

$$\times \inf_{u>0} \frac{(\lambda^d + u^d)(k+1)^d}{u^d + \left(\sum_{i=1}^n \chi_i^E(u) \right)^{d/2}} \leq C(d) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} (k+1)^d \inf_{n>0} \frac{\lambda^d + u^d}{u^d + \left(\sum_{i=1}^n \chi_i^E(u) \right)^{d/2}},$$

но $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} (k+1)^d \leq C(d) < \infty$ для любого фиксированного d , и если $\xi_1, \dots, \xi_n$ одинаково распределены, то

$$u^d + \left(\sum_{i=1}^n \chi_i^E(u) \right)^{d/2} \geq n^{d/2} (\chi_1^E(u))^{d/2},$$

и теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую признательность и благодарность Б. А. Рогозину за постоянный интерес и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аняньевский С. М. Функции концентрации сумм независимых случайных величин. Дис. Л.: ЛГУ, 1980.
2. Enger J. Bounds for the concentration functions of a sum of independent random vectors with values in a Euclidean or a Hilbert space. Thesis. Uppsala: Uppsala Univ., 1975.
3. Kolmogorov A. Sur les propriétés des fonctions de concentrations de M. P. Lévy. Ann. Inst. H. Poincaré, 1958, t. XVI, N 1, p. 27—34.
4. Рогозин Б. А. Об одной оценке функций концентрации. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, № 1, с. 103—105.
5. Рогозин Б. А. Об увеличении рассеивания сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, № 1, с. 106—108.
6. Esseen C. G. On the Kolmogorov — Rogozin inequality for the concentration functions. — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1966, t. 5, N 4, p. 210—216.
7. Esseen C. G. On the concentration function of a sum of independent random variables. — Z., Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1968, 9, 4, p. 290—308.
8. Хенгартнер В., Теодореску Ф. Функции концентрации. М.: Наука, 1980.
9. Kesten H. A sharper form of the Doeblin — Lévi — Kolmogorov — Rogozin inequality for concentration functions, Math. Scand., 1969, t. 25, N 1, p. 133—144.
10. Kesten H. Sums of independent random variables without moment conditions. — Ann. Math. Statist., 1972, t. 43, N 3, p. 701—732.
11. Постникова Л. П., Юдин А. А. Аналитический метод оценок функции концентраций. — Тр. Ордена Ленина Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, СХLIII, с. 143—151.
12. Постникова Л. П., Юдин А. А. Усиленная форма неравенства для функции концентрации. — Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. XXIII, № 2, с. 376—379.
13. Halász G. Estimates for the concentration of sums of independent random variables. — Третья междунар. Вильн. конф. по теории вероятн. и мат. статистике (тезисы докладов). Вильнюс, 1981, с. 123.
14. Мирошников А. Л., Рогозин Б. А. Неравенства для функций концентрации. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, № 1, с. 178—183.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. В. ПОЖИДАЕВ

1. Формулировка основного результата и некоторые сведения из теории дифференциальных уравнений

В работе изучается предельное поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения задачи Коши параболического типа со случайными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} Qw &\equiv \partial w / \partial t - (b^{ij}(x, t) + a^{ij}(x, t/\varepsilon, \omega)) w_{x_i x_j} = f(x, t), \\ w(0, x) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$x \in R^n, \quad t \in [0, T], \quad T < \infty.$$

Предельное поведение решения задачи (1) рассматривается при следующих предположениях.

Существуют положительные постоянные C_1, C_2 : для любого вещественного вектора $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ с вероятностью 1 выполняются неравенства

$$C_1 |\gamma|^2 \leq (b^{ij}(x, t) + a^{ij}(x, t/\varepsilon, \omega)) \gamma_i \gamma_j \leq C_2 |\gamma|^2. \quad (2)$$

Здесь и ниже повторяющиеся индексы означают суммирование. Неслучайные коэффициенты $b^{ij}(x, t)$ предполагаются гладкими, причем при всех x, t, y, τ :

$$|b^{ij}(x, t) - b^{ij}(y, \tau)| \leq C(|x - y|^\alpha + |t - \tau|^{\alpha/2}), \quad (3)$$

где $0 < \alpha < 1$, $C > 0$ — постоянная. Буквой C в дальнейшем обозначаем различные постоянные, не зависящие от ε . Кроме того,

$$\sup_{x, t} |b_{x_k x_s}^{ij}(x, t)| < C, \quad (4)$$

где $u_{x_k} = \partial u / \partial x_k$, $u_{x_k x_s} = \partial^2 u / \partial x_k \partial x_s$.

Неслучайная правая часть по пространственным переменным финитна и дифференцируема. Для всякого t $f(x, t) \in C_0^1(V)$, где V — неслучайная ограниченная область в R^n . Как функция пары (x, t) $f(x, t)$ непрерывна.

Случайные поля $a^{ij}(x, t/\varepsilon, \omega)$ принадлежат по пространственным переменным классу $C_0^2(V)$, причем при всех x, t, y, ε с вероятностью 1

$$|a^{ij}(x, t/\varepsilon, \omega) - a^{ij}(y, t/\varepsilon, \omega)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad (5)$$

с неслучайной постоянной C . Кроме того, с вероятностью 1

$$\sup_{x, t} |a_{x_k x_s}^{ij}(x, t/\varepsilon, \omega)| < C. \quad (6)$$

Матричнозначное случайное поле $a = \|a^{ij}\|$ предполагается m -зависимым по времени: матрицы $a(x, t)$, $a(y, \tau)$ со случайными коэффициентами независимы при $|t - \tau| > m$, как бы ни были выбраны пространственные переменные x, y . В дальнейшем, не ограничивая общности, полагаем $m = 1$.

Поля $a^{ij}(x, t/\varepsilon, \omega)$ центрированы:

$$M a^{ij}(x, t/\varepsilon, \omega) = 0. \quad (7)$$

При наложенных на аналитические свойства коэффициентов условиях задача (1) с вероятностью 1 разрешима единственным образом [1, с. 45].

Случайным решением задачи (1) называется любое случайное поле, реализации которого с вероятностью 1 удовлетворяют (1).

