

1. Введение

Предлагаемая работа связана с аппроксимацией распределений частичных сумм последовательностей с перемешиванием нормальным законом.

Мы рассмотрим два вида перемешивания:

- а) сильное перемешивание (с. п.) [1],
- б) равномерно сильное перемешивание (р. с. п.) [2].

В разделах 2—6 доказывается ряд утверждений, которые представляют собой обобщение неравенств, известных в случае сумм независимых случайных величин и мартингалов, на суммы слабозависимых случайных величин. Здесь будут доказаны результаты, объявленные автором в [3—5]. В разделе 6 приведено несколько применений полученных неравенств к усиленному закону больших чисел и сходимости рядов.

В разделах 7, 8 на основе доказанных неравенств получены неулучшаемые оценки в принципе инвариантности для слабостационарных последовательностей случайных величин с перемешиванием. Здесь будут использоваться аппроксимационные теоремы Беркеша и Филиппа [6] и неулучшаемые оценки в принципе инвариантности для независимых случайных величин, полученные А. И. Саханенко [7], [8].

В § 2 введены основные обозначения.

2. Обобщение моментного неравенства Розенталя

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность случайных величин со значением в сепарабельном гильбертовом пространстве H и с нулевыми математическими ожиданиями, (x, y) и $|x|$ — соответственно скалярное произведение и норма в H .

Для любых σ -алгебр $\mathcal{F}$ и Q , заданных на одном вероятностном пространстве, положим

$$\alpha(\mathcal{F}, Q) = \sup_{A \in \mathcal{F}, B \in Q} |P(AB) - P(A)P(B)|,$$

$$\varphi(\mathcal{F}, Q) = \sup_{A \in \mathcal{F}, B \in Q} |P(B|A) - P(B)|.$$

Через M_a^b будем обозначать σ -алгебру, порожденную случайными величинами ξ_i , $a \leq i \leq b$. Положим

$$\alpha(n) = \sup_{1 \leq k < \infty} \alpha(M_1^k, M_{k+n}^{\infty}),$$

$$\varphi(n) = \sup_{1 \leq k < \infty} \varphi(M_1^k, M_{k+n}^{\infty}),$$

$$L_t(n) = \sum_{i=1}^n E|\xi_i|^t, \quad D_n^2 = L_2(n),$$

$$A_{r,x} = \sum_{i=1}^n (E|\xi_i|^x)^{r/x},$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad \|\xi\|_p = (E|\xi|^p)^{1/p},$$

$$L_t(n, \delta) = \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_{t+\delta}^t, \quad D_n^2(\delta) = L_2(n, \delta),$$

$$\delta > 0, \quad j(t) = 2 \min \{k \in N: 2k \geq t\}.$$

$$a(\varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{1/j(t)}(k) (k+1)^{j(t)-2}, \quad \varphi(0) = 1,$$

$$b(\alpha, t, \delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{\delta/(j(t)+\delta)}(k) (k+1)^{j(t)-2}, \quad \alpha(0) = 1,$$

$$\varepsilon(\alpha, t, \delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{\delta/(t+\delta)}(k),$$

$$c(t) = j(t)(j(t)-1)2^{j(t)-2}j(t)!, \quad n = 1, \dots,$$

$$Q_t(n) = L_t(n), \quad Q_t(n, \delta) = L_t(n, \delta), \quad \text{если } t \leq 2,$$

$$Q_t(n) = \max(L_t(n), D_n^t), \quad Q_t(n, \delta) = \max(L_t(n, \delta), D_n^t(\delta)), \quad \text{если } t \geq 2.$$

Теорема 2.1. При $1 \leq t < \infty$ справедливо неравенство

$$|E|S_n|^t \leq c_1(t)a(\varphi, t)Q_t(n), \quad (2.1)$$

где $c^1(t) = 16^{j(t)}c(t)$.

Теорема 2.2 Если $H = R^p$, то при $t \geq 1$ справедливо неравенство

$$|E|S_n|^t \leq c_2(t)p^{j(t)/2}b(\alpha, t, \delta)Q_t(n, \delta)Q_t(n, \delta), \quad (2.2)$$

где $c_2(t) = 16^{j(t)}(j(t))^2c(t)e^\delta$.

Следствие 2.1. Пусть $M = \max_{1 \leq i \leq n} E|\xi_i|^t$. При $t \geq 1$ справедливы неравенства

$$E \left| \sum_{i=1}^n a_i \xi_i \right|^t \leq c_1(t)a(\varphi, t)M \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{t/2}, \quad (2.3)$$

$$|E|S_n|^t \leq c_1(t)a(\varphi, t)Mn^{t/2}. \quad (2.4)$$

Следствие 2.2. Пусть $M_\delta = \max_{1 \leq i \leq n} \|\xi_i\|_{t+\delta}^t$, $H = R^p$. При $t \geq 1$ справедливы неравенства

$$E \left| \sum_{i=1}^n a_i \xi_i \right|^t \leq p^{j(t)/2}c_2(t)b(\alpha, t, \delta)M_\delta \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{t/2}, \quad (2.5)$$

$$|E|S_n|^t \leq p^{j(t)/2}c_2(t)b(\alpha, t, \delta)M_\delta n^{t/2}. \quad (2.6)$$

При доказательстве (2.1), (2.2) мы сначала показываем справедливость этих неравенств при целом четном порядке момента (раздел 3), а затем приводим некоторые результаты, которые позволяют в моментном неравенстве Розенталя перейти с целого четного порядка момента на любой (раздел 4). Далее, нетрудно видеть, что для получения оценок в гильбертовом сепарабельном пространстве достаточно получить оценки в $H = R^p$, не зависящие от размерности. Наконец, в случае целого четного порядка момента в неравенствах (2.3)–(2.6) можно значительно ослабить зависимость от коэффициентов перемешивания.

По вышеизложенным причинам нам удобно выделить случай целого четного порядка момента и $H = R^p$ в отдельную теорему.

Теорема 2.3. Пусть $x \geq r \geq 2$, где r — целое четное, $H = R^p$. Справедливы неравенства

$$|E|S_n|^t \leq c_3(r)a_1(\varphi, r, x)A_{r,x}, \quad (2.7)$$

$$|E|S_n|^t \leq p^{r/2}c_4(r)a_2(\alpha, r, x)A_{r,x}. \quad (2.8)$$

При целом четном r справедливы (2.1) и (2.2), где вместо констант $c_1(t)$ и $c_2(t)$ можно поставить $c(t)$ и $e^\delta t^2 c(t)$. В (2.7), (2.8)

$$a_1(\varphi, r, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{1-\frac{(r-1)}{x}}(k) (k+1)^{r/2-1}, \quad c_3(r) = 4r(r-1)3^{r-2}r!,$$

$$a_2(\alpha, r, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{1-r/x}(k) (k+1)^{r/2-1}, \quad c_4(r) = 3c_3(r).$$

1. Суммы независимых случайных величин и мартингалы. Неравенство (2.1) при $t \geq 2$ для сумм независимых вещественных случайных величин получено в [9], [10] (там же доказано обратное неравенство), при $t \leq 2$ в случае вещественного мартингала получено в [11]. (Обобщения на более общие пространства и мартингалы, а также библиографию см. [12, 13, 14, 15].) Заметим, что порядок зависимости от $t (\sim (at)^t)$ у нас такой же, как в [16].

2. Перемешивание. Для строго стационарных последовательностей вещественнозначных случайных величин, удовлетворяющих тем или иным дополнительным условиям типа перемешивания, сходные результаты с неравенствами (2.4) и (2.6) получены в [17, 18, 19, 20] (обобщения см. [21, 22], лемма 3.1, [23]). Аналоги неравенств (2.7) и (2.8) в случае последовательности действительных случайных величин при целом четном порядке момента были объявлены в [24] (доказаны только при $t = 4$). Во всех этих ранее доказанных неравенствах нет явной зависимости от порядка момента и коэффициентов перемешивания, хотя некоторые из них в своих областях действуют точнее. Идеи доказательства при целом четном порядке момента восходят к С. Н. Бернштейну [25, 26, с. 154—155]. Более детально эти идеи были изложены впервые в [20, лемма 2.1]. Неравенство (2.1) объявлено в [4, 5].

3. Доказательство теоремы 2.3 (случай целого четного порядка момента)

Сначала докажем несколько вспомогательных лемм. Через $\vec{i}_s$ обозначим вектор из натуральных чисел $(i_1, \dots, i_s)$. Положим

$$\begin{aligned} I(n, s, r) &= \{\vec{i}_s : 1 \leq i_k \leq n, k = 1, \dots, s; 0 \leq i_k - i_{k-1} \leq r, k = 2, \dots, s\}, \\ I_0(n, s, r) &= \{\vec{i}_s \in I(n, s, r) : \text{существует } k, \text{ что } i_k - i_{k-1} = r\}, \\ I(n, s, r, h) &= \{\vec{i}_s \in I(n, s, r) : i_h - i_{h-1} = r\}, \quad h = 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Лемма 3.1. Пусть $s, n, r \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, $a_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Справедливы неравенства

$$\sum_{\vec{i}_s \in I_0(n, s, r)} \prod_{j=1}^s a_{i_j} \leq 4(s-1) \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{s/2} (r+1)^{s/2-1}, \quad (3.2)$$

$$\sum_{\vec{i}_s \in I(n, s, r)} \prod_{j=1}^s a_{i_j} \leq 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{s/2} (r+1)^{s/2}. \quad (3.3)$$

Доказательство. Положим $a_i = 0$, $i \leq 0$, $i > n$. Следующие неравенства проверяются с помощью непосредственных вычислений, их доказательства будут опущены.

$$\sum_i \sum_{j=i+r} a_i a_j \leq \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad (3.4)$$

$$\sum_i \sum_{i < j < i+r} a_i a_j \leq (r+1) \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad (3.5)$$

$$\sum_i \sum_{i+r < j < i+2r} a_i a_{i+r} a_j \leq (r+1)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{3/2}, \quad (3.6)$$

$$\sum_i \sum_{i-r < j < i} a_j a_i a_{i+r} \leq (r+1)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{3/2}, \quad (3.7)$$

$$\sum_{\substack{i < j < k, \\ \max(j-i, k-j) = r}} a_i a_j a_k \leq 2(r+1)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{3/2}, \quad (3.8)$$

$$\sum_{\substack{i \leq j \leq k \\ \max(j-i, k-j) \leq r}} a_i a_j a_k \leq 2(r+1)^{3/2} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{3/2}, \quad (3.9)$$

$$\sum_{\substack{0 \leq j_k - i_k \leq b_k, \\ k=1, \dots, p}} (a_{i_1} a_{j_1}) \dots (a_{i_p} a_{j_p}) \leq \prod_{k=1}^p (b_k + 1) \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^p. \quad (3.10)$$

Теперь мы можем приступить к доказательству требуемых неравенств. Сначала докажем (3.2). В силу (3.4) и (3.8) можно считать $s \geq 4$. Положим

$$I_k = \sum_{\vec{i}_s \in I(n, s, r, k)} \prod_{j=1}^s a_{i_j}, \quad k = 2, \dots, s.$$

Давайте оценим I_k . Если s четное, то

$$\begin{aligned} I_k &= \sum_{\vec{i}_s \in I(n, s, r, k)} (a_{i_1} \dots a_{i_{k-2}}) (a_{i_{k-1}} a_{i_k}) (a_{i_{k+1}} \dots a_{i_s}) \leq \\ &\leq \left(\sum_i a_i a_{i+r} \right) \sum_{\substack{i_1 \leq \dots \leq i_{k-2} \leq i_{k+1} \leq \dots \leq i_s, \\ i_{k+1} - i_{k-2} \leq 3r, \\ i_q - i_{q-1} \leq r, q=2, \dots, k-2, k+2, \dots, s.}} a_{i_1} \dots a_{i_{k-2}} a_{i_{k+1}} \dots a_{i_s}. \end{aligned}$$

В силу (3.4) и (3.10) находим, что

$$I_k \leq 4(r+1)^{s/2-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{s/2}.$$

Из последнего неравенства следует (3.2) при четных s . Случай нечетного s отличается тем, что, оценивая I_k , нужно выделить не пару $a_{i_{k-1}} a_{i_k}$, а тройку $a_{i_{k-2}} a_{i_{k-1}} a_{i_k}$ (или $a_{i_{k-1}} a_{i_k} a_{i_{k+1}}$, если $k=2$) и воспользоваться вместо неравенства (3.4) неравенством (3.7) (или (3.6)).

Теперь докажем (3.3). Если s четное, то неравенство следует из (3.10). Если s нечетное (в силу (3.9) можно считать $s \geq 5$), то

$$\sum_{\vec{i}_s \in I(n, s, r)} \prod_{j=1}^s a_{i_j} \leq \left(\sum_{\vec{i}_3 \in I(n, 3, r)} \prod_{j=1}^3 a_{i_j} \right) \left(\sum_{\vec{i}_{s-3} \in I(n, s-3, r)} \prod_{j=1}^{s-3} a_{i_j} \right).$$

Из последнего неравенства, (3.9) и (3.10) следует требуемый результат. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть $h, s, r \in N$, $2 \leq h \leq s$, $\delta \geq 0$, $su \leq \delta$, $x \leq \delta$. Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{i}_s \in I(n, s, r)} \left\| \prod_{j=1}^s |\xi_{i_j}| \right\|_{1+u} &\leq s^{u/(1+u)} (r+1)^{s-1} L_s(n, \delta), \\ \sum_{\vec{i}_s \in I(n, s, r, h)} \left\| \prod_{j=1}^{h-1} |\xi_{i_j}| \right\|_{p_h} \left\| \prod_{j=h}^s |\xi_{i_j}| \right\|_{q_h} &\leq c L_s(n, \delta), \end{aligned}$$

где $p_h = (s+x)/(h-1)$, $q_h = (s+x)/(s-h+1)$, $c = (s^2/4)^{\delta/(s+\delta)} (r+1)^{s-2}$.

Доказательство. Покажем справедливость первого неравенства.

Так как $|a_1 \dots a_s| \leq 1/s \sum_{i=1}^s |a_i|^s$, то

$$\left\| \prod_{j=1}^s |\xi_{i_j}| \right\|_{1+u} \leq s^{-1/(1+u)} \sum_{k=1}^s \left\| |\xi_{i_k}|^s \right\|_{1+u}.$$

Имеем

$$\sum_{\vec{i}_s \in I(n, s, r)} \left\| \prod_{j=1}^s |\xi_{i_j}| \right\|_{1+u} \leq s^{-1/(1+u)} \sum_{k=1}^s \sum_{p=1}^n \left\| |\xi_p|^s \right\|_{1+u} \left(\sum_{\substack{\vec{i}_s \in I(n, s, r), \\ i_k = p}} 1 \right) \leq \\ \leq s^{-1/(1+u)} \sum_{k=1}^s \sum_{p=1}^n \left\| |\xi_p|^s \right\|_{1+u} (r+1)^{s-1} = s^{u/(1+u)} (r+1)^{s-1} L_s(n, \delta),$$

так как $\left\| |\xi_p|^s \right\|_{1+u} \leq \left\| |\xi_p|^s \right\|_{s+\delta}$.

Теперь докажем второе неравенство. Положим $a = (h-1)/s$, $b = (s-h+1)/s$. Применяя неравенство Гельдера, мы получим

$$\sum_{\vec{i}_s \in I(n, s, r, h)} \left\| \prod_{j=1}^{h-1} |\xi_{i_j}| \right\|_{p_h} \left\| \prod_{j=h}^s |\xi_{i_j}| \right\|_{q_h} \leq \left(\sum_{\vec{i}_s \in I(n, s, r, h)} \left\| \prod_{j=1}^{h-1} |\xi_{i_j}| \right\|_{p_h}^{1/a} \right)^a \times \\ \times \left(\sum_{\vec{i}_s \in I(n, s, r, h)} \left\| \prod_{j=h}^s |\xi_{i_j}| \right\|_{q_h}^{1/b} \right)^b. \quad (3.11)$$

Заметим, что в силу условий доказываемой леммы

$$\left\| \prod_{j=1}^{h-1} |\xi_{i_j}| \right\|_{p_h}^{1/a} \leq \left\| \prod_{j=1}^{h-1} |\xi_{i_j}| \right\|_{1+y}^{1/a}, \quad (3.12)$$

$$\left\| \prod_{j=h}^s |\xi_{i_j}| \right\|_{q_h}^{1/b} \leq \left\| \prod_{j=h}^s |\xi_{i_j}| \right\|_{1+y}^{1/b}, \quad (3.13)$$

где $y = ap_h - 1 = bq_h - 1 = x/s \leq \delta/s$. Учитывая (3.12), (3.13) и оценивая сомножители в правой части неравенства (3.11) так же, как и при доказательстве предыдущего неравенства, мы получим требуемый результат. Лемма доказана.

Лемма 3.3. При любых $\delta \geq 0$, $2 < t < \omega$ справедливо неравенство

$$Q_t(n, \delta) \leq (Q_\omega(n, \delta))^{t/\omega}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$L_t(n, \delta) \leq (Q_\omega(n, \delta))^{t/\omega}.$$

Так как мы имеем

$$\mathbf{E}|XY| \leq (\mathbf{E}|X|^r)^{1/r} (\mathbf{E}|Y|^s)^{1/s},$$

если только $r, s > 0$, $1/r + 1/s \leq 1$, то при

$$\begin{aligned} x + v &= t + \delta, \quad x, v > 0, \\ 1/p + 1/q &\leq 1, \quad p, q > 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

мы получим

$$L_t(n, \delta) \leq \sum_{i=1}^n (\mathbf{E}|\xi_i|^{xp})^{t/p(t+\delta)} (\mathbf{E}|\xi_i|^{vq})^{t/q(t+\delta)}.$$

Применяя неравенство Гельдера, мы находим

$$L_t(n, \delta) \leq \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{E}|\xi_i|^{xp})^{ta/p(t+\delta)} \right)^{1/a} \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{E}|\xi_i|^{vq})^{tb/q(t+\delta)} \right)^{1/b}, \quad (3.15)$$

$$1/a + 1/b = 1, \quad a, b > 0.$$

Пусть справедливы неравенства

$$xp \leq \omega + \delta, \quad vq \leq 2 + \delta. \quad (3.16)$$

Тогда

$$L_t(n, \delta) \leq \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{E}|\xi_i|^{\omega+\delta})^{xta/(t+\delta)(\omega+\delta)} \right)^{1/a} \left(\sum_{i=1}^n (\mathbf{E}|\xi_i|^{2+\delta})^{vbt/(t+\delta)(2+\delta)} \right)^{1/b}.$$

Для доказательства требуемой леммы нужно, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned}\frac{xta}{(t+\delta)(\omega+\delta)} &= \frac{\omega}{\omega+\delta}, \\ \frac{vtb}{(t+\delta)(2+\delta)} &= \frac{2}{2+\delta}, \\ 1/a + 2/\omega b &= t/\omega.\end{aligned}\tag{3.17}$$

В итоге для доказательства леммы достаточно показать, что существуют такие положительные x, v, p, q, a, b , что выполняются соотношения (3.14)–(3.17). Это проверяется элементарно. Лемма доказана.

Теперь мы можем непосредственно приступить к доказательству теоремы.

Введем обозначения: $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^p x_i^2\right)^{1/2}$, $x = (x_1, \dots, x_p)$, $\xi_j = (\xi_j^{(1)}, \dots, \xi_j^{(p)})$, $j = 1, \dots, n$, $|A|$ — мощность множества A . Для всяких конечных подмножеств натуральных чисел A и B говорим, что $A < B$, если $x < y$ для любых $x \in A$ и $y \in B$. Через $\vec{N}_t = (N_1, \dots, N_t)$ обозначим набор непустых подмножеств из $\{1, \dots, r\}$ таких, что $N_i < N_{i+1}$, $i = 1, \dots, t-1$, и $\bigcup_{i=1}^t N_i = \{1, \dots, r\}$. Q_t есть совокупность всех таких наборов $\vec{N}_t$ при фиксированном t , $1 \leq t \leq r$. Через $\vec{j}_r(\vec{q}_r)$ обозначим вектор $(j_1, \dots, j_r)$ (соответственно $(q_1, \dots, q_r)$) такой, что $j_k \in \{1, \dots, n\}$ ($q_k \in \{1, \dots, p\}$), $k = 1, \dots, r$. Через ε обозначим перестановку множества $\{1, \dots, r\}$. В дальнейшем также будут использоваться обозначения (3.1). Положим

$$I = \{\vec{j}_r: j_k \leq j_{k+1}, k = 1, \dots, r-1\},$$

$$I_\varepsilon = \{\vec{j}_r: \text{из } \varepsilon(k) < \varepsilon(i) \text{ следует } j_k \leq j_i, 1 \leq k, i \leq r\},$$

$$M_\varepsilon = \{\vec{q}_r: q_{\varepsilon(2k)} = q_{\varepsilon(2k-1)}, k = 1, \dots, r/2\}.$$

Пусть $\mathfrak{A}_t$ обозначает класс всех функций $\vec{N}_t$ из I в Q_t . Через $N_k(\vec{j}_r)$ обозначим k -е слева множество в наборе $\vec{N}_t(\vec{j}_r) \in Q_t$. Положим для всякой перестановки

$$\begin{aligned}B_\varepsilon(\vec{N}_t) &= \sum_{\vec{j}_r \in I} \sum_{\vec{q}_r \in M_\varepsilon} \prod_{k=1}^t \left| \mathbf{E} \left(\prod_{i \in N_k(\vec{j}_r)} \xi_{j_i}^{(q_i)} \right) \right|, \\ \beta(\vec{N}_t) &= \min_{1 \leq i \leq t} |N_i|, \quad \tilde{\beta}(\vec{N}_t) = \max_{\vec{j}_r \in I} \beta(\vec{N}_t(\vec{j}_r)).\end{aligned}$$

Сделаем несколько замечаний.

1. $\mathfrak{A}_1$ состоит из одной функции $\vec{N}_1$, которая каждый вектор $\vec{j}_r \in I$ переводит в единственный набор $\vec{N}_1 = (\{1, \dots, r\})$. Следовательно, для всякой ε

$$B_\varepsilon(\vec{N}_1) = \sum_{\vec{j}_r \in I} \sum_{\vec{q}_r \in M_\varepsilon} \left| \mathbf{E} \prod_{i=1}^r \xi_{j_i}^{(q_i)} \right|.$$

2. Нетрудно видеть, что в силу построения

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \|S_n\|^r &= \sum_{j_1, \dots, j_r=1} \sum_{q_1, \dots, q_{r/2}=1} \left(\xi_{j_1}^{(q_1)} \xi_{j_2}^{(q_1)} \dots \right. \\ &\left. \dots \xi_{j_{r-1}}^{(q_{r/2})} \xi_{j_r}^{(q_{r/2})} \right) \leq \sum_{\varepsilon} \sum_{\vec{j}_r \in I_\varepsilon} \sum_{q_1, \dots, q_{r/2}=1} \left| \mathbf{E} \left(\xi_{j_1}^{(q_1)} \xi_{j_2}^{(q_1)} \dots \xi_{j_{r-1}}^{(q_{r/2})} \xi_{j_r}^{(q_{r/2})} \right) \right| \leq\end{aligned}$$

(преобразования $\vec{j}_r$ в соответствии с перестановкой ε)

$$\leq \sum_{\varepsilon} \sum_{\vec{j}_r \in I} \sum_{\vec{q}_r \in M_{\varepsilon}} \left| \mathbb{E} \prod_{i=1}^r \xi_{j_i}^{(q_i)} \right| = \sum_{\varepsilon} B_{\varepsilon}(\tilde{N}_1).$$

В итоге имеем

$$\mathbb{E} \|S_n\|^r \leq r! \max_{\varepsilon} B_{\varepsilon}(\tilde{N}_1). \quad (3.18)$$

$$3. \text{ Если } \beta(\tilde{N}_t(\vec{j}_r)) = 1, \text{ то для такого } \vec{j}_r \sum_{\vec{q}_r \in M_{\varepsilon}} \prod_{k=1}^t \left| \mathbb{E} \prod_{i \in N_k(\vec{j}_r)} \xi_{j_i}^{(q_i)} \right| = 0,$$

так как $\mathbb{E} \xi_j^{(i)} = 0$ при $1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq p$.

4. Если $\tilde{\beta}(\tilde{N}_t) = 1$, то $B_{\varepsilon}(\tilde{N}_t) = 0$. В частности, так как $\tilde{\beta}(\tilde{N}_{r/2+1}) = 1$ для всякой $\tilde{N}_{r/2+1}$, то

$$B_{\varepsilon}(\tilde{N}_{r/2+1}) = 0 \quad (3.19)$$

для всех функций $\tilde{N}_{r/2+1}$ и всех перестановок ε .

5. Идея доказательства теоремы заключается в построении по каждой функции $\tilde{N}_t, t \leq r/2$, функции $\tilde{N}_{t+1}$, не зависящей от ε и такой, что

$$B_{\varepsilon}(\tilde{N}_t) \leq B_{\varepsilon}(\tilde{N}_{t+1}) + c(t, \cdot), \quad (3.20)$$

где $c(t, \cdot)$ в каждом из случаев (2.1), (2.2), (2.7), (2.8) отличается от правых частей соответствующих неравенств лишь на константу, зависящую от t и r .

Сначала построим по функции $\tilde{N}_t, t \leq r/2$, функцию $\tilde{N}_{t+1}$. Зафиксируем вектор $\vec{j}_r \in I$. Пусть ему соответствует набор $(N_1, \dots, N_t)$. Положим для всякого конечного подмножества натуральных чисел (если $|A| \leq 1$, полагаем $H(A) = 0$)

$$H(A) = \max_{x \in A} \min_{\substack{y \in A \\ x \neq y}} |x - y|, \quad h(A) = \max \{x \in A: \exists y \in A, x - y = H(A)\},$$

$$W(A) = \{x \in A: x < h(A)\}, \quad \varepsilon(A) = \{x \in A: x \geq h(A)\}.$$

Далее положим

$$A_k = A_k(\vec{j}_r) = \{j_i: i \in N_k\}, \quad k = 1, \dots, t, \quad (3.21)$$

$$v = v(\vec{j}_r) = \max_{1 \leq k \leq t} H(A_k), \quad k_0 = k_0(\vec{j}_r) = \min \{k: H(A_k) = v, |N_k| > 1\}$$

(так как $t \leq r/2$, то существует k_1 такой, что $|N_{k_1}| > 1$). Пусть N'_{k_0} — множество тех номеров из N_{k_0} , которым соответствуют числа из $W(A_{k_0})$. Соответственно N''_{k_0} — множество тех номеров из N_{k_0} , которым соответствуют числа из $\varepsilon(A_{k_0})$. По построению каждое N'_{k_0} и N''_{k_0} не пусто и $N'_{k_0} < N''_{k_0}$ (если $|A_{k_0}| = 1$, то построение очевидно).

Осталось положить

$$\tilde{N}_{t+1}(\vec{j}_r) = (N_1, \dots, N_{k_0-1}, N'_{k_0}, N''_{k_0}, N_{k_0+1}, \dots, N_t).$$

Функция $\tilde{N}_{t+1}$ построена.

Теперь перейдем к оценке разности $B_{\varepsilon}(\tilde{N}_t) - B_{\varepsilon}(\tilde{N}_{t+1})$. Поскольку $||a| - |b|| \leq |a - b|$, то

$$\begin{aligned} B_{\varepsilon}(\tilde{N}_t) - B_{\varepsilon}(\tilde{N}_{t+1}) &\leq \sum_{\vec{j}_r \in I} \sum_{\vec{q}_r \in M_{\varepsilon}} \prod_{k=1, k \neq k_0}^t \left| \mathbb{E} \prod_{i \in N_k} \xi_{j_i}^{(q_i)} \right| \left| \mathbb{E} \left(\prod_{i \in N_{k_0}} \xi_{j_i}^{(q_i)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E} \left(\prod_{i \in N'_{k_0}} \xi_{j_i}^{(q_i)} \right) \mathbb{E} \left(\prod_{i \in N''_{k_0}} \xi_{j_i}^{(q_i)} \right) \right|, \quad (3.22) \end{aligned}$$

где $N_k, k_0, N'_{k_0}, N''_{k_0}$ зависят от $\vec{j}_r$. Заметим, что в (3.22) только такие слагаемые отличны от нуля, для которых

$$\beta(\tilde{N}_t(\vec{j}_r)) > 1. \quad (3.23)$$

Зафиксируем вектор $\vec{j}_r$, удовлетворяющий (3.23), и оценим оставшуюся сумму (индекс зависимости $N_k, k_0, N'_{k_0}, N''_{k_0}$ от $\vec{j}_r$ опускаем). Положим

$$T_\varepsilon = \sum_{\vec{q}_r \in M_\varepsilon} \left(\left| \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq k_0}}^t \mathbf{E} \left(\prod_{i \in N_k} \xi_{ji}^{(q_i)} \right) \right| \right) \times \\ \times \left| \mathbf{E} \left(\prod_{i \in N_{k_0}} \xi_{ji}^{(q_i)} \right) - \mathbf{E} \left(\prod_{i \in N'_{k_0}} \xi_{ji}^{(q_i)} \right) \mathbf{E} \left(\prod_{i \in N''_{k_0}} \xi_{ji}^{(q_i)} \right) \right|.$$

Наша цель оценить T_ε . Рассмотрим сначала случай р. с. п.

Лемма 3.4. *Справедливо неравенство*

$$T_\varepsilon \leq 2\varphi^{1/p_1}(v) \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq k_0}}^t \mathbf{E} \left(\prod_{i \in N_k} \|\xi_{ji}\| \right) \left\| \left(\prod_{i \in N_{k_0}} \|\xi_{ji}\| \right) \right\|_{p_1} \left\| \left(\prod_{i \in N''_{k_0}} \|\xi_{ji}\| \right) \right\|_{q_1},$$

где $1/p_1 + 1/q_1 = 1$, $p_1, q_1 > 0$, v определено при построении $\tilde{N}_{t+1}$ (см. (3.21)).

Доказательство. Нетрудно заметить, что достаточно ограничиться случаем, когда $\xi_j^{(i)}$ — простые случайные величины, причем можно считать, что

$$\begin{aligned} \xi_{ji}^{(q_i)} &= \sum_{a \in X} \Psi(j_i, q_i, a) I(A_a), \quad i \in N_k, \quad k \neq k_0, \\ \xi_{ji}^{(q_i)} &= \sum_{b \in Y} \Psi(j_i, q_i, b) I(B_b), \quad i \in N'_{k_0}, \\ \xi_{ji}^{(q_i)} &= \sum_{d \in Z} \Psi(j_i, q_i, d) I(C_d), \quad i \in N''_{k_0}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где X, Y, Z — некоторые конечные подмножества натуральных чисел, $A_a \in \sigma(\xi_j, 1 \leq j \leq n)$, $B_b \in \sigma(\xi_{ji}, i \in N'_{k_0})$, $C_d \in \sigma(\xi_{ji}, i \in N''_{k_0})$ и $A_{a_1} A_{a_2} = B_{b_1} B_{b_2} = C_{d_1} C_{d_2} = \Phi$, если $a_1 \neq a_2$, $b_1 \neq b_2$, $d_1 \neq d_2$. Подставляя (3.24) в выражение для T_ε , после простых, но технически громоздких вычислений мы получим

$$T_\varepsilon \leq \sum_{\substack{\vec{a} \in X^{t-1} \\ b \in Y, d \in Z}} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^t \mathbf{P}(A_k) \right) |\mathbf{P}(B_b C_d) - \mathbf{P}(B_b) \mathbf{P}(C_d)| \sum_{\vec{q}_r \in M_\varepsilon} L_\varepsilon(\vec{a}, b, d, \vec{q}_r),$$

$$\text{где } \vec{a} = (a_1, \dots, a_{k_0-1}, a_{k_0+1}, \dots, a_t), L_\varepsilon(\vec{a}, b, d, \vec{q}_r) = \prod_{i \in N_{k_0}} |\Psi(j_i, q_i, b)| \times \\ \times \prod_{i \in N'_{k_0}} |\Psi(j_i, q_i, d)| \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^t \prod_{i \in N_k} |\Psi(j_i, q_i, a_k)|.$$

Давайте оценим $\sum_{\vec{q}_r \in M_\varepsilon} L_\varepsilon(\vec{a}, b, d, \vec{q}_r)$. Забудем на время про зависи-

мость функций Ψ от $\vec{a}, b, d$ и вспомним, что на множестве M_ε справедливы равенства $q_{\varepsilon(2k)} = q_{\varepsilon(2k-1)}$, $k = 1, \dots, r/2$. Исходя из этих соображе-

ний, мы находим, что

$$\sum_{\vec{q}_r \in M_g} L_g(\vec{a}, b, d, \vec{q}_r) = \sum_{\vec{q}_r \in M_g} \prod_{i=1}^r |\Psi(j_i, q_i, \cdot)| =$$

(вспоминая неравенство Коши — Буняковского и учитывая, что перестановка есть взаимно-однозначное отображение)

$$= \prod_{k=1}^{r/2} \sum_{q=1}^p |\Psi(j_{e(2k)}, q, \cdot) \Psi(j_{e(2k-1)}, q, \cdot)| \leq \prod_{k=1}^r \left(\sum_{q=1}^p \Psi^2(j_k, q, \cdot) \right)^{1/2}.$$

Положим

$$g(a, k) = \prod_{i \in N_k} \left(\sum_{q=1}^p \Psi^2(j_i, q, a) \right)^{1/2}, \quad k \neq k_0, \quad a \in X,$$

$$g_1(b) = \prod_{i \in N'_{k_0}} \left(\sum_{q=1}^p \Psi^2(j_i, q, b) \right)^{1/2}, \quad b \in Y,$$

$$g_2(d) = \prod_{i \in N''_{k_0}} \left(\sum_{q=1}^p \Psi^2(j_i, q, d) \right)^{1/2}, \quad d \in Z.$$

Вспоминая про зависимость Ψ от $\vec{a}, b, d$, учитывая, что $\sum_{i \in A, j \in B} x_i y_j = \sum_{i \in A} x_i \sum_{j \in B} y_j$ для всяких конечных множеств A и B , мы получим

$$T_g \leq \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq k_0}}^t \left(\sum_{a \in X} g(a, k) P(A_a) \right) \sum_{b \in Y, d \in Z} g_1(b) g_2(d) |P(B_b C_d) - P(B_b) P(C_d)|.$$

Учитывая, что в силу построения

$$\varphi(\sigma(\xi_{j_i}, i \in N'_{k_0}), \sigma(\xi_{j_i}, i \in N''_{k_0})) \leq \varphi(v),$$

и используя технику, приведенную в лемме 1.1 [18], мы находим

$$\sum_{a \in Z} P(A_a) g(a, k) = E \left(\prod_{i \in N_k} \|\xi_{j_i}\| \right),$$

$$\sum_{b \in Y, d \in Z} g_1(b) g_2(d) |P(B_b C_d) - P(B_b) P(C_d)| \leq 2\varphi^{1/p_1}(v) \left\| \left(\prod_{i \in N'_{k_0}} \|\xi_{j_i}\| \right) \right\|_{p_1} \times \\ \times \left\| \left(\prod_{i \in N''_{k_0}} \|\xi_{j_i}\| \right) \right\|_{q_1},$$

где $p_1, q_1 > 0$, $1/p_1 + 1/q_1 = 1$. Из предыдущих формул и неравенства для T_g следует требуемый результат. Лемма доказана. В случае неравенства (2.1) лемма 3.4 с $p_1 = |N_{k_0}|/|N'_{k_0}|$ и $q_1 = |N_{k_0}|/|N''_{k_0}|$ будет отправной точкой при исследовании (3.22). В случае (2.7) нужный нам результат мы получим в нижеследующей лемме.

Лемма 3.5. Для всякого $x \geq r$ справедливо неравенство

$$T_g \leq 2\varphi^{1-(r-1)/x}(v) \prod_{k=1}^t \prod_{i \in N_k} E^{1/x} \|\xi_{j_i}\|^x.$$

Доказательство. При $k \neq k_0$ имеем (ибо $x \geq |N_k|$) в силу неравенства Гельдера

$$E \left(\prod_{i \in N_k} \|\xi_{j_i}\| \right) \leq \prod_{i \in N_k} E^{1/x} \|\xi_{j_i}\|^x. \quad (3.25)$$

Положим $q_1 = x/|N''_{k_0}|$, $p_1 = q_1/(1 - q_1)$ и заметим, что

$$1/p_1 + 1/q_1 = 1, \quad p_1, q_1 > 0, \quad -p_1^{-1} \leq 1 - (r-1)/x, \quad p_1 |N'_{k_0}| \leq x.$$

Снова в силу неравенства Гельдера

$$\begin{aligned} \left\| \left(\prod_{i \in N_{k_0}} \|\xi_{j_i}\| \right) \right\|_{p_1} &\leq \prod_{i \in N_{k_0}} E^{1/x} \|\xi_{j_i}\|^x, \\ \left\| \left(\prod_{i \in N''_{k_0}} \|\xi_{j_i}\| \right) \right\|_{q_1} &\leq \prod_{i \in N''_{k_0}} E^{1/x} \|\xi_{j_i}\|^x. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Из неравенств (3.25)–(3.26) и леммы 3.4 следует требуемый результат. Лемма доказана.

Теперь перейдем к оценке T_ε в случае с. п. В силу неравенства Ю. А. Давыдова [27, следствие; 23, Appendix]

$$\begin{aligned} \left| E \left(\prod_{i \in N_{k_0}} \xi_{j_i}^{(q_i)} \right) - E \left(\prod_{i \in N_{k_0}} \xi_{j_i}^{(q_i)} \right) E \left(\prod_{i \in N''_{k_0}} \xi_{j_i}^{(q_i)} \right) \right| &\leq \\ &\leq 6\alpha^{1-1/p_2-1/q_2}(v) \left\| \prod_{i \in N_{k_0}} \xi_{j_i}^{(q_i)} \right\|_{p_2} \left\| \prod_{i \in N''_{k_0}} \xi_{j_i}^{(q_i)} \right\|_{q_2}, \end{aligned}$$

где $p_2, q_2 > 0$, $1/p_2 + 1/q_2 \leq 1$. Учитывая, что

$$|M_\varepsilon| = p^{r/2} \quad \text{и} \quad |\xi_j^{(i)}| \leq \|\xi_j\|, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, p,$$

мы находим в случае неравенства (2.2)

$$\begin{aligned} T_\varepsilon &\leq 6p^{r/2}\alpha^{1-1/p_2-1/q_2}(v) \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq k_0}}^t E \left(\prod_{i \in N_k} \|\xi_{j_i}\| \right) \times \\ &\times \left\| \left(\prod_{i \in N_{k_0}} \|\xi_{j_i}\| \right) \right\|_{p_2} \left\| \prod_{i \in N''_{k_0}} \|\xi_{j_i}\| \right\|_{q_2}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где $p_2 = (|N_{k_0}| + \delta)/|N'_{k_0}|$, $q_2 = (|N_{k_0}| + \delta)/|N''_{k_0}|$.

В случае неравенства (2.8) аналогично лемме 3.5 получим

$$T_\varepsilon \leq 6p^{r/2}\alpha^{1-r/x}(v) \prod_{k=1}^t \prod_{i \in N_k} E^{1/x} \|\xi_{j_i}\|^x. \quad (3.28)$$

Итак, на основании лемм 3.4 и 3.5, неравенств (3.27), (3.28), (3.22) мы получили:

к (2.7)

$$B_\varepsilon(\tilde{N}_t) \leq 6_\varepsilon(\tilde{N}_{t+1}) + 2 \sum_{\vec{j}_r \in I_0} \varphi^{1-(r-1)/x}(v) A(t, \tilde{N}_t, \vec{j}_r, \xi); \quad (3.29)$$

к (2.8)

$$B_\varepsilon(\tilde{N}_t) \leq B_\varepsilon(\tilde{N}_{t+1}) + 6p^{r/2} \sum_{\vec{j}_r \in I_0} \alpha^{1-r/x}(v) A(t, \tilde{N}_t, \vec{j}_r, \xi), \quad (3.30)$$

к (2.1)

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(\tilde{N}_t) &\leq B_\varepsilon(\tilde{N}_{t+1}) + 2 \sum_{\vec{j}_r \in I_0} \varphi^{1/r}(v) \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq k_0}}^t E \left(\prod_{i \in N_k} \|\xi_{j_i}\| \right) \times \\ &\times \left\| \left(\prod_{i \in N_{k_0}} \|\xi_{j_i}\| \right) \right\|_{p_1} \left\| \left(\prod_{i \in N''_{k_0}} \|\xi_{j_i}\| \right) \right\|_{q_1}; \end{aligned} \quad (3.31)$$

к (2.2)

$$B_\varepsilon(\tilde{N}_t) \leq B_\varepsilon(\tilde{N}_{t+1}) + 6p^{r/2} \sum_{\vec{j}_r \in I_0} \alpha^{\delta/(r+\delta)}(v) \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq k_0}}^t \mathbf{E} \left(\prod_{i \in N_k} \|\xi_{j_i}\| \right) \times \\ \times \left\| \left(\prod_{i \in N_{k_0}} \|\xi_{j_i}\| \right) \right\|_{p_2} \left\| \left(\prod_{i \in N''_{k_0}} \|\xi_{j_i}\| \right) \right\|_{q_2}, \quad (3.32)$$

где $A(t, \tilde{N}_t, \vec{j}_r, \xi) = \prod_{k=1}^t \prod_{i \in N_k} \mathbf{E}^{1/x} \|\xi_{j_i}\|^x$,

$$I_0 = \{\vec{j}_r \in I: \beta(\tilde{N}_t(\vec{j}_r)) > 1\}, \quad p_1 = |N_{k_0}|/|N'_{k_0}|,$$

$$q_1 = |N_{k_0}|/|N''_{k_0}|, \quad p_2 = p_1 + \delta/|N'_{k_0}|,$$

$q_2 = p_2 + \delta/|N''_{k_0}|$. Отметим, что $p_1, q_1, p_2, q_2, v, N_k, k_0, N'_{k_0}, N''_{k_0}$ зависят от $\vec{j}_r$ посредством $\tilde{N}_t, \tilde{N}_{t+1}$.

Мы перешли к заключительному этапу доказательства. Нужно оценить суммы, стоящие в правых частях вышенаписанных неравенств. Заметим, что в оценках, относящихся к (2.7) и (2.8), стоит фактически сумма вида

$$A(\eta, b) = \sum_{\vec{j}_r \in I_0} \eta(v(\vec{j}_r)) \prod_{k=1}^t \prod_{i \in N_k(\vec{j}_r)} b_{j_i},$$

где $\eta(v) \geq 0, b_i \geq 0$ и по построению (см. (3.21))

$$H(\{j_i: i \in N_k(\vec{j}_r)\}) \leq v(\vec{j}_r), \quad 0 \leq v(\vec{j}_r) \leq n-1,$$

$$H(\{j_i: i \in N_{k_0}(\vec{j}_r)\}) = v(\vec{j}_r) = \min_{x \in N'_{k_0}, y \in N''_{k_0}}, j_x - j_y.$$

В нижеследующей лемме приведена оценка для $A(\eta, b)$.

Лемма 3.6. При сформулированных условиях справедливо неравенство

$$A(\eta, b) \leq \left(\sum_{a=0}^{n-1} \eta(a) (a+1)^{r/2-1} \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{r/2} t^{2^{t+1}} (r-1) C_{r-2}^{t-1}.$$

Доказательство. Зафиксируем $\tilde{N}_t$ такой, что $\beta(\tilde{N}_t) > 1$. Положим $|N_k| = S_k, k = 1, \dots, t, b_i = 0, i \leq 0, i > n$.

$$I(\tilde{N}_t, a, b) = \{\vec{j}_r \in I_0: \tilde{N}_t(\vec{j}_r) = \tilde{N}_t, \quad k_0(\vec{j}_r) = b, \quad v(\vec{j}_r) = a\}.$$

Имеем

$$A(\eta, b) \leq \sum_{a=0}^{n-1} \eta(a) \sum_{\substack{\vec{N}_t \in Q_t, \\ \beta(\vec{N}_t) > 1}} \sum_{b=1}^t \sum_{\vec{j}_r \in I(\vec{N}_t, a, b)} \prod_{k=1}^t \prod_{i \in N_k} b_{j_i}. \quad (3.33)$$

В силу построения мы находим, что

$$\sum_{\vec{j}_r \in I(\vec{N}_t, a, b)} \prod_{k=1}^t \prod_{i \in N_k} b_{j_i} \leq \left(\sum_{\vec{i}_{s_b} \in I_0(n, s_b, a)} \prod_{j=1}^{s_b} b_{i_j} \right) \times \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq k_0}}^t \left(\sum_{\vec{i}_{s_k} \in I(n, s_k, a)} \prod_{j=1}^{s_k} b_{i_j} \right).$$

Применяя к отдельным суммам правой части предыдущего неравенства лемму 3.1, получим

$$\sum_{\vec{j}_r \in I(\vec{N}_t, a, b)} \prod_{k=1}^t \prod_{i \in N_k} b_{j_i} \leq 2^{t+1} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{r/2} (|N_b| - 1)(a+1)^{r/2-1}.$$

Подставляя предыдущее неравенство в (3.33) и учитывая, что $|Q_t \cap \{\vec{N}_t: \beta(\vec{N}_t) > 1\}| \leq C_{r-2}^{t-1}$, мы получим требуемое неравенство. Лемма доказана.

Перейдем к оценке (3.31). Зафиксируем $\vec{N}_t$, a , b , h такие, что $\beta(\vec{N}_t) > 1$, $0 \leq a \leq n-1$, $1 \leq b \leq t$, $1 \leq h \leq |N_b| - 1$ (как и ранее, $|N_b| = S_b \geq 2$). Пусть R обозначает сумму в правой части (3.31). Положим $I(\vec{N}_t, a, b, h) = \{\vec{j}_r: \vec{N}_t(\vec{j}_r) = \vec{N}_t, k_0(\vec{j}_r) = b, v(\vec{j}_r) = a, |N'_b| = h, \vec{N}_{t+1}(\vec{j}_r) = (N_1, \dots, N'_b, N''_b, \dots, N_t)\}$.

Имеем

$$R \leq 2 \sum_{a=0}^{n-1} \varphi^{1/r}(a) \sum_{\vec{N}_t \in Q_t, \beta(\vec{N}_t) > 1} \sum_{b=1}^t \sum_{h=1}^{|N_b|-1} D(t, h, \vec{N}_t, b, a), \quad (3.34)$$

где $p_h = |N_b|/h$, $q_h = p_h/(p_h - 1)$,

$$D(t, h, \vec{N}_t, b, a) = \sum_{\vec{j}_r \in I(\vec{N}_t, a, b, h)} \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq b}}^t \mathbf{E} \left(\prod_{i \in N_h} \|\xi_{ji}\| \right) \times \\ \times \left\| \left(\prod_{i \in N_b} \|\xi_{ji}\| \right) \right\|_{p_h} \left\| \left(\prod_{i \in N_b} \|\xi_{ji}\| \right) \right\|_{q_h}.$$

В силу построения получим

$$D(t, h, \vec{N}_t, b, a) \leq \left(\prod_{\substack{k=1, \\ k \neq b}}^t \sum_{\vec{i}_{s_k} \in I(n, s_k, a)} \mathbf{E} \left(\prod_{j=1}^{s_k} \|\xi_{ij}\| \right) \right) \times \\ \times \sum_{\vec{i}_{s_b} \in I(n, s_b, a, h+1)} \left\| \left(\prod_{j=1}^h \|\xi_{ij}\| \right) \right\|_{p_h} \left\| \left(\prod_{j=h+1}^{s_b} \|\xi_{ij}\| \right) \right\|_{q_h}.$$

Применяя лемму 3.2 к отдельным суммам правой части предыдущего неравенства, имеем

$$D(t, h, \vec{N}_t, b, a) \leq (a+1)^{r-2} (|N_b| - 1) \prod_{k=1}^t L_{s_k}(n),$$

где $s_k \geq 2$, $\sum_{k=1}^t s_k = r$. Из леммы 3.3 следует

$$\prod_{k=1}^t L_{s_k}(n) \leq \prod_{k=1}^t (\max(L_r(n), D_n^r))^{s_k/r} = Q_r(n).$$

Следовательно,

$$D(t, h, \vec{N}_t, b, a) \leq (a+1)^{r-2} (|N_b| - 1) Q_r(n).$$

Из последнего неравенства и (3.34) находим

$$R \leq 2C_{r-2}^{t-1} t (r-1) \sum_{a=0}^{n-1} \varphi^{1/r}(a) (a+1)^{r-2} Q_r(n). \quad (3.35)$$

Пусть теперь R_t обозначает сумму в правой части (3.32). Аналогично, как при оценивании (3.31), мы получим

$$R_1 \leq 2e^\delta C_{r-2}^{t-1} r^2 t (r-1) p^{r/2} \left(\sum_{a=0}^{n-1} \alpha^{\delta/(r+\delta)}(a) (a+1)^{r-2} \right) Q_r(n, \delta). \quad (3.36)$$

Из (3.29)–(3.32), леммы 3,6, неравенств (3.35), (3.36) имеем:

к (2.7)

$$B_\varepsilon(\vec{N}_t) \leq B_\varepsilon(\vec{N}_{t+1}) + C_{t,r}^{(1)} a_1(\varphi, r, x) A_{r,x};$$

к (2.8)

$$B_{\varepsilon}(\tilde{N}_t) \leq B_{\varepsilon}(\tilde{N}_{t+1}) + 3p^{r/2} C_{t,r}^{(1)} a_2(\alpha, r, x) A_{r,x},$$

к (2.1)

$$B_{\varepsilon}(\tilde{N}_t) \leq B_{\varepsilon}(\tilde{N}_{t+1}) + C_{t,r}^{(2)} a(\varphi, r) Q_r(n),$$

к (2.2)

$$B_{\varepsilon}(\tilde{N}_t) \leq B_{\varepsilon}(\tilde{N}_{t+1}) + C_{t,r}^{(2)} e^{\delta r^2} p^{r/2} b(\alpha, r, \delta) Q_r(n, \delta),$$

где $C_{t,r}^{(1)} = t 2^{t+2} (r-1) C_{r-2}^{t-1}$, $C_{t,r}^{(2)} = 2 C_{r-2}^{t-1} t (r-1)$.

Суммируя вышеприведенные неравенства по t и учитывая (3.18) и (3.19), мы получим требуемый результат. Теорема доказана.

4. Переход в моментном неравенстве Розенталя с целого четного порядка момента на любой порядок

Пусть задан набор σ -алгебр $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^n$ и сепарабельное банахово пространство B с нормой $\|x\|$. Будем говорить, что набор случайных величин $\eta = \{\eta_i\}_{i=1}^n$ согласован с $(\mathcal{F}, B)$, если η_i принимают значения в B , измеримы относительно $\mathcal{F}_i$ и $E\eta_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Положим

$$L(v, \delta, \eta) = \sum_{i=1}^n (E \|\eta_i\|^{v+\delta})^{v/(v+\delta)}, \quad (4.1)$$

$$D(\eta, \delta) = L(2, \delta, \eta);$$

$$Q(v, \delta, \eta) = \begin{cases} \max(L(v, \delta, \eta), (D(\eta, \delta))^{v/2}), & v \geq 2, \\ L(v, \delta, \eta), & 1 \leq v \leq 2. \end{cases}$$

Лемма 4.1. Пусть для всякого набора случайных величин $\eta = \{\eta_i\}_{i=1}^n$, согласованного с $(\mathcal{F}, B)$, справедливо неравенство

$$E \left\| \sum_{i=1}^n \eta_i \right\|^p \leq c Q(v, \delta, \eta),$$

где $c \geq 1$, $\delta \geq 0$, $v \geq 1$. Тогда для всех t таких, что $1 \leq t \leq v$, и всякого набора случайных величин $\varphi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$, согласованного с $(\mathcal{F}, B)$, справедливо неравенство

$$E \left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i \right\|^t \leq c \cdot 16^v \cdot Q(t, \delta, \varphi).$$

Замечание. Из теоремы 2.3 и леммы 4.1 следует справедливость теорем 2.1 и 2.2.

Доказательство леммы 4.1. Положим

$$\begin{aligned} Q &= Q(t, \delta, \varphi), \quad y = Q^{1/t}, \quad \varphi_i = \Psi_i + \eta_i, \\ \Psi_i &= T_i - ET_i, \quad \eta_i = Y_i - EY_i, \quad T_i = \varphi_i I(\|\varphi_i\| \leq y), \\ Y_i &= \varphi_i I(\|\varphi_i\| > y), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

В силу неравенства выпуклости мы имеем

$$E \left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i \right\|^t \leq 2^{t-1} \left(E \left\| \sum_{i=1}^n \Psi_i \right\|^t + E \left\| \sum_{i=1}^n \eta_i \right\|^t \right).$$

Применяя последовательно неравенства вогнутости и выпуклости, получим

$$\begin{aligned} E \left\| \sum_{i=1}^n \eta_i \right\|^t &\leq E \left(\sum_{i=1}^n \|\eta_i\|^{t/v} \right)^v \leq \\ &\leq 2^{v-1} \left(E \left| \sum_{i=1}^n (\|\eta_i\|^{t/v} - E \|\eta_i\|^{t/v}) \right|^v + \left(\sum_{i=1}^n E \|\eta_i\|^{t/v} \right)^v \right). \end{aligned}$$

В силу неравенства Ляпунова

$$E \left\| \sum_{i=1}^n \Psi_i \right\|^t \leq \left(E \left\| \sum_{i=1}^n \Psi_i \right\|^v \right)^{t/v}.$$

В итоге мы имеем

$$E \left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i \right\|^t \leq 2^{t-1} \left(E \left\| \sum_{i=1}^n \Psi_i \right\|^v \right)^{t/v} + 2^{t+v-2} \left(E \left\| \sum_{i=1}^n (\|\eta_i\|^{t/v} - E\|\eta_i\|^{t/v}) \right\|^v + \left(\sum_{i=1}^n E\|\eta_i\|^{t/v} \right)^v \right). \quad (4.2)$$

Пусть $z_i = e(\|\eta_i\|^{t/v} - E\|\eta_i\|^{t/v})$, $i = 1, \dots, n$, где e — единичный вектор в B , $z = \{z_i\}_{i=1}^n$, $\Psi = \{\Psi_i\}_{i=1}^n$. Нетрудно видеть, что z и Ψ согласованы с $(\mathcal{F}, B)$, и мы можем воспользоваться данным в теореме неравенством.

Оценим последовательно все члены в правой части неравенства (4.2). В силу условий теоремы

$$E \left\| \sum_{i=1}^n \Psi_i \right\|^v \leq c \cdot Q(v, \delta, \Psi).$$

А. Оценим $L(v, \delta, \Psi)$. Имеем

$$L(v, \delta, \Psi) = \sum_{i=1}^n (E\|\Psi_i\|^{v+\delta})^{v/(v+\delta)} \leq 2^v \sum_{i=1}^n (E\|T_i\|^{(v+\delta)u})^{v/(v+\delta)u},$$

где $u = \frac{v(t+\delta)}{(v+\delta)t} \geq 1$. Следовательно,

$$E\|T_i\|^{(v+\delta)u} \leq y^{((v+\delta)u - (t+\delta))} E\|\varphi_i\|^{t+\delta},$$

$$L(v, \delta, \Psi) \leq 2^v y^{t((v+\delta)u - (t+\delta))/(t+\delta)} \sum_{i=1}^n (E\|\varphi_i\|^{t+\delta})^{t/(t+\delta)} \leq 2^v (Q(t, \delta, \varphi))^{v/t}.$$

Б. Пусть $1 \leq t \leq v \leq 2$. Тогда $Q(v, \delta, \Psi) = L(v, \delta, \Psi)$ и, следовательно,

$$E \left\| \sum_{i=1}^n \Psi_i \right\|^v \leq c \cdot 2^v \cdot (Q(t, \delta, \varphi))^{v/t}. \quad (4.3)$$

В. Пусть $t \leq 2 \leq v$. Учитывая А, $D(\Psi, \delta) = L(2, \delta, \Psi) \leq 4(Q(t, \delta, \varphi))^{2/t}$, мы получим

$$Q(v, \delta, \Psi) \leq 2^v (Q(t, \delta, \varphi))^{v/t},$$

т. е. верно (4.3).

