т. е. семейство распределений, порожденных в пространстве $W_2^{-3}(V)$ обобщенных функций случайным полем v_ε, слабо компактно. Наконец, из лемм 2.1, 3.1 и условия (10) следует, что для всякой функции $\Phi \in L_2(V)$ $\langle \Phi, v_\varepsilon \rangle$ асимптотически нормально при $\varepsilon \to 0$ с параметрами $(0, \sigma^2(\Phi, \Gamma, U))$, где $\sigma^2(\Phi, \Gamma, U)$ — из условия (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фридман А.** Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
2. **Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
3. **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
4. **Эйдельман С. Д.** Параболические системы. М.: Наука, 1964.
5. **Морен К.** Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965.

АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ОБЩИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ БЕЗ ВТОРОГО МОМЕНТА У ЧИСЛЕННОСТИ ПОТОМСТВА

В. А. ТОПЧИЙ

1. Введение

Описание общего ветвящегося процесса $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, будем вести в терминах эволюции некоторой популяции (t — время). Популяция начинает развиваться в нулевой момент времени с одной частицы, которой присваивается имя (0). Она может порождать потомков с именами $(0, i)$, где i означает порядковый номер появления потомка. Продолжительность жизни (0) и моменты появления частиц $(0, i)$ определяются случайным процессом $\{\eta, N(t)\}$, где η — продолжительность жизни, а $N(t)$ — количество потомков, порождаемых (0) за время t. Потребуем, чтобы частица не могла порождать потомков после гибели, т. е. $N = \lim_{t\to\infty} N(t) = N(\eta)$.

Предположим, что момент появления частицы $(0, i_1, i_2, \ldots, i_n)$ определен и равен $\bar{t}$. С этой частицей свяжем процесс $\{\bar\eta, \bar{N}(t)\}$, имеющий распределение $\{\eta, N(t)\}$ и ни от чего не зависящий. Тогда ее появившемуся i-м потомку присвоим имя $(0, i_1, \ldots, i_n, i)$, а момент его появления положим равным $\bar{t} + \inf\{t | \bar{N}(t) \geqslant i\}$. Заметим, если $\inf\{t|\bar{N}(t) \geqslant i\}$ не определен, то i-го потомка нет, т. е. не существует частицы с именем $(0, i_1, \ldots, i_n, i)$. Начальная частица $(0, i_1, \ldots, i_n)$ гибнет в момент времени $\bar{t} + \bar\eta$.

Наконец, $\xi(t)$ положим равным количеству частиц существующих, но не гибнущих в момент времени t. Полный перечень имен частиц реализации $\xi(t)$ с указанием моментов их появления и гибели можно выбрать в качестве вероятностного пространства $\xi(t)$ (см. [1, 2]).

Вероятностное пространство $\xi(t)$ можно рассматривать как прямое произведение пространств независимых процессов $\{\eta, N(t)\}$, соответствующих частицам с именами $(0, i_1, \ldots, i_n)$. Поэтому, задавая на пространствах $\{\eta, N(t)\}$ новые процессы так, чтобы они согласовывались со списками имен для $\xi(t)$, мы практически строим новый ветвящийся процесс на пространстве $\xi(t)$. Конкретнее, пусть имеется процедура Φ построения на пространстве процесса $\{\eta, N(t)\}$ случайного процесса $\{\eta_1, N_1(t)\} = \Phi\{\eta, N(t)\}$. При этом новые процессы обладают описанными выше свойствами исходных и $N_1 = N$ всюду. Последнее позволяет каждой частице $(0, i_1, \ldots, i_n)$ реализации $\xi(n)$ с ее превращениями, определяемыми $\{\bar\eta, \bar{N}(t)\}$, сопоставить частицу $(0, i_1, \ldots, i_n)_1$ с превращениями, определяемыми $\Phi\{\bar\eta, \bar{N}(t)\}$. Как и ранее, новые списки задают ветвящийся процесс $\xi_1(t)$, который будем называть построенным на пространстве $\xi(t)$ с помощью процедуры Ф.

Для всех процессов будем использовать одинаковые обозначения, помечая их в случае необходимости дополнительным индексом, присвоенным процессу.

Мы не исключаем возможности $\mathbf{P}\{\eta=0\}$ и $\mathbf{P}\{dN(0)>0\}>0$. Следовательно, $\mathbf{P}\{\xi(0)=1\}\leqslant 1$, хотя процесс и порождается одной частицей.

Описанная модель включает в себя в качестве частных случаев традиционные процессы Севастьянова, Беллмана — Харриса и марковские (см. [3]).

Введем обозначения:

$$N=\lim_{t\to\infty}N(t),\ G(t)=\mathbf{P}\{\eta\leqslant t\},\quad A(t)=\mathbf{M}N(t),$$

$$A=\mathbf{M}N,\ a=\int_0^\infty t\,dA(t),\ h(x)=\mathbf{M}x^N=h_{(1)}(x)=\sum_{n=0}^\infty h_nx^n,$$

$$h_{(n)}(x)=h(h_{(n-1)}(x)) \text{ при } n>1,\ Q(t)=\mathbf{P}\{\xi(t)>0\}.$$

Будем исследовать критический случай, т. е. $A=h'(1)=1$. Более того, полагаем

$$h(x)=x+(1-x)^{1+\alpha}L(1-x), \tag{1}$$

где $\alpha\in(0,\ 1]$, а $L(x)$ — медленно меняющаяся функция (м. м. ф.) при $x\to 0$ (определение см. [4]).

Рассмотрим случай, когда последовательности $1-A(n)$ и $n(1-G(n))$ убывают не медленнее $1-h_{(n)}(0)$, для которой верно (см. [5])

$$1-h_{(n)}(0)\sim n^{-\beta}L_1(n)\quad\text{при}\quad \alpha^{-1}=\beta, \tag{2}$$

где $L_1(t)$ — м. м. ф. при $t\to\infty$ (о ее связи с $L(x)$ см. раздел 3).

Под быстрым убыванием величин, указанных в заглавии, будем понимать выполнение соотношений

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n(1-G(n))(1-h_{(n)}(0))^{-1}<\infty, \tag{3}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(1-A(n))(1-h_{(n)}(0))^{-1}<\infty. \tag{4}$$

В работе доказывается

Теорема 1. *Пусть* $A=1$, $0<a<\infty$, *верны* (1), (4) *и* (3) *с* $0<\alpha<1$, *тогда при* $t\to\infty$

$$Q(t)\asymp t^{-\beta}L_1(t), \tag{5}$$

где символ $\asymp$ *означает конечность верхних пределов отношений каждого из выражений к другому.*

Для получения точной асимптотики $Q(t)$ условия (3) и (4) нужно усилить. Приведем используемые в дальнейшем условия:

$$\lim_{n\to\infty} n(1-G(n))(1-h_{(n)}(0))^{-1}=c_1<\infty, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-A(n))(1-h_{(n)}(0))^{-1}=c_2<\infty, \tag{7}$$

$$\lim_{t\to\infty}(\mathbf{P}\{\eta\geqslant t\}-\mathbf{M}\{x^N;\ \eta\geqslant t\})\,t^{\beta+1}L_1^{-1}(t)=g(y) \tag{8}$$

при $1-x\sim yt^{-\beta}L_1(t)$. Обсуждение условия (8) будет приведено в разделе 7.

Обобщим доказанный Ватутиным [6] для процессов Беллмана — Харриса результат.

Теорема 2. *Пусть* $A=1$, $0<a<\infty$, *верны* (1), (6), (4) *и* (8) *с* $0<\alpha<1$, *тогда при* $t\to\infty$

$$Q(t)\sim\rho t^{-\beta}L_1(t), \tag{9}$$

где ρ — *единственный неотрицательный корень уравнения*

$$y^{1+\alpha} - ay - \alpha c_1 + \alpha g(y) = 0. \tag{10}$$

Для процессов Беллмана — Харриса $g(y) \equiv 0$.

В формулировках теорем 1 и 2 мы исключаем возможность $\alpha = 1$. Это связано с тем, что в предложенной схеме доказательства в ряде мест существенно используется условие $\alpha < 1$.

Заметим, что теорема 1 может быть уточнена с помощью теоремы 2, т. е. могут быть получены явные оценки для отношений левой и правой частей (5). Они будут выражаться через верхние и нижние пределы от выражений, стоящих под знаками пределов в (3) и (8), исходя из некоторого аналога (10).

Более грубые оценки получатся, если выражение под знаком предела в формуле (8) оценить снизу 0, а сверху $\mathbf{P}\{\eta \geqslant t\}\, t^{\beta+1} L_1^{-1}(t)$.

Нумерация формул в разделах независимая и при ссылках на формулы из других разделов будем добавлять номер раздела. $\chi\{A\}$ — индикатор множества A. Для процессов $\{\eta, N(t)\}$ с превращениями на решетке будем считать, что выполнено условие $(\mathscr{P})$, если минимальная решетка — носитель распределения $N(t)$ (т. е. порожденная $\{t | dA(t) \neq 0\}$) содержит носитель η.

2. Редукция. Представление для производящих функций

Прежде всего заметим, что если один из процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ построен на пространстве другого так, что всюду $\eta_1 \leqslant \eta_2$ и $N_1(t) \geqslant N_2(t)$ $\forall t \in [0, \infty)$, то

$$Q_1(t) \leqslant Q_2(t). \tag{1}$$

В самом деле, введенные предположения означают, что на каждом элементарном исходе превращения (рождение и гибель) соответствующих частиц происходят у $\xi_1(t)$ не позже, чем у $\xi_2(t)$, т. е. верно (1).

На пространстве исходного процесса $\xi(t)$ зададим два вспомогательных $\xi_H(t)$ и $\xi_B(t)$ соотношениями $N_H(t) = N([(t\Delta^{-1} + 1)\gamma^{-1}]\Delta)$, $\eta_H = [\eta\Delta^{-1}]\Delta$, $\eta_B = [(\eta\Delta^{-1} + 2)\gamma^{-1}]\Delta$, $N_B(t) = N([t\Delta^{-1}]\Delta)$, где $\Delta > 0$ и $0{,}5 < \gamma < 1$ — некоторые фиксированные числа.

По построению $h_B(x) = h_H(x) = h(x)$, и верны предпосылки для (1), откуда

$$Q_B(t) \geqslant Q(t) \geqslant Q_H(t). \tag{2}$$

Для $\xi_B(t)$ и $\xi_H(t)$ остаются выполненными условия теорем 1 и 2, хотя постоянные a и c_1 и функция $g(y)$ из (1.8) для $\xi(t)$ у построенных процессов возможно будут другими. При этом существуют сколь угодно малые $\Delta > 0$, при которых для $\xi_B(t)$ и $\xi_H(t)$ верно условие $(\mathscr{P})$. Для доказательства теоремы 2 нужно заметить, что фигурирующие в определении ρ_H и ρ_B характеристики a, c_1 и $g(y)$ с соответствующими индексами сходятся к a, c_1 и $g(y)$ при $\Delta \to 0$ и $\gamma \to 1$, т. е. $\rho_H \to \rho$ и $\rho_B \to \rho$.

В самом деле, сходимость a_H к a следует из соотношений

$$a_H = \int_0^\infty t\,dA_H(t) = \int_0^\infty t\,dA\left(\left[t\Delta^{-1} + 1\right)\gamma^{-1}\right]\Delta\right) = O(\Delta) + \int_0^\infty t\,dA\left(t\gamma^{-1} + \Delta\gamma^{-1}\right) = O(\Delta) + \gamma a.$$

Далее, пусть $x\Delta^{-1}$ — целое,

$$G_B(x) = \mathbf{P}\{[(\eta\Delta^{-1} + 2)\gamma^{-1}]\Delta \leqslant x\} = \mathbf{P}\{(\eta\Delta^{-1} + 2)\gamma^{-1} < x\Delta^{-1} + 1\} = \mathbf{P}\{\eta < -2\Delta + \gamma\Delta + x\gamma\}.$$

Последнее ввиду монотонности функции распределения, (1.2) и (1.6) означает $c_{1B} \to c_1$ при $\Delta \to 0$, $\gamma \to 1$.

Проверка сходимости a_B и c_{1H} еще проще, поэтому ее опускаем.

Для t, кратных Δ, $\mathbf{P}\{\eta \geqslant t\} = \mathbf{P}\{\eta_H \geqslant t\}$ и $\mathbf{M}\{x_*^N; \eta \geqslant t\} = \mathbf{M}\{x^{N_H}; \eta_H \geqslant t\}$, т. е. $g_H(y) = g(y)$. В силу (1.2) и (1.6) $\mathbf{P}\{\eta_B \geqslant t\} - \mathbf{M}\{x^{N_B}; \eta_B \geqslant t\} = \mathbf{P}\{\eta \geqslant \gamma t\} - \mathbf{M}\{x^N; \eta \geqslant \gamma t\} + o(t^{-\beta-1}L_1(t))$. Отсюда $g_B(y) = (1-\gamma)O(1) + g(y)$.

Тем самым доказательство сходимости ρ_H и ρ_B к ρ завершено.

Легко проверить, что утверждения теорем инвариантны относительно линейной замены времени, т. е. решетку, на которой происходят превращения процессов, не ограничивая общности, можно считать целочисленной.

Для $\xi_B(t)$ и $\xi_H(t)$ достаточно долго живущие частицы приблизительно $1-\gamma$ часть жизни перед гибелью потомства не производят, и в дальнейшем будем считать, что все частицы перед гибелью $1-\gamma$ часть жизни потомства не производят. С одной стороны, этого легко добиться незначительной модификацией $\xi_B(t)$ и $\xi_H(t)$, а с другой стороны, следующее из этого допущения соотношение $h_n(z_0, \ldots, z_n) \equiv h_n(z_0, \ldots, z_{\gamma n})$ можно заменить на $h_n(z_0, \ldots, z_n) \equiv h_n(z_0, \ldots, z_{\gamma(n)})$, где $\gamma(n) \sim \gamma n$, и почти дословно повторить приводящиеся в работе рассуждения с более громоздкими по форме записями.

Подводя итог, ввиду (2) достаточно доказать теоремы для процессов с превращениями на целочисленной решетке с условием $(\mathscr{P})$, частицы в которых последнюю $1-\gamma$ часть своей жизни потомства не производят. Их будем называть процессами с дискретным временем.

Введем обозначения: $\xi(n)$, $n \in N$,— исследуемый процесс, $P_n = \mathbf{P}\{\xi(n) = 0\}$, $Q_n = 1 - P_n$, $h_n(z_0, \ldots, z_n) = \mathbf{M}\left(\prod_{i=0}^{n} z_i^{dN(i)} \,\middle|\, \eta = n\right)$, $f_n = \mathbf{P}\{\eta = n\}$, $h_n(i) = h_n(P_i, \ldots, P_{i-n})$, где $P_i = 1$ при $i < 0$, $q_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i$,

$$a_{in} = \frac{\partial}{\partial z_i} h_n(1, \ldots, 1),\ a_i = \sum_{n=i}^{\infty} a_{in} f_n,\ f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\quad \Phi_n = \sum_{i=0}^{n} Q_{n-i} \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij} f_j,$$

$$H_j(n) = 1 - h_j(n) - \sum_{i=0}^{j} a_{ij} Q_{n-i},\qquad (1 - f_a(z))^{-1} - a^{-1}(1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n.$$

Мы часто будем вместо целых чисел писать дробные, подразумевая, что от них берется целая часть. Более того, вместо $n - [t]$ иногда будем использовать запись $n - t$. Такая неоднозначность толкования индексов будет допускаться в выражениях, где это не оказывает существенного влияния на асимптотические результаты.

Выведем основное представление для Q_n, являющееся незначительной модификацией соотношения (13) из [7], поэтому лишь схематически укажем путь его получения.

Применяя формулу полной вероятности к производящей функции $\xi(n)$ по превращениям начальной частицы, после простых тождественных преобразований получаем

$$Q_n = \sum_{i=0}^{n} Q_{n-i} a_i + \sum_{i=0}^{n} H_i(n) f_i - \Phi_n + q_n. \tag{3}$$

Напомним, что у нас предполагается выполнение условий

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_{in} f_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = f_a(1) = 1, \tag{4}$$

$$0 < a = f_a'(1) < \infty. \tag{5}$$

Соотношения (3), (4) и (5) с помощью производящих функций позволяют получить

$$Q_n = \sum_{i=0}^{n} \left(q_i - \Phi_i + \sum_{j=0}^{i} H_j(i) f_j\right)\left(a^{-1} + \beta_{n-i}\right), \tag{6}$$

что после тождественных преобразований разности Q_n и Q_{n-1} влечет

$$Q_n - Q_{n-1} = \sum_{i=1}^{8} I_i, \tag{7}$$

где $I_1 = a^{-1}(q_n - \Phi_n)$, $I_2 = a^{-1} \sum_{i=0}^{n} H_i(n) f_i$, $I_3 = \sum_{i=0}^{np} (q_i - \Phi_i)(\beta_{n-i} - \beta_{n-i-1})$, $I_4 = \sum_{i=np+2}^{n} (\Phi_{i-1} - \Phi_i - f_i)\beta_{n-i}$, $I_5 = (q_{np+1} - \Phi_{np+1})\beta_{n-[np]-1}$, $I_6 = \sum_{i=0}^{np} \times$ $\times \sum_{j=0}^{i} f_j H_j(i)(\beta_{n-i} - \beta_{n-i-1})$, $I_7 = \sum_{i=np+2}^{n} \beta_{n-i} \left(\sum_{j=0}^{i} H_j(i) f_j - \sum_{j=0}^{i-1} H_j(i-1) f_j \right)$, $I_8 = \sum_{j=0}^{np+1} H_j(np+1) f_j \beta_{n-[np]-1}$, а $0 < p < 1$ — произвольное фиксированное.

Как будет показано в последующих разделах, доказательства теорем в принципе достаточно провести только в двух случаях выполнения условий (1.6) и (1.7) вместо (1.3) и (1.4) соответственно. Если $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$, то указанные условия означают $q_n = n^{-\beta-1} L_2(n)$ или $\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = n^{-\beta} L_3(n)$, где $L_i(t)$ — м. м. ф., причем $L_2(t) \sim c_1 L_1(t)$, $L_3(t) \sim c_2 L_1(t)$. Ниже мы покажем, что, не ограничивая общности, в представлении Карамата для м. м. ф.: $L_i(x) = c_i(x) \exp \int_{x_0}^{x} \varepsilon_i(y) y^{-1} dy$, где $c_i(x) \to \bar{c}_i \neq 0$, а $\varepsilon_i(x) \to 0$ при $x \to \infty$ (см. [4, 5]); функцию $c_i(x)$ при больших x можно считать постоянной. Это допущение позволяет существенно упростить доказательства теорем.

Проверку начнем с соотношения

$$q_n = n^{-\beta-1} L_2(n). \tag{8}$$

При достаточно малых $\varepsilon > 0$ легко построить м. м. ф. $L_4(t)$ с $c_4(t)$ постоянной при больших t такую, что $L_4(t) \geqslant L_2(t)$ $(L_4(t) \leqslant L_2(t))$, $L_4(t) L_2^{-1}(t) \geqslant 1 - \varepsilon \left(L_4(t) L_2^{-1}(t) \leqslant 1 + \varepsilon \right)$, $L_4(t) \sim \bar{c} L(t)$, и (8) при замене $L_2(n)$ на $L_4(n)$ сохраняет вероятностный смысл. Грубо говоря, этого можно добиться заменой при больших x $c_2(x)$ на $\bar{c}_2 \pm 0{,}5\varepsilon$.

Процесс $\xi_1(n)$ определим соотношениями $N_1(n) \equiv N(n)$ и $\eta = G^{-1}(\xi)$, $\eta_1 = G_1^{-1}(\xi)$, где ξ равномерно распределена на $[0, 1]$, а $G(t)$ и $G_1(t)$ — функции распределения η и η_1, определяемые по (8), и $q_{n1} = n^{-\beta-1} L_4(n)$. Функции G^{-1} и G_1^{-1} обозначают обратные функции к замыканиям графиков $G(t)$ и $G_1(t)$, как обычно принято при определении произвольных случайных величин через равномерно распределенные на $[0, 1]$.

Очевидно, что при фиксированном γ и достаточно малых ε определение корректно, и частицы какую-то положительную долю жизни перед гибелью потомства не производят.

В зависимости от знака неравенства между $L_2(t)$ и $L_4(t)$ $Q_1(t)$ оценивает $Q(t)$ сверху или снизу и так как $q_{n1} \sim \bar{c} \cdot n^{-\beta-1} L_2(n)$, где $\bar{c} \to 1$ при $\varepsilon \to 0$, то теоремы будут верны для $\xi(n)$, если они верны для $\xi_1(n)$ и допущение о $L_2(n)$ обосновано.

Ввиду того, что аналогичное преобразование подробно производится в разделе 6, мы лишь схематически укажем пути регуляризации второго соотношения $\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = n^{-\beta} L_3(n)$.

Новые процессы $\xi_2(n)$ строятся по $\xi(n)$ без изменения η и путем замены масштаба времени для $N(t)$, т. е. $N_2(\tau) = N(t)$, где τ и t связываются соотношением, описанным выше для η и η_1 при замене (8) на $\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = n^{-\beta} L_3(n)$, что имеет смысл ввиду возможности интерпретации a_i как вероятностей целочисленной случайной величины, так как $A = 1$.

При малых $\varepsilon > 0$ определение будет корректно и по аналогии с предыдущим верхние и нижние оценки сходятся друг к другу при $\varepsilon \to 0$, если для них верны утверждения теорем. При этом для малых $\varepsilon > 0$ будет выполняться формулировавшееся ранее условие на непорождаемость потомков перед гибелью.

Введенные в данном параграфе м. м. ф. $L_i(t)$ $(i \geqslant 2)$ далее использоваться в явном виде не будут. Мы будем без дополнительных напоминаний только что введенные допущения применять так: писать $c_jL_1(t)$ $(j = 1, 2)$ вместо $L_i(t)$ и ссылаться на следующие из постоянства $c_i(x)$ свойства: при $\nu < 0$, $\Delta > 0$ и для больших t

$$t^\nu L_i(t) - (t+\Delta)^\nu L_i(t+\Delta) \sim -\nu\Delta t^{\nu-1}L_i(t), \tag{9}$$

$$L_i(t) - L_i(t+\Delta) = o(L_i(t))\Delta t^{-1}. \tag{10}$$

3. Оценка снизу для $Q(t)$

Рассмотрим произвольный процесс $\xi(t)$, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Построим на его пространстве $\xi_1(t)$, исходя из соотношений $\eta_1 = t_0\chi\{\eta \geqslant 2t_0\}$. $dN_1(0) = N(2t_0)$, $dN_1(t_0) = N - N(2t_0)$, где $t_0 > 0$ — произвольное, обеспечивающее нетривиальность $\xi_1(t)$. Считая $\xi_1(t)$ с дискретным временем (см. раздел 2) и учитывая следующие из определения $\xi_1(n)$ свойства: $1 - f_a(z) = a_{11}f_1(1-z)$, $a_{ij} = 0$ при $j > 1$ или $i > 1$, $f_i \equiv 0$ при $i > 1$ и т. д., для $n > 2$ перепишем (2.7):

$$a_{11}f_1(Q_n - Q_{n-1}) = (1 - h_0(P_n) - a_{00}Q_n)f_0 + (1 - h_1(P_n, P_{n-1}) - \\ - a_{01}Q_n - a_{11}Q_{n-1})f_1.$$

По теореме 6.2.3 [2] $Q_n \to 0$. Применяя к $h_1(P_n, x) - a_{11}x$ теорему Лагранжа о среднем, последнее можно привести к виду

$$a_{11}f_1(Q_n - Q_{n-1})(1 + o(1)) = 1 - h(P_n) - Q_n,$$

что ввиду (1.1) означает

$$Q_n - Q_{n-1} = -Q_n^{1+\alpha}L(Q_n)(1 + o(1))\,a^{-1}. \tag{1}$$

Полученное соотношение (1) влечет (см. [5])

$$Q_n \sim n^{-\beta}L_{01}(n), \tag{2}$$

при этом $L_{01}(t)$ с точностью до сомножителя a^β эквивалентна $L_1(t)$ из (1.2), так как асимптотика $1 - h_{(n)}(0)$ получается из соотношений, которые отличаются от (1) только сомножителем $a^{-1}(1 + o(1))$. Более того, из [5] легко извлечь, что

$$L^\beta(n^{-\beta}L_1(n)) \cdot L_1(n)\alpha^\beta \sim 1. \tag{3}$$

Соотношение (2) ввиду (2.1) и построения $\xi_1(t)$ означает

$$\varliminf_{t\to\infty} Q(t)\,L_1^{-1}(t)\,t^\beta > 0. \tag{4}$$

4. Результаты из теории восстановления

Всюду далее мы считаем, что решетка для индексов с $a_n \neq 0$ имеет единичный шаг.

Если в (1.7) $c_2 \neq 0$, то с точностью до эквивалентной м. м. ф.

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = c_2 n^{-\beta} L_1(n). \tag{1}$$

Наше допущение о виде $L_1(n)$ (см. раздел 2) в силу (2.9) означает

$$a_n \sim c_2\beta n^{-\beta-1}L_1(n). \tag{2}$$

Сформулируем требуемые утверждения.

Лемма 1. *Пусть верно* (1), *где* $\beta=\alpha^{-1}$ *и* $\alpha\in(0,1)$, *тогда*

$$\beta_n=a^{-2}c_2\alpha(1-\alpha)^{-1}n^{-\beta+1}L_1(n), \tag{3}$$

$$\beta_{n-1}-\beta_n\sim a^{-2}c_2n^{-\beta}L_1(n). \tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть верно* (2), *где* $\beta=\alpha^{-1}$ *и* $\alpha\in(0,1)$, *тогда*

$$\beta_n-\beta_{n-1}-\beta_{n-i}+\beta_{n-i-1}=a^{-2}\Theta(i)a_n, \tag{5}$$

где $\Theta(i)\sim i$ *при* $i=O(1)$ *и* $\Theta(i)\sim O(i)$ *при* $i\leqslant n\Theta$, *если* $0<\Theta<1$.

Лемма 3. *Пусть* $a_i=0$ *при* $i>n_0$, *тогда для любого* $k>0$

$$\beta_n=o(n^{-k}).$$

Соотношение (4) следует из [9], а (3) легко получается из него суммированием (см. [4]).

Лемма 3 — частный случай теоремы 1 из [8].

Лемму 2 можно доказать методами из [9] и [8], если учесть, что $\beta_n-2\beta_{n-1}+\beta_{n-2}$ — это коэффициент при z^n в ряде Маклорена для функции $(1-z)^2(1-f_a(z))^{-1}$ (нужно исследовать производную от последнего выражения).

Замечание. Если в условиях (1) и (2) постоянные $c_2\beta$ и c_2 заменить на $O(1)$ и потребовать выполнения соотношений $a_n-a_{n+1}=o(n^{-\beta-1}L_1(n))$ и $\sum\limits_{i=n}^{\infty}a_i\sim\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}a_i$, то в правых частях (3) и (4) появится сомножитель $O(1)$, а в (5) к a_n нужно добавить $o(n^{-\beta-1}L_1(n))$.

Доказательство этого аналогично имевшемуся ранее. Отличие состоит в следующем: при оценке сумм вида $\sum\limits_{i=0,5n}^{n}a_ig_{n-i}$, где $\sum\limits_{i=0}^{\infty}|g_i|<\infty$, главный член $a_n\sum\limits_{i=0}^{\infty}g_i$ переходит в $\left(a_n+o\left(n^{-\beta-1}L_1(n)\right)\right)\sum\limits_{i=0}^{\infty}g_i$.

Отметим, что при доказательстве аналога леммы 2 получается соотношение $\beta_{n-1}-\beta_n\sim a^{-2}\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}a_i+o\left(n^{-\beta}L_1(n)\right)$, что уточняет формулировку замечания.

5. Доказательство теоремы 1 при выполнении условий (1.6) и (1.7) с $c_2\neq0$

В силу (1.2), (1.6), (2.9) и допущения о виде м. м. ф. в (2.8)

$$q_n=c_1n^{-\beta-1}L_1(n), \tag{1}$$

$$f_n\sim(\beta+1)c_1n^{-\beta-2}L_1(n) \tag{2}$$

или при $c_1=0$

$$q_n=o(n^{-\beta-1}L_1(n)). \tag{3}$$

Напомним, что в исследуемых процессах частицы последнюю $1-\gamma$ часть жизни потомства не производят, т. е. $a_{ij}=0$ при $i>\gamma j$.

Введем несколько обозначений: $h_i(s,\ldots,s)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}h_{ij}s^j$, $q_{(1)j}=\sum\limits_{i=j+1}^{\infty}h_i$, $q_j(h_i)=\sum\limits_{s=j+1}^{\infty}h_{is}$, $q_{(2)j}=\sum\limits_{i=j+1}^{\infty}q_{(1)i}$, $T^{-1}=n^{-\beta}L_1(n)\varepsilon$, где $\varepsilon>0$.

По теореме 5 [4, с. 513] из (1.1) следует

$$q_{(2)n}\sim\Gamma^{-1}(\alpha)n^{-\alpha}L(n^{-1}). \tag{4}$$

Учитывая (3.3), имеем $q_{(2)T}\sim\Gamma^{-1}(\alpha)\varepsilon^{\alpha}n^{-1}\beta$, следовательно,

$$\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{i=0}^{\gamma j}a_{ij}f_j=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}q_i(h_j)f_j\leqslant q_{(2)T}+\sum_{i=0}^{T}\sum_{j=n}^{\infty}q_i(h_j)f_j\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon^{\alpha}n^{-1}\Gamma^{-1}(\alpha)\beta+O(T)\sum_{j=n}^{\infty}f_j. \tag{5}$$

Далее мы будем полагать выполненным (3). Тогда ввиду произвольности ε последние соотношения влекут

$$\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{i=0}^{\gamma j} a_{ij}f_j = o(n^{-1}). \tag{6}$$

Случай выполнения (1) и (2) будет рассмотрен в конце раздела, а пока заметим, что эти условия вместо (6) влекут

$$\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{i=0}^{\gamma j} a_{ij}f_j = O(n^{-1}). \tag{7}$$

Учитывая монотонность Q_n и $H_j(n)$ при увеличении аргументов, получаем

$$\left|\sum_{j=0}^{n} H_j(n) f_j\right| \leqslant Q_{n(1-\gamma)}^{1+\alpha} L(Q_{n(1-\gamma)}). \tag{8}$$

Следующее утверждение доказывается путем естественных тождественных преобразований и использования неравенства треугольника.

Лемма 4. *Пусть* $|c_{in}| < \tau\omega_n$ *при* $np \leqslant i \leqslant n$, *тогда* $\left|\sum_{i=np+2}^{n} \beta_{n-i} \times (c_{in} - c_{i-1n})\right| < C_0\tau\omega_n$, *где*

$$C_0 = |\beta_0| + \max_{i\in N}|\beta_i| + \sum_{i=1}^{\infty}|\beta_i - \beta_{i-1}| < \infty. \tag{9}$$

Неравенство (9) верно в силу леммы 1.

Для сокращения записей элементы конечного числа последовательностей $\{b_{jn}\}_{n\in N}$ будем обозначать φ_n, если b_{jn} можно оценить линейной функцией от $Q_i^{1+\alpha}L(Q_i)$ и Q_i $i\leqslant n$, а после замены Q_i на $i^{-\beta}\rho_i^{\beta}L_1(i\rho_i^{-1})$, где $L_1(t)$ имеет постоянную $c_1(x)$ в представлении Карамата (см. раздел 2), оценка является $o(n^{-\beta-1})\rho_n^{\beta+1}L_1(n\rho_n^{-1})$ в двух случаях: 1) $\rho_n > 0$, $\rho_n \asymp 1$ и 2) для n таких, что $\rho_n \geqslant \rho_i > 0$ при $i < n$, если $\sup\rho_j = \infty$ и $j\rho_j^{-1} \to \infty$. Монотонность Q_i и справедливость (2.9) для подставляемого вместо нее выражения делают достаточным проверку приведенных условий для $\rho_n \equiv 1$.

Если в результате только что описанных оценок вместо $o(\cdot)$ получается $O(\cdot)$, то b_{jn} будем заменять на Ψ_n.

В силу (6) и (4.2) при $p > \gamma$, что предполагается и далее,

$$\Phi_n = \sum_{i=0}^{n(1-p)} Q_i a_{n-i} + Q_{n(1-p)}o(n^{-1}) = a_n\sum_{i=0}^{np} Q_i + \varphi_n. \tag{10}$$

Следовательно, ввиду (3)

$$I_1 = -a^{-1}a_n\sum_{i=0}^{np} Q_i + \varphi_n. \tag{11}$$

Последнее и (4.3) влечет

$$I_5 = \varphi_n. \tag{12}$$

Вычитая из Φ_n главный член из правой части (10), с помощью леммы 4 и формулы (3) получаем $I_4 = \varphi_n + \sum_{i=np+2}^{n} a^{-1}c_2\beta\beta_{n-i}\Bigl((i-1)^{-\beta-1} \times L_1(i-1)\sum_{j=0}^{(i-1)p} Q_j - i^{-\beta-1}L_1(i)\sum_{j=0}^{ip}Q_j\Bigr)$, что ввиду (2.9) немедленно влечет

$$I_4 = \varphi_n. \tag{13}$$

В силу (8) и (4.3)

$$I_8 = \varphi_n. \tag{14}$$

Учитывая (2.3), имеем $I_3 + I_6 = \sum_{i=0}^{np}\left(Q_i - \sum_{j=0}^{i} Q_{i-j}a_j\right)(\beta_{n-i} - \beta_{n-i-1}) =$
$= \sum_{i=0}^{np}\left(Q_i - \sum_{j=0}^{i} Q_{i-j}a_j\right)(\beta_n - \beta_{n-1}) + \sum_{i=0}^{np}\left(Q_i - \sum_{j=0}^{i} Q_{i-j}a_j\right)(\beta_{n-1} - \beta_{n-i-1} -$
$- \beta_n + \beta_{n-1})$.

Пусть $s > 0$ — некоторое фиксированное число, тогда в силу леммы 2

$$\sum_{i=0}^{s}\left(Q_i - \sum_{j=0}^{i} Q_{i-j}a_j\right)(\beta_{n-i} - \beta_{n-i-1} - \beta_n + \beta_{n-1}) \sim$$
$$\sim - \sum_{i=0}^{s}\left(Q_i - \sum_{j=0}^{i} Q_{i-j}a_j\right) ia^{-2}a_n.$$

Обозначим $I_9 = \sum_{i=0}^{np}\left(Q_i - \sum_{j=0}^{i} Q_{i-j}a_j\right)$ и $I_{10}(s) = \sum_{i=0}^{s} i\left(Q_i - \sum_{j=0}^{i} Q_{i-j}a_j\right) +$
$+ a\sum_{i=0}^{s} Q_i$.

Если после замены Q_i на $i^{-\beta}L_1(i)$ верны оценки $I_{10}(s) \to 0$ и $I_9 = = o(n^{-1})$ при s, $n \to \infty$, то из последних соотношений, (4.4), леммы 2, (2.3), (8), (10) и определения φ_n будет следовать

$$I_3 + I_6 = \varphi_n + a^{-1}a_n \sum_{i=0}^{np} Q_i. \qquad (15)$$

Проведем тождественные преобразования:

$$|I_9| = \sum_{i=0}^{np} Q_i - \sum_{j=0}^{np} a_j \sum_{i=0}^{np-j} Q_i = \sum_{i=0}^{np} Q_i\left(1 - \sum_{j=0}^{np} a_j\right) + \sum_{j=0}^{np} a_j \sum_{i=np-j+1}^{np} Q_i \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{np} Q_i \sum_{j=np+1}^{\infty} a_j + \sum_{j=0}^{0,5np} ja_jQ_{0,5np} + \sum_{j=0,5np}^{np} a_j \sum_{i=0}^{0,5np} Q_i.$$

Аналогично

$$|I_{10}(s)| = \sum_{i=0}^{s} iQ_i \sum_{j=s+1}^{\infty} a_j + \sum_{j=0}^{s} a_j \sum_{i=s-j+1}^{s} iQ_i - \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{i} ia_jQ_{i-j} +$$
$$+ a\sum_{i=0}^{s} Q_i \leqslant \sum_{i=0}^{s} iQ_i \sum_{j=s}^{\infty} a_j + \sum_{j=0}^{s} ja_jsQ_{0,5s} + \sum_{j=0,5s}^{s} a_j \sum_{i=0}^{s} iQ_i +$$
$$+ \sum_{j=s+1}^{\infty} ja_j \sum_{i=0}^{s} Q_i + \sum_{j=0}^{0,5s} ja_jQ_{0,5s}s + \sum_{j=0,5s}^{s} ja_j \sum_{i=0}^{s} Q_i.$$

Ввиду (2.5) и (4.1) требуемые оценки для I_9 и $I_{10}(s)$ получаются тривиально, т. е. (15) доказано.

Из (2.7), (8), (11)—(15), леммы 4 и определения Ψ_n следует

$$Q_n - Q_{n-1} = \Psi_n. \qquad (16)$$

Исследуем I_2. Прежде всего, для любого $V > 0$ по теореме Лагранжа о среднем

$$I_{11} \equiv \sum_{m=0}^{i} H_m(i) f_m - \sum_{m=0}^{i}\left(1 - h_m(P_i, \ldots, P_{i-V}, P_i, \ldots, P_i) -\right.$$
$$\left. - \sum_{j=0}^{V} Q_{i-j}a_{jm} - \sum_{j=V+1}^{mp} Q_i a_{jm}\right) f_m = O\left(\sum_{j=V+1}^{ip} a_j(Q_{i-j} - Q_i)\right).$$

Аналогично, используя теорему о среднем и монотонность производящих функций, имеем

$$I_{12} \equiv \sum_{m=0}^{i}\left(1 - h_m(P_i, \ldots, P_{i-V}, P_i, \ldots, P_i) - \sum_{j=0}^{V} Q_{i-j}a_{jm} +\right.$$

$$+ h_m(P_i, \ldots, P_i) - 1 + \sum_{j=0}^{V} Q_i a_{jm} \Big) f_m = O(Q_{i-V} - Q_i) \sum_{m=0}^{i} f_m \sum_{j=0}^{V} (a_{jm} -$$

$$- D_j h_m (P_{i-V}, \ldots, P_{i-V})) f_m = O(Q_{i-V} - Q_i) \Big[1 - h'(P_{i-V}) + \sum_{j=V}^{\infty} a_j +$$

$$+ \sum_{m=i+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} a_{jm} f_m \Big],$$

где $D_j h_m = \frac{\partial}{\partial x_j} h_m(x_0, x_1, \ldots, x_m)$.

Из (16), (4.1), (2.4) и непрерывности $h'(x)$ следует, что $\forall V > 0$ при $i \to \infty$ $I_{12} = \Psi_i(Vo(1) + V^{-\beta+1}L_1(V))$. С другой стороны, ввиду (2.5) и (16) $\forall \varepsilon > 0$ при достаточно большом V $|I_{11}| < \varepsilon \Psi_{n(1-p)}$. В силу произвольности ε последнее означает $I_{11} + I_{12} = o(\Psi_i)$, т. е. $I_{11} + I_{12} = \varphi_i$.

Тем самым мы доказали

$$I_2 = a^{-1} \sum_{i=0}^{n} \Big((1 - h_i(P_n, \ldots, P_n) - \sum_{j=0}^{i\gamma} a_{ji} Q_n \Big) f_i + \varphi_n,$$

что в силу (1.1), (3) и (6) влечет

$$I_2 = -a^{-1} Q_n^{1+\alpha} L(Q_n) + \varphi_n. \tag{17}$$

Последнее ввиду леммы 4 означает

$$I_7 = \varphi_n + \sum_{i=np+2}^{n} \beta_{n-i} \big(Q_i^{1+\alpha} L(Q_i) - Q_{i-1}^{1+\alpha} L(Q_{i-1}) \big). \tag{18}$$

Пусть $s_1 = P_n$, $s_2 = P_{n-1}$, тогда

$$Q_n^{1+\alpha} L(Q_n) - Q_{n-1}^{1+\alpha} L(Q_{n-1}) = h(s_1) - s_1 - h(s_2) + s_2 =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} h_k (s_1 - s_2) \Big(\sum_{i=0}^{k-1} s_1^{k-1-i} s_2^i - k \Big). \tag{19}$$

Далее, $(1-x)^i \geqslant 1 - ix$ при $x \geqslant 0$, следовательно,

$$\Big| \sum_{i=0}^{k-1} s_1^{k-1-i} s_2^i - k \Big| \leqslant \min(k, k^2 Q_{n-1}). \tag{20}$$

Из (19), (20), (4.3) и стремления Q_n к нулю находим, что для любого фиксированного m

$$\sum_{i=n-m}^{n} \beta_{n-i} \big(Q_i^{1+\alpha} L(Q_i) - Q_{i-1}^{1+\alpha} L(Q_{i-1}) \big) = o(1) \sum_{i=n-m}^{n} |Q_i - Q_{i-1}|. \tag{21}$$

Заметим, что если в лемме 4 суммирование ведется до $n - m$, то (9) переходит в

$$c_{0m} = |\beta_m| + \max_{i \in N} |\beta_{i+m}| + \sum_{i=1}^{\infty} |\beta_{i+m} - \beta_{i+m-1}| < \infty, \tag{22}$$

что позволяет получить

$$\Big| \sum_{i=np+2}^{n-m} \beta_{n-i} \big(Q_i^{1+\alpha} L(Q_i) - Q_{i-1}^{1+\alpha} L(Q_{i-1}) \big) \Big| \leqslant c_{0m} Q_{np}^{1+\alpha} L(Q_{np}). \tag{23}$$

Выбором $m > 0$ c_{0m} в (22) можно сделать сколь угодно малым. Это совместно с (18), (16), (21) и (23) влечет

$$I_7 = \varphi_n. \tag{24}$$

Итак, учитывая (11)—(15), (17) и (24), из (2.7) получаем

$$Q_n - Q_{n-1} = -a^{-1} Q_n^{1+\alpha} L(Q_n) + \varphi_n. \tag{25}$$

Идея оценки Q_n сверху, примененная в [10] к процессам Беллмана — Харриса и развитая для общих процессов в [7], может быть реализована и в этой ситуации, исходя из (25).

Положим $Q_n = n^{-\beta}\rho_n^\beta L_1(n\rho_n^{-1})$, где м. м. ф. $L_1(t)$ взята с постоянной в представлении Карамата при больших значениях аргумента (см. раздел 2).

Докажем, что ρ_n ограничено сверху. Для этого предположим противное: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\rho_n = \infty$. В силу допущения $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} \rho_k = \rho_{k(n)} \to \infty$ при $n\to\infty$. В дальнейшем под $k(n)$ мы будем понимать строго монотонную последовательность такую, что $\rho_{k(n)} = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant h(n)} \rho_k$. Тогда $\rho_{k(n)}$ монотонно возрастает и

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{k(n)} = \infty. \tag{26}$$

Ввиду $Q\downarrow 0$ при $n\to\infty$ по определению ρ_n при больших n $n\rho_n^{-1}\uparrow\infty$, а, следовательно, для любого фиксированного i

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{k(n)-i}/\rho_{k(n)} = 1. \tag{27}$$

Положим $v_n=\rho_n^\beta$. Тогда, деля (25) на $v_{n-1}n^{-\beta}v_nL_1(n/\rho_n)$, применяя (2.10) к $L_1(n/\rho_n)$, и полагая $n=k(n)$, ввиду (3.3), (26) и (27), определений м. м. ф. и φ_n имеем

$$v_{k(n)}^{-1} - v_{k(n)-1}^{-1} = -\beta\left(\frac{k(n)}{k(n)-1}\right)^\beta k^{-1}(n)\,v_{k(n)}^{-1}(1+o(1)) +$$
$$+ k^{-1}(n)\,v_{k(n)}^{-1} o\left(\frac{k(n)}{\rho_{k(n)}} - \frac{k(n)-1}{\rho_{k(n)-1}}\right) + a^{-1}k^{-1}(n)\,\rho_{k(n)}v_{k(n)-1}^{-1}\beta(1+o(1)). \tag{28}$$

Перепишем (16) в виде $k^{-\beta}(n)\,\rho_{k(n)}^\beta L_1(k(n)/\rho_{h(n)}) - (k(n)-1)^{-\beta}\times$ $\times\,\rho_{k(n)-1}^\beta L_1((k(n)-1)/\rho_{k(n)-1}) = O(k^{-\beta-1}(n))\,\rho_{k(n)}^{\beta+1}L_1(k(n)/\rho_{k(n)})$. Применим к полученному (2.9), тогда $(k(n)/\rho_{k(n)} - (k(n)-1)/\rho_{k(n)-1})L_1(k(n)/\rho_{k(n)})\times$ $\times\, k^{-\beta-1}(n)\,\rho_{k(n)}^{\beta+1} = O(k^{-\beta-1}(n))\,\rho_{k(n)}^{\beta+1}L_1(k(n)/\rho_{h(n)})$, откуда $k(n)/\rho_{k(n)} -$ $-(k(n)-1)/\rho_{k(n)-1} = O(1)$.

Последнее и формула (27) позволяют записать (28) в виде

$$v_{k(n)}^{-1} - v_{k(n)-1}^{-1} = (-\beta + a^{-1}\beta\rho_{k(n)}(1+o(1)) + o(1))\,k^{-1}(n)\,v_{k(n)-1}^{-1}. \tag{29}$$

По определению $k(n)$ $v_{k(n)}^{-1} - v_{k(n)-1}^{-1} \leqslant 0$, следовательно, $-\beta +$ $+ a^{-1}\beta\rho_{k(n)}(1+o(1)) \leqslant 0$. Полученное соотношение противоречит (26). Тем самым доказано

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, Q_n n^\beta L_1^{-1}(n) < \infty. \tag{30}$$

Следовательно, (25) принимает вид

$$Q_n - Q_{n-1} = -a^{-1}Q_n^{1+\alpha}L(Q_n)(1+o(1)).$$

Как было отмечено в разделе 3 при получении (3.2), последнее означает

$$Q_n \sim a^\beta n^{-\beta}L_1(n). \tag{31}$$

Тем самым при $c_2 > 0$ и $c_1 = 0$ теоремы 1 и 2 доказаны.

Заметим, что в этом случае условие (1.8) в формулировке теоремы 2 излишне, так как в силу (6) оно всегда выполняется с $g(y)\equiv 0$.

Отметим изменения, которые нужно произвести в предшествующем тексте в результате замены (3) на (1) и (2). Они связаны с заменой (6) на (7). Вместо (10) получается

$$\Phi_n = a_n \sum_{i=0}^{np} Q_i + \varphi_n + Q_{n(1-p)}\,O(n^{-1}).$$

Отсюда, учитывая (1) и (3.4), имеем

$$I_1 = -a^{-1}a_n \sum_{i=0}^{np} Q_i + \varphi_n + Q_{n(1-p)}\,O(n^{-1}).$$

При оценке I_4 учет (2) с одной стороны упрощает вычисления, а с другой — изменение оценки I_1 влечет добавку слагаемого $O(n^{-1})Q_{np(1-p)}$ к имевшейся ранее формуле (13).

Далее все оценки до (17) остаются без изменений, а к (17) и (18) нужно добавить $O(n^{-1})Q_n$ и $O(n^{-1})Q_{np}$, что в конечном итоге вместо (25) приводит к

$$Q_n - Q_{n-1} = -a^{-1}Q_n^{1+\alpha}L(Q_n) + O(n^{-1})Q_{n(1-p)p} + \varphi_n. \tag{32}$$

В следующих за (25) рассуждениях нужно добавить $O\left(k^{-1}(n)\right)\rho_{k(n)}\times \times v_{k(n)-1}^{-1}$. Эта добавка не оказывает существенного влияния, и получаемое из (29) соотношение противоречит (26), т. е. при $c_1 > 0$ верно (30). В силу (3.4) этим завершается доказательство теоремы 1 при (1.6) и (1.7) с $c_2 > 0$.

6. Доказательство теоремы 1 в общем случае

Для завершения доказательства теоремы 1 нужно получить только оценку сверху для $Q(t)$, так как оценка снизу получена в разделе 3.

В данном разделе построим ряд процессов на вероятностных пространствах, уже имеющихся с вероятностями продолжения, мажорирующими эти же вероятности у исходных процессов. При этом последний процесс будет удовлетворять условиям (1.6) и (1.7) с $c_2 \neq 0$, но мы не будем требовать выполнения условий непорождаемости потомков перед гибелью и $(\mathscr{P})$ в силу того, что соответствующая редукция описана в разделе 2. Таким образом, с помощью результатов разделов 2 и 5 мы докажем теорему 1.

Итак, рассмотрим процесс $\xi_B(n)$, $n \in N$, для которого выполнены условия (1.4) и (1.3). Индекс B в дальнейшем опускается.

Пусть

$$\begin{aligned} &\overline{\lim_{n\to\infty}}(1-A(n))n^{\beta}L_1^{-1}(n) = c_3,\\ &\underline{\lim_{n\to\infty}}(1-A(n))n^{\beta}L_1^{-1}(n) = c_4. \end{aligned} \tag{1}$$

Если $c_4 > 0$, то и $c_3 > 0$. В этом случае от ограничения (1.7) избавиться легко. По $\xi(n)$ построим $\xi_2(n)$, для которого верно (1.7) с $c_2 > 0$.

Положим $\delta > 0$ и $1 - F_2(n) = (c_3 + \delta)n^{-\beta}L_1(n)$ при больших n, $F_2(n)$ — функция распределения некоторой целочисленной случайной величины и $A(n) \geqslant F_2(n)$. Опишем $\{\eta_2, N_2(t)\}$. Произведем рандомизированную замену времени $\tau = F_2^{-1}(t)$, если $n = A^{-1}(t)$, где t равномерно распределено на $[0, 1]$, а $F_2^{-1}(t)$ и $A^{-1}(t)$ рассматриваются как обратные к замыканиям графиков $F_2(t)$ и $A(x)$. Этим мы, грубо говоря, каждому значению n сопоставили случайное значение $\tau(n) \in F_2^{-1}(A(n))$, причем $\tau(n) \leqslant \leqslant \tau(n+1)$ и равенство может достигаться. Положим $\eta_2 = \tau(n)$, если $\eta = = n$ и $\forall t \in [0, 1]$ $N_2(\tau) = N_2\left(F_2^{-1}(t)\right) = N\left(A^{-1}(t)\right) = N(n)$. Из определения $\xi_2(n)$ и (1) следует, что при $c_4 > 0$ отношения η_2/η и $\tau/(n+1)$ равномерно ограничены сверху. В качестве верхней грани можно выбрать большее из чисел $(c_3 + 1 + \delta)c_4^{-1}$ и некоторого, зависящего от конечного числа значений $F_2(n)$ и $A(n)$, что делается стандартным способом, поэтому подробности опускаются.

Это означает, что для $\xi_2(n)$ условия теоремы 1 остаются в силе, более того, выполняется (1.7) с $c_2 = c_3 + \delta$ и $Q_2(t) \geqslant Q(t)$.

Несущественность дополнительного условия (1.6) мы покажем в конце раздела, а пока оно предполагается выполненным.

Если $c_3 = 0$, то в формулировках лемм 1 и 2 в правой части появится $o(1)$, и все легко сводится к уже рассмотренной схеме. Однако если $c_4 = 0$, а $c_3 \neq 0$, то редукция усложняется. С одной стороны, использовать $\xi_2(n)$ нельзя, так как $\eta_2\eta^{-1}$ и $\tau(n+1)^{-1}$ становятся неограниченными и могут нарушаться условия теоремы 1, с другой — мы существенно использовали регулярность a_i (см. (4.2)). Подберем $F_3(n)$, пригодную для замены времени и в дальнейшем. При этом будем полагать в (1) $c_3 < \infty$.

Выберем целочисленную последовательность $\{x_n\}_{n=0,1,\ldots}$ такую, что для некоторого $\varepsilon > 0$ $x_{n+1} \sim (1+2\varepsilon)x_n$. По ней построим $\{y_n\}_{n=0,1,\ldots}$ такую, что $y_n \in N$, $x_n < y_n < x_{n+1}$ и $y_n \sim (1+\varepsilon)x_n$.

Положим

$$F_3(k) = A(n)\chi\{k < x_0\} + \sum_{n=1}^{\infty}((A(x_n) - A(x_{n-1}))f((k-x_n)(y_n-x_n)^{-1} + $$
$$+ A(x_n))\chi\{x_n \leqslant k \leqslant y_n\} + \sum_{n=1}^{\infty} A(x_n)\chi\{y_n < k < x_{n+1}\} +$$
$$+ A(x_0)\chi\{x_0 \leqslant k < x_1\},$$

где $f(x)$ — монотонная непрерывно дифференцируемая на $[0, 1]$ функция, $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$, $f(1) = 1$.

Заметим, что при таком определении $F_3(n)$ обладает следующими свойствами:

1) $1 - F_3(n) = O(n^{-\beta}L_1(n))$,
2) $dF_3(n) = O(n^{-\beta-1}L_1(n))$,
3) $dF_3(n) - dF_3(n-1) = o(n^{-\beta-1}L_1(n))$,
4) $1 - F_3(n) \sim 1 - F_3(n+1)$

или 1), 2) и

3′) $F_3(n) = 0$ при достаточно больших n.

Выполнение условия 3′) означает, что $A(n)$ обладает этим же свойством, (т. е. $a_n \equiv 0$ при n больших), в разделе 5 вместо лемм 1 и 2 можно использовать лемму 3 с $k > 2\beta + 2$, что существенно упрощает оценки и приводит к тому же результату для $\xi(n)$ непосредственно.

По построению $F_3(n)$ очевидно, что, производя случайную замену времени $n = A^{-1}(\xi)$, $\tau = F_3^{-1}(\xi)$, где ξ равномерно распределено на $[0, 1]$, не ограничивая общности, можно считать $1 \leqslant \tau(n+1)^{-1} \leqslant 1 + 4\varepsilon$, так как эти неравенства верны при больших n, а при малых можно положить $F_3(n) = A(n)$.

Учитывая потребности следующего раздела, построим $\xi_3(n)$, исходя из соотношений $\eta_3 = [(1+8\varepsilon)\eta]$ при больших значениях, и $\eta = \eta_3$ при малых значениях $N_3(\tau) = N(n)$, где связь τ и n указана выше. При этом предполагается выполненным условие непорождаемости потомков после гибели частицы. По построению $\xi_3(n)$ $Q_3(t) \geqslant Q(t)$. Доказав теорему 1 для $\xi_3(n)$, мы избавимся от ограничения (1.7).

Для сокращения записей в данном разделе будем считать $\xi_3(n) \equiv \equiv \xi(n)$, и конечное число последовательностей $\{b_{nj}\}_{n\in N}$ таких, что $b_{nj} = = O(n^{-\beta}L_1(n))$, обозначать $\{\tau_n\}_{n\in N}$, одинаково для всех j.

Итак, у нас $a_n = \tau_n n^{-1}$, $a_n - a_{n+1} = o(n^{-\beta-1}L_1(n))$, $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i = \tau_n$ и $\sum\limits_{i=n}^{\infty} a_i \sim \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i$.

Для того чтобы исследовать Q_n при $c_1 = 0$ (т. е. для доказательства (5.3)), нужно почти дословно повторить рассуждения раздела 5 до (5.30) включительно с использованием только что сформулированных соотношений вместо (4.1) и (4.2) с учетом замечания из раздела 4.

Мы укажем лишь основные изменения в оценках, полученных вследствие этой замены.

Вместо (5.10), (5.11) и (5.13) будет $\Phi_n = \tau_n n^{-1} \sum\limits_{i=0}^{np} Q_i + \varphi_n$, $I_1 = = \tau_n n^{-1} \sum\limits_{i=0}^{np} Q_i + \varphi_n$ и $I_4 = \tau_n n^{-1} \sum\limits_{i=0}^{np} Q_i + \varphi_n$.

Аналогично (5.15) переходит в $I_3 + I_6 = \tau_n n^{-1} \sum\limits_{i=0}^{np} Q_i + \varphi_n$. Однако оценка суммы, связанной с $I_{10}(s)$, производится иначе. Приведем ее, при этом воспользовавшись условиями на a_i, замечанием из раздела 4, монотонностью Q_n, заменой порядка суммирования и (2.5):

$$\sum_{i=0}^{np}\left(Q_i-\sum_{j=0}^{i}Q_{i-j}a_j\right)(\beta_{n-i}-\beta_{n-i-1}-\beta_n+\beta_{n-1})=$$
$$=\sum_{i=0}^{np}\left|Q_i-\sum_{j=0}^{i}Q_{i-j}a_j\right|i\tau_n n^{-1}=\tau_n n^{-1}\sum_{i=0}^{np}i\sum_{j=0,5i}^{\infty}a_jQ_{0,5i}+$$
$$+\tau_n n^{-1}\sum_{i=0}^{np}i\sum_{j=0}^{0,5i}(Q_{i-j}-Q_i)\,a_j=\tau_n n^{-1}\left(\sum_{i=0}^{np}Q_i+\sum_{j=0}^{np}\sum_{i=2j}^{np}Q_{i-j}ja_i+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=0}^{np}a_j\sum_{i=j}^{2j}iQ_i\right)=\tau_n n^{-1}\sum_{i=0}^{np}Q_i. \qquad (2)$$

Все дальнейшие выводы до соотношения (5.25) остаются в силе, хотя условия на a_i стали менее ограничительными. Последнее принимает вид

$$Q_n-Q_{n-1}=-a^{-1}Q_n^{1+\alpha}L(Q_n)+\varphi_n+\tau_n n^{-1}\sum_{i=0}^{np}Q_i. \qquad (3)$$

Проверим, что (3) в (5.28) влечет добавку слагаемого $k^{-1}(n)\times$ $\times\, o(1)\,v_{k(n)-1}^{-1}$, т. е. форма записи (5.28) не изменится и верно (5.30).

Нам нужно исследовать вклад последнего слагаемого из (3) в (5.28). При этом будем вместо $k(n)$ писать n, считать фиксированным $0<\delta<$ $<0{,}5(\beta-1)$, использовать монотонность $x^{-\beta}L_1(x)$, $x^{\delta}L_1(x)$ и $n\rho_n^{-1}$ при больших x (следует из допущений раздела 2 о виде $L_1(x)$ и убывания Q_n), (5.26), (5.27), $\beta>1$ и то, что $i\rho_n^{-1}\sim k$ при $k\rho_n<i<(k+1)\rho_n$

$$n^{\beta}v_n^{-1}v_{n-1}^{-1}\tau_nL_1^{-1}(n\rho_n^{-1})\,n^{-1}\sum_{i=0}^{n}i^{-\beta}\rho_i^{\beta}L_1(i\rho_i^{-1})=O(n^{-1}v_n^{-2})\,L_1^{-1}(n\rho_n^{-1})\,n^{\delta}n^{-\delta}\times$$
$$\times L_1(n)\sum_{i=0}^{n}i^{-\beta}\rho_n^{\beta}L_1(i\rho_n^{-1})=O(n^{-1})\,v_n^{-1}\rho_n^{(-\beta+1)0,5}=o(n^{-1})\,v_n^{-1}.$$

Тем самым теорема 1 при дополнительном условии (5.3) доказана. При переходе от (5.3) к (5.1) и (5.2) остаются в силе рассуждения из раздела 5, где производится аналогичный переход при (1.7) с $c_2\neq 0$.

Для завершения доказательства теоремы 1 нам осталось избавиться для $\xi(n)$ от ограничения (1.6). Для этого воспользуемся процедурой построения $\xi_1(n)$, приведенной в конце раздела 2. Пусть $\varlimsup_{n\to\infty}(1-G(n))\,n\,(1-$ $-h_{(n)}(0))^{-1}=c_5$. Подберем функцию распределения целочисленной случайной величины $G_1(n)$ так, что $G(n)\geqslant G_1(n)$ и $\lim_{n\to\infty}(1-G_1(n))\times$ $\times\, n\,(1-h_{(n)}(0))^{-1}=c_6\geqslant c_5$. Тогда, полагая $N_1(n)\equiv N(n)$, $\eta=G^{-1}(\xi)$ и $\eta_1=G_1^{-1}(\xi)$, где ξ равномерно распределена на $[0,\ 1]$, мы строим $\xi_1(n)$, удовлетворяющий условиям теоремы 1 и (1.6), при этом $Q_n\leqslant Q_{n1}$. Этим доказательство теоремы 1 завершается.

7. Доказательство теоремы 2

В разделе 5 теорема 2 для случая $c_1=0$ и $c_2>0$ была доказана. Сейчас избавимся от первого ограничения, а в конце раздела от второго.

Мы воспользуемся результатами раздела 5. По теореме 1 верно (5.30). Поэтому вместо φ_n в оценках можно писать $o(n^{-\beta-1}L_1(n))$, что мы постоянно будем учитывать без замены φ_n на громоздкое явное выражение. Это же относится и к Ψ_n. В разделе 5 пояснялось, какие изменения нужно внести в предшествующие рассуждения для доказательства теоремы 1 при $c_1>0$. Эти изменения относятся только к I_1, I_2, I_4 и I_7. К теореме 2 при $c_1>0$ мы придем, если воспользуемся дополнительными ограничениями из ее условий и более точно оценим I_1, I_2, I_4 и I_7, чем это сделано в конце раздела 5. Обозначим $A_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\gamma j} a_{ij} f_j$ и исследуем Φ_n.

По определению Φ_n и (5.16)

$$\Phi_n = \sum_{i=0}^{n(1-p)} Q_i a_{n-i} + Q_n A_n - \sum_{i=0}^{np} (Q_n - Q_{n-i}) \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij} f_j =$$

$$= \sum_{i=0}^{n(1-p)} Q_i a_{n-i} + Q_n A_n + \Psi_n \sum_{i=0}^{np} \sum_{j=n+1}^{\infty} i a_{ij} f_j,$$

что в силу (2.5) и (4.2) влечет

$$\Phi_n = a_n \sum_{i=0}^{n(1-p)} Q_i + Q_n A_n + \varphi_n. \tag{1}$$

Из (5.1) и (1) следует

$$I_1 = -a^{-1}\left(a_n \sum_{i=0}^{n(1-p)} Q_i + Q_n A_n - c_1 n^{-\beta-1} L_1(n)\right) + \varphi_n. \tag{2}$$

Наличие слагаемого $Q_n A_n$ в (1) и имевшийся ранее вывод (5.13) означают

$$I_4 = \varphi_n + \sum_{i=np+2}^{n} \beta_{n-i} (Q_{i-1} A_{i-1} - Q_i A_i). \tag{3}$$

Получить (5.17) мы уже не можем, а имеем только предшествующее ему

$$I_2 = a^{-1} \sum_{i=0}^{n} \left(1 - h_i(P_n, \ldots, P_n) - \sum_{j=0}^{i\gamma} a_{ji} Q_n\right) f_j + \varphi_n. \tag{4}$$

Учитывая это, к правой части (5.18) нужно добавить $\sum_{i=np+2}^{n} \beta_{n-i} \Big(Q_i A_i -$
$- Q_{i-1} A_{i-1} + \sum_{j=i}^{\infty} (1 - h_j(P_{i-1}, \ldots, P_{i-1})) f_j - \sum_{j=i+1}^{\infty} (1 - h_j(P_i, \ldots, P_i)) f_j\Big)$,
что повлечет такую добавку и в (5.24). Следовательно, ввиду (3)

$$I_4 + I_7 = \varphi_n + \sum_{i=np+2}^{n} \beta_{n-i} \Big(f_i O(1) + \sum_{j=i+1}^{\infty} (h_j(P_{i-1}, \ldots, P_{i-1}) -$$

$$- h_j(P_i, \ldots, P_i)) f_j\Big).$$

Последнее ввиду (5.16), теоремы Лагранжа о среднем, (5.7), (4.3) и (5.2) означает

$$I_4 + I_7 = \varphi_n. \tag{5}$$

Из (2), (4), (5.15) следует

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_6 = c_1 a^{-1} n^{-\beta-1} L_1(n) - a^{-1} Q_n^{1+\alpha} L(Q_n) -$$

$$- a^{-1} \sum_{j=n+1}^{\infty} (1 - h_j(P_n, \ldots, P_n)) f_j + \varphi_n$$

или, учитывая дополнительно (2.7), (5), (5.14), (5.12) и (1.8), получаем

$$Q_n - Q_{n-1} = c_1 a^{-1} n^{-\beta-1} L_1(n) - a^{-1} g\left(Q_n n^{\beta} L_1^{-1}(n)\right) n^{-\beta-1} L_1(n) -$$

$$- a^{-1} Q_n^{1+\alpha} L(Q_n) + \varphi_n. \tag{6}$$

Вывод явного выражения для Q_n из (6) напоминает получение (5.29) из (5.25). Итак, положим $Q_n = n^{-\beta} \rho_n^{\beta} L_1(n/\rho_n)$ и предположим, что $\lim_{n\to\infty} \rho_n$ не определен, т. е. $0 < \underline{\rho} = \varliminf_{n\to\infty} \rho_n < \varlimsup_{n\to\infty} \rho_n = \bar{\rho} < \infty$. В силу последнего и легко выводимого из (6) соотношения $\rho_n \sim \rho_{n-1}$ можно выбрать две подпоследовательности $\tau(k)$ и $\nu(k)$ такие, что $\rho_{\tau(k)} \to \underline{\rho}$, $\rho_{\nu(k)} \to \overline{\rho}$ при $k \to \infty$ и $\rho_{\tau(k)} \leqslant \rho_{\tau(k)\pm 1}$, $\rho_{\nu(k)} \geqslant \rho_{\nu(k)\pm 1}$.

Применив процедуру вывода (5.29) из (5.25) к (6) при $n = \tau(k)$, $\tau(k)+1$, $\nu(k)$, $\nu(k)+1$ (условие $\rho_n \asymp 1$ позволяет многое упростить), в силу только что приведенных определений и свойств легко получить

$$a^{-1}\beta\rho_{\tau(k)} - \beta + o(1) - c_1 a^{-1}\rho_{\tau(k)}^{-\beta} + g\left(\rho_{\tau(k)}^{\beta}\right)a^{-1}\rho_{\tau(k)}^{-\beta} = 0,$$

$$a^{-1}\beta\rho_{\nu(k)} - \beta + o(1) - c_1 a^{-1}\rho_{\nu(k)}^{-\beta} + g\left(\rho_{\nu(k)}^{\beta}\right)a^{-1}\rho_{\nu(k)}^{-\beta} = 0.$$

Переходя к пределу в последних соотношениях, получаем, что $\underline{\rho}^{\beta}$ и $\overline{\rho}^{\beta}$ удовлетворяют одному и тому же уравнению (1.10). Покажем, что оно имеет единственное неотрицательное решение. Рассмотрим функцию $z = y^{1+\alpha} - ay - c_1\alpha$, она убывает при $0 \leqslant y < (1+\alpha)^{-\beta}a^{\beta}$ и возрастает при $y \geqslant a^{\beta}(1+\alpha)^{-\beta}$, причем во второй области имеет единственный нуль. Неотрицательность, следующая из (5.7), и определения непрерывности и возрастание $g(y) \leqslant c_1$ влекут единственность решения у (1.10).

Тем самым получено противоречие с допущением $\underline{\rho} < \overline{\rho}$, т. е. доказана теорема 2 при $c_2 > 0$ (величина $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n$ находится аналогично).

Отказаться от условия (1.7) с $c_2 > 0$ позволяет то, что при его замене на свойства 1)—4) из раздела 6 для $F_3(n)$ при интерпретации $dF_3(n)$ как a_n и использовании замечания из раздела 4 вместо лемм 1 и 2 имеющееся доказательство почти дословно сохраняется, если a_n не заменять на точное асимптотическое выражение (4.2). Исключение составляют только оценки I_4 и I_3+I_6. Коррекция в случае $c_1 > 0$, приведенная в начале данного раздела, остается без изменения.

Оценку I_3+I_6 необходимо изменить при исследовании суммы, связанной с определением $I_{10}(s)$, ввиду добавки к правой части (4.5) слагаемого $io(n^{-\beta-1}L_1(n))$. Нужно дополнительно показать ограниченность $\sum\limits_{i=0}^{np} i\left|Q_i - \sum\limits_{j=0}^{i} Q_{i-j}a_j\right|$, но это легко получается из (6.2). Отсюда и из имевшегося ранее вывода (5.15) следует его справедливость и для $\xi_3(n)$.

В силу теоремы 1 и свойств a_n (11) можно записать в виде $I_1 = a_n\mu + \varphi_n$, где $\mu = -a^{-1}\sum\limits_{i=0}^{\infty}Q_i$, тогда, как и ранее, $I_4 = \varphi_n + O(1) \times \sum\limits_{i=np+2}^{n} \beta_{n-i}(a_i - a_{i-1})$. Оценим $\sum\limits_{i=np+2}^{n} \beta_{n-i}(a_i - a_{i-1}) = \sum\limits_{i=np+2}^{n-m} \beta_{n-i}(a_i - a_{i-1}) + \sum\limits_{i=n-m+1}^{n} \beta_{n-i}(a_i - a_{i-1})$. К первой сумме можно применить естественное обобщение леммы 4 с заменой (5.9) на $C_0 = 2\max\limits_{i\in N}|\beta_{m+i}| + \sum\limits_{i=m}^{\infty}|\beta_i - \beta_{i-1}|$, что мало при больших m. Вторая сумма при фиксированном m равняется φ_n, откуда $I_4 = \varphi_n$, т. е. все имевшиеся ранее в случае справедливости (1.7) оценки сохранились, и теорема 2 для $\xi_3(n)$ из раздела 6 доказана.

Отметим, что наличие теоремы 1, как это видно на примере только что модифицированной оценки I_1, позволяет при доказательстве теоремы 2 многое из раздела 5 упростить. Однако ввиду постоянных ссылок на схему из упомянутого раздела мы этих упрощений старались не использовать.

По $\xi(n)$ с условием (1.4) можно построить $\xi_3(n)$ из раздела 6, который оценивает Q_n сверху. При этом если $\varepsilon \to 0$, то параметры $\xi_3(n)$, участвующие в определении ρ_3, сходятся к соответствующим для $\xi(n)$, т. е. справедливость теоремы 2 для $\xi_3(n)$ дает оценку сверху для Q_n функцией, удовлетворяющей (1.9).

Для оценки снизу построим процесс $\xi_0(n)$. Фиксируем $n_0 > 0$ и положим $\eta_0 \equiv \eta$, $N_0(n) = (N - N(n))\chi\{n > n_0\} + N(n)$. Тогда по (2.1) $Q_{n0} \leqslant Q_n$.

В этом случае $f_{a0}(x)$ имеет лишь конечное число не равных нулю коэффициентов, что позволяет воспользоваться леммой 3 вместо лемм 1 и 2 при исследовании (2.7). Более точно, слагаемые, содержащие $\beta_{0n} - \beta_{0n-1}$, сразу оцениваются любой степенной функцией n^{-k}, и в Φ_n имевшийся ранее член $a_n \sum\limits_{i=0}^{np} Q_i$ (см. (5.10) и (1)) исчезает.

Это позволяет использовать имеющуюся схему доказательства теоремы 2 при $c_2 > 0$ для исследования $\xi_0(n)$. В итоге существенно проще может быть получена теорема 2 для $\xi_0(n)$. Но $h_0(z, \ldots, z) = h(z, \ldots, z)$, а $a_0 \to a$ при $n_0 \to \infty$. Тем самым мы заключаем, что и нижняя оценка Q_n удовлетворяет (1.9).

Итак, мы доказали теорему 2 при $c_2 = 0$, т. е. убрали все дополнительные ограничения, использовавшиеся при доказательстве.

В заключение обсудим условие (1.8). Если выполнено (5.6), то $g(y) \equiv 0$. Приведем пример, когда $g(y) \not\equiv 0$. Пусть $\xi(n)$ определяется $\{\eta, N(n)\}$, которые задаются соотношениями $f_i = i^{-\beta-2}$, $h_i(z_0, \ldots, z_i) = z_1^{\gamma(i)}$, где $\gamma(i) \sim i^\beta$ при больших i, а при малых подбираются так, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} h_i'(1, \ldots, 1) f_i = 1$. С помощью теоремы 5 (см. [4, с. 513]) и (3.3) легко убедиться, что $(h(s) - s)(1-s)^{-2} \sim (1-s)^{\alpha-1} \times \Gamma(1-\alpha)(1+\alpha)^{-1}$, т. е. верно (1.1) с $L(1-s) \sim \Gamma(1-\alpha)(1+\alpha)^{-1}$. Очевидно, $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} h_k(z_0, 1 - yn^{-\beta}, z_2 \ldots, z_k) f_k \sim \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \exp\{-yk^\beta n^{-\beta}\} k^{-\beta-2} \sim n^{-\beta-1} \int\limits_1^\infty \exp\{yx^\beta\} x^{-\beta-2} dx$. Из (3.3) следует $L_1(n) \sim (\beta+1)^\beta \Gamma^{-\beta}(1-\alpha) \equiv C$. Отсюда $g(y) = C^{-1}\left((\beta+1)^{-1} - \int\limits_1^\infty \exp\{-yCx^\beta\} x^{-\beta-2} dx\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Crump K., Mode C.** A general age-dependent branching process, I, II.— J. Math. Anal. and Appl., 1968, 24, p. 494—508; 1969, 25, p. 8—17.
2. **Jagers P.** Branching processes with biological applications. London, Wiley, 1975,
3. **Севастьянов Б. А.** Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
4. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967.
5. **Bojanic R., Seneta E.** Slowly varing functions and asimptotic relations.— J. Math. Anal. and Appl., 1971, 34, p. 302—315.
6. **Ватутин В. А.** Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса Беллмана — Харриса.— Мат. сб., 1979, т. 109, № 3, с. 440—452.
7. **Топчий В. А.** Интегральная предельная теорема для критических ветвящихся процессов Крампа — Ягерса с дискретным временем. Препринт. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1977.
8. **Рогозин Б. А.** Оценка остаточного члена в предельных теоремах теории восстановления.— Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, № 4, с. 703—717.
9. **Боровков А. А.** Замечания к теоремам Винера и Блекуэлла.— Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 10, № 2, с. 331—343.
10. **Нагаев С. В.** Переходные явления для зависящих от возраста ветвящихся процессов с дискретным временем, I, II.— Сиб. мат. журн., 1974, т. 15, № 2, 3, с. 368—394, 570—579.