26. **Harris M.** Finite groups having an involution centralizer with a 2-component of dihedral type.— Ill. J. Math., 1977, v. 21, N 3, p. 621—647.
27. **Held D.** A characterization of the alternating groups of degree eight and nine.— J. Algebra, 1967, v. 7, N 2, p. 218—237.
28. **Parrott D.** A characterization of the Tits' simple group.— Canad. J. Math., 1974, v. 24, N 4, p. 672—685.
29. **Seitz G.** Standard subgroups of type $L_n(2^m)$.— J. Algebra, 1977, v. 48, N 2, p. 417—438.
30. **Suzuki M.** Finite groups with nilpotent centralizers.— Trans. Amer. Math. Soc., 1961, v. 99, N 3, p. 425—470.
31. **Suzuki M.** On a class of a doubly transitive groups.— Ann. Math., 1962, v. 75, N 1, p. 105—145.
32. **Thompson J.** G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. VI.— Pacif. J. Math., 1974, v. 51, N 2, p. 573—630.

Поступила в редколлегию 21 апреля 1981 г.

КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ ТИПА ХАРАКТЕРИСТИКИ 2 И 3

Н. Д. ПОДУФАЛОВ

Важное место в решении общей классификационной задачи о конечных простых группах занимает исследование конечных простых групп типа характеристики 2. Напомним, что конечная группа X называется группой типа характеристики p (p — простое число), если для любой p-локальной подгруппы H из X справедливо условие $C_H(O_p(H)) \subseteq O_p(H)$ и силовская p-подгруппа из X содержит нормальную элементарную абелеву подгруппу порядка p^3.

При изучении строения конечной простой группы G типа характеристики 2 существенную роль играют так называемые нечетные характеризации. Программа исследования конечных простых групп, предложенная Д. Горенстейном, предполагает проводить изучение группы G типа характеристики 2 в зависимости от строения p-локальных подгрупп из G для нечетных простых чисел p. Схема исследований во многом аналогична 2-характеризациям конечных групп: изучение групп низкого p-ранга или низкого 2-локального p-ранга; изучение групп, в которых есть централизатор элемента порядка p, не являющийся p-скованным; изучение групп, в которых p-локальные подгруппы p-скованы.

В этом плане простое число $p=3$ играет исключительную роль. Во-первых, конечные простые группы, порядок которых не делится на 3, известны, т. е. мы можем считать, что в G есть элементы порядка 3; более того, можно предполагать наличие элементов порядка 3 в 2-локальных подгруппах. Во-вторых, 3-характеризации являются наиболее развитой ветвью нечетных характеризаций.

Один из узловых моментов исследований — изучение случая, когда группа G является одновременно группой типа характеристики 2 и 3. Поэтому Д. Горенстейном была поставлена следующая задача: доказать, что если конечная простая группа G является одновременно группой типа характеристики 2 и 3, то G изоморфна одной из групп $\mathbf{PSp}(4, 3)$, $\mathbf{G}_2(3)$ или $\mathbf{U}_4(3)$ [1].

В настоящей работе завершено исследование групп типа характеристики 2 и 3, начатое в [1, 2], и доказана

Основная теорема. *Пусть G — конечная простая группа типа характеристики* 2 *и* 3. *Тогда G изоморфна одной из групп* $\mathbf{PSp}(4, 3)$, $\mathbf{G}_2(3)$, *или* $\mathbf{U}_4(3)$.

Случай, когда 3-ранг G не меньше 4, полностью изучен в [2], поэтому в данной статье нам осталось рассмотреть группы 3-ранга, равного 3. Вначале мы получим детальную информацию о структуре 3-локальных подгрупп контрпримера к основной теореме (разд. 2), после чего (разд. 3, 4) исследование 2-локальных подгрупп позволит показать, что контрпримера не существует.

Следует отметить, что завершение описания конечных простых групп типа характеристики 2 и 3 позволило сделать существенное продвижение в изучении групп типа характеристики 2, в которых 3-локальные подгруппы 3-скованы (см. [2]). По сути дела, описание конечных простых групп типа характеристики 2 сведено к решению двух задач: изучить группы 3-ранга 3 и изучить «не 3-скованный» случай.

В работе используются в основном стандартные определения, многие из них можно найти в [1, 3]. Везде рассматриваются только конечные группы.

Приведем некоторые наиболее важные определения:

p-локальная подгруппа — нормализатор любой неединичной p-подгруппы;

$A \neq B$ сильно p-вложена в B, если порядок A делится на p и A содержит нормализатор любой своей неединичной p-подгруппы в B;

p-ранг группы X — максимум рангов элементарных абелевых p-подгрупп из X;

q-локальный p-ранг — максимум p-рангов всех q-локальных подгрупп;

группа X называется p-скованной, если $C_X(P) \subseteq O_{p',p}(X)$ для любой силовской p-подгруппы P из $O_{p',p}(X)$.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1.1. *Пусть G — простая группа, M — ее сильно p-вложенная подгруппа, тогда $M = O^p(M)$.*

Доказательство. Доказательство легко вытекает из теоремы 7.3.4 [4] и того, что M контролирует слияние своих p-элементов.

Лемма 1.2. *Пусть G — простая группа, M — ее сильно 3-вложенная подгруппа, и в M существует нормальная подгруппа M_0 такая, что $M/M_0 \simeq S_3$. Тогда любая инволюция из G сопряжена с некоторой инволюцией из $M \backslash M_0$.*

Доказательство. Положим M_1 — подгруппа индекса 2 в M, содержащая M_0 и $D = M_1 \backslash M_0$. Очевидно, что порядок любого элемента из D делится на 3. Так как M сильно 3-вложена в G, то $N_G(D) = M$ и D тривиально пересекается с сопряженными подмножествами. Используя то, что $M/M_0 \simeq S_3$, нетрудно найти различные неприводимые характеры φ_1 и φ_2 группы M такие, что обобщенный характер $\theta = 1_M + \varphi_1 - \varphi_2$ обращается в нуль на $M \backslash D$. В силу теоремы 2 [5] и простоты группы G каждая инволюция из G сопряжена с некоторой инволюцией из M, инвертирующей хотя бы один элемент из D. С другой стороны, любая инволюция из M, инвертирующая хотя бы один элемент из D, лежит в M/M_0. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть X — конечная группа без элементов порядка 6, $Q = O_2(X) \neq \langle 1 \rangle$ и $X/Q \simeq L_2(2^n)$, $n \geqslant 2$. Тогда для любой инволюции $t \in X \backslash Q$ $|C_X(t)| = 2^n |Q|^{1/2}$.*

Доказательство. В силу теоремы 8.2 [6] Q — элементарная абелева группа. Очевидно, что $C_X(t)$ — 2-группа, и пусть T — силовская 2-подгруппа из X, содержащая $C_X(t)$. Так как в $L_2(2^n)$ все инволюции сопряжены, то каждый смежный класс разложения T по Q, отличный от Q, содержит одно и то же число инволюций. Следовательно, число инволюций в $T \backslash Q$ равно $(2^n - 1)r$, где r — число инволюций в Qt. Используя лемму 1.2 [7], легко убедиться, что $|C_Q(t)| = |Q|^{1/2}$. Так как Q — элементарная абелева группа, то множество инволюций из Qt совпадает с $C_Q(t)t$, т. е. $r = |C_Q(t)| = |Q|^{1/2}$. Используя теперь независимость силовых 2-подгрупп группы $L_2(2^n)$ и предыдущие вычисления, легко показать, что в $X \backslash Q$ точно $(2^n + 1)(2^n - 1)|Q|^{1/2}$ инволюций. Так как все инволюции из $X \backslash Q$ сопряжены (лемма 1.2 [7]), то мы имеем

$$\frac{|Q| 2^n (2^n - 1)(2^n + 1)}{|C_X(t)|} = (2^n + 1)(2^n - 1)|Q|^{1/2},$$

откуда $|C_X(t)| = 2^n |Q|^{1/2}$. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть X — конечная группа, $Q=O_2(X)\neq\langle 1\rangle$, $X/Q\simeq L_2(8)$, $B\in \mathrm{Syl}_7(X)$, a — элемент порядка 3 из X. Если $|C_Q(a)|=2$, то $|C_Q(B)|=2$.*

Доказательство. Используя лемму 3 [8], в Q нетрудно выбрать такой главный X-ряд, что все его факторы, за исключением одного, будут стандартными $L_2(8)$-модулями, а один фактор будет одномерным $L_2(8)$-модулем (над $GF(2)$). Очевидно, что на всех нециклических факторах этого ряда B действует регулярно, а на единственном циклическом факторе — тривиально. Отсюда легко получить, что $|C_Q(B)|=2$. Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Пусть P — p-группа, $p>2$, E_i — нормальные элементарные абелевы подгруппы порядка $\leqslant p^2$ из P, $i=\overline{1,n}$. Тогда группа $E=\langle E_i \mid i=\overline{1,n}\rangle$ имеет класс нильпотентности не выше двух и экспонента E равна p.*

Доказательство. Положим $V=\Omega_1(Z(P))$. Так как $E_i\lhd P$, то $E_i\cap V\neq\langle 1\rangle$ для любого $i=\overline{1,n}$. Следовательно, $|E_iV/V|\leqslant p$, и так как $E_i\lhd P$, то $E_iV/V\subseteq Z(P/V)$ для любого $i=\overline{1,n}$. Отсюда $E/E\cap V\simeq EV/V$ — элементарная абелева группа. Очевидно, что $C(E\cap V)=P\supseteq E$. Значит, E имеет класс нильпотентности не выше 2. По лемме 5.3.9 [4] экспонента $\Omega_1(E)=E$ равна p. Лемма доказана.

Лемма 1.6. *Пусть X — конечная группа, $Q=O_3(X)$, $Q\simeq E_{3^3}$ и $X/Q\simeq L_3(3)$. Тогда для любого элемента a порядка 3 из X $|C_X(a)|>9$.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна и пусть в X существует элемент a порядка 3 такой, что $|C_X(a)|=9$. В силу выбора элемента a $a\notin Q$. Очевидно, что $C_X(Q)=Q$, т. е. фактор-группа X/Q действует точно на Q. Пусть Q_1 — полный прообраз в X центра некоторой силовской 3-подгруппы из X/Q, содержащей класс aQ. Так как при переходе к фактор-группе порядки централизаторов элементов не увеличиваются, то aQ не может лежать в центре любой силовской 3-подгруппы из X/Q, т. е. $a\notin Q_1$. Используя строение группы $L_3(3)$, нетрудно убедиться, что $N_X(Q_1\langle a\rangle)\cap N_X(Q_1)$ содержит некоторую силовскую 3-подгруппу из X и имеет четный порядок. Следовательно, в множестве $Q_1\langle a\rangle\backslash Q_1$ число элементов, сопряженных с a, по крайней мере, не меньше

$$\frac{3\cdot|Q_1\langle a\rangle|\cdot 2}{|C_X(a)|}=\frac{3^6\cdot 2}{3^2}=3^4\cdot 2.$$

С другой стороны, $|Q_1\langle a\rangle\backslash Q_1|=3^5-3^4=3^4\cdot 2$. Мы показали, что все элементы из $Q_1\langle a\rangle\backslash Q_1$ сопряжены с a, т. е. имеют порядки, равные 3. Используя вычисления из леммы 1.8 (для случая $W=Q_1$), легко показать, что для любого элемента $g\in Q_1$ $C_{Q_1}(g)$ нормален в $Q_1\langle a\rangle$. Пусть $Z=Z(Q_1)$. Очевидно, что $Z\subseteq Q$. Используя действие X/Q на Q и выбор Q_1, легко убедиться, что $|Z|=9$. Значит, если элемент $g\in Q_1\backslash Q$, то $C_{Q_1}(g)=\langle Z,g\rangle$. Поэтому при естественном действии на фактор-группе Q_1/Z элемент a нормализует каждую циклическую подгруппу. Вновь используя то, что при переходе к фактор-группе порядки централизаторов элементов не увеличиваются, и равенство $|Q_1/Z|=9$, легко показать, что Q_1/Z — циклическая группа. Пришли к противоречию с тем, что $Z=Z(Q_1)$. Лемма доказана.

Лемма 1.7. *Пусть группа X удовлетворяет условиям предыдущей леммы. Если централизаторы инволюций из X имеют 3-ранг 1, то любая подгруппа из X, изоморфная E_9, нетривиально пересекается с Q.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть A — подгруппа из X, $A\simeq E_9$ и $A\cap Q=\langle 1\rangle$. Пусть P — силовская 3-подгруппа X, содержащая A, и Q_1 — полный прообраз в P подгруппы $Z(P/Q)$. Очевидно, что $|Q_1:Q|=3$ и $Q_1\cap A=\langle a\rangle\neq\langle 1\rangle$. Положим $Z(P)=Z$ и $B=N_X(Z)$. Понятно, что $Z\subseteq Q$ и $|Z|=3$. Так как в Q всего 13 циклических подгрупп порядка 3 и $13\notin\pi(B)$, то $|X:B|=13$. Легко убедиться в том, что $B/O_3(B)\simeq \mathrm{GL}(2,\ 3)$ и $O_3(B)/Q\simeq E_9$. Пусть τ — инволюция такая, что $O_3(B)\tau\in Z(B/O_3(B))$. Очевидно, что $[Z,\tau]=\langle 1\rangle$. Так как $B/O_3(B)$ действует естественным образом на фактор-группах Q/Z и $O_3(B)/Q$ как полная группа автоморфизмов, то $C_{O_3(B)}(\tau) = Z$. Следовательно, $O_3(B)/Z$ — абелева группа, и так как в $O_3(B)\setminus Q$ есть элемент a порядка 3, то, используя действие $B/O_3(B)$ на $O_3(B)/Z$, легко показать, что $O_3(B)/Z$ — элементарная абелева группа порядка 3^4. Очевидно, что в B/Z есть четверная группа V и в силу условия леммы, накладываемого на строение централизаторов инволюций, каждая инволюция из V централизует в $O_3(B)/Z$ только циклическую подгруппу. По лемме 4.1 [2] $|O_3(B)/Z| \leqslant 3^3$. Пришли к противоречию с предыдущим, и лемма доказана.

Лемма 1.8. *Пусть $W\langle a\rangle$ — группа Фробениуса с ядром W и дополнительным множителем $\langle a\rangle$ порядка 3. Тогда для любого элемента $g \in W$, $C_W(g) \lhd W\langle a\rangle$. В частности, любой элемент из $SCN(W)$ нормален в $W\langle a\rangle$ (здесь $SCN(W)$ — множество самоцентрализуемых нормальных абелевых подгрупп из W).*

Доказательство. Пусть $g \in W$, $b \in W\langle a\rangle\setminus W$. Очевидно, что $gb \notin W$, т. е. $(gb)^3 = 1$ или $gbg = b^{-1}g^{-1}b^{-1}$ и $bgb = g^{-1}b^{-1}g^{-1}$. Если теперь $g \in W$, $c \in C_W(g)$ и $x \in W\langle a\rangle\setminus W$, то мы имеем

$$[g, c^x] = g^{-1}x^{-1}c^{-1}xgx^{-1}cx = g^{-1}x^{-1}c^{-1}(xgx)(xcx) =$$
$$= g^{-1}x^2c^{-1}(g^{-1}x^2g^{-1})(c^{-1}x^2c^{-1}) =$$
$$= g^{-1}(x^2c^{-1})g^{-1}(x^2c^{-1})g^{-1}(x^2c^{-1}) = (g^{-1}(x^2c^{-1}))^3.$$

Так как $g^{-1} \in W$ и $x^2c^{-1} \in W\langle a\rangle\setminus W$, то $[g, c^x] = (g^{-1}(x^2c^{-1}))^3 = 1$. Мы показали, что для любого $x \in W\langle a\rangle\setminus W$ $C_W(g)^x = C_W(g)$. Так как $W\langle a\rangle = \langle W\langle a\rangle\setminus W\rangle$, то $C_W(g) \lhd W\langle a\rangle$. Пусть $A \in SCN(W)$. Так как $A = \bigcap\limits_{a\in A} C_W(a)$ и каждая из подгрупп $C_W(a)$ нормальна в $W\langle a\rangle$, то A нормальна в $W\langle a\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 1.9. *Пусть группа Фробениуса $W\langle a\rangle$ с абелевым ядром W нечетного порядка и дополнительным множителем $\langle a\rangle$ порядка 3 действует точно на элементарной абелевой 2-группе V, причем $|C_V(a)| \leqslant 4$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) $|C_V(a)| = 2$, $|W| = 7$ *и* $|[V, W]| = 8$;
2) $|C_V(a)| = 4$, $|W| = 7$ *и* $|[V, W]| = 8$;
3) $|C_V(a)| = 4$, $|W| = 7$ *и* $|[V, W]| = 64$;
4) $|C_V(a)| = 4$, $W \simeq Z_7 \times Z_7$, $|[V, W]| = 64$

и $[V, W]$ разлагается в прямое произведение двух подгрупп порядка 8, допустимых относительно $W\langle a\rangle$.

Доказательство. При доказательстве леммы будем использовать аддитивную запись для V и рассматривать V как естественный $W\langle a\rangle$-модуль над полем F из двух элементов. Так как $V = [V, W] \oplus C_V(W)$ и $[V, W]$ является точным $W\langle a\rangle$-подмодулем, то для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай $V = [V, W]$. В силу теоремы Машке $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$, где $\{V_i, i = \overline{1, s}\}$ — неприводимые $W\langle a\rangle$-подмодули из V. Так как $C_V(W) = \langle 0\rangle$ и $m(C_V(a)) \leqslant 2$, то $C_{V_i}(a) \neq \langle 0\rangle$ для любого $i \in \overline{1, s}$ и $s \leqslant 2$. Дальнейшее доказательство леммы теперь естественным образом разбивается на следующие случаи:

Случай 1. $s = 1$ и $m(C_V(a)) = 2$.

В этом случае $W\langle a\rangle$ действует точно и неприводимо на V. По теореме Клиффорда $V = B_1 \oplus \ldots \oplus B_t$, где $\{B_i | i = \overline{1, t}\}$ — компоненты Веддербёрна относительно W. Предположим, что $t > 1$. Используя теорему Клиффорда и неприводимость V, получаем, что $t = 3$ и $\langle a\rangle$ действует транзитивно на множестве $\{B_1, B_2, B_3\}$. Очевидно, что $\langle a\rangle$ действует тривиально на диагональном подпространстве

$$\left\{b + b^a + b^{a^2} \,\middle|\, b \in B_1\right\} \simeq B_1.$$

Следовательно, $m(B_i) = 2$, т. е. $|B_i| = 4$, $i = \overline{1, 3}$. Так как B_i — W-инвариантное подпространство и $(|W|, 6) = 1$, то W действует тривиально на каждом B_i, т. е. на V, что невозможно. Значит, $t = 1$. Вновь применяя теорему Клиффорда, получаем, что $V = L_1 \oplus \ldots \oplus L_r$, где L_i — изоморфные неприводимые W-подмодули, причем в силу изоморфизма подгруппа W представлена на каждом L_i точно. Так как W — абелева группа, имеющая точное неприводимое представление, то W — циклическая группа. Из неприводимости и точности действия W на L_i легко получить, что любой неединичный элемент из W действует регулярно на L_i. Следовательно, любой неединичный элемент из W действует регулярно на V. Расширим поле F до поля F^*, которое уже содержит первообразный корень степени $|W|$ из единицы, и пусть V^* — $W\langle a\rangle$-модуль над F^*, полученный из V. Очевидно, что неединичные элементы из W действуют опять регулярно на V^* и $m(C_{V^*}(a)) = 2$. Предположим вначале, что $W\langle a\rangle$ действует на V^* неприводимо. По теореме Клиффорда либо $V^* = B_1^* \oplus B_2^* \oplus B_3^*$, где B_i^*, $i = \overline{1,\ 3}$,— компоненты Веддербёрна относительно W, и $\langle a\rangle$ действует на них транзитивно, либо $V^* = L_1^* \oplus \ldots \oplus L_k^*$, где L_i^* — изоморфные неприводимые W-подмодули. Во втором случае в силу выбора F^* и изоморфизма подмодулей L_i^* мы получаем, что L_i^* одномерны и элементы из W задают на V^* скалярные линейные преобразования, т. е. $W \subseteq Z(W\langle a\rangle)$, что не так. Поэтому второй случай невозможен, значит, $V^* = B_1^* \oplus B_2^* \oplus B_3^*$. Как и прежде, легко убеждаемся, что $m(B_i^*) = 2$, $i = \overline{1,\ 3}$. Отсюда $m(V) = m(V^*) = 6$, т. е. $|V| = 2^6$. Так как неединичные элементы из W действуют регулярно на V, то $|W|$ делит $|V_1| - 1 = 7 \cdot 9$. Поэтому $|W| = 7$, и мы получаем утверждение 3) доказываемой леммы. Пусть теперь $W\langle a\rangle$ действует на V^* приводимо. Значит, $V^* = A_1 \oplus \ldots \oplus A_l$, $l \geqslant 2$, где A_i — неприводимые $W\langle a\rangle$-подмодули. Так как неединичные элементы из W действуют регулярно на V^* и $m(C_{V^*}(a)) = 2$, то легко убедиться, что $l = 2$ и $m(C_{A_i}(a)) = 1$, $i = 1,\ 2$. Очевидно, что $W\langle a\rangle$ действует точно на каждом подпространстве A_i, $i = 1,\ 2$. Применяя вновь теорему Клиффорда к неприводимым $W\langle a\rangle$-подмодулям A_i, легко показать, что каждый подмодуль A_i разлагается в прямую сумму трех компонент Веддербёрна относительно W, причем эти компоненты одномерны. Отсюда

$$m(V) = m(V^*) = m(A_1) + m(A_2) = 3 + 3 = 6.$$

Опять получим, что $|V| = 2^6$, т. е. $|W| = 7$. Вновь выполняется утверждение 3) доказываемой леммы. Мы закончили рассмотрение случая 1.

Случай 2. $s = 1$ и $m(C_V(a)) = 1$.

Как и при рассмотрении случая 1, показывается, что V является точным и неприводимым $W\langle a\rangle$-модулем и разлагается в прямую сумму изоморфных неприводимых точных W-подмодулей. Следовательно, W — циклическая группа, и любой неединичный элемент из W действует регулярно на V. Вновь, как и в случае 1, расширяем поле F до поля F^* и рассматриваем $W\langle a\rangle$-модуль V^* над F^*, причем в случае 2 $m(C_{V^*}(a)) = 1$. Если мы предположим, что $W\langle a\rangle$ действует на V^* неприводимо, то, как и в случае 1, получим, что $V^* = B_1^* \oplus B_2^* \oplus B_3^*$, где $\{B_1^*,\ B_2^*,\ B_3^*\}$ — компоненты Веддербёрна относительно W. Так как $m(C_{V^*}(a)) = 1$, то $m(B_i^*) = 1$, $i = 1,\ 3$. Отсюда $m(V) = m(V^*) = 3$, т. е. $|V| = 2^3$ и $|W| = 7$. Следовательно, имеет место утверждение 1) доказываемой леммы. Если же мы предположим, что $W\langle a\rangle$ действует на V^* приводимо, то, используя условие $m(C_{V^*}(a)) = 1$, нетрудно найти в V^* ненулевой $W\langle a\rangle$-подмодуль, на котором a действует регулярно, и показать, что $C_{V^*}(W) \neq \langle 0\rangle$. Однако это не так, и доказательство леммы в случае 2 закончено. Нам осталось рассмотреть

Случай 3. $s = 2$, $m(C_V(a)) = 2$ и $m(C_{V_i}(a)) = 1$, $i = \overline{1,\ 2}$.

Из условия $C_V(W) = \langle 0\rangle$ легко получить, что $m(V_i) > 1$, $i = \overline{1,\ 2}$. Положим W_i — ядро представления $W\langle a\rangle$ на пространстве V_i, $i = 1,\ 2$. Так как $m(V_i) > 1$, то легко убедиться, что $W_i \subset W$, $i = \overline{1,\ 2}$. Очевидно, что фактор-группа $W\langle a\rangle/W_i$ представлена точно и неприводимо на V_i, $i=\overline{1, 2}$. Поэтому $W\langle a\rangle/W_i$ действует на V_i, $i=1, 2$, точно так же, как $W\langle a\rangle$ на V в случае 2. Следовательно, мы получаем, что $|V_i|=8$ и $|W/W_i|=7$, $i=1, 2$. Так как $W_1\cap W_2=\langle 1\rangle$, то W_i изоморфно вкладывается в циклическую группу порядка 7, $i=1, 2$. Если хотя бы для одного значения i $W_i=\langle 1\rangle$, то очевидно, что $W_1=W_2=\langle 1\rangle$. В этом случае $|W|=7$, $|V|=$ $=64$, и мы приходим к утверждению 3) доказываемой леммы. Пусть теперь $W_i\neq\langle 1\rangle$ для некоторого значения i, отсюда $W_1\neq\langle 1\rangle\neq W_2$. Следовательно, $W=W_1\times W_2\simeq Z_7\times Z_7$. Понятно, что $W\langle a\rangle$-подмодулям V_i соответствуют в группе V непересекающиеся подгруппы порядка 8, допустимые относительно $W\langle a\rangle$ и $|V|=64$. Поэтому выполняется утверждение 4) леммы, и случай 3 рассмотрен. Тем самым лемма 1.9 доказана. Отметим, что утверждение 2) леммы 1.9 имеет место только тогда, когда $C_V(W)\neq\langle 1\rangle$, $|C_V(a)|=4$ и $|C_V(a)\cap C_V(W)|=2$.

Лемма 1.10. *Пусть группа Фробениуса $W\langle a\rangle$ с ядром W нечетного порядка и дополнительным множителем $\langle a\rangle$ порядка 3 действует точно на элементарной абелевой 2-группе V, причем $|C_V(a)|\leqslant 4$. Тогда W — абелева группа, т. е. выполняется одно из утверждений 1)—4) леммы* 1.9.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $W\langle a\rangle$ удовлетворяет условиям доказываемой леммы, но W — неабелева группа. Используя лемму 1.9, нетрудно убедиться, что W — 7-группа. Пусть $A\in$ $\in SCN(W)$. По лемме 1.8 A является $\langle a\rangle$-допустимой подгруппой. Понятно, что $A\langle a\rangle$ действует точно на V. По лемме 1.9 либо $A\simeq Z_7$, либо $A\simeq$ $\simeq Z_7\times Z_7$. Предположим вначале, что $A\simeq Z_7$. Так как $C_W(A)=A$, то легко убедиться, что $W=A$. Получили противоречие с выбором W. Следовательно, $A\simeq Z_7\times Z_7$. Используя условие $A\in SCN(W)$, легко получить, что W — неабелева группа порядка 7^3. Как и при доказательстве леммы 1.9, будем рассматривать V как $W\langle a\rangle$-модуль над полем F из двух элементов. Сразу же будем считать, что $V=[V, W]$, т. е. $C_V(W)=\langle 0\rangle$.

Пусть $z\in Z(W)^{\#}$. Очевидно, что $C_V(z)$ и $[V, \langle z\rangle]$ являются $W\langle a\rangle$-подмодулями и $V=C_V(z)\oplus[V, \langle z\rangle]$. Если $C_V(z)\neq\langle 0\rangle$, то a действует нерегулярно на $C_V(z)$, и поэтому

$$|C_V(a)\cap[V, \langle z\rangle]|=1.$$

Так как z действует регулярно на $[V, \langle z\rangle]$, то $W\langle a\rangle$ действует точно на $[V, \langle z\rangle]$, отсюда $A\langle a\rangle$ действует точно на $[V, \langle z\rangle]$. Применяя теперь лемму 1.9 к группе $A\langle a\rangle$ и подпространству $[V, \langle z\rangle]$, получаем, что $|A|=$ $=7$. Противоречие с выбором A. Следовательно, $C_V(z)=\langle 0\rangle$, т. е. z действует регулярно на V. Как и при доказательстве леммы 1.9, расширим поле F до поля F^*, содержащего первообразный корень степени 7^2 из единицы, и рассмотрим $W\langle a\rangle$-модуль V^*, полученный из V. Понятно, что z действует регулярно на V^*. Пусть V_0^* — некоторый неприводимый $W\langle a\rangle$-подмодуль из V^*. Так как z действует регулярно на V_0^* то V_0^* — точный неприводимый $W\langle a\rangle$-модуль. Предположим вначале, что V_0^* содержит больше одной компоненты Веддербёрна относительно W. Тогда $V_0^*=B_1^*\oplus B_2^*\oplus B_3^*$, где B_i^*, $i=\overline{1, 3}$,— компоненты Веддербёрна относительно W, и $\langle a\rangle$ действует на них транзитивно. Как и при доказательстве леммы 1.9, получаем, что $m(B_i^*)\leqslant 2$. Так как B_i^* является точным W-модулем, то W изоморфно вкладывается в группу $\mathrm{GL}(2, 2^n)$ для некоторого n. Однако легко убедиться, что группа $\mathrm{GL}(2, 2^n)$ не содержит неабелевых подгрупп порядка 7^3 ни при каком n. Следовательно, модуль V_0^* сам является компонентой Веддербёрна относительно W и $V_0^*=L_1^*\oplus\ldots\oplus L_t^*$, где L_i^*, $i=\overline{1, t}$,— изоморфные неприводимые W-подмодули. Используя теперь теорему 5.5.4 [4], легко показать, что z задает скалярное преобразование V_0^*, т. е. $z\in Z(W\langle a\rangle)$. Полученное противоречие с тем, что $W\langle a\rangle$ — группа Фробениуса, заканчивает доказательство леммы.

2. СТРОЕНИЕ 3-ЛОКАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНТРПРИМЕРА К ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЕ

Пусть G — контрпример к основной теореме. В этом разделе мы получим необходимую информацию о строении 3-локальных подгрупп из G.

Лемма 2.1. *3-ранг группы G равен* 3.

Доказательство. Доказательство легко следует из теоремы 1 [2].

Лемма 2.2. *3-ранг 2-локальных подгрупп группы G не превосходит* 1.

Доказательство. Доказательство легко следует из теоремы 2 [1].

Лемма 2.3. *2-ранг централизаторов элементов порядка 3 из G не превосходит* 1.

Доказательство. Предположим противное, и пусть a — элемент порядка 3 из G такой, что $C_G(a) \supseteq V \simeq E_{2^2}$. Положим $R = O_3(C_G(a))$. Так как $C_G(a)$ 3-скован, то V действует точно на R. По теореме 5.3.13 [4] в R существует характеристическая подгруппа A экспоненты 3, на которой V действует точно. Так как $a \in Z(R)$, то $a \in A$. Используя теперь лемму 2.2, ограничение на экспоненту A и то, что $[V, a] = \langle 1 \rangle$, легко получить, что $C_A(v) = \langle a \rangle$ для любого элемента $v \in V^{\#}$. Следовательно, на фактор-группе $A/\langle a \rangle$ V действует как группа регулярных автоморфизмов, отсюда $A = \langle a \rangle$. Получили противоречие с выбором A, и лемма доказана.

Лемма 2.4. *Для любой 3-локальной подгруппы X из G, 2-ранг которой больше 1, фактор-группа $X/O_3(X)$ изоморфно вкладывается в $L_3(3)$. В частности, силовские 2-подгруппы из X изоморфно вкладываются в полