 4, 6)$	$\Sigma_2(5)$	$\Sigma_2(7)$	$\Sigma_\beta(4)$	$\Sigma_{\beta+1}(5)$
Делятся клетками	$\Sigma_0(1)$	$\Sigma_1(4)$	$\Sigma_1(6)$	$\Sigma_{\beta-1}(1)$	$\Sigma_\beta(4)$

Согласно табл. 3 наибольший ранг $1 + \beta + 1$ имеют типы, относящиеся к клетке $\Sigma_{\beta+1}(5)$. Следовательно, ранг формулы $\varphi_1(x)$ равен $1 + \beta + 2$.

В случае, если $\mathrm{Rank}\, \mathscr{D}_s^A \leqslant 1$, дерево $\mathscr{D}^*$ будет суператомным ранга 1. В таком случае табл. 3 будет содержать строки от Σ_{-1} до Σ_3, это даст $\mathrm{Rank}\, \varphi_1 = 5$.

В том случае, когда дерево $\mathscr{D}_s^A$ не является суператомным, из табл. 3 нужно убрать две последние строки: относящиеся к ним типы не будут иметь ранга. Ранг будет неопределенным также для типов p_c таких, что c находится в одном из блоков модели $\mathfrak{M}$, причем $\mathrm{Rank}\,(c)$ неопределен. В указанном случае получаем $\mathrm{Rank}\, \varphi_1 = \max\{5, \mathrm{Rank}\, \mathscr{D}_s^A\}$. □

Тем самым п. 3(E) полностью доказан.

Язык теории F_M^* содержит 16 бинарных и $22 + d + e$ унарных предикатов. Не составит труда заменить все унарные предикаты одним дополнительным бинарным предикатом с сохранением всех свойств, указанных в теореме.

Этим завершается доказательство основной теоремы.

§ 13. СВЕДЕНИЕ К МАЛОМУ ЯЗЫКУ

Назовем язык $\mathscr{L}$ *богатым*, если $\mathscr{L}$ содержит хотя бы один предикатный или функциональный символ арности два или больше. Стандартные методы, восходящие к Л. Кальмару [8, с. 263, 433], позволяют свести теорию F_M^* к любому конечному богатому языку.

Теорема 13.1 ($\mathscr{L}$-вариант основной теоремы). *Пусть $\mathscr{L}$ — конечный богатый язык. Эффективно по заданной паре натуральных чисел $\langle m, s\rangle$ строятся конечно аксиоматизируемая модельно полная теория $F^{\mathscr{L}}(m, s)$ языка $\mathscr{L}$ и рекурсивная последовательность $\psi_i^{\mathscr{L}}$, $i < \omega$, предложений языка $\mathscr{L}$, имеющие свойства, указанные в пп.* 1, 2, 3 (А — Д) *основной теоремы, с заменой $F(m, s)$ на $F^{\mathscr{L}}(m, s)$, а Ψ_i — на $\psi_i^{\mathscr{L}}$. Пункт 3(Е) изменится следующим образом:*

(Е) *Ранг Морли теории $F^{\mathscr{L}}(m, s)[A]$ равен* $\max\{33, 1 + \mathrm{Rank}\, \mathscr{D}_s^A + \gamma\}$, *где γ определено в основной теореме.*

Доказательство. Достаточно расмотреть лишь случай, когда язык $\mathscr{L}$ содержит только один бинарный предикат. Будем для определенности считать, что $\mathscr{L} = \{Q^2\}$.

Будем сводить к языку $\mathscr{L}$ теорию F_M^* языка $\mathscr{L}_M$, построенную в доказательстве основной теоремы. По произвольной модели $\mathfrak{M}$ теории F_M^* определим новую модель $\hat{\mathfrak{M}}$ языка $\mathscr{L}$ следующим образом. Положим

$$|\hat{\mathfrak{M}}| = X \cup Y \cup W \cup N \cup I. \tag{13.1}$$

Здесь X, Y, W — подмножества $|\mathfrak{M}|$, определимые соответствующими предикатами, N — множество, равномощное $X \cup Y$, I — конечное множество, содержащее $38+d+e$ элементов. Будем считать, что множества (13.1) попарно не пересекаются.

Обозначим элементы множества I следующими символами:

$$I=\{c_0,\ c_1,\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{21+d+e},\ b_0,\ b_1\ \ldots,\ b_{13}\}. \qquad (13.2)$$

Зафиксируем биекцию $f:N\to(X\cup Y)^2$. Определим с ее помощью предикат Q на множестве $|\widehat{\mathfrak{M}}|$ так, чтобы выполнялись следующие соотношения.

(а) $Q(x,\ x)\leftrightarrow x\in I$.

(б) На множестве I предикат Q задает отношение линейного порядка, соответствующее расположению (13.2).

(в) $Q(c_0,\ x)\ \&\ x\notin I\leftrightarrow x\in|\mathfrak{M}|$.

(г) $Q(c_1,\ x)\ \&\ x\notin I\leftrightarrow x\in N$.

(д) Если $a\in N$ и $f(a)=\langle x,\ y\rangle$, то полагаем

$$Q(x,\ a)\ \&\ \neg Q(a,\ x)\ \&\ Q(a,\ y)\ \&\ \neg Q(y,\ a).$$

(е) Пусть U_i, $0\leqslant i\leqslant 21+d+e$,— нумерация всех унарных предикатов языка $\mathscr{L}_M$, полагаем $Q(a_i,\ x)\ \&\ x\in|\mathfrak{M}|\leftrightarrow U_i(x)$.

(ж) Пусть B_i, $0\leqslant i\leqslant 12$,— нумерация всех бинарных предикатов языка $\mathscr{L}_M$, исключая два предиката: $E\in\mathscr{L}_2$ и $D\in\mathscr{L}_5$ (см. § 2). Если $a\in N$ и $f(a)=\langle x,\ y\rangle$, то полагаем $Q(b_i,\ a)\leftrightarrow B_i(x,\ y)$.

(з) Для $x,\ y\in|\mathfrak{M}|$ полагаем

$$Q(x,\ y)\ \&\ Q(y,\ x),\ \text{если}\ \mathfrak{M}\vDash E(x,\ y),$$

$$Q(x,\ y)\ \&\ \neg Q(y,x),\ \text{если}\ \mathfrak{M}\vDash D(x,\ y).$$

(и) Во всех других случаях предикат Q должен быть ложным.

Из условий (а), (б) следует, что каждый элемент множества I является формульным в модели $\widehat{\mathfrak{M}}$. В силу условий (в), (г) формульными будут множества $|\mathfrak{M}|$ и N. По построению имеем:

(к) $f(a)=\langle x,\ y\rangle\leftrightarrow a\in N\ \&\ Q(x,\ a)\ \&\ Q(a,\ y)$,

(л) $U_i(x)\leftrightarrow x\in|\mathfrak{M}|\ \&\ Q(a_i,\ x)$,

(м) $B_i(x,\ y)\leftrightarrow(\exists\, a\in N)Q(b_i,\ a)\ \&\ f(a)=\langle x,\ y\rangle$,

(н) $E(x,\ y)\leftrightarrow x,\ y\in|\mathfrak{M}|\ \&\ Q(x,\ y)\ \&\ Q(y,\ x)$,

(о) $D(x,\ y)\leftrightarrow x,\ y\in|\mathfrak{M}|\ \&\ Q(x,\ y)\ \&\ \neg Q(y,\ x)$.

Таким образом, модель $\mathfrak{M}$ формульно определима в модели $\widehat{\mathfrak{M}}$ на формульном множестве.

Через $F^{\mathscr{L}}(m,s)$ обозначим теорию языка $\mathscr{L}$, аксиомы которой утверждают, что модель имеет вид $\widehat{\mathfrak{M}}$ для некоторой модели $\mathfrak{M}$ теории F^*_M. Теория F^*_M интерпретируется в теории $F^{\mathscr{L}}(m,s)$, при этом все формулы в правых частях соотношений (к) — (о) можно представить как в виде $\forall$-формул, так и в виде $\exists$-формул языка $\mathscr{L}$. Отсюда легко вывести, что теория $F^{\mathscr{L}}(m,s)$ модельно полна. В качестве предложений $\psi_i^{\mathscr{L}}$ нужно взять интерпретации предложений Ψ_i в теории $F^{\mathscr{L}}(m,s)$.

Пусть $A\in\mathscr{R}_m$. Обозначим теорию $F^{\mathscr{L}}(m,s)[A]$ через T. Рассмотрим в этой теории четыре формулы

$$\varphi_0'(x)\leftrightarrow X(x)\vee Y(x),\ \varphi_1'(x)\leftrightarrow W(x),$$

$$\varphi_2'(x)\leftrightarrow x\in I,\ \varphi_3'(x)\leftrightarrow x\in N.$$

Имеем

$$\alpha_T=\max\{\mathrm{Rank}\,\varphi_i'\mid i=0,1,2,3\}. \qquad (13.3)$$

Легко видеть, что ранги формул φ_0' и φ_1' совпадают с рангами соответствующих формул (12.1) в теории $F(m,\ s)[A]$. Далее, $\mathrm{Rank}\,\varphi_2'=1$. Для вычисления $\operatorname{Rank}\varphi_3'$ заметим, что формульно определимая функция f нумерует пары элементов из $X \cup Y$ посредством элементов множества N. Поэтому ранг формулы φ_3' равен рангу формулы от двух переменных

$$\psi(x, y) = \varphi_0(x) \mathbin{\&} \varphi_0(y)$$

в теории $F(m, s)[A]$. Отсюда $\operatorname{Rank}\varphi_3' = \operatorname{Rank} S_8\mathfrak{M}_2$, где модель $\mathfrak{M}_2$ определена в доказательстве основной теоремы. Прямые вычисления дают $\operatorname{Rank} S_8\mathfrak{M}_2 = 33$. Подставляя вычисленные значения в (13.3), получим нужное выражение.

Нетрудно проверить все остальные пункты. □

Таким образом, мы доказали основную теорему и ее $\mathscr{L}$-вариант. Перейдем теперь к выводу конкретных результатов, используя эти теоремы.

§ 14. СУЩЕСТВОВАНИЕ КОНЕЧНО АКСИОМАТИЗИРУЕМЫХ ТЕОРИЙ

Обозначим через $\mathfrak{B}$ булеву алгебру, элементами которой являются классы эквивалентных табличных условий, а операции индуцированы пропозициональными связками. Очевидно, что $\mathfrak{B}$ является счетной безатомной булевой алгеброй, свободно порожденной элементарными табличными условиями ε_i, $i < \omega$. Алгебра $\mathfrak{B}$ имеет естественную конструктивизацию ν, определяемую геделевской нумерацией табличных условий.

Из пп. 1, 2 основной теоремы следует, что алгебра Линденбаума теории $F(m, s)$ рекурсивно изоморфна фактор-алгебре $\mathfrak{B}/\mathscr{F}_m$, где $\mathscr{F}_m$ — фильтр, порожденный множеством $\{\tau_i \mid i \in W_m\}$. Нетрудно видеть, что каждый рекурсивно перечислимый фильтр алгебры $\mathfrak{B}$ имеет вид $\mathscr{F}_m$ для некоторого $m < \omega$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 14.1. *Для любой рекурсивно перечислимой теории T существует конечно аксоматизируемая теория F такая, что алгебры Линденбаума теорий T и F рекурсивно изоморфны.*

Этот результат анонсирован У. Ханфом [11], первое опубликованное доказательство содержится в работе автора [12].

Следующая общая теорема касается полных теорий.

Теорема 14.2. *Пусть $\mathscr{D}$ — произвольное рекурсивно перечислимое дерево. Эффективно по его р. п. индексу может быть построена полная, модельно полная, конечно аксиоматизируемая теория $F(\mathscr{D})$ в языке с одним бинарным предикатом, имеющая следующие свойства.*

(а) *Теория $F(\mathscr{D})$ имеет простую модель $\leftrightarrow$ дерево $\mathscr{D}$ является атомным.*

(б) *Простая модель теории $F(\mathscr{D})$, если она есть, сильно конструктивизируема $\leftrightarrow$ семейство $\Pi^{\mathrm{fin}}(\mathscr{D})$ вычислимо.*

(в) *Теория $F(\mathscr{D})$ имеет счетную насыщенную модель $\leftrightarrow$ дерево $\mathscr{D}$ является суператомным.*

(г) *Счетная насыщенная модель теории $F(\mathscr{D})$ сильно конструктивизируема $\leftrightarrow$ семейство $\Pi(\mathscr{D})$ вычислимо.*

(д) *Теория $F(\mathscr{D})$ тотально трансцендентна $\leftrightarrow$ дерево $\mathscr{D}$ является суператомным.*

(е) *Ранг Морли теории $F(\mathscr{D})$ равен*

$$\max\{33,\ 1 + \operatorname{Rank}\mathscr{D} + \gamma\},$$

где $\gamma = \begin{cases} 2, & \text{если дерево } \mathscr{D} \text{ суператомное,} \\ 0, & \text{если дерево } \mathscr{D} \text{ не является суператомным.} \end{cases}$

Доказательство. Пусть m — рекурсивно перечислимый индекс множества номеров tt-условий вида $\neg\varepsilon_k$, $k < \omega$. По определению имеем

$\mathfrak{R}_m = \{\varnothing\}$. По основной теореме теория $F(m, s)$ будет полной при любом s, поскольку единственным ее пополнением будет $F(m, s)[\varnothing]$. Выберем теперь s так, чтобы дерево $\mathscr{D}_s^{\varnothing}$ совпадало с заданным деревом $\mathscr{D}$. В качестве $F(\mathscr{D})$ возьмем теорию $F^{\mathscr{L}}(m, s)$, где $\mathscr{L}$ — язык, содержащий один бинарный предикат. Основная теорема и ее $\mathscr{L}$-вариант обеспечивают все нужные свойства этой теории. □

Доказанная теорема доводит результаты работы [13] до случая конечно аксиоматизируемых теорий. Приведем несколько ее конкретных применений.

Теорема 14.3. *Существует полная конечно аксиоматизируемая тотально трансцендентная теория, у которой простая модель и счетная насыщенная модель не являются конструктивизируемыми.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{D}$ — построенное в [13] р. п. суператомное дерево, для которого семейства $\Pi(\mathscr{D})$ и $\Pi^{\text{un}}(\mathscr{D})$ не вычислимы. Нужными свойствами обладает теория $F(\mathscr{D})$, так как в силу модельной полноты всякая конструктивная модель этой теории должна быть с. к. моделью. □

Доказанная теорема решает вопросы работ автора [12, 16].

Теорема 14.4. *Для любого конструктивного ординала $\beta \geqslant 1$ существует полная конечно аксиоматизируемая тотально трансцендентная теория T ранга Морли $\alpha_T = \beta + 3$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\beta \geqslant \omega$. Свойства, указанные в теореме, имеет теория $F(\mathscr{D})$, где $\mathscr{D}$ — р. п. суператомное дерево ранга $\beta + 1$. Построение такого дерева описывается в § 17 настоящей работы.

Теперь рассмотрим случай $\beta < \omega$. Теория квазиследования с тремя координатами, описанная в [1], имеет ранг Морли 4. Применяя стандартные приемы повышения ранга, можно построить ω_1-категоричную полную конечно аксиоматизируемую теорию любого конечного ранга $\alpha \geqslant 4$. □

Отметим результат Дж. Сакса [14] о том, что $\alpha_T < \lambda$ для любой разрешимой тотально трансцендентной теории T, здесь λ — первый неконструктивный ординал. Возникает естественный вопрос: существует ли полная конечно аксиоматизируемая тотально трансцендентная теория ранга $\beta + n$, где $n \in \{1, 2\}$, а β — предельный конструктивный ординал, или же $\beta = 0$?

Теорема 14.5. *Существует полная конечно аксиоматизируемая теория T ранга Морли $\alpha_T = \lambda$.*

Доказательство. Рассмотрим дерево $\mathscr{D} = \oplus \langle \mathscr{D}_i | i < \omega \rangle$, где $\mathscr{D}_i$ определено в (9.1). Достаточно очевидно, что $\mathscr{D}$ — рекурсивно перечислимое дерево и $\operatorname{Rank} \mathscr{D} = \lambda$. Следовательно, нужные свойства имеет теория $F(\mathscr{D})$. □

Автор имеет пример полной конечно аксиоматизируемой теории T с $\alpha_T = \omega_1$, это усиливает результат А. Х. Лахлана [15]. Возникает интересный вопрос: существует ли полная конечно аксиоматизируемая (или даже разрешимая) теория T такая, что $\lambda < \alpha_T < \omega_1$?

§ 15. НЕСКОЛЬКО ОПРЕДЕЛЕНИЙ

Введем несколько определений и понятий, которые будут использоваться в дальнейшем при исследовании сложности разных классов предложений.

Через $\mathscr{L}(\Phi)$ обозначим язык формулы Φ, т. е. совокупность всех предикатных и функциональных символов, входящих в Φ. С каждым предложением Φ свяжем теорию $[\Phi]$ языка $\mathscr{L}(\Phi)$, которая определяется предложением Φ как аксиомой. Свойства теории $[\Phi]$ будут приписываться формуле Ф. Например, утверждение, что формула Ф является полной и тотально трансцендентной, означает, что указанные свойства имеет теория [Ф]. Будем придерживаться соглашения, что понятие «полнота» подразумевает «непротиворечивость», а «тотальная трансцендентность» подразумевает «полноту».

Если $A \subseteq N$, $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(N)$, то запись $A \approx \Sigma$ будет означать, что $A \in \Sigma$ и A является m-полным в Σ.

Стандартные обозначения: $\mathcal{L}$ — фиксированный конечный богатый язык, Φ_i, $i < \omega$,— гёделевская нумерация всех предложений языка $\mathcal{L}$, $\mathrm{Mod}\,\mathcal{L}$ — класс моделей языка $\mathcal{L}$. Через $\mathfrak{B}_k(T)$ будем обозначать алгебру Линденбаума теории T формул со свободными переменными $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$

§ 16. ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ

Эффективность построения теории $F^{\mathcal{L}}(m, s)$ позволяет использовать основную теорему и ее вариант для оценки сложности разных классов предложений.

Сначала приведем теорему, доказанную в [12].

Теорема 16.1. $\{n | \Phi_n$ *полна и имеет простую модель*$\} \approx \Pi^0_3$.

Естественно, что отказ от условия полноты повышает сложность:

Теорема 16.2. $\{n | \Phi_n$ *имеет простую модель*$\} \approx \Sigma^1_1$.

Доказательство. Утверждение, что Φ_n имеет простую модель, равносильно существованию полной теории T такой, что $\Phi_n \in T$ и все алгебры $\mathfrak{B}_k(T)$, $k < \omega$, являются атомными. Это дает верхнюю оценку Σ^1_1. Для оценки снизу рассмотрим эталонное Σ^1_1-множество

$$E = \{s | (\exists \text{ бесконечное } A \subseteq N)(\forall t) R(s, \mathrm{Nom}\{x \in A | x < t\})\},$$

где R — подходящее рекурсивное отношение, а $\mathrm{Nom}\, X$ — канонический индекс конечного множества X. Представление Σ^1_1-множеств в такой форме легко получается из представления с квантором по функциям [6, с. 483] путем кодирования всюду определенных функций $f: N \to N$ бесконечными множествами $A \subseteq N$.

По заданным $s < \omega$ и $A \subseteq N$ построим дерево $\mathcal{D}$, имеющее вид $\oplus\langle \mathcal{D}_i | i < \omega \rangle$, где последовательность $\mathcal{D}_i$ определим таким образом:

$$\mathcal{D}_0 = \begin{cases} \{0\}, \text{ если } (\forall t) R(s, \mathrm{Nom}\{x \in A | x < t\}), \\ N, \text{ если } (\exists t) \neg R(s, \mathrm{Nom}\{x \in A | x < t\}). \end{cases}$$

$$D_k = \begin{cases} \{0, 1, \ldots, 2t\}, \text{ если } \{x \in A | x > k\} \text{ непусто, и } t \text{ — минимальный} \\ \text{элемент этого множества,} \\ N, \text{ если } \{x \in A | x > k\} = \varnothing, \end{cases}$$

при $k > 0$.

Дерево $\mathcal{D}$ строится эффективно по заданным s и A, поэтому согласно s-m-n-теореме [6] существует о. р. ф. $f(x)$ такая, что $\mathcal{D} = \mathcal{D}^A_{f(s)}$.

Если A — конечное, то при некотором $k > 0$ дерево $\mathcal{D}_k$ будет полным, поэтому дерево $\mathcal{D}^A_{f(s)}$ не может быть атомным. Если же A — бесконечное, то все деревья $\mathcal{D}_k$, $k > 0$, будут атомными, поэтому в указанном случае атомность дерева $\mathcal{D}$ определяется слагаемым $\mathcal{D}_0$. В итоге получаем

$$s \in E \leftrightarrow (\exists \text{ бесконечное } A \subseteq N)\ \mathcal{D}^A_{f(s)} \text{ — атомное} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists A \subseteq N)\ \mathcal{D}^A_{f(s)} \text{ — атомное.} \qquad (16.1)$$

Выберем m такое, что $\mathcal{R}_m = \mathcal{P}(N)$, и рассмотрим теорию $F(m, f(s))$. Из (16.1) по основной теореме получаем, что эта теория имеет простую модель в том и только в том случае, когда $s \in E$. Применяя $\mathcal{L}$-вариант основной теоремы, получаем

$$s \in \mathrm{E} \leftrightarrow F^{\mathcal{L}}(m, f(s)) \text{ имеет простую модель} \tag{16.2}$$

Теория в (16.2) строится эффективно по s, поэтому существует о. р. ф. $h(x)$ такая, что $F^{\mathcal{L}}(m, f(s)) = \Phi_{h(s)}$. Комбинируя это с (16.2), получаем окончательно

$$s \in E \leftrightarrow \Phi_{h(s)} \text{ имеет простую модель.}$$

Это дает необходимую нижнюю оценку. □

В дальнейшем, получив соотношение вида (16.2), даже без верхнего индекса $\mathcal{L}$, будем считать доказательство законченным. Опускаемый конец доказательства может быть легко восстановлен.

Теорема 16.3. $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathcal{L} \mid \mathfrak{M}$ *— простая модель*$\} \approx \Pi^1_1$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что указанное множество рекурсивно изоморфно дополнению множества из теоремы 16.2. Это дает необходимую оценку. □

Теорема 16.4. (а) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathcal{L} \mid \mathfrak{M}$ *— простая модель и теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *разрешима*$\} \approx \Pi^0_4$.

(б) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathcal{L} \mid \mathfrak{M}$ *— простая модель и теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *конечно аксиоматизируема*$\} \approx \Pi^0_4$.

Доказательство. Задача сводится, очевидно, к установлению следующих оценок:

$$\{n \mid \Phi_n \text{ имеет разрешимое пополнение с простой моделью}\} \approx \Sigma^0_4. \tag{16.3}$$

$$\{n \mid \Phi_n \text{ имеет конечно аксиоматизируемое пополнение с простой моделью}\} \approx \Sigma^0_4. \tag{16.4}$$

Число n принадлежит множеству (16.4) тогда и только тогда, когда существует предложение Ψ языка $\mathcal{L}$ такое, что (формула $\Phi_n \,\&\, \Psi$ полна и имеет простую модель). По теореме 16.1 условие в скобках описывается префиксом $\forall\exists\forall$. В целом получена оценка Σ^0_4. Аналогично получается верхняя оценка для (16.3).

Для нижних оценок используем эталонное Σ^0_4-полное множество, определенное в [6, с. 423]:

$$E_4 = \{n \mid W_n \text{ содержит конечное число р. п. индексов бесконечных множеств}\}.$$

Опишем процесс построения некоторого дерева $\mathcal{D}$, зависящий от двух параметров:

$$s \in \dot{N}, \quad A \subseteq N. \tag{16.5}$$

Через W^t_k обозначим конечную часть k-го множества в постовской нумерации, вычисленную к моменту t; предполагается, что $W^t_k \subseteq W^{t+1}_k$. Будем строить двойную последовательность $\mathcal{D}^t_i$, $i, t < \omega$, конечных деревьев.

Шаг $t = 0$. Полагаем $\mathcal{D}^0_i = \{0\}$, $i < \omega$.

Шаг $t > 0$.

Случай 1. $\{0, 1, \ldots, t\} \cap A = \varnothing$. Полагаем

$$\mathcal{D}^t_i = \begin{cases} \{0, 1, \ldots, 2t\}, & \text{если } i = 0, \\ \mathcal{D}^{t-1}_i & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Случай 2. $\{0, 1, \ldots, t\} \cap A$ непусто, и k — наименьший элемент этого множества. Полагаем

$$\mathscr{D}_i^t = \begin{cases} \{0, 1, \ldots, 2t\}, \text{ если } k < i < t \ \& \ i \in W_s^t \ \& \ W_i^t \neq W_i^{t-1}, \\ \mathscr{D}_i^{t-1} \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг t закончен.

Положим

$$\mathscr{D}_i = \bigcup \{\mathscr{D}_i^t \mid t < \omega\}, \ i < \omega,$$
$$\mathscr{D} = \oplus \langle \mathscr{D}_i \mid i < \omega \rangle.$$

Нетрудно видеть, что дерево $\mathscr{D}$ строится эффективно по параметрам (16.5), поэтому существует о. р. ф. $f(x)$ такая, что

$$\mathscr{D} = \mathscr{D}_{f(s)}^A \text{ для всех } s \in N, \ A \subseteq N.$$

При $A = \varnothing$ дерево $\mathscr{D}$ не может быть атомным, поскольку дерево $\mathscr{D}_0$ будет полным. При $A = \{k\}$ дерево $\mathscr{D}$ будет атомным в том и только в том случае, когда множество $W_s \cap \{k+1, \ k+2, \ \ldots, \ k+n, \ \ldots\}$ не содержит р. п. индексов бесконечных множеств.

Пусть m — фиксированный р. п. индекс совокупности номеров tt-условий вида

$$i \in A \to j \notin A, \ i, j \in N, \ i \neq j.$$

По выбору m выполняется

$$\mathscr{R}_m = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \ldots, \{n\}, \ldots; \ n \in N\}.$$

Процесс построения дерева $\mathscr{D}$ обеспечивает следующее соотношение:

$$s \in E_4 \leftrightarrow (\exists A \in \mathscr{R}_m) \text{ дерево } \mathscr{D}_{f(s)}^A \text{ — атомное.}$$

Применяя основную теорему, получаем в итоге

$s \in E_4 \leftrightarrow F(m, \ f(s))$ имеет разрешимое пополнение с простой моделью,

$s \in E_4 \leftrightarrow F(m, \ f(s))$ имеет конечно аксиоматизируемое пополнение с простой моделью.

Последняя эквивалентность следует из того, что при любом $A \in \mathscr{R}_m \setminus \{\varnothing\}$ теория $F(m, \ f(s))[A]$ является конечно аксиоматизируемой. □

Теорема 16.5. (а) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} \mid \mathfrak{M}$ — *сильно конструктивизируемая простая модель*$\} \approx \Pi_4^0$.

(б) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} \mid \mathfrak{M}$ — *сильно конструктивизируемая простая модель и теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *конечно аксиоматизируема*$\} \approx \Pi_4^0$.

Доказательство. Достаточно получить следующие оценки:

$$\{n \mid \Phi_n \text{ имеет с. к. простую модель}\} \approx \Sigma_4^0. \tag{16.6}$$

$$\{n \mid \Phi_n \text{ имеет конечно аксиоматизируемое пополнение с простой с. к. моделью}\} \approx \Sigma_4^0. \tag{16.7}$$

Как известно, простая модель полной разрешимой теории (если она есть) является сильно конструктивизируемой тогда и только тогда, когда вычислимо семейство всех главных типов этой теории [13, 16]. Отсюда следует, что Φ_n имеет с. к. простую модель в том и только в том случае, когда существуют полная разрешимая теория T и вычислимое семейство S типов этой теории такие, что

1) $\Phi_n \in T$;

2) каждый тип из S является главным;

3) любая выполнимая в T формула φ принадлежит некоторому типу из S.

Детальная формализация дает префикс формы Σ_4^0. Аналогично рассматривается (16.7).

Приступим теперь к нижним оценкам. Будем использовать Σ_4^0-полное множество E_4, определенное в доказательстве теоремы 16.4. В работе [12, теорема 4.4] описан процесс построения дерева, зависящий от одного параметра s, который дает в итоге о. р. ф. $f(s)$ такую, что

а) для любого s дерево $\mathscr{D}_{h(s)}$ является атомным,

б) семейство $\Pi^{\text{fin}}(\mathscr{D}_{f(s)})$ вычислимо $\leftrightarrow s\in E_4$.

Используя теорему 12.2, получаем:

$$s\in E_4 \leftrightarrow F(\mathscr{D}_{h(s)}) \text{ имеет с. к. простую модель,}$$

$$s\in E_4 \leftrightarrow F(\mathscr{D}_{h(s)}) \text{ имеет конечно аксиоматизируемое пополнение с простой с. к. моделью. } \square$$

§ 17. ЭТАЛОННЫЕ МНОЖЕСТВА ДЛЯ Π_1^1 И ДЛЯ Σ_2^1

В этом параграфе опишем эталонные множества в терминах суператомных деревьев.

По заданному кортежу натуральных чисел

$$\varkappa = \langle n_0, n_1, \ldots, n_{s-1}\rangle \tag{17.1}$$

построим бесконечную цепь $\pi_\varkappa$ следующим образом: начиная с 0 делаем n_0+1 шагов вправо, затем n_1+1 шагов влево, затем n_2+1 шагов вправо и так далее до последнего элемента кортежа, после этого делаем очередной «поворот» и делаем ω шагов в одном направлении. Шаг влево от a означает переход к $L(a)$, шаг вправо — переход к $R(a)$, где L и R определены формулами (8.1). Отметим, что пустому кортежу по определению соответствует крайняя правая цепь.

Пусть $(\mathfrak{A}, \nu)$ — конструктивный линейный порядок. Определим с его помощью следующее множество кортежей:

$$K(\mathfrak{A}, \nu) \rightleftharpoons \{\langle n_0, n_1, \ldots, n_{s-1}\rangle \mid \nu(n_0) > \nu(n_1) > \ldots > \nu(n_{s-1})\}.$$

Через $\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$ обозначим наименьшее дерево, содержащее множество

$$\cup\,\{\pi_\varkappa \mid \varkappa\in K(\mathfrak{A}, \nu)\}. \tag{17.2}$$

Ясно, что р. п. индекс этого дерева находится эффективно по номеру характеристической функции, представляющей отношение $<_{\mathfrak{A}}$ в нумерации ν.

Легко видеть, что дерево $\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$ получается путем добавления L-последователей и R-последователей к множеству (17.2). Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\text{Если } x\in\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)\setminus\cup\{\pi_\varkappa/\varkappa\in K(\mathfrak{A}, \nu),\\ \text{то } x \text{ является тупиком дерева } \mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu).\end{gathered} \tag{17.3}$$

Лемма 17.1. *Пусть $(\mathfrak{A}, \nu)$ — конструктивный линейный порядок, тогда*

(а) *дерево $\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$ является суператомным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ — полный порядок;*

(б) *если $\mathfrak{A}$ — полный порядок, то семейство $\Pi(\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu))$ вычислимо;*

(в) *если $\mathfrak{A}$ — полный порядок ординального типа α, а нумерация ν удовлетворяет условию*

$$(\forall x\in\mathfrak{A})\nu^{-1}(x) \text{ бесконечно,} \tag{17.4}$$

то $\operatorname{Rank}\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu) = 1+\alpha+1.$

Доказательство. (а) Предположим, что $\mathfrak{A}$ не является полным порядком. Тогда найдется строго убывающая последовательность

$$\nu(n_0) > \nu(n_1) > \ldots > \nu(n_s) > \ldots \quad (17.5)$$

Возьмем произвольную ее подпоследовательность

$$\nu(n_{i_0}) > \nu(n_{i_1}) > \ldots > \nu(n_{i_s}) > \ldots \quad (17.6)$$

По бесконечному кортежу $\varkappa = \langle n_{i_s} | s < \omega \rangle$ построим цепь π с бесконечным числом поворотов аналогично тому, как это определялось для конечного кортежа (17.1). Так как каждая конечная часть цепи π в силу (17.3) содержится в некоторой цепи $\pi_\varkappa$, $\varkappa \in K(\mathfrak{A}, \nu)$, то $\pi \subseteq \mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$. Очевидно, что разные последовательности (17.6) дадут разные цепи π, отсюда семейство $\Pi(\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu))$ содержит 2^ω цепей. По теореме 8.1 получаем, что дерево $\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$ не является суператомным.

Обратно, предположим, что дерево $\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$ не суператомное. По теореме 8.1 семейство $\Pi(\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu))$ несчетное, поэтому найдется бесконечная цепь $\pi \subseteq \mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$ с бесконечным числом поворотов. В силу (17.3) каждая конечная часть цепи π должна входить в одну из цепей $\pi_\varkappa$, $\varkappa \in K(\mathfrak{A}, \nu)$. Поэтому повороты этой цепи определяют бесконечный кортеж $\langle n_i | i < \omega \rangle$ с условием (17.5). Следовательно, порядок $\mathfrak{A}$ не является полным.

(б) Предыдущие рассуждения показывают, что в случае, когда $\mathfrak{A}$ — полный порядок, ни одна из цепей $\pi \subseteq \mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$ не может иметь бесконечного числа поворотов. Поэтому цепями $\pi_\varkappa$, $\varkappa \in K(\mathfrak{A}, \nu)$, исчерпываются все бесконечные цепи указанного дерева. По построению $\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$ является рекурсивным, отсюда следует вычислимость семейства его конечных цепей. В итоге имеем вычислимость семейства $\Pi(\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu))$.

(в) Для $\varkappa \in K(\mathfrak{A}, \nu)$, $\varkappa = \langle n_0, n_1, \ldots, n_{s-1} \rangle$, обозначим через $\delta(\varkappa)$ ординальный тип множества $\mathfrak{A} \restriction \{\nu(n_{s-1}) > y\}$. Для пустого кортежа $\varkappa$ по определению положим $\delta(\varkappa)$ равным ординальному типу α множества $\mathfrak{A}$.

Индукцией по β, используя условие (17.4), можно показать, что

$$\Pi_\beta(\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)) = \begin{cases} \Pi(\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)) \text{ при } \beta = 0, \\ \{\pi_\varkappa | \varkappa \in K(\mathfrak{A}, \nu) \,\&\, 1 + \delta(\varkappa) \geqslant \beta\} \text{ при } \beta > 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\operatorname{Rank} \mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu) = 1 + \alpha + 1$. □

Далее предполагается, что последовательность деревьев $\mathscr{D}_s$, $s < \omega$, определена формулой (9.1). Положим

$$H = \{s | \text{ дерево } \mathscr{D}_s \text{ является суператомным}\},$$

$$H^* = \{s \text{ семейство } \Pi(\mathscr{D}_s) \text{ вычислимо}\}.$$

Отметим, что $H^* \subseteq H$.

Лемма 17.2. *Множества H и H^* являются* Π_1^1-*полными.*

Доказательство. Используя п. (г) теоремы 8.1, получаем верхнюю оценку Π_1^1 для множества H. Верхняя оценка для H^* легко выводится из определения этого множества. Для нижних оценок возьмем эталонное Π_1^1-множество, определенное в [6, с. 285]:

$$W = \{s | \varphi_s^{(2)} \text{является характеристической функцией вполне упорядочения некоторого множества натуральных чисел}\}.$$

Переделывая стандартными методами характеристические функции в конструктивные порядки, мы построим вычислимую последовательность $(\mathfrak{A}_s, \nu_s)$, $s < \omega$, конструктивных линейных порядков такую, что будет выполнено соотношение

$$s \in W \leftrightarrow \mathfrak{A}_s \text{ — вполне упорядочение.}$$

По s-m-n-теореме существует о. р. ф. $f(x)$ такая, что для всех s выполнено $\mathscr{D}(\mathfrak{A}_s, \nu_s) = \mathscr{D}_{f(s)}$. Используя лемму 17.1, получаем

$$s \in W \leftrightarrow \text{дерево } \mathscr{D}_{f(s)} \text{ является суператомным.}$$

Это дает необходимую оценку снизу для множества H. Используя теорему 8.1 и лемму 17.2, получаем

$$s \in W \leftrightarrow \text{семейство } \Pi(\mathscr{D}_{f(s)}) \text{ вычислимо.}$$

Это дает нижнюю оценку Π_1^1 для множества H^*. □

Далее предполагается, что дерево $\mathscr{D}_s^A$ определено соотношением (9.2). Обозначим

$$H^2 = \{s \mid (\exists A \subseteq N) \text{ дерево } \mathscr{D}_s^A \text{ является суператомным}\}.$$

Лемма 17.3. *Множество H^2 является Σ_2^1-полным.*

Доказательство. Верхняя оценка получается непосредственно из определения. Для нижней оценки возьмем эталонное Σ_2^1-полное множество, определенное в [6, с. 532]:

$$T^2 = \{s \mid (\exists A \subseteq N)\, \psi_s^A \text{ — характеристическая функция, определяющая функциональное дерево с конечными путями}\}.$$

Переделывая характеристические функции в упорядочение Клини — Брауэра соответствующих функциональных деревьев [6, с. 506], а затем переходя к бинарным деревьям, используя релятивизованную по A процедуру переделки $(\mathfrak{A}, \nu)$ в $\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$, мы по s-m-n-теореме определим о. р. ф. $f(s)$ такую, что для всех $s \in N$, $A \subseteq N$, построенное дерево совпадает с $\mathscr{D}_{f(s)}^A$. В итоге получаем необходимую оценку снизу:

$$s \in W \leftrightarrow (\exists A \subseteq N) \text{ дерево } \mathscr{D}_{f(s)}^A \text{ является суператомным.} \quad \square$$

§ 18. СЧЕТНЫЕ НАСЫЩЕННЫЕ МОДЕЛИ

В этом параграфе мы, придерживаясь схемы § 15, изучим счетные насыщенные модели.

Теорема 18.1. *$\{n \mid \Phi_n$ полна и имеет счетную насыщенную модель$\} \approx \Pi_1^1$.*

Доказательство. Число n принадлежит указанному в теореме множеству в том и только в том случае, когда Φ_n полна и все алгебры $\mathfrak{B}_k(\Phi_n)$ суператомны. Это дает кванторный префикс формы Π_1^1. Для нижней оценки возьмем множество H из леммы 17.2. По теореме 13.1 имеем

$$s \in H \leftrightarrow F(\mathscr{D}_s) \text{ полна и имеет счетную насыщенную модель.}$$

Это дает нужную оценку снизу. □

Теорема 18.2. *$\{n \mid \Phi_n$ имеет счетную насыщенную модель$\} \approx \Sigma_2^1$.*

Доказательство. Предложение Φ_n имеет счетную насыщенную модель тогда и только тогда, когда существует полная теория T, содержащая Φ_n, такая, что все алгебры $\mathfrak{B}_k(T)$ суператомны. Это дает кванторный префикс формы Σ_2^1. Для нижней оценки используем множество H^2 из леммы 17.3. Выберем число m такое, что $\mathscr{R}_m = \mathscr{P}(N)$. По основной теореме имеем

$$s \in H^2 \leftrightarrow F(m, s) \text{ имеет счетную насыщенную модель.} \quad \square$$

Теорема 18.3. $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} \mid \mathfrak{M}$ *— счетная насыщенная модель$\} \approx \Pi_2^1$.*

Доказательство. Непосредственно из предыдущей теоремы. □

Теорема 18.4. (а) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} \mid \mathfrak{M}$ — *счетная насыщенная модель и теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *разрешима*$\} \approx \Sigma_1^1$.

(б) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} \mid \mathfrak{M}$ — *счетная насыщенная модель и теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *конечно аксиоматизируема*$\} \approx \Sigma_1^1$.

Доказательство. Достаточно получить оценки

$\{n \mid \Phi_n$ *имеет разрешимое пополнение со счетной насыщенной моделью*$\} \approx$
$\approx \Pi_1^1$. (18.1)

$\{n \mid \Phi_n$ *имеет конечно аксиоматизируемое пополнение со счетной насыщенной моделью*$\} \approx \Pi_1^1$. (18.2)

Верхние оценки достаточно очевидны. Для нижних оценок используем множество H из леммы 17.2. По теореме 14.2 имеем:

$s \in H \leftrightarrow F(\mathscr{D}_s)$ имеет разрешимое пополнение со счетной насыщенной моделью,

$s \in H \leftrightarrow F(\mathscr{D}_s)$ имеет конечно аксиоматизируемое пополнение со счетной насыщенной моделью. □

Теорема 18.5. (а) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} \mid \mathfrak{M}$ — *сильно конструктивизируемая счетная насыщенная модель*$\} \approx \Sigma_1^1$.

(б) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} \mid \mathfrak{M}$ — *сильно конструктивизируемая счетная насыщенная модель и теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *является конечно аксиоматизируемой*$\} \approx \Sigma_1^1$.

Доказательство. Достаточно получить следующие оценки:

$\{n \mid \Phi_n$ *имеет с. к. счетную насыщенную модель*$\} \approx \Pi_1^1$. (18.3)

$\{n \mid \Phi_n$ *имеет конечно аксиоматизируемое пополнение со счетной насыщенной с. к. моделью*$\} \approx \Pi_1^1$. (18.4)

Согласно критерию М. Морли [17], счетная насыщенная модель полной разрешимой теории будет сильно конструктивизируемой тогда и только тогда, когда вычислимо семейство всех типов этой теории. Отсюда получаем, что Φ_n имеет с. к. счетную насыщенную модель тогда и только тогда, когда существуют разрешимая теория T, содержащая Φ, и вычислимое семейство S типов этой теории такие, что каждый тип теории T содержится в S. Формализация дает кванторный префикс с единственным функциональным квантором «каждый тип». Точно так же получается верхняя оценка для (18.4).

Для нижних оценок используем множество H^* из леммы 17.2. В силу теоремы 14.2 имеем:

$s \in H^* \leftrightarrow F(\mathscr{D}_s)$ имеет с. к. счетную насыщенную модель,

$s \in H^* \leftrightarrow F(\mathscr{D}_s)$ имеет конечно аксиоматизируемое пополнение со счетной насыщенной с. к. моделью. □

§ 19. ТОТАЛЬНО ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ТЕОРИИ

Последний параграф посвящен оценкам сложности классов предложений, связанных с понятием тотальной трансцендентности.

Теорема 19.1. $\{n \mid \Phi_n$ *полна и тотально трансцендентна*$\} \approx \Pi_1^1$.

Доказательство. Как известно, тотальная трансцендентность равносильна ω-стабильности. Отсюда следует, что число n принадлежит указанному в теореме множеству тогда и только тогда, когда теория

(Φ_n) полна, и для каждой счетной модели $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\Phi_n$ алгебра Линденбаума $\mathfrak{B}_1(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, |\mathfrak{M}|))$ является суператомной. Это условие имеет префикс формы Π_1^1. Для нижней оценки используем множество H из леммы 17.2. Применяя теорему 14.2, получаем

$s \in H \leftrightarrow F(\mathscr{D}_s)$ полна и тотально трансцендентна. □

Теорема 19.2. $\{n | \Phi_n$ *имеет тотально трансцендентное пополнение*$\} \approx \Sigma_2^1$.

Доказательство. Верхняя оценка достаточно очевидна. Для нижней оценки используем множество H^2 из леммы 17.3. Выберем число m такое, что $\mathscr{R}_m = \mathscr{P}(N)$. По основной теореме имеем:

$s \in H^2 \leftrightarrow F(m, s)$ имеет тотально трансцендентное пополнение. □

Теорема 19.3. $\mathrm{Th}\,\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} |$ *теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *тотально трансцендентна*$\} \approx \Pi_2^1$.

Доказательство. Непосредственно из предыдущей теоремы. □

Теорема 19.4. (а) $\mathrm{Th}\,\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} |$ *теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *тотально трансцендентна и разрешима*$\} \approx \Sigma_1^1$.

(б) $\mathrm{Th}\,\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} |$ *теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *тотально трансцендентна и конечно аксиоматизируема*$\} \approx \Sigma_1^1$.

Доказательство. Достаточно получить следующие оценки:

$$\{n | \Phi_n \text{ имееет разрешимое тотально трансцендентное пополнение}\} \approx \Pi_1^1. \tag{19.1}$$

$$\{n | \Phi_n \text{ имеет конечно аксиоматизируемое тотально трансцендентное пополнение}\} \approx \Pi_1^1. \tag{19.2}$$

Верхние оценки очевидны. Для нижних оценок используем множество H из леммы 17.2. Применяя теорему 14.2, получаем

$s \in H \leftrightarrow F(\mathscr{D}_s)$ имеет разрешимое тотально трансцендентное пополнение.

$s \in H \leftrightarrow F(\mathscr{D}_s)$ имеет конечно аксиоматизируемое тотально трансцендентное пополнение. □

Теорема 19.5. (а) $\mathrm{Th}\,\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} | \mathfrak{M}$ — *сильно конструктивизируемая модель и теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *тотально трансцендентна*$\} \approx \Sigma_1^1$.

(б) $\mathrm{Th}\,\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} | \mathfrak{M}$ — *сильно конструктивизируемая модель и теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *конечно аксиоматизируема и тотально трансцендентна*$\} \approx \Sigma_1^1$.

Доказательство. Непосредственно из оценок (19.1), (19.2), полученных в предыдущей теореме. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все результаты работы первоначально были получены на основе тотально трансцендентного квазиследования — QST, что отражено в заметке [2]. Впоследствие идею теории QST удалось усовершенствовать, это привело к примеру ω_1-категоричного квазиследования — QS, описанному в [1]. Замена QST на QS не увеличивает возможности конструкции, а лишь упрощает некоторые детали, связанные с техникой совершенных расширений.

В теориях F_M^* на множестве $U \cap W$ интегрируются теории с одноместными предикатами, описанные в работе [13]. Это позволяет переносить результаты, полученные для таких теорий, на конечно аксиоматизируемые теории.

Сформулируем одну естественную проблему, связанную с конечно аксиоматизируемыми теориями.

Проблема. Какова сложность множества

$$C_1 = \{n | \Phi_n \text{ полна и } \omega_1\text{-категорична}\}?$$

Нетрудно показать, что указанное множество находится в интервале $\varnothing^{(1)} \leqslant_m C_1 \leqslant_m \varnothing^{(3)}$.

В заключение автор выражает искреннюю признательность чл.-кор. АН СССР Ю. Л. Ершову за постоянную помощь и моральную поддержку. Хотелось бы отметить также работы Р. Л. Вота [18] и У. Ханфа [19], побудившие автора заниматься интерпретациями машин Тьюринга в конечно аксиоматизируемых теориях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Перетятькин М. Г.** Пример ω_1-категоричной полной конечно аксиоматизируемой теории.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 3, с. 314—347.
2. **Перетятькин М. Г.** О конечно аксиоматизируемых полных теориях.— В кн.: V Всесоюзная конференция по математической логике (тезисы). Новосибирск, изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1979, с. 119.
3. **Перетятькин М. Г.** Сложность некоторых классов предложений.— Там же, с. 120.
4. **Ершов Ю. Л.** Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука. 1980.
5. **Кейслер Г., Чен Ч. Ч.** Теория моделей. М.: Мир, 1977.
6. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
7. **Перетятькин М. Г.** Сильно конструктивные модели и нумерации булевой алгебры рекурсивных множеств.— Алгебра и логика, 1971, т. 10, № 5. с. 535—557.
8. **Чёрч А.** Введение в математическую логику. Т. 1. М.: ИЛ, 1960.
9. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
10. **Сакс Дж.** Теория насыщенных моделей. М.: Мир, 1976.
11. **Hanf W.** The Boolean algebra of logic.— Bull. Amer. Math. Soc., 1975, v. 31, № 3, p. 587—589.
12. **Перетятькин М. Г.** Вычисления на машинах Тьюринга о конечно аксиоматизируемых теориях.— Алгебра и логика, 1981, т. 20. № 4, с. 456—502.
13. **Гончаров С. С., Нуртазин А. Т.** Конструктивные модели полных разрешимых теорий.— Алгебра и логика, 1972, т. 12, № 2, с. 125—142.
14. **Sacks G. E.** Effective bounds on Morley rank.— Fundam. Math., 1979, v. 103, № 2, p. 111—121.
15. **Lachlan A. H.** The transcendental rank of a theory.— Pacific J. Math., 1971, v. 27, p. 119—122.
16. **Harrington L.** Recursively presented prime models.— J. Symbolic Logic, 1974, v. 39, № 2, p. 305—309.
17. **Morley M.** Decidable models.— Israel J. Math., 1976, v. 25, № 3—4, p. 233—240.
18. **Vaught R. L.** Sentences true in all constructive models.— J. Symbolic Logic, 1961, v. 25, № 1, p. 39—58.
19. **Hanf W.** Model theoretic methods in the study of elementary logic.— In: Symposium on the theory of Models. Amsterdam: North — Holland Publishing Co., 1965, p. 132—165.

ОБ ИНДЕКСНЫХ МНОЖЕСТВАХ В ИЕРАРХИИ КЛИНИ — МОСТОВСКОГО

В. Л. СЕЛИВАНОВ

В работе изучаются семейства рекурсивно перечислимых множеств (рпм), индексные множества которых находятся в иерархии Клини — Мостовского [1, гл. 14].

В § 1, который для этой статьи является вспомогательным, описаны довольно общие схемы построения иерархий, аналогичных известным иерархиям Клини — Мостовского и Ершова. Основную роль играют при