Пусть w_ε — решение задачи (1), U — решение усредненной задачи:

$$\left. \begin{aligned} LU &\equiv U_t - b^{ij}(x, t) U_{x_i x_j} = f(x, t), \\ U(0, x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В дальнейшем рассматриваем сужения решений задач (1), (8) на область V при фиксированном t : $0 < t \leq T$, где $V \subset R^n$ — носитель правой части и случайных коэффициентов. Сужения будут обозначаться теми же буквами: w_ε, U .

При наложенных ограничениях можно утверждать, что при β : $0 < \beta < 1/2$ (см. раздел 2) найдется постоянная $C(\beta) > 0$ такая, что

$$M \|w_\varepsilon - U\|_{L_2(V)}^2 \leq C(\beta) \varepsilon^{1/2-\beta}.$$

Это утверждение можно дополнить предложением об асимптотической нормальности w_ε . Предположим, что для любой функции $l(x) \in L_2(V)$, $l \neq 0$, случайная величина

$$\varepsilon^{-1/2} \int_V \int_V \int_0^t l(x) \Gamma(x, t, \xi, \tau) a^{ij}(\xi, \tau/\varepsilon, \omega) U_{\xi_i \xi_j}(\xi, \tau) d\tau d\xi dx \quad (9)$$

асимптотически нормальна с параметрами

$$(0, \sigma^2(l, \Gamma, U)). \quad (10)$$

В (9) $\Gamma(x, t, \xi, \tau)$ — фундаментальное решение задачи (8) см. [1, с. 15]).

Условие (10) выполнено, если, например, $a^{ij}(x, t/\varepsilon, \omega)$ однородные m -зависимые по временным переменным поля такие, что $a^{ij}(x, t, \omega)$, $a^{ks}(x, t, \omega)$ независимы при $i \neq k, j \neq s$. Тогда

$$\sigma^2(l, \Gamma, U) = t \sum_{i,j=1}^n \int_{|\tau| \leq m} R_{ij}(\tau) d\tau,$$

где $R_{ij}(\tau) = M \tilde{a}^{ij}(s) \tilde{a}^{ij}(s + \tau)$ — корреляционная функция $\tilde{a}^{ij}(\tau)$. При фиксированной паре (i, j)

$$\tilde{a}^{ij}(\tau) = \int_V \int_V l(x) \Gamma(x, t, \xi, \tau) a^{ij}(\xi, \tau/\varepsilon) U_{\xi_i \xi_j}(\xi, \tau) d\xi dx.$$

Пусть (сравни [2]) $\overset{\circ}{W}_2^h(V)$ — замыкание множества гладких финитных в V функций в норме

$$\|u\|_{2,V}^h = \left[\int_V (|u|^2 + \sum_{|\alpha| \leq h} |D^\alpha u|^2) dx \right]^{1/2},$$

где $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}$, W_2^{-h} — сопряженное к $\overset{\circ}{W}_2^h$ пространство обобщенных функций.

Основной результат работы —

Теорема 1.1. При $\varepsilon \rightarrow 0$ решение w_ε задачи (1) с коэффициентами, подчиненными условиям (2)–(7), (10), асимптотически нормально в том смысле, что распределение, порожденное в пространстве $W_2^{-3}(V)$ обобщенных функций случайным полем

$$v_\varepsilon = \varepsilon^{-1/2}(w_\varepsilon - U),$$

слабо сходится к центрированному гауссовскому распределению в $W_2^{-3}(V)$ с характеристическим функционалом

$$\varphi(\Phi) = \exp(-\sigma^2(\Phi, \Gamma, U)/2),$$

где $\sigma^2(\Phi, \Gamma, U)$ определена в (10).

Замечание 1.1. Ниже при записи случайных функций опускаем ε, ω , чтобы избежать громоздкости.

2. Оценка погрешности усреднения в норме $L_2(V)$

Пусть $u = w - U$. Тогда для u имеем задачу

$$\left. \begin{aligned} Lu &= a^{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + a^{ij}(x, t) U_{x_i x_j}, \\ u(0, x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Теорема 2.1. При $\beta: 0 < \beta < 1/2$ найдется постоянная $C(\beta)$ такая, что

$$M \|w - U\|_{L_2(V)}^2 \leq C(\beta) \varepsilon^{1/2-\beta}.$$

Доказательство. Сведем задачу (11) к интегральному уравнению, используя неслучайное фундаментальное решение $\Gamma(x, t, \xi, \tau)$ задачи (8):

$$u = \Gamma * a^{ij} u_{\xi_i \xi_j} + \Gamma * a^{ij} U_{\xi_i \xi_j}, \quad (12)$$

где оператор Γ определен равенством

$$\Gamma * f = \int_0^t \int_V \Gamma(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Из представления (12), итерируя и интегрируя по частям по переменной ξ , получаем соотношение (граничные члены пропадают в силу финитности поля $a(x, t)$)

$$\begin{aligned} u = & -\Gamma_{\xi_i} * a^{ij} u_{\xi_j} - \Gamma * a_{\xi_i}^{ij} u_{\xi_j} + \Gamma * a_{\xi_j}^{ij} U_{\xi_i} = -\Gamma_{\xi_i} * a^{ij} \Gamma_{\xi_j} * a^{ks} u_{y_k y_s} - \\ & - \Gamma_{\xi_i} * a^{ij} \Gamma_{\xi_j} * a^{ks} U_{y_k y_s} - \Gamma * a_{\xi_i}^{ij} \Gamma_{\xi_j} * a^{ks} u_{y_k y_s} - \Gamma * a_{\xi_i}^{ij} \Gamma_{\xi_j} * a^{ks} U_{y_k y_s} + \\ & + \Gamma * a^{ij} U_{\xi_i \xi_j}. \end{aligned}$$

Оценим каждый член выписанного равенства.

Лемма 2.1.

$$F \equiv M \|\Gamma * a^{ij} U_{\xi_i \xi_j}\|_{L_2(V)}^2 \leq C\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть при фиксированной паре (i, j) $U_{\xi_i \xi_j} = \tilde{U}$, $a^{ij} = a$. Тогда F оценивается конечной суммой выражений вида:

$$\begin{aligned} M \int_V \int_0^t \int_0^t \int_V \Gamma(x, t, \xi, \tau) a(\xi, \tau) \tilde{U}(\xi, \tau) \Gamma(x, t, y, s) a(y, s) \tilde{U}(y, s) dy d\xi \times \\ \times ds d\tau dx = M \int_V \int_0^t \int_0^t a_1(x, \tau) a_1(x, s) ds d\tau dx, \end{aligned}$$

где

$$a_1(x, \tau) = \int_V \Gamma(x, t, \xi, \tau) a(\xi, \tau) \tilde{U}(\xi, \tau) d\xi.$$

Заметим, что $|a_1(x, \tau)| < C$ (см. [3, с. 406]) и $Ma_1(x, \tau)a_1(x, s) = 0$ при $|s - \tau| > \varepsilon$. Поэтому доказательство леммы сводится к очевидной оценке:

$$F \leq C \int \int_{|s-\tau| < \varepsilon} ds d\tau \leq C\varepsilon.$$

Лемма 2.2. При любом $\beta : 0 < \beta < 1$ найдется постоянная $C(\beta)$ такая, что

$$H \equiv M \|\Gamma_{\xi_i} * a^{ij} \Gamma_{\xi_j} * a^{ks} U_{\eta_k \eta_s}\|_{L_2(V)}^2 \leq C(\beta) \varepsilon^{1-\beta}.$$

Доказательство. Пусть пары (i, j) , (k, s) фиксированы. Тогда H оценивается конечной суммой выражений вида

$$M \int_V \int_0^t \int_0^\tau q(x, \tau, \tau_1) \int_0^t \int_0^s q(x, s, s_1) d\bar{s} d\bar{\tau} dx,$$

где

$$q(x, \tau, \tau_1) = \int_V \int_V \Gamma_{\xi_i}(x, t, \xi, \tau) a(\xi, \tau) \Gamma_{\xi_j}(\xi, \tau, \eta, \tau_1) a(\eta, \tau_1) \tilde{U}(\eta, \tau_1) d\eta d\xi,$$

$$d\bar{\tau} = d\tau_1 d\tau, d\bar{s} = ds_1 ds.$$

Ниже при выводе оценки леммы 2.2 используется неравенство (см. [1, с. 170])

$$|\Gamma_{\xi_i}(x, t, \xi, \tau)| \leq C(t - \tau)^{-(1+\beta)/2} |x - \xi|^{\beta-n}. \quad (13)$$

Наконец, введем обозначение $I\{A\}$, означающее, что указанный интеграл I рассматривается по области A изменения временных аргументов. Тогда в силу m -зависимости поля $a(x, t)$, условия центрирования и неравенства (13) получаем

$$H\{\tau - s > 2\varepsilon\} = H\{\tau - s > 2\varepsilon \cap \tau - \tau_1 < \varepsilon\} = H\{\tau - s > 2\varepsilon \cap$$

$$\cap \tau - \tau_1 < \varepsilon \cap s - s_1 < \varepsilon\} \leq C \int_V \int_0^t \int_V |x - \xi|^{\beta-n} (t - \tau)^{-(1+\beta)/2} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_V \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} |\xi - \eta|^{\beta-n} (\tau - \tau_1)^{-(1+\beta)/2} \int_V \int_0^t |x - \xi_1|^{\beta-n} (t - s)^{-(1+\beta)/2} \times \\
& \times \int_V \int_{s-\varepsilon}^s |\xi_1 - \eta_1|^{\beta-n} (s - s_1)^{-(1+\beta)/2} ds_1 d\eta_1 ds d\xi_1 d\tau_1 d\eta d\tau d\xi dx \leq \\
& \leq C(\beta) \int_0^t \int_0^t ((t - \tau)(t - s))^{-(1+\beta)/2} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \int_{s-\varepsilon}^s ((\tau - \tau_1)(s - s_1))^{-(1+\beta)/2} d\bar{s} d\bar{\tau} \leq \\
& \leq C(\beta) \varepsilon^{1-\beta}.
\end{aligned}$$

Интеграл $H\{s - \tau > 2\varepsilon\}$ оценивается аналогично. Для $H\{|s - \tau| \leq 2\varepsilon\}$ имеет место представление

$$\begin{aligned}
H\{|s - \tau| \leq 2\varepsilon\} = & H\{|s - \tau| \leq 2\varepsilon \cap \tau - 6\varepsilon < \tau_1 < \tau\} + \\
& + H\{|s - \tau| \leq 2\varepsilon \cap s - 6\varepsilon < s_1 < s\} + \\
& + H\{|s - \tau| \leq 2\varepsilon \cap 0 < \tau_1 < \tau - 6\varepsilon \cap 0 < s_1 < s - 6\varepsilon\} + \\
& + H\{|s - \tau| \leq 2\varepsilon \cap \tau - 6\varepsilon < \tau_1 < \tau \cap s - 6\varepsilon < s_1 < s\}.
\end{aligned}$$

Каждый из выписанных интегралов оценивается так же, как и интеграл $H\{\tau - s > 2\varepsilon\}$. Лемма 2.2 доказана.

Замечание 2.1. Из доказательства леммы 2.2 следует, что для любого β , $0 < \beta < 1$,

$$M \|\Gamma * a_{\xi_i}^{ij} \Gamma_{\xi_j} * a^{hs} U_{\eta_k \eta_s}\|_{L_2(V)}^2 \leq C(\beta) \varepsilon^{1-\beta}.$$

Действительно, функция $\Gamma(x, t, \xi, \tau)$ заведомо удовлетворяет неравенству (13), используемому в доказательстве.

Лемма 2.3. Для любого β , $0 < \beta < 1/2$, найдется постоянная $C(\beta)$ такая, что

$$\Psi = M \|\Gamma_{\xi_i} * a^{ij} \Gamma_{\xi_j} * a^{hs} u_{y_k y_s}\|_{L_2(V)}^2 \leq C(\beta) \varepsilon^{1/2-\beta}.$$

Доказательство. Меняя порядок интегрирования и взятия математического ожидания, можно получить представление $\Psi = \int_{V^5 \Lambda} \psi dx_0 dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 d\tau d\tau_1 d\sigma d\sigma_1$, где все пространственные переменные

при интегрировании пробегают область V , а временные — область $\Lambda = \{0 < \tau_1 < \tau < t, 0 < \sigma_1 < \sigma < t\}$. Подынтегральное выражение имеет вид

$$\begin{aligned}
\psi = & M \left\{ \Gamma_{x_{1i}}(x_0, t, x_1, \tau) a_{\varepsilon}^{ij}(x_1, \tau/\varepsilon, \omega) \Gamma_{x_{1j}}(x_1, \tau, x_2, \tau_1) a_{\varepsilon}^{hs}(x_2, \tau_1/\varepsilon, \omega) u_{ks} \times \right. \\
& \times (x_2, \tau_1, \omega) \Gamma_{y_{1p}}(x_0, t, y_1, \sigma) a_{\varepsilon}^{pq}(y_1, \sigma/\varepsilon, \omega) \Gamma_{y_{1q}}(y_1, \sigma, y_2, \sigma_1) a_{\varepsilon}^{rl} \times \\
& \left. \times (y_2, \sigma_1/\varepsilon, \omega) u_{rl}(y_2, \sigma_1, \omega) \right\}, \quad u_{ks}(z, \tau) = \partial^2 u / \partial z_k \partial z_s.
\end{aligned}$$

Заметим, что $\psi = 0$ при $\tau > \max\{\tau_1, \sigma, \sigma_1\} + \varepsilon$. Действительно, решение $u_{\varepsilon}(x, \tau, \omega)$ определяется начальными данными и значениями коэффициентов уравнения в слое $R^n \times [0, \tau]$. Поэтому в рассматриваемом случае случайные величины $a_{\varepsilon}^{ij}(x_1, \tau/\varepsilon, \omega)$ не зависят от $a_{\varepsilon}^{hs}(x_2, \tau_1/\varepsilon, \omega)$, $u_{ks}(x_2, \tau_1, \omega)$, $a_{\varepsilon}^{pq}(y_1, \sigma/\varepsilon, \omega)$, $a_{\varepsilon}^{rl}(y_2, \sigma_1/\varepsilon, \omega)$, $u_{rl}(y_2, \sigma_1, \omega)$ и можно воспользоваться условием центрирования (7). Аналогичные рассуждения имеют место при $\sigma > \max\{\sigma_1, \tau, \tau_1\} + \varepsilon$. В оставшейся области благодаря равномерным оценкам для вторых производных решения (см. раздел 4) и неравенству (13) имеет место оценка

$$\psi \leq C(\beta) \prod_{j=0}^1 |x_j - x_{j+1}|^{\beta-n} |y_j - y_{j+1}|^{\beta-n} q_1,$$

где $y_0 = x_0$, $q_1 = [(t - \tau)(\tau - \tau_1)(t - \sigma)(\sigma - \sigma_1)]^{-1/2-\beta}$. Интегрирование по пространственным переменным приводит к оценке

$$\Psi \leq C(\beta) \int_{\Lambda_1 \cap [0, t]^4} q_1 d\tau_1 d\tau d\sigma_1 d\sigma,$$

где область Λ_1 покрывается объединением трех областей:

$$\Lambda_2 = \{\sigma - \varepsilon < \sigma_1 < \sigma\}, \quad \Lambda_3 = \{\tau - \varepsilon < \tau_1 < \tau\}, \quad \Lambda_4 = \{|\tau - \sigma| < \varepsilon\}.$$

Элементарные оценки показывают, что интеграл от q_1 по каждой из областей Λ_i ($i = 2, 3, 4$) оценивается величиной $C(\beta)\varepsilon^{1/2-\beta}$. Лемма 2.3 доказана.

Замечание 2.2. Из доказательства леммы 2.3 следует, что для любого $0 < \beta < 1/2$

$$\mathbf{M} \|\Gamma * a_{\xi_i}^{ij} \Gamma_{\xi_j} * a^{hs} u_{y_h y_s}\|_{L_2(V)}^2 \leq C(\beta) \varepsilon^{1/2-\beta}.$$

Справедливость теоремы 2.1 вытекает из лемм 2.1 — 2.3, замечаний 2.1 2.2.

3. Выделение асимптотически нормальной составляющей решения

Рассмотрим представление (12). Цель дальнейших вычислений убедиться в том, что основной вклад в случайную составляющую u_ε дает слагаемое $\Gamma * a^{ij} U_{\xi_i \xi_j}$.

Лемма 3.1.

$$\mathbf{M} \|\Gamma * a^{ij} u_{\xi_i \xi_j}\|_{W_2^{-2}(V)} = o(\varepsilon^{1/2}).$$

Доказательство. Пусть пара (i, j) фиксирована. Используя финитность поля $a(x, t)$, интегрированием по частям получаем неравенства:

$$\begin{aligned} \|\Gamma * a^{ij} u_{\xi_i \xi_j}\|_{W_2^{-2}(V)} &\leq \|\Gamma_{\xi_i} * a^{ij} u_{\xi_j}\|_{W_2^{-2}(V)} + \|\Gamma * a_{\xi_i}^{ij} u_{\xi_j}\|_{W_2^{-2}(V)} \leq \\ &\leq \|\Gamma_{\xi_i \xi_j} * a^{ij} u\|_{W_2^{-2}(V)} + \|\Gamma_{\xi_i} * a_{\xi_j}^{ij} u\|_{W_2^{-2}(V)} + \|\Gamma_{\xi_j} * a_{\xi_i}^{ij} u\|_{W_2^{-2}(V)} + \\ &\quad + \|\Gamma * a_{\xi_i \xi_j}^{ij} u\|_{W_2^{-2}(V)}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу результатов раздела 5 (см. леммы 5.2, 5.6 ниже) следует, что $\|\Gamma * a^{ij} u_{\xi_i \xi_j}\|_{W_2^{-2}(V)}$ оценивается конечной суммой выражений вида $\|\Gamma * a^{ij} u\|_{L_2(V)}$.

Пусть

$$g(x) = \int_0^t \int_V \Gamma(x, t, \xi, \tau) a^{ij}(\xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Из представления (12) получаем равенство

$$g = \Gamma * a^{ij} \Gamma * a^{hs} \tilde{u} + \Gamma * a^{ij} \Gamma * a^{hs} \tilde{U}.$$

Для доказательства леммы 3.1 нужно оценить

$$A \equiv \mathbf{M} \|\Gamma * a^{ij} \Gamma * a^{hs} \tilde{U}\|_{L_2(V)}^2 \text{ и } B \equiv \mathbf{M} \|\Gamma * a^{ij} \Gamma * a^{hs} \tilde{u}\|_{L_2(V)}^2.$$

Убедимся, что вклад A пренебрежим.

Лемма 3.2.

$$A \leq C\varepsilon^2.$$

Доказательство. Пусть пары (i, j) , (k, s) фиксированы. Тогда A оценивается конечной суммой выражений вида

$$\mathbf{M} \int_V \int_0^t \int_0^\tau h(x, \tau, \tau_1) \int_0^t \int_0^s h(x, s, s_1) ds d\tau dx,$$

где $h(x, \tau, \tau_1) = \int_V \int_V \Gamma(x, t, \xi, \tau) a(\xi, \tau) \Gamma(\xi, \tau, \eta, \tau_1) \times a(\eta, \tau_1) \tilde{U}(\eta, \tau_1) d\eta d\xi$.

Заметим, что $|h(x, \tau, \tau_1)| < C$ (см. [3, с. 406]). В силу m -зависимости поля $a(x, t)$ и условия центрирования

$$\begin{aligned} A\{\tau - s > 2\varepsilon\} &= A\{\tau - s > 2\varepsilon \cap \tau - \varepsilon < \tau_1 < \tau\} = \\ &= \int_V \int_0^t \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} Mh(x, \tau, \tau_1) d\bar{\tau} \int_0^t \int_0^s Mh(x, s, s_1) d\bar{s} dx \leq C\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Подобным образом $A\{s - \tau > 2\varepsilon\} \leq C\varepsilon^2$. Наконец,

$$\begin{aligned} A\{|\tau - s| \leq 2\varepsilon\} &= A\{|\tau - s| \leq 2\varepsilon \cap \tau - 6\varepsilon < \tau_1 < \tau\} + \\ &+ A\{|\tau - s| \leq 2\varepsilon \cap s - 6\varepsilon < s_1 < s\} + A\{|\tau - s| \leq 2\varepsilon \cap \\ &\cap 0 < s_1 < s - 6\varepsilon\} - A\{|\tau - s| \leq 2\varepsilon \cap \tau - 6\varepsilon < \tau_1 < \tau \cap s - 6\varepsilon < s_1 < s\}. \end{aligned}$$

Каждый из данных интегралов оценивается точно так же, как и $A\{\tau - s > 2\varepsilon\}$. Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. $B = o(\varepsilon)$.

Доказательство. Воспользуемся рассуждениями, примененными при доказательствах лемм 2.2., 2.3. Пусть пары (i, j) , (k, s) фиксированы. Тогда B оценивается конечной суммой выражений вида

$$M \int_V \int_0^t \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} p(x, \tau, \tau_1) d\bar{\tau} \int_0^t \int_0^s p(x, s, s_1) d\bar{s} d\tau dx,$$

$$\begin{aligned} \text{где } p(x, \tau, \tau_1) &= \int_V \int_V \Gamma(x, t, \xi, \tau) a^{ij}(\xi, \tau/\varepsilon, \omega) \times \\ &\times \Gamma(\xi, \tau, \eta, \tau_1) a^{hs}(\eta, \tau_1/\varepsilon, \omega) u_{\eta_h \eta_s}(\eta, \tau_1) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Согласно лемме 4.1 (см. раздел 4) и [3, с. 406]

$$|p(x, \tau, \tau_1)| < C. \quad (14)$$

Разобьем область интегрирования по временным переменным следующим образом:

$$\begin{aligned} B &= B\{\tau - 6\varepsilon < \tau_1 < \tau\} + B\{s - 6\varepsilon < s_1 < s\} + \\ &+ B\{0 < \tau_1 < \tau - 6\varepsilon \cap 0 < s_1 < s - 6\varepsilon\} - \\ &- B\{\tau - 6\varepsilon < \tau_1 < \tau \cap s - 6\varepsilon < s_1 < s\}. \end{aligned}$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} B\{\tau - 6\varepsilon < \tau_1 < \tau\} &\leq M \left(\int_V \left(\int_0^t \int_{\tau-6\varepsilon}^{\tau} p(x, \tau, \tau_1) d\bar{\tau} \right)^2 dx \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\int_V \left(\int_0^t \int_0^s p(x, s, s_1) d\bar{s} \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq C\varepsilon B^{1/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогично

$$B\{s - 6\varepsilon < s_1 < s\} \leq C\varepsilon B^{1/2}. \quad (16)$$

Следующая оценка очевидна в силу (14)

$$B\{\tau - 6\varepsilon < \tau_1 < \tau \cap s - 6\varepsilon < s_1 < s\} \leq C\varepsilon^2. \quad (17)$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} r(x, \tau, \tau_1, \tau_2) &= \int_V \int_V \int_V \Gamma(x, t, \xi, \tau) a(\xi, \tau) \Gamma_{\xi_h}(\xi, \tau, \eta, \tau_1) \times \\ &\times a(\eta, \tau_1) \Gamma_{\eta_s}(\eta, \tau_1, y, \tau_2) a(y, \tau_2) \tilde{u}(y, \tau_2) dy d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Согласно лемме 4.1 (см. раздел 4) и [1, с. 170]

$$|r(x, \tau, \tau_1, \tau_2)| \leq C(\beta)(\tau_1 - \tau_2)^{-1/2-\beta}(\tau - \tau_1)^{-1/2-\beta}. \quad (18)$$

Используя представление (12), интегрируя и интегрируя по частям (граничные члены пропадают в силу финитности поля $a(x, t)$), нетрудно

убедиться, что для доказательства леммы 3.3 достаточно оценить следующий интеграл:

$$K \equiv M \int_V \int_0^t \int_0^{\tau-6\varepsilon} \int_0^{\tau_1} r(x, \tau, \tau_1, \tau_2) d\bar{\tau} \int_0^t \int_0^{s-6\varepsilon} \int_0^{s_1} r(x, s, s_1, s_2) d\bar{s} dx.$$

Заметим, что $K\{\tau - s > \varepsilon\} = K\{s - \tau > \varepsilon\} = 0$. В силу (18)

$$K\{|s - \tau| \leq \varepsilon \cap |\tau_1 - s_1| \leq 2\varepsilon\} \leq C(\beta) \int_{|s-\tau| \leq \varepsilon} \int \times \\ \times \left(\int_{|\tau_1 - s_1| < 2\varepsilon} (\tau - \tau_1)^{-1/2-\beta} (s - s_1)^{-1/2-\beta} ds_1 d\tau_1 \right) d\tau ds \leq C\varepsilon^{1,5-\beta}. \quad (19)$$

Интегралы $K\{|\tau - s| \leq \varepsilon \cap \tau_1 - s_1 > 2\varepsilon\}$, $K\{|\tau - s| \leq \varepsilon \cap s_1 - \tau_1 > 2\varepsilon\}$ оцениваются аналогично. Из (15)–(17), (19) следует справедливость леммы 3.3. Справедливость леммы 3.1 вытекает из лемм 3.2, 3.3.

4. Оценка максимума второй производной для задачи со случайными коэффициентами

Рассмотрим задачу (1) при наложенных (раздел 1) ограничениях.

Лемма 4.1. *Существует неслучайная постоянная $C > 0$ такая, что*

$$\sup_{x \in V, t \in [0, T]} |w_{x_i x_j}(x, t)| < C.$$

Доказательство. Пусть $Z(x, t, \xi, \tau)$ — случайное фундаментальное решение уравнения (1), рассмотренное в детерминированном случае в книге [4]. Известно [4, с. 28]

$$Z(x, t, \xi, \tau) = G(x - \xi, t, \xi, \tau) + \int_{\tau}^t \int G(x - y, t, y, \beta) \times \\ \times \varphi(y, \beta, \xi, \tau) dy d\beta \equiv G(x - \xi, t, \xi, \tau) + W(x, t, \xi, \tau),$$

$$\text{где } G(x, t, \xi, \tau) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x, \sigma)} \exp \left\{ - \int_{\tau}^t (b^{kj}(s, \xi) + a^{kj}(s, \xi)) ds \sigma_k \sigma_j \right\} d\sigma,$$

а $\varphi(x, t, \xi, \tau)$ — решение интегрального уравнения

$$\varphi(x, t, \xi, \tau) = -K(x, t, \xi, \tau) + \int_{\tau}^t d\beta \int -K(x, t, y, \beta) \varphi(y, \beta, \xi, \tau) dy. \quad (20)$$

Здесь $K(x, t, \xi, \tau) = Q(G(x - \xi, t, \xi, \tau))$, Q — оператор в (1).

Интегральное уравнение (20) решается методом последовательных приближений, при этом $\varphi(x, t, \xi, \tau)$ является его резольвентой:

$$\varphi(x, t, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m K_m(x, t, \xi, \tau),$$

$$K_1(x, t, \xi, \tau) = K(x, t, \xi, \tau),$$

$$K_m(x, t, \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\beta \int K(x, t, y, \beta) K_{m-1}(y, \beta, \xi, \tau) dy.$$

Из определения фундаментального решения имеем равенство

$$\omega = Z * f = G * f + W * f,$$

где, как и прежде,

$$Z * f = \int_0^t \int_V Z(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Используя неравенства (6), легко убедиться в том, что существует неслучайная постоянная C :

$$G_{x_i}(x, t, \xi, \tau) + G_{\xi_i}(x, t, \xi, \tau) = \tilde{G}(x, t, \xi, \tau),$$

$$|\tilde{G}_{x_k}(x, t, \xi, \tau)| \leq C(t - \tau)^{-(n+1)/2} \exp(-C|x - \xi|^2/(t - \tau)).$$

Отсюда, применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$G_{x_i} * f = -G_{\xi_i} * f + \tilde{G} * f = G * f_{\xi_i} + \tilde{G} * f.$$

Тогда
$$G_{x_i x_j} * f = G_{x_j} f_{\xi_i} + \tilde{G}_{x_j} * f. \quad (21)$$

Из (21) в силу интегрируемости особенностей функций $G_{x_j}(x, t, \xi, \tau)$, $\tilde{G}_{x_j}(x, t, \xi, \tau)$ и неравенства (6) получаем

$$\|G_{x_i x_j} * f\|_{C(V \times [0, T])} < C$$

с неслучайной постоянной C . Аналогичная оценка для $W_{x_i x_j} * f$ получается с применением неравенств (5), (6) дословным повторением рассуждений [4, с. 25—32]. Лемма 4.1 доказана.

5. Представление вторых производных фундаментального решения

В данном разделе мы вновь рассматриваем неслучайное фундаментальное решение уравнения (8) $\Gamma(x, t, \xi, \tau)$, как в книге [1].

Известно [1, с. 44]

$$\Gamma(x, t, \xi, \tau) = \Gamma^*(\xi, \tau, x, t),$$

где $\Gamma^*(x, t, \xi, \tau)$ — фундаментальное решение сопряженного к (8) уравнения

$$L^* v = v_t + b^{ij}(x, t) v_{x_i x_j} + 2b_{x_j}^{ij} v_{x_i} + b_{x_i x_j}^{ij} v = f(x, t).$$

Согласно [1, с. 43],

$$\Gamma^*(\xi, \tau, x, t) = Z^*(\xi, \tau, x, t) + R(\xi, \tau, x, t),$$

$$Z^*(\xi, \tau, x, t) = c(x, t, \tau) \exp\{-(b(\xi - x), (\xi - x))/4\},$$

$b = \|b_{ij}(x, t, \tau)\|$ — матрица, обратная $(t - \tau)\|b^{ij}(x, t)\|$, $c(x, t, \tau) = (\det(b/2\pi))^{n/2}$,

$$R(\xi, \tau, x, t) = \int_{\tau}^t \int Z^*(\xi, \tau, \eta, \sigma) \Phi^*(\eta, \sigma, x, t) d\eta d\sigma. \quad (22)$$

Функция $\Phi^*(\eta, \sigma, x, t)$ — решение интегрального уравнения

$$\Phi^*(\eta, \sigma, x, t) = L^* Z^*(\eta, \sigma, x, t) + \int_{\sigma}^t \int L^* Z^*(\eta, \sigma, \xi, \tau) \Phi^*(\xi, \tau, x, t) d\xi d\tau.$$

Она допускает представление

$$\Phi^*(\eta, \sigma, x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (L^* Z^*)_m(\eta, \sigma, x, t),$$

где $(L^* Z^*)_1(\eta, \sigma, x, t) = L^* Z^*(\eta, \sigma, x, t) =$

$$= (b^{ij}(\eta, \sigma) - b^{ij}(x, t)) Z_{\eta_i \eta_j}^*(\eta, \sigma, x, t) + 2b_{\eta_j}^{ij} Z_{\eta_i}^*(\eta, \sigma, x, t) +$$

$$+ b_{\eta_i \eta_j}^{ij} Z^*(\eta, \sigma, x, t), \quad (L^* Z^*)_{m+1}(\eta, \sigma, x, t) = \int_{\sigma}^t \int L^* Z^*(\eta, \sigma, y, s) \times$$

$$\times (L^* Z^*)_m(y, s, x, t) dy ds.$$

Пусть $n_{\beta}(x) = \beta^{-n/2} \exp(-|x|^2/\beta)$.

Непосредственным вычислением производных проверяется справедливость следующих лемм.

Лемма 5.1.

$$|Z_{x_i}^*(\xi, \tau, x, t) + Z_{\xi_i}^*(\xi, \tau, x, t)| \leq C n_{C(t-\tau)}(x - \xi).$$

Лемма 5.2.

$$\begin{aligned} & |(Z_{x_i}^*(\xi, \tau, x, t) + Z_{\xi_i}^*(\xi, \tau, x, t))_{x_j} + (Z_{x_i}^*(\xi, \tau, x, t) + \\ & + Z_{\xi_i}^*(\xi, \tau, x, t))_{\xi_j}| \leq C n_{C(t-\tau)}(x - \xi). \end{aligned}$$

Перейдем к оценке производных функции $R(\xi, \tau, x, t)$. Прямым вычислением производных проверяется также

Лемма 5.3.

$$\begin{aligned} L^*Z^*(\eta, \sigma, x, t) &= N_{x_i x_j}^{(1)}(\eta, \sigma, x, t) + N_{x_i}^{(2)}(\eta, \sigma, x, t) + N^{(3)}(\eta, \sigma, x, t), \\ \text{где} \quad |N^{(i)}(\eta, \sigma, x, t)| &\leq C n_{C(t-\sigma)}(x - \eta), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

В частности,

$$N^{(1)}(\eta, \sigma, x, t) = (b^{ij}(\eta, \sigma) - b^{ij}(x, t))Z^*(\eta, \sigma, x, t).$$

Выражения для $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ имеют аналогичный, но более громоздкий вид.

Из леммы 5.3 и леммы 3 [1, с. 28] следует справедливость представления.

Лемма 5.4.

$$\Phi^*(\eta, \sigma, x, t) = M_{x_i x_j}^{(1)}(\eta, \sigma, x, t) + M_{x_i}^{(2)}(\eta, \sigma, x, t) + M^{(3)}(\eta, \sigma, x, t).$$

При этом

$$|M^{(i)}(\eta, \sigma, x, t)| \leq C n_{C(t-\sigma)}(x - \eta), \quad i = 1, 2, 3.$$

Лемма 5.5.

$$\begin{aligned} \Phi^*(\eta, \sigma, x, t) - \Phi^*(\xi, \sigma, x, t) &= K_{x_i x_j}^{(1)}(\eta, \sigma, x, t, \xi) + \\ &+ K_{x_i}^{(2)}(\eta, \sigma, x, t, \xi) + K^{(3)}(\eta, \sigma, x, t, \xi), \\ \text{где} \quad |K^{(i)}(\eta, \sigma, x, t, \xi)| &\leq C |\eta - \xi|^\alpha (t - \sigma)^{-\alpha/2} (n_{C(t-\sigma)}(x - \eta) + n_{C(t-\sigma)}(x - \xi)). \end{aligned}$$

Доказательство. Вначале оценим разность $|Z^*(\eta, \sigma, x, t) - Z^*(\xi, \sigma, x, t)|$. При $t - \sigma \leq |\eta - \xi|^2$ оценка

$$\begin{aligned} |Z^*(\eta, \sigma, x, t) - Z^*(\xi, \sigma, x, t)| &\leq C(t - \sigma)^{-\alpha/2} \times \\ &\times |\eta - \xi|^\alpha (n_{C(t-\sigma)}(x - \eta) + n_{C(t-\sigma)}(x - \xi)) \end{aligned} \quad (23)$$

очевидна, так как $|Z^*(\eta, \sigma, x, t)| \leq C n_{C(t-\sigma)}(x - \eta)$. При $t - \sigma > |\eta - \xi|^2$ по теореме о среднем, используя явное выражение для $Z_{x_i}^*(\xi, \sigma, x, t)$, получаем

$$|Z^*(\eta, \sigma, x, t) - Z^*(\xi, \sigma, x, t)| \leq C |\eta - \xi| (t - \sigma)^{-1/2} \times n_{C(t-\sigma)}(x - \theta),$$

где θ — точка из интервала (η, ξ) . Из неравенства треугольника имеем

$$C|\theta - x|^2 + C|\xi - \eta|^2 \geq |x - \eta|^2 + |\xi - x|^2.$$

Следовательно,

$$-\frac{C|\theta - x|^2}{t - \sigma} \leq -\frac{|x - \eta|^2}{t - \sigma} - \frac{|\xi - x|^2}{t - \sigma} + C.$$

Отсюда неравенство (23) справедливо при $t - \sigma > |\eta - \xi|^2$. Но тогда из леммы 5.3 следует, что утверждение леммы 5.5 справедливо для разности $L^*Z^*(\eta, \sigma, x, t) - L^*Z^*(\xi, \sigma, x, t)$. Применением леммы 3 [1, с. 28] и теоремы 7 [1, с. 29] окончательно доказывается лемма 5.5.

Ниже оценивается $R_{\xi_i \xi_j}(\xi, \tau, x, t)$, где функция $R(\xi, \tau, x, t)$ задана соотношением (22).

Лемма 5.6:

$$R_{\xi_i \xi_j}(\xi, \tau, x, t) = S_{x_i x_j}^{(1)}(\xi, \tau, x, t) + S_{x_i}^{(2)}(\xi, \tau, x, t) + S^{(3)}(\xi, \tau, x, t),$$

где $|S^{(i)}(\xi, \tau, x, t)| \leq C n_{C(t-\tau)}(x - \xi)$, $i = 1, 2, 3$.

Доказательство:

$$\begin{aligned} R_{\xi_i \xi_j}(\xi, \tau, x, t) &= \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t \int Z_{\xi_i \xi_j}^*(\xi, \tau, \eta, \sigma) \Phi^*(\eta, \sigma, x, t) d\eta d\sigma + \\ &+ \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} \int Z_{\xi_i \xi_j}^*(\xi, \tau, \eta, \sigma) (\Phi^*(\eta, \sigma, x, t) - \Phi^*(\xi, \sigma, x, t)) d\eta d\sigma + \\ &+ \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} \int \Phi^*(\xi, \sigma, x, t) d\sigma Z_{\xi_i \xi_j}^*(\xi, \tau, \eta, \sigma) d\eta. \end{aligned}$$

Для краткости ограничимся главными членами, входящими в $\Phi^*(\eta, \sigma, x, t)$:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t \int Z_{\xi_i \xi_j}^*(\xi, \tau, \eta, \sigma) M^{(1)}(\eta, \sigma, x, t) d\eta d\sigma + \right. \\ &+ \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} \int Z_{\xi_i \xi_j}^*(\xi, \tau, \eta, \sigma) K^{(1)}(\eta, \sigma, x, t, \xi) d\eta d\sigma + \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} \int M^{(1)}(\xi, \sigma, x, t) \times \\ &\times Z_{\xi_i \xi_j}^*(\xi, \tau, \eta, \sigma) d\eta d\sigma \left. \right| \leq C \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t (\sigma - \tau)^{-1} \int n_{C(\sigma-\tau)}(\xi - \eta) n_{C(t-\sigma)}(\eta - x) d\eta d\sigma + \\ &+ C \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} \int (\sigma - \tau)^{-1} |\xi - \eta|^{\alpha} (t - \sigma)^{-\alpha/2} n_{(\sigma-\tau)}(\xi - \eta) (n_{(t-\sigma)}(x - \eta) + \\ &+ n_{(t-\sigma)}(x - \xi)) d\eta d\sigma + C \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} n_{(t-\sigma)}(x - \xi) (\sigma - \tau)^{(\alpha-2)/2} d\sigma \leq C n_{(t-\tau)}(x - \xi). \end{aligned}$$

Лемма 5.6 доказана.

6. Доказательство основного результата

Известно (см. [5]), что оператор вложения $W_2^{-2}(V)$ в $W_2^{-3}(V)$ вполне непрерывен как сопряженный вполне непрерывному. Отсюда шар в пространстве $W_2^{-2}(V)$ является компактом в пространстве $W_2^{-3}(V)$. Согласно неравенству Чебышева

$$\mathbf{P} \{ \|v_\varepsilon\|_{W_2^{-2}(V)} > s \} \leq \mathbf{M} \|v_\varepsilon\|_{W_2^{-2}(V)} s^{-1}. \quad (24)$$

В силу лемм 2.1, 3.1 $\sup \mathbf{M} \|v_\varepsilon\|_{W_2^{-2}(V)} < C$, а $s^{-1} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Отсюда и из (24) следует

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sup \mathbf{P} \{ \|v_\varepsilon\|_{W_2^{-2}(V)} > s \} = 0,$$

т. е. семейство распределений, порожденных в пространстве $W_2^{-3}(V)$ обобщенных функций случайным полем v_ε , слабо компактно. Наконец, из лемм 2.1, 3.1 и условия (10) следует, что для всякой функции $\Phi \in L_2(V)$ $\langle \Phi, v_\varepsilon \rangle$ асимптотически нормально при $\varepsilon \rightarrow 0$ с параметрами $(0, \sigma^2(\Phi, \Gamma, U))$, где $\sigma^2(\Phi, \Gamma, U)$ — из условия (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
2. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
3. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
4. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964.
5. Морен К. Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965.

АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ОБЩИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ БЕЗ ВТОРОГО МОМЕНТА У ЧИСЛЕННОСТИ ПОТОМСТВА

В. А. ТОПЧИЙ

1. Введение

Описание общего ветвящегося процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, будем вести в терминах эволюции некоторой популяции (t — время). Популяция начинает развиваться в нулевой момент времени с одной частицы, которой присваивается имя (0) . Она может порождать потомков с именами $(0, i)$, где i означает порядковый номер появления потомка. Продолжительность жизни (0) и моменты появления частиц $(0, i)$ определяются случайным процессом $\{\eta, N(t)\}$, где η — продолжительность жизни, а $N(t)$ — количество потомков, порождаемых (0) за время t . Потребуем, чтобы частица не могла порождать потомков после гибели, т. е. $N = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = N(\eta)$.

Предположим, что момент появления частицы $(0, i_1, i_2, \dots, i_n)$ определен и равен $\bar{t}$. С этой частицей свяжем процесс $\{\bar{\eta}, \bar{N}(t)\}$, имеющий распределение $\{\eta, N(t)\}$ и ни от чего не зависящий. Тогда ее появившемуся i -м потомку присвоим имя $(0, i_1, \dots, i_n, i)$, а момент его появления положим равным $\bar{t} + \inf\{t | \bar{N}(t) \geq i\}$. Заметим, если $\inf\{t | \bar{N}(t) \geq i\}$ не определен, то i -го потомка нет, т. е. не существует частицы с именем $(0, i_1, \dots, i_n, i)$. Начальная частица $(0, i_1, \dots, i_n)$ гибнет в момент времени $\bar{t} + \eta$.

Наконец, $\xi(t)$ положим равным количеству частиц существующих, но не гибнущих в момент времени t . Полный перечень имен частиц реализации $\xi(t)$ с указанием моментов их появления и гибели можно выбрать в качестве вероятностного пространства $\xi(t)$ (см. [1, 2]).

Вероятностное пространство $\xi(t)$ можно рассматривать как прямое произведение пространств независимых процессов $\{\eta, N(t)\}$, соответствующих частицам с именами $(0, i_1, \dots, i_n)$. Поэтому, задавая на пространствах $\{\eta, N(t)\}$ новые процессы так, чтобы они согласовывались со списками имен для $\xi(t)$, мы практически строим новый ветвящийся процесс на пространстве $\xi(t)$. Конкретнее, пусть имеется процедура Φ построения на пространстве процесса $\{\eta, N(t)\}$ случайного процесса $\{\eta_1, N_1(t)\} = \Phi\{\eta, N(t)\}$. При этом новые процессы обладают описанными выше свойствами исходных и $N_1 = N$ всюду. Последнее позволяет каждой частице $(0, i_1, \dots, i_n)$ реализации $\xi(n)$ с ее превращениями, определяемыми $\{\bar{\eta}, \bar{N}(t)\}$, сопоставить частицу $(0, i_1, \dots, i_n)_1$ с превращениями, определяемыми $\Phi\{\bar{\eta}, \bar{N}(t)\}$. Как и ранее, новые списки задают ветвящийся про-