Г. Пусть $2 \leq t \leq v$. Нетрудно видеть, что

$$D(\Psi, \delta) = \sum_{i=1}^n (E\|\Psi_i\|^{2+\delta})^{2/(2+\delta)} \leq 4 \sum_{i=1}^n (E\|T_i\|^{2+\delta})^{2/(2+\delta)} \leq 4Q^{2/t}.$$

Следовательно, учитывая А, мы получим (4.3).

Перейдем к оценке второго члена в правой части (4.2). В силу условий теоремы

$$E \left\| \sum_{i=1}^n z_i \right\|^v \leq c \cdot Q(v, \delta, z).$$

А. Оценим $L(v, \delta, z)$. Имеем

$$\begin{aligned} L(v, \delta, z) &= \sum_{i=1}^n (E\|\eta_i\|^{t/v} - E\|\eta_i\|^{t/v})^{v/(v+\delta)} \leq 2^v \sum_{i=1}^n (E\|\eta_i\|^{t(v+\delta)/v})^{v/(v+\delta)} \leq \\ &\leq 2^{v+t} \sum_{i=1}^n (E\|Y_i\|^{t(v+\delta)/v})^{v/(v+\delta)}. \end{aligned}$$

Пусть $u = \frac{v(t+\delta)}{(v+\delta)t}$. Тогда, так как $u \geq 1$, мы имеем

$$L(v, \delta, z) \leq 2^{v+t} \sum_{i=1}^n (\mathbf{E} \|Y_i\|^{t(v+\delta)u/v})^{v/(v+\delta)u} = \\ = 2^{v+t} \sum_{i=1}^n (\mathbf{E} \|Y_i\|^{t+\delta})^{t/(t+\delta)} \leq 2^{v+t} Q.$$

Б. Пусть $1 \leq t \leq v \leq 2$. Тогда $Q(v, \delta, z) = L(v, \delta, z)$. Следовательно,

$$\mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^n z_i \right\|^v \leq c \cdot 2^{v+t} \cdot Q(t, \delta, \varphi). \quad (4.4)$$

В. Пусть $v \geq 2$, $t \leq 2$. Поступая так же, как и при оценивании $L(v, \delta, z)$, и учитывая, что $\frac{v(t+\delta)}{t(2+\delta)} \geq 1$ и $\sum_{i=1}^n |a_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i| \right)^p$ при $p \geq 1$, мы получим

$$D(z, \delta) \leq 4^{(1+t/v)} \sum_{i=1}^n (\mathbf{E} \|Y_i\|^{t(2+\delta)/v})^{2/(2+\delta)} \leq 4^{(1+t/v)} y^{(t(2+\delta)/v - (t+\delta))} \times \\ \times \sum_{i=1}^n (\mathbf{E} \|\varphi_i\|^{t+\delta})^{2/(2+\delta)} \leq 4^{(1+t/v)} Q^{2/v}.$$

Следовательно,

$$Q(v, \delta, z) = \max(L(v, \delta, z), (D(z, \delta))^{v/2}) \leq 2^{v+t} Q(t, \delta, \varphi).$$

Тем самым в этом случае (4.4) доказано.

Г. Пусть $2 \leq t \leq v$. Оценку $L(v, \delta, z)$ мы уже провели. Оценим $D(z, \delta)$. Имеем

$$D(z, \delta) \leq 4^{(1+t/v)} \sum_{i=1}^n (\mathbf{E} \|Y_i\|^{t(2+\delta)/v})^{2/(2+\delta)} \leq \\ \leq 4^{(1+t/v)} y^{2(t/v-1)} \sum_{i=1}^n (\mathbf{E} \|\varphi_i\|^{2+\delta})^{2/(2+\delta)} \leq 4^{(1+t/v)} Q^{2/v}.$$

Следовательно, и в этом случае, верно (4.4).

Оценим последний член в правой части (4.2). Имеем

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{E} \|\eta_i\|^{t/v} \leq 2 \sum_{i=1}^n \mathbf{E} \|Y_i\|^{t/v} \leq 2Q^{(1/v-1)} \sum_{i=1}^n (\mathbf{E} \|\varphi_i\|^{t+\delta})^{t/(t+\delta)} \leq 2Q^{1/v}.$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E} \|\eta_i\|^{t/v} \right)^v \leq 2^v \cdot Q(t, \delta, \varphi). \quad (4.5)$$

Подставляя (4.3)–(4.5) в (4.2), учитывая, что $c \geq 1$, после элементарных вычислений мы получим требуемый результат. Теорема доказана.

5. Неравенства типа неравенств Колмогорова для мартингалов

Пусть

$$\beta(i) = \beta(i, p, q) = \sup_{1 \leq k \leq \infty} \sup_{\eta \in M_1^k} \frac{|\mathbf{E}(\eta, \xi_{k+i})|}{\|\eta\|_p \|\xi_{k+i}\|_q},$$

где $p, q > 0$, $1/p + 1/q \leq 1$. Пусть $t = p/(p-1)$. Тогда $t > 1$ и $q - t = \delta \geq 0$. Положим $\varepsilon = \varepsilon(p, q) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta(i, p, q)$.

Теорема 5.1. *Справедливо неравенство*

$$\mathbf{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x \right) x^{-t} \mathbf{E} |S_n|^t a_1(t) (1 + \varepsilon) + x^{-t} L_t(n, \delta) \varepsilon (1 + \varepsilon)^t a_2(t), \quad (5.1)$$

где $a_1(t) = \max(1, 2/t)$, $a_2(t) = (t-1)^{t-1} a_1^t(t)$.

Пусть $\eta \in M_1^k$, $\xi \in M_{k+i}^n$, $a, b > 0$, $1/a + 1/b \leq 1$. Имеем ([18, лемма 1.1; 25, с. 1028; 31]; доказательство с вещественного случая на сепарабельное гильбертово пространство переносится элементарно)

$$|E(\eta, \xi) - (E\eta, E\xi)| \leq 2\varphi^{1/a}(i) \|\eta\|_a \|\xi\|_b,$$

т. е. $\beta(i, p, q) \leq 2\varphi^{1/p}(i)$. При тех же ограничениях и $H = R^m$ [27, следствие; 23, Appendix]

$$|E(\eta, \xi) - (E\eta, E\xi)| \leq 6m(\alpha(i))^{1-1/a-1/b} |\eta|_a |\xi|_b,$$

т. е. $\beta(i, p, q) \leq 6m(\alpha(i))^{1-1/p-1/q}$. Следовательно, мы получили

Следствие 5.1. При $t > 1$ справедливо неравенство

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x\right) \leq x^{-t} E|S_n|^t a_1(t) (1 + \varepsilon_1) + x^{-t} L_t(n) \varepsilon_1 (1 + \varepsilon_1)^t a_2(t), \quad (5.2)$$

где $\varepsilon_1 = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{(t-1)/t}(i)$.

Следствие 5.2. Пусть $H = R^m$. При $t > 1$, $\delta \geq 0$, справедливо неравенство

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x\right) \leq x^{-t} E|S_n|^t a_1(t) (1 + \varepsilon_2) + x^{-t} L_t(n, \delta) \varepsilon_2 (1 + \varepsilon_2)^t a_2(t), \quad (5.3)$$

где $\varepsilon_2 = 6m(\varepsilon(\alpha, t, \delta) - 1) = 6m \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{\delta/(t+\delta)}(k)$.

Неравенство (5.2) хорошо действует при $t \geq 2$ (при переходе к последовательностям фактически требуется сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(i)$).

Но в зоне $1 < t < 2$ оно действует плохо, поэтому в разделе 6 будет приведено неравенство, более удобное для наших целей, причем доказательство основано на срезке и неравенстве (5.2) при $t=2$, что приводит

опять же к ряду $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(i)$. То же в некоторой мере относится и к неравенству (5.3). Заметим, что иногда (особенно при исследовании предельных теорем типа усиленного закона больших чисел) лучше использовать результаты, позволяющие перейти с моментного неравенства для суммы (типа $E \left| \sum_{i=1}^n a_i \xi_i \right|^p \leq c \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{p/2}$, $p > 2$) на моментное неравенство для максимума частичных сумм (соответственно к

$$E \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k a_i \xi_i \right|^p \leq c_p c \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{p/2}, \quad p > 2)$$

(см. 28, там же можно найти библиографию, связанную с этим направлением). Неравенство (5.1) обобщает неравенство Колмогорова для мартингалов (см. [29; 17, гл. 7; 30; 26, с. 331]; название взято из [31, с. 137—138]). Несколько иные подходы, связанные со своими конкретными задачами, см. в [6, лемма 4.1.2; 32; 34; 33, лемма 3]. В случае $1 \leq t \leq 2$ близкие результаты получены в [35].

Доказательство теоремы 5.1. В случае $t \geq 2$ будем использовать неравенство

$$|S_n|^t \geq |S_k|^t + t|S_k|^{t-2}(S_n, S_n - S_k), \quad (5.4)$$

в случае $1 \leq t \leq 2$ —

$$|S_n|^t \geq 2/t(|S_k|^t + 2|S_k|^{t-2}(S_n, S_n - S_k)). \quad (5.5)$$

Доказательство (5.4) и (5.5) следует из элементарных неравенств $(1+y)^\alpha \geq 1 + \alpha y$ при $|y| \leq 1$, $\alpha \geq 1$ и $(1+y)^\alpha \geq \alpha(1+y)$ при $|y| \leq 1$,

$0 \leq \alpha \leq 1$ и тождества

$$S_n^2 = S_k^2 + 2(S_k, S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2.$$

Доказательство (5.1) приведем только при $t \geq 2$, ибо при $1 < t \leq 2$ доказательство аналогично.

Пусть $B_k = \{|S_k| \geq x, |S_i| < x, i = 1, \dots, k-1\}$. Так же как и при доказательстве (5.1) Колмогоровым в случае $t = 2$ и независимых слагаемых (см. [29, с. 310—311; 17, с. 99—100]), из (5.4) мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|S_n|^t &\geq \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(|S_k|^t I(B_k)) - t \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{E}(|S_k|^{t-2} I(B_k) (S_k, S_n - S_k)) \geq \\ &\geq \omega - t \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-k} \mathbf{E}(\varphi_k, \xi_{k+j}), \end{aligned}$$

где $\omega = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(|S_k|^t I(B_k)), \quad \varphi_k = |S_k|^{t-2} S_k I(B_k).$

Учитывая, что $\varphi_k \in M_1^k$, мы получим

$$\mathbf{E}|S_n|^t \geq \omega - t \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-k} \beta(j) (\mathbf{E}|S_k|^t)^{1/p} \|\xi_{k+j}\|_q.$$

Переставляя суммы и применяя неравенство Гельдера, находим

$$\mathbf{E}|S_n|^t \geq \omega - t \varepsilon \omega^{1/p} (L_t(n, \delta))^{1/t}.$$

Воспользуемся элементарным неравенством

$$xy \leq c^a x^a/a + c^{-b} y^b/b,$$

где $1/a + 1/b = 1, x, y, a, b, c > 0$ (ибо $p, q > 0, 1/p + 1/t = 1$).

Имеем

$$\mathbf{E}|S_n|^t \geq \omega (1 - t \varepsilon c^p/p) - \varepsilon L_t(n, \delta) c^{-t},$$

но $\omega \geq x^t \mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x)$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x) \leq (\mathbf{E}|S_n|^t + \varepsilon L_t(n, \delta) c^{-t}) x^{-t} (1 - t \varepsilon c^p/p)^{-1}.$$

Выбирая подходящим образом c ($c^{-p} = t(1 + \varepsilon)/p$), мы получим требуемое неравенство. Теорема доказана.

6. Аналоги неравенства Нагаева — Фука

Дополнительные обозначения взяты из разделов 4 (см. (4.1)), 5.

Лемма 6.1. Пусть для всякого набора случайных величин $\eta = \{\eta_i\}_{i=1}^n$, согласованного с $(\mathcal{F}, B)$, справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left\| \sum_{i=1}^k \eta_i \right\| \geq x\right) \leq x^{-t} \cdot c \cdot Q(t, \delta, \eta),$$

где $t \geq 1, c \geq 1$. Тогда для всякого набора $\varphi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$, согласованного с $(\mathcal{F}, B)$, при $1 \leq \omega \leq t$ справедливы неравенства

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left\| \sum_{i=1}^k \varphi_i \right\| \geq x\right) \leq 3 \cdot 2^t \cdot x^{-\omega} \cdot c \cdot L(\omega, \delta, \varphi),$$

где $\omega \leq 2$, и

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left\| \sum_{i=1}^k \varphi_i \right\| \geq x\right) \leq 3 \cdot 2^t \cdot c (x^{-\omega} L(\omega, \delta, \varphi) + (D(\varphi, \delta) x^{-2})^{t/2}),$$

где $\omega > 2$.

Лемма 6.2. Пусть $v \geq 2$. Если при всех t таких, что $2 \leq t \leq v$, для всякого набора $\eta = \{\eta_i\}_{i=1}^n$ согласованного с $(\mathcal{F}, B)$ справедливо нера-

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left\| \sum_{i=1}^k \eta_i \right\| \geq x\right) \leq c_t \cdot Q(t, \delta, \eta) x^{-t}, \quad (6.1)$$

где $c_t \geq 1$, то для всякого набора $\varphi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$, согласованного с $(\mathcal{F}, B)$, при всех $\delta_1 \geq t/2\delta$ справедливо неравенство

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left\| \sum_{i=1}^k \varphi_i \right\| \geq x\right) \leq 4^t c_t x^{-t} L(t, \delta_1, \varphi) + 4^v c_v x^{-v} (D(\varphi, \delta))^{v/2}. \quad (6.2)$$

Лемма 6.3. Если справедливо (6.1) при всех $t \geq 2$ и $c_t \leq A(bt)^{pt}$, то при всех $t \geq 2$, $\delta_1 \geq t/2\delta$

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left\| \sum_{i=1}^k \varphi_i \right\| \geq x\right) \leq 4^t c_t x^{-t} L(t, \delta_1, \varphi) + A \exp(pt - pe^{-1}b^{-1}4^{-1/p}(x^2/D(\varphi, \delta))^{1/2p}).$$

Из теоремы 2.1, лемм 6.1—6.3 и следствия 5.1 в случае р.с.п. следует

Теорема 6.1. Справедливы неравенства:

$$1) P(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x) \leq c_1 a^3(\varphi, 2) L_t(n) x^{-t}, \quad (6.3)$$

где $1 \leq t \leq 2$; c_1 — абсолютная постоянная;

$$2) P(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x) \leq c_2 a(\varphi, t) a^2(\varphi, 2) (L_v(n) x^{-v} + D_n^t x^{-t}), \quad (6.4)$$

где $2 \leq v \leq t$, c_2 зависит только от t ;

$$3) P(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x) \leq c_3 x^{-t} L_t(n) + c_4 \exp(-c_5 (x/D_n)^{1/3}), \quad (6.5)$$

где $t \geq 2$, $\varphi(i) \leq Aq^i$, $0 \leq q < 1$; c_3, c_4, c_5 зависят от t, A, q .

Положим $\varepsilon(\alpha, t, \delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{\delta/t(t+\delta)}(i)$.

Из теоремы 2.2, лемм 6.1—6.3 и следствия 5.2 в случае с.п. следует

Теорема 6.2. Пусть $H = R^p$ и $\delta > 0$. Справедливы неравенства:

$$1) P(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x) \leq c_1 L_t(n, \delta) x^{-t} \varepsilon^{t+1}(\alpha, t, \delta), \quad (6.6)$$

где $1 \leq t \leq 2$; c_1 зависит только от p ;

$$2) P(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x) \leq c_2 \varepsilon(\alpha, t, \delta) (b(\alpha, t, \delta) + \varepsilon^t(\alpha, t, \delta)) (x^{-v} L_v(n, \delta) + D_n^t(\delta) x^{-t}), \quad (6.7)$$

где $2 \leq v \leq t$, c_2 зависит от p и t ;

$$3) P(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x) \leq c_3 x^{-t} L_t(n, \delta) + c_4 \exp(-c_5 (x/D_n(\delta))^{1/3}), \quad (6.8)$$

где $t \geq 2$, $\alpha(i) \leq Aq^i$, $0 \leq q < 1$; c_3, c_4, c_5 зависят от p, t, A, q, δ .

Из теорем 5.1, 6.1, 6.2 нетрудно получать достаточные условия для справедливости усиленного закона больших чисел (у.з.б.ч.) и сходимости рядов. Выпишем некоторые. Положим

$$r(t) = \min(t, t/2 + 1), \quad 1 \leq t.$$

Следствие 6.1. Пусть $t \geq 1$. Если $a(\varphi, t) < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} E|\xi_n|^t n^{-r(t)} < \infty$, то $S_n/n \rightarrow 0$ п. н.

Следствие 6.2. Пусть $H = R^p$ и $t \geq 1$. Если $b(\alpha, t, \delta) < \infty$, $\varepsilon(\alpha, t, \delta) < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|_{t+\delta}^t n^{-r(t)} < \infty$, то $S_n/n \rightarrow 0$ п. н.

Следствие 6.3. Здесь $E\xi_i$ могут и не равняться нулю. Если $a(\varphi, 2) < \infty$ и сходятся ряды при некотором $c > 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} P(|\xi_i| > c) &< \infty, \\ \sum_{i=1}^{\infty} E(\xi_i I(|\xi_i| \leq c)), \\ \sum_{i=1}^{\infty} D(\xi_i I(|\xi_i| \leq c)) &< \infty,\end{aligned}$$

то сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i$ п. н.

Следствие 6.4. Если для некоторого $\delta \geq 0$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \beta(i, 2, 2 + \delta) &< \infty, \\ \sum_{i=1}^{\infty} (E|\xi_i|^{2+\delta})^{2/(2+\delta)} &< \infty,\end{aligned}$$

то сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i$ п. н.

Неравенства (6.4), (6.5), (6.7), (6.8) имеют общую природу, связанную со следующим неравенством, известным в случае независимых слагаемых и которое называется неравенством Нагаева — Фука (см. [36, следствие 4]; название взято из [37, с. 221]; библиографию см. [12]):

$$P(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x) \leq c_t^{(1)} L_t(n) x^{-t} + 2 \exp\left(-c_t^{(2)} \frac{x^2}{D_n^2}\right).$$

Как видно, даже в самом лучшем случае (неравенство (6.5)) экспоненциальный член у нас хуже. Это следует из того, что мы идем от моментных неравенств к вероятностям больших отклонений, а не наоборот (см. [16, 36]). Близкие результаты в случае последовательности случайных действительных величин и $1 \leq t \leq 2$ получены в [35] на основе метода мартингального разложения. Есть еще один подход, связанный с аппроксимацией Беркеша и Филиппа [6; 22, Proposition 3.1].

Следствия 6.1—6.4 являются обобщением некоторых результатов Колмогорова, Брунка — Прохорова о достаточных условиях для выполнения у. з. б. ч. и сходимости рядов (библиографию см. [38, 12, 14, 15]). В случае перемешивания близкие результаты получены в [32, 35] (см. также [39, лемма 4.2.4, Appendix; 22, Proposition 4.1]).

Доказательство леммы 6.1 очевидно. Достаточно провести срезку на уровне x .

Доказательство леммы 6.2 за небольшими исключениями аналогично доказательству леммы 4.1.

Для доказательства леммы 6.3 достаточно проминимизировать дисперсионный член в (6.2), т. е. найти

$$\inf_{v \geq t} A 4^v x^{-v} (bv)^v (D(\varphi, \delta))^{v/2}.$$

Доказательство следствий 6.1—6.4. Пусть

$$x_r = \max_{2^r < k \leq 2^{r+1}} \left| \sum_{n > 2^r}^k \xi_n \right|, \quad r = 1, 2, \dots$$

Достаточно показать, что в случае у. з. б. ч. (см. [40, 14])

$$\sum_{r=1}^{\infty} P(x_r \geq \varepsilon 2^r) < \infty, \quad (6.9)$$

а в случае сходимости рядов

$$\sum_{r=1}^{\infty} P(x_r \geq \varepsilon) < \infty \quad (6.10)$$

для всякого $\varepsilon > 0$.

Для проверки (6.9), (6.10) нужно использовать «подходящее» неравенство из теорем 6.1, 6.2, 5.1.

7. Формулировка результатов о скорости сходимости в принципе инвариантности для слабостационарных последовательностей с перемешиванием

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — слабостационарная последовательность случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Положим

$$S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i, \quad t_k = k/n, \quad S_0 = t_0 = 0, \\ L_t = n^{-t/2} \sum_{i=1}^n E |\xi_i|^t, \quad A_t = \sup_i E |\xi_i|^t,$$

считаем, что

$$0 < \sigma = E \xi_1^2 + 2 \sum_{i=2}^{\infty} E \xi_1 \xi_i < \infty. \quad (7.1)$$

Через η_n обозначим случайную ломаную с узлами в точках $(t_k, S_k(n\sigma)^{-1/2})$, через w — стандартный винеровский процесс. P_n — распределение η_n в $C[0,1]$, а W — распределение w в $C(0,1]$. Через $L(P_n, W)$ обозначим расстояние Леви — Прохорова между мерами P_n и W , $\|x\|$ — норма в $C[0,1]$.

Теорема 7.1. Пусть для некоторого t , $2 < t < 5$ справедливо $\varphi(k) \leq Ak^{-g}$, $k = 1, 2, \dots$, где $g > j(u)(j(u) - 1)$, $u = (2 + 5t)/2(5 - t)$, $j(u) = 2 \min \{k \in N : 2k \geq u\}$.

Тогда
$$L(P_n, W) \leq c L_t^{1/(t+1)}, \quad (7.2)$$

где c зависит от A, g, t, σ .

Теорема 7.2. Пусть для некоторого t , $2 < t < 5$, справедливо $\alpha(k) \leq Ak^{-g}$, $k = 1, 2, \dots$, где $g > \max(\delta_1^{-1} j(u)(j(u) + \delta_1), \delta_2^{-1} j(2t)(j(2t) + \delta_2))$, $u = \max(2t, (2 + 5t)/2(5 - t))$, $\delta_1 = t - 2$, $\delta_2 = (t - 2)(t(t + 1))^{-1}$, $j(u)$ определено ранее. Тогда

$$L(P_n, W) \leq c A_t n^{(2-t)/2(t+1)}, \quad (7.3)$$

где c зависит от A, g, t, σ .

Пусть $\varepsilon > 0$.

Следствие 7.1. Если $\varphi(k) \leq Aq^k$, $0 \leq q < 1$, $k = 1, 2, \dots$, то при $2 < t < 5$ справедливо (7.2).

Следствие 7.2. Если $\alpha(k) \leq Aq^k$, $0 \leq q < 1$, $k = 1, 2, \dots$, то при $2 < t < 5$ справедливо (7.3).

Следствие 7.3. Если $\varphi(k) \leq Ak^{-(110+\varepsilon)}$, то при $2 < t \leq 4$ справедливо (7.2).

Следствие 7.4. Если $\alpha(k) \leq Ak^{-(776+\varepsilon)}$, то при $3 \leq t \leq 4$ справедливо (7.3).

Задача о скорости сходимости в принципе инвариантности была поставлена Ю. В. Прохоровым [41]. Окончательный по порядку малости результат для $2 < t \leq 3$ и независимых слагаемых получен А. А. Боровковым [37]. В [42] задача решена в случае независимых и одинаково распределенных слагаемых. В [43] доказана неумлучшаемость оценки А. А. Боровкова. В [44] продолжен результат из [37] в зону $3 < t < 5$. В [7] объявлено о решении задачи в случае неодинаково распределенных независимых случайных величин. В случае $2 < t \leq 3$ и строго стационарного процесса с геометрической скоростью убывания коэффи-

коэффициентов сильного перемешивания ($\alpha(k) \leq Aq^k$, $0 \leq q < 1$) объявлено [45] о достижении степенного порядка оценки (7.3) ($n^{(2-t)/2(t+1)} \ln n$). Грубые, но достаточные для применения к законам типа закона повторного логарифма оценки см. в [39, 46].

8. Доказательство теорем 7.1 и 7.2

Доказательство теорем мы будем вести одновременно и поэтапно: 1) относится к р.с.п., 2) к с.п. Заметим, что из условий теоремы 7.1 заведомо $g > 12$, т. е. $\varphi(k) \leq Ak^{-12}$, аналогично $\alpha(k) \leq Ak^{-100/(t-2)}$. Из последних соотношений автоматически следует, что ряд (7.1) сходится. Докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 8.1. Если $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ слабостационарна, $|\mathbb{E}\eta_i\eta_j| \leq A|j-i|^{-p}$, где $p > 2$, то $\sup_n \left| \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n \eta_i \right)^2 - an \right| < \infty$, где $a = \mathbb{E}\eta_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{\infty} \mathbb{E}\eta_1\eta_j$.

Доказательство. Из тождества

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n \eta_i \right)^2 = n\mathbb{E}\eta_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n \mathbb{E}\eta_1\eta_j(n-j+1)$$

следует, что

$$\left| \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n \eta_i \right)^2 - na \right| \leq n \sum_{j=n+1}^{\infty} |\mathbb{E}\eta_1\eta_j| + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) |\mathbb{E}\eta_1\eta_j|.$$

Из последнего неравенства и условий леммы следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 8.2. Если $|\mathbb{E}\eta_i\eta_j| \leq A|j-i|^{-p}$, $p > 3$, то

$$\sup_{k,l,m} \sum_{i=k}^{k+l} \sum_{j=k+l+1}^{k+l+m} |\mathbb{E}\eta_i\eta_j| < \infty.$$

Доказательство. В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{k+l} \sum_{j=k+l+1}^{k+l+m} |\mathbb{E}\eta_i\eta_j| &\leq A \sum_{i=k}^{k+l} \sum_{j=k+l+1}^{k+l+m} |j-i|^{-p} = A \sum_{i=0}^l \sum_{j=l+1}^{l+m} |j-i|^{-p} = \\ &= A \sum_{r=1}^{l+m} r^{-p} \sum_{i=0}^l I(l+1-i \leq r \leq l+m-i) = \\ &= A \sum_{r=1}^{l+m} r^{-p} \sum_{u=0}^l I(u+1 \leq r \leq u+m) \leq A \sum_{r=1}^{l+m} r^{1-p}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sup_{k,l,m} \sum_{i=k}^{k+l} \sum_{j=k+l+1}^{k+l+m} |\mathbb{E}\eta_i\eta_j| \leq A \sum_{r=1}^{\infty} r^{1-p} < \infty.$$

Лемма доказана.

Положим $\varepsilon_n = n^{(2-t)/2(t+1)}$, $x_t = L_t^{1/(t+1)}$. Заметим, что $A_t \geq 1$, $x_t \geq \varepsilon_n$.

I. Нужен только для с.п. Пусть $i = 1, 2, \dots, n$, $\xi_i^{(0)} = \xi_i I(|\xi_i| \leq \sqrt{n}\varepsilon_n) - \mathbb{E}\xi_i I(|\xi_i| \leq \sqrt{n}\varepsilon_n)$, $S_k^{(0)} = \sum_{i=1}^k \xi_i^{(0)}$. Через $\eta_n^{(0)}$ обозначим случайную ломаную с узлами $(t_k, S_k^{(0)}(n, \sigma)^{-1/2})$. Учитывая, что

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} |\xi_i I(|\xi_i| > \sqrt{n}\varepsilon_n)| \leq A_t \varepsilon_n,$$

мы получим

$$\mathbb{P}(\|\eta_n - \eta_n^{(0)}\| > A_t \varepsilon_n) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(|\xi_i| > \varepsilon_n \sqrt{n}) \leq A_t \varepsilon_n.$$

Следовательно,

$$P(\|\eta_n - \eta_n^{(0)}\| > A_t \varepsilon_n) \leq A_t \varepsilon_n. \quad (8.1)$$

II. Второй этап. Положим $S_0^{(1)} = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\xi_k^{(1)} = \xi_k I \times \times (|\xi_k| \leq y \sqrt{n}) - E \xi_k I(|\xi_k| \leq y \sqrt{n})$, $S_k^{(1)} = \sum_{i=1}^k \xi_i^{(1)}$, где $y = L_t^{1/t}$ в случае р.с.п. и $y = n^{1/t-1/2}$ в случае с.п. Через $\eta_n^{(1)}$ обозначим случайную ломаную с узлами $(t_k, S_k^{(1)}(\sigma n)^{-1/2})$.

1) Из условий теоремы 7.1 следует, что

$$a(\varphi, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{1/j(t)}(i) (i+1)^{j(t)-2} < \infty.$$

Следовательно, используя (6.4) теоремы 6.1, получим

$$P(\|\eta_n - \eta_n^{(1)}\| \geq a) \leq ca^{-t} \left(n^{-t/2} \sum_{i=1}^n E |\xi_i - \xi_i^{(1)}|^t + n^{-t/2} \left(\sum_{i=1}^n E (\xi_i - \xi_i^{(1)})^2 \right)^{t/2} \right).$$

Здесь и далее буквой c обозначаем различные постоянные, не зависящие от n . Из леммы 1 [44] мы получим, что

$$n^{-t/2} \sum_{i=1}^n E |\xi_i - \xi_i^{(1)}|^t \leq 2^t L_t,$$

$$n^{-t/2} \left(\sum_{i=1}^n E (\xi_i - \xi_i^{(1)})^2 \right)^{t/2} \leq L_t.$$

Следовательно,

$$P(\|\eta_n - \eta_n^{(1)}\| \geq R x_t) \leq c R^{-t} x_t. \quad (8.2)$$

2) Пусть $v = 2t$, $\delta = (t-2)(t+1)^{-1}$. Из условий теоремы 7.2 следует, что

$$\varepsilon(\alpha, v, \delta) < \infty, \quad b(\alpha, v, \delta) < \infty.$$

Следовательно, мы можем использовать неравенство (6.7) теоремы 6.2. Имеем

$$P(\|\eta_n^{(1)} - \eta_n^{(0)}\| \geq a) \leq ca^{-v} n^{-v/2} \times$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i^{(1)} - \xi_i^{(0)}\|_{v+\delta}^v + \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i^{(1)} - \xi_i^{(0)}\|_{2+\delta}^2 \right)^{v/2} \right). \quad (8.3)$$

Нетрудно видеть, что

$$n^{-v/2} \sum_{i=1}^n \|\xi_i^{(1)} - \xi_i^{(0)}\|_{v+\delta}^v \leq c A_t n^{1-v/2} (\varepsilon_n \sqrt{n})^r,$$

$$r = (v + \delta - t)v / (v + \delta).$$

Элементарными выкладками можно убедиться в том, что при $s \geq 2t$, $0 \leq \delta_1 \leq t-2$

$$n^{1-s/2} (\varepsilon_n \sqrt{n})^{(s+\delta_1-t)t/(s+\delta_1)} \leq \varepsilon_n^{s+1}. \quad (8.4)$$

С другой стороны,

$$n^{-v/2} \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i^{(1)} - \xi_i^{(0)}\|_{2+\delta}^2 \right)^{v/2} \leq c A_t^v n^{(1-t/(2+\delta))v/2} y^{(2+\delta-t)v/(2+\delta)}.$$

Опять же при $s \geq 2t$, $\delta_2 \geq (t-2)(t+1)^{-1}$

$$n^{(1-t/(2+\delta_2))s/2} y^{(2+\delta_2-t)s/(2+\delta_2)} \leq \varepsilon_n^{s+1}. \quad (8.5)$$

Следовательно, из (8.3)—(8.5) мы получили

$$P(\|\eta_n^{(1)} - \eta_n^{(0)}\| \geq R\epsilon_n) \leq cR^{-v}\epsilon_n A_t^v. \quad (8.6)$$

III. Разбиение на блоки. Пусть

$$l = b + h, \quad n = ml + r, \quad l = n^{3/(t+1)-\varepsilon}, \\ \varepsilon = 2(5-t)/3(t+1), \quad h = n^{\tilde{\sigma}}, \quad \tilde{\sigma} < 3/(t+1) - \varepsilon,$$

$$\Psi_k^{(1)} = \sum_{i=1}^b \xi_{(k-1)l+i}^{(1)}, \quad \Psi_k = \sum_{i=1}^b \xi_{(k-1)l+i}, \\ \Phi_k^{(1)} = \sum_{i=1}^h \xi_{(k-1)l+b+i}^{(1)}, \quad \Phi_k = \sum_{i=1}^h \xi_{(k-1)l+b+i}, \\ \Psi_{m+1}^{(1)} = \sum_{i=1}^r \xi_{ml+i}^{(1)}, \quad \Psi_{m+1} = \sum_{i=1}^r \xi_{ml+i}, \\ k = 1, 2, \dots, m.$$

Через $\eta_n^{(2)}$ обозначим случайную ломаную с узлами $(t_{kl}, S_{kl}^{(1)}(\sigma n)^{-1/2})$ $k = 0, 1, \dots, m$, и при $r > 0$ с последней точкой $(1, S_n^{(1)}(\sigma n)^{-1/2})$.

1. Пусть $u = (2 + 5t)/2(5 - t)$. В силу условий теоремы

$$a(\varphi, u) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{1/j(u)}(i) (i+1)^{j(u)-2} < \infty.$$

Из (6.4) мы получим

$$P(\|\eta_n^{(2)} - \eta_n^{(1)}\| \geq a) \leq \sum_{k=1}^{m+1} P(\max_{1 \leq i \leq l} |S_{i+hl}^{(1)} - S_{kl}^{(1)}| \geq a(n\sigma)^{1/2}) \leq \\ \leq c(a^{-t}L_t + a^{-u}(n/l)^{1-u/2}).$$

Так как $x_t \geq \epsilon_n$, то для доказательства теоремы 7.1 достаточно показать, что

$$(n/l)^{1-u/2} \leq \epsilon_n^{u+1}, \quad (8.7)$$

т. е. $u \geq 2 + 3(t-2)/(t+1)\varepsilon$. Последнее проверяется элементарно. Следовательно,

$$P(\|\eta_n^{(2)} - \eta_n^{(1)}\| \geq a) \leq (a^{-t}L_t + a^{-u}\epsilon_n^{u+1}). \quad (8.8)$$

2. Так же как и в случае р.с.п., но используя (6.7), мы получим при $\delta = t - 2$, $d = \max(2t, (2 + 5t)/2(5 - t))$

$$P(\|\eta_n^{(2)} - \eta_n^{(1)}\| \geq a) \leq ca^{-d} \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i^{(1)}\|_{d+\delta}^d + A_t^d \epsilon_n^{d+1} \right).$$

Первый член предыдущего неравенства, учитывая (8.4), оценивается так же, как на втором этапе. Следовательно,

$$P(\|\eta_n^{(2)} - \eta_n^{(1)}\| \geq R\epsilon_n) \leq cR^{-d}\epsilon_n A_t^d. \quad (8.9)$$

IV. Пусть $\eta_n^{(3)}$ обозначает случайную ломаную с узлами

$$\left(t_{kl}, \sum_{i=1}^h \Psi_i^{(1)}(\sigma n)^{-1/2} \right), \quad k = 0, 1, \dots, m+1.$$

1. Из (6.4) мы получим

$$P(\|\eta_n^{(3)} - \eta_n^{(2)}\| \geq a) \leq c(a^{-t}L_t + a^{-u}(h/l)^{u/2}), \quad (8.10)$$

где u определено на этапе III.

2. Аналогично, как и в случае р.с.п., имеем при $\delta = t - 2$, $d = \max\left(2t, \frac{(2 + 5t)}{2(5 - t)}\right)$

$$P(\|\eta_n^{(3)} - \eta_n^{(2)}\| \geq a) \leq c(a^{-d}A_t\epsilon_n^{d+1} + a^{-d}A_t^d(h/l)^{d/2}). \quad (8.11)$$

V. Используя аппроксимационные теоремы Беркеша и Филиппа [6, теоремы 1 и 2], не ограничивая общности, мы получим, что в случае р. с. п.

$$P(\|\eta_n^{(4)} - \eta_n^{(3)}\| \geq c\varphi(h)n/l) \leq c\varphi(h)n/l, \quad (8.12)$$

а в случае с. п.

$$P\left(\|\eta_n^{(4)} - \eta_n^{(3)}\| \geq c \frac{n}{l} \left(\frac{\ln n}{n} + n(\alpha(h))^{1/2} + l n^{-2} \right)\right) \leq \\ \leq cn/l \left(\frac{\ln n}{n} + n(\alpha(h))^{1/2} + l n^{-2} \right), \quad (8.13)$$

где $\eta_n^{(4)}$ — случайная ломаная с узлами $\left(t_{kl}, \sum_{i=1}^k \Psi_i^{(2)}(\sigma n)^{-1/2}\right)$, $k = 0, 1, \dots, m+1$, $\Psi_i^{(2)}$ независимы и распределены, как $\Psi_i^{(1)}$.

VI. Используя результат А. И. Саханенко [7, 8] и метод срезки, предложенный в [44], мы получим

$$P(\|\eta_n^{(4)} - \eta_n^{(5)}\| \geq q_s^{1/(s+1)}) \leq q_s^{1/(s+1)}, \quad s > 2, \quad (8.14)$$

где $\eta_n^{(5)}$ — случайная ломаная с узлами $\left(t_{kl}, \sum_{i=1}^k Y_i(\sigma n)^{-1/2}\right)$, $k = 0, 1, \dots, m+1$, Y_i — независимые нормально распределенные случайные величины, $EY_i = 0$, $DY_i = D\Psi_i^{(1)}$, $q_s = c \left(\sum_{i=1}^{m+1} E|\Psi_i^{(1)}|^s \right) \left(\sum_{i=1}^{m+1} D\Psi_i^{(1)} \right)^{-s/2}$, $i = 1, 2, \dots, m+1$.

VII. Для начала оценим

$$\sum_{i=1}^{m+1} E|\Psi_i^{(1)}|^s.$$

1. Пусть $s = \frac{(2+5t)}{2(5-t)}$. Из (2.1) теоремы 2.1 следует

$$n^{-s/2} \sum_{i=1}^{m+1} E|\Psi_i^{(1)}|^s \leq c(L_t^{s/t} + (n/l)^{1-s/2}).$$

Учитывая (8.7), находим

$$n^{-s/2} \sum_{i=1}^{m+1} E|\Psi_i^{(1)}|^s \leq c x_t^{s+1}. \quad (8.15)$$

2. Учитывая (8.4) и (8.7), из неравенства (2.2) теоремы 2.2 мы получим при $s = \max\left(2t, \frac{(2+5t)}{2(5-t)}\right)$, $\delta = t, 2$, что

$$n^{-s/2} \sum_{i=1}^{m+1} E|\Psi_i^{(1)}|^s \leq c\epsilon_n^{s+1} A_t^s. \quad (8.16)$$

VIII. Оценим дисперсии.

1. Сначала мы докажем, что

$$\max_{1 \leq k \leq m+1} \left| \sum_{i=1}^k (D\Psi_i - D\Psi_i^{(1)}) \right| \leq cnL_t^{2/t}. \quad (8.17)$$

Обозначим правую часть предыдущего неравенства за I_1 . Имеем

$$I_1 \leq 2n \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |E(n^{-1/2}\xi_i I(|\xi_i| \leq yn^{1/2}) n^{-1/2}\xi_j I(|\xi_j| > yn^{1/2}))| + \\ + |E(n^{-1/2}\xi_i I(|\xi_i| > yn^{1/2}) n^{-1/2}\xi_j I(|\xi_j| \leq yn^{1/2}))| + \\ + |E(n^{-1/2}\xi_i I(|\xi_i| > yn^{1/2}) n^{-1/2}\xi_j I(|\xi_j| > yn^{1/2}))|.$$

Оценим, например, первое слагаемое в предыдущем неравенстве. Обозначим его за I_2 . Имеем

$$I_2 \leq c \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \varphi^{1/t}(j-i) E^{1/t} |n^{-1/2} \xi_i|^t E^{(t-1)/t} |n^{-1/2} \xi_j|^t y^{2-t}.$$

Следовательно, в силу неравенства Гельдера

$$I_2 \leq c_1 \left(\sum_{r=0}^{n-1} \varphi^{1/t}(r) \right) L_t^{1/t} L_t^{(t-1)/t} y^{2-t} \leq c_2 L_t^{2/t}.$$

Далее, в силу лемм 8.1 и 8.2 и условий доказываемой теоремы мы имеем

$$\max_{1 \leq k \leq m+1} \left| \left(\sum_{i=1}^k D\Psi_i \right) - kl\sigma \right| \leq c(l + nh/l). \quad (8.18)$$

Следовательно,

$$\max_{1 \leq k \leq m+1} \left| \left(\sum_{i=1}^k D\Psi_i^{(1)} \right) - kl\sigma \right| \leq c(l + nh/l + nL_t^{2/t}). \quad (8.19)$$

2. Так же как и в случае р.с.п., справедливо (8.18). Докажем теперь аналог неравенства (8.17). Оценим тоже I_2 . Имеем при $p > 0$, $1/p + 1/t < 1$,

$$I_2 \leq c \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha^{1-1/t-1/p}(j-i) E^{1/t} |n^{-1/2} \xi_i|^t E^{1/p} |n^{-1/2} \xi_j|^t y^{1-t/p}.$$

Следовательно, в этом случае

$$I_2 \leq c \left(\sum_{r=0}^{n-1} \alpha^{1-1/t-1/p}(r) \right) A_t n^{1/2-t/2p} y^{1-t/p},$$

где $y = n^{1/t-1/2}$. Элементарными выкладками при p таком, что $1/p > 1/t + (t-2)/(t+1)$, получим

$$n^{1/2-t/2p} y^{1-t/p} \leq c \varepsilon_n^2 (\ln n)^{-2}, \quad (8.20)$$

причем, так как $\alpha(k) \leq Ak^{-\varepsilon}$ и $g > 2t(t+1)(t-2)^{-1}$ (это следует из условий теоремы), мы сможем найти p такое, чтобы и $1/p > 1/t + (t-2)/(t+1)$ и $1 - 1/t - 1/p > 2/g$. Следовательно, в случае с.п.

$$\max_{1 \leq k \leq m+1} \left| \left(\sum_{i=1}^k D\Psi_i^{(1)} \right) - kl\sigma \right| \leq c(l + nh/l + A_t n \varepsilon_n^2 (\ln n)^{-2}). \quad (8.21)$$

IX. Учитывая, что $L_t = o(1)$ (иначе теорема 7.1 тривиальна) и по построению $l = o(n)$, $h = o(l)$, мы получим

$$\sum_{i=1}^{m+1} D\Psi_i^{(1)} = DS_n(1 + o(1)) = \sigma n(1 + o(1)).$$

Следовательно, в (8.14) $q_s^{1/(s+1)} \leq c x_t$ в случае р.с.п. и $q_s^{1/(s+1)} \leq c \varepsilon_n A_t$ в случае с.п.

X. Из (8.19) в случае р.с.п. и из (8.21) в случае с.п. и леммы 2 [44] находим

$$P(\|\eta_n^{(5)} - w\| \geq c \sqrt{a_1}) \leq c \sqrt{a_1}, \quad (8.22)$$

где в случае р.с.п.

$$a_1 = (l/n + h/l + L_t^{2/t}) |\ln L_t|, \quad (8.23)$$

а в случае с.п.

$$a_1 = (l/n + h/l + A_t \varepsilon_n^2 (\ln n)^{-2}) \ln n. \quad (8.24)$$

XI. Учитывая, что расстояние Леви — Прохорова не больше, чем расстояние Ки-фана (см. лемма 1.2 [41]), мы получим следующее.

1. Из формул (8.2), (8.8), (8.10), (8.12), (8.14), (8.22), (8.23) с учетом IX следует, что для доказательства теоремы 7.1 осталось найти $h = \tilde{n}^{\tilde{\sigma}}$, $\tilde{\sigma} > 0$, при котором

$$(h/l)^{u/2} \leq \varepsilon_n^{u+1}, \quad (n/l) h^{-g} \leq \varepsilon_n, \\ (l/n + h/l + L_t^{2/t}) |\ln L_t| \leq c L_t^{2/(t+1)},$$

где $u = \frac{(2+5t)}{2(5-t)}$, $l = n^{3/(t+1)-\varepsilon}$, $\varepsilon = \frac{2(5-t)}{3(t+1)}$, $\varepsilon_n = n^{(2-t)/2(t+1)}$. Так как $L_t^{1/(t+1)} \geq \varepsilon_n$, то предыдущая система неравенств эквивалентна следующей:

$$(\tilde{\sigma} - 3/(t+1) + \varepsilon)u/2 \leq (u+1)(2-t)/2(t+1), \\ ((t-2)/(t+1) + \varepsilon) - g\tilde{\sigma} \leq (2-t)/2(t+1), \quad (8.25) \\ \max(3/(t+1) - 1 - \varepsilon, \tilde{\sigma} - 3/(t+1) + \varepsilon) < (2-t)/(t+1).$$

Условия теоремы 7.1 (т. е. выбор скорости убывания коэффициента р. с. п. g) подобраны так, чтобы при некоторых $u \geq t$, $\varepsilon > 0$, $\tilde{\sigma} > 0$ выполнялось (8.25), (8.7) и $\sum_{h=0}^{\infty} \varphi^{1/j(u)}(k)(k+1)^{j(u)-2} < \infty$, т. е. $g > j(u)(j(u)-1)$. Грубо говоря, мы, решая определенную систему неравенств, стремимся минимизировать одно из неизвестных, а именно g . Мы не будем проводить здесь все необходимые выкладки, так как они элементарны, хотя и несколько трудоемки.

В частности, в (8.25) нужно взять $\tilde{\sigma} = (3(t-2)/2(t+1) + \varepsilon)^{-1}g$.

2. Так же как и в случае р. с. п., но используя формулы (8.1), (8.6), (8.9), (8.11), (8.13), (8.14), (8.22), (8.24), с учетом IX мы приходим к системе неравенств:

$$(\tilde{\sigma} - 3/(t+1) + \varepsilon)d/2 \leq (d+1)(2-t)/2(t+1), \\ -g\tilde{\sigma}/2 + 2 - 3/(t+1) + \varepsilon \leq (2-t)/2(t+1), \\ \max(3/(t+1) - 1 - \varepsilon, \tilde{\sigma} - 3/(t+1) + \varepsilon) < (2-t)/(t+1),$$

где $d = \max(2t, (2+5t)/2(5-t))$. Здесь берем $\tilde{\sigma} = (11t+8)(6g(t+1))^{-1}$. Доказательство теорем завершено.

Замечание. Используемый метод есть фактический метод Бернштейна [25]. В [47] отмечено, что оценка порядка $n^{-1/4}$ в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей случайных величин с перемешиванием является пределом возможности этого метода. Вот почему мы приводим оценки лишь при $t < 5$, ибо при $t > 5$ имеем $\varepsilon_n \ll n^{-1/4}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rozenblatt M. A. Central limit theorem and a strong mixing condition.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, v. 42, N 1, p. 43—47.
2. Ибрагимов И. А. Некоторые предельные теоремы для стационарных в узком смысле вероятностных процессов.— ДАН СССР, 1959, т. 125, № 4, с. 711—714.
3. Утев С. А. Некоторые неравенства и предельные теоремы для слабозависимых случайных величин.— XV Всесоюз. школа-коллоквиум по теории вероятн. и мат. статистике (тезисы докладов), Тбилиси, 1981, с. 27—28.
4. Утев С. А. Некоторые неравенства для слабо зависимых случайных величин.— Третья Вильн. конф. по теории вероятн. и мат. статистике (тезисы докладов), Вильнюс, 1981, т. 2, с. 204—205.
5. Утев С. А. Вероятностные неравенства для слабо зависимых случайных величин.— Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, № 1, с. 201.
6. Berkes Istvan, Philipp Walter. Approximation theorems for independent and weakly dependent random vectors.— Ann. Prob., 1979, v. 1, N 1, p. 29—54.
7. Саханенко А. И. О скорости сходимости в принципе инвариантности.— Третья Вильн. конф. по теории вероятн. и мат. статистике (тезисы докладов), Вильнюс, 1981, т. 2, с. 135—136.

8. Саханенко А. И. Скорость сходимости в принципе инвариантности для разно-
распределенных величин с экспоненциальными моментами.— В кн.: Предельные
теоремы для сумм случайных величин. Новосибирск (в печати).
9. Rosenthal H. P. On the subspaces of L_p ($p > 2$) spanned by sequences of indepen-
det random variables.— Israel J. Math., 1970, v. 8, N 3, p. 273—303.
10. Rosenthal H. P. On the span in L^p of sequences of independent random variab-
les.— In: Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. Probability, Berkeley, Calif.,
1972, v. 2, p. 149—168.
11. Bahr V. von, Esseen C. G. Inequalities for the r -th absolute moment of a sum of
random variables.— Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, N 1, p. 299—303.
12. Нагаев С. В. Large deviations of sums of independent random variables.— Ann.
Prob., 1979, v. 7, N 5, p. 745—789.
13. Burkholder D. L. Distribution function inequalities for martingales.— Ann. Prob.,
1973, v. 1, N 1, p. 19—42.
14. Пинелис И. Ф. О распределении сумм независимых случайных величин со зна-
чениями в банаховом пространстве.— Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. 23,
№ 3, с. 630—637.
15. Acosta A. de. Inequalities for B -valued random vectors with applications to the
strong law of large numbers.— Ann. Prob., 1981, v. 9, N 1, p. 157—161.
16. Нагаев С. В., Пинелис И. Ф. Некоторые неравенства для распределений сумм
независимых случайных величин.— Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22,
№ 1, с. 254—263.
17. Дуб Дж. Я. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.
18. Ибрагимов И. А. Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов.—
Теория вероятн. и ее примен., 1962, т. 7, № 4, с. 361—392.
19. Yokoyama R. Moment bounds for stationary mixing sequences.— Z. W., 1980, B 52,
H. 1, S. 45—57.
20. Хасьминский Р. З. О случайных процессах, определяемых дифференциальными
уравнениями с малым параметром.— Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11,
№ 2, с. 240—259.
21. Babu G. J., Chosh H., Singh K. On rates of convergence to normality for Φ -mixing
processes.— Sankhya, Indian J. of Statist., 1978, v. 40, Ser. A, N 3, p. 278—293.
22. Kuelbs J., Philipp W. Almost sure invariance principles for partial sums of
mixing B -valued random variables.— Ann. Prob., 1980, v. 8, N 6, p. 1003—1036.
23. Hipp C. Convergence rates of the strong law for stationary mixing sequences.—
Z. W., 1979, B 49, H. 1, S. 49—62.
24. Ken-ichi Yoshihara. Moment inequalities for mixing sequences.— Kodai Math. J.,
1978, v. 1, N 2, p. 316—328.
25. Бернштейн С. И. Sur l'extension du théorème du calcul des probabilités aux som-
mes de quantités dépendantes.— Math. Ann., 1926, B 97, S. 1—59.
26. Бернштейн С. И. Собрание сочинений. Т. 4. М.: Наука, 1964.
27. Давыдов Ю. А. О сходимости распределений, порожденных стационарными слу-
чайными процессами.— Теория вероятн. и ее примен., 1968, т. 13, № 4, с. 730—
737.
28. Moricz F. Moment inequalities and the strong laws of large numbers.— Z. W., 1976,
B 35, H. 4, S. 299—314.
29. Колмогоров А. Н. Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger
Größen.— Math. Ann., 1928, B 99, H. 2, S. 309—319.
30. Бернштейн С. И. О некоторых видоизменениях неравенства Чебышева.— ДАН
СССР, 1937, т. 17, № 6, с. 275—277.
31. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Нау-
ка, 1977.
32. Cohn H. On a class of dependent random variables.— Rev. Roum. Math. Pures et
Appl., 1965, v. 10, N 10, p. 1593—1606.
33. Резник М. Х. Закон повторного логарифма для некоторых классов стационарных
процессов.— Теория вероятн. и ее примен., 1968, т. 13, с. 642—656.
34. Бородин А. И. Квазимартингалы.— Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. 23, № 3,
с. 661—664.
35. Mc Leish D. L. A maximal inequality and dependent strong laws.— Ann. Prob.,
1975, v. 3, N 5, p. 829—839.
36. Нагаев С. В., Фук Д. Х. Вероятностные неравенства для сумм независимых слу-
чайных величин.— Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, № 4, с. 660—675.
37. Боровков А. А. О скорости сходимости в принципе инвариантности.— Теория
вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, № 2, с. 217—234.
38. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
39. Philipp Walter, Stout William. Almost sure invariance principles for partial sums
of weakly dependent random variables.— Memoirs of A. M. S., 1975, v. 2, N 161.
40. Прохоров Ю. В. Об усиленном законе больших чисел.— Изв. АН СССР. Сер. мат.,
1950, т. 14, № 6, с. 523—536.
41. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории
вероятностей.— Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, № 2, с. 177—238.
42. Komlos I., Major P., Tusnady G. An approximation of partial sums of independent
R.V'S and sample O. F.— Z. W., 1976, B 34, H. 1, S. 33—58.
43. Саханенко А. И. Оценки скорости сходимости в принципе инвариантности.— ДАН
СССР, 1974, т. 219, № 5, с. 1076—1078.

44. Утев С. А. Замечание о скорости сходимости в принципе инвариантности.— Сиб. мат. журн., 1981, т. 22, № 5, с. 206—209.
45. Городецкий В. В. Оценки скорости сходимости в принципе инвариантности для последовательностей с сильным перемешиванием.— Третья Вильн. конф. по теории вероятн. и мат. статистике (тезисы докладов), Вильнюс, 1981, т. 1, с. 149—150.
46. Ken-ichi Yoshihara. Convergence rates of the invariance principles for absolutely regular sequences.— Yokohama Math. J., 1979, v. 27, N 1, p. 49—55.
47. Stein Ch. A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables.— In: Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. Probability, Berkeley, Calif., 1972, v. 2, p. 583—602.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ДВУГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В. Р. ХОДЖИБАЕВ

Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$, $\xi(0) = 0$, — однородный процесс с независимыми приращениями и непрерывными справа выборочными траекториями, $M\xi(1) = 0$. При $-a < 0 < b$ определим случайные величины

$$T = \inf \{t: \xi(t) \notin (-a, b)\}, \quad Y = \xi(T).$$

Рассмотрим следующие вероятности:

$$\begin{aligned} P(\xi(t) \in A, T > t), \quad A \subset (-a, b); \\ P(Y \in B, T < t), \quad B \subset (-\infty, -a] \cup [b, \infty), \end{aligned} \tag{1}$$

и их интегральные преобразования

$$\begin{aligned} H(u, A) &= \int_0^\infty e^{-ut} P(\xi(t) \in A, T > t) dt, \\ \Pi(u, B) &= \int_0^\infty e^{-ut} P(Y \in B, T \leq t) dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Целью работы является получение полных асимптотических разложений (п. а. р.) вероятностей (1) при $t \rightarrow \infty$, если $a = a(t) \rightarrow \infty$, $b = b(t) \rightarrow \infty$.

Изучению граничных функционалов от траекторий случайных процессов с независимыми приращениями посвящена обширная литература. Приведем только некоторые публикации, относящиеся непосредственно к тематике нашей работы. Для случайных блужданий с дискретным временем и одной границей ($a = \infty$) п. а. р. распределений граничных функционалов содержатся в [1—3]. Для таких же блужданий на отрезке п. а. р. граничных функционалов в наиболее общих предположениях найдены в [4—6]. В ряде случаев получены п. а. р. и для случайных блужданий с непрерывным временем. В [7] при $a = \infty$, $B = [b, \infty)$ и при выполнении некоторых условий найдены асимптотические формулы для $\Pi(u, B)$ и соответствующие п. а. р. При $a = C_1 \sqrt{t}$, $b = C_2 \sqrt{t}$, $t \rightarrow \infty$ (в дальнейшем буквой C с индексами или без них обозначаются положительные постоянные), при выполнении условия Крамера найдены п. а. р. в [9] для распределения момента выхода процесса без положительных скачков через нижнюю границу и в [10] — для вероятностей $P(T < t)$, $P(Y \geq b, T < t)$ при условии, что положительные скачки процесса имеют распределение специального типа. Точные выражения для распределения T при отсутствии положительных (отрицательных) скачков процесса в случае $a = \infty$ известны из [11, 12].

В разделе 1 настоящей работы найдены асимптотические представления преобразований (2) при $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$. При этом используются некоторые результаты работы [7], в связи с чем везде на процесс накладываются следующие ограничения из [7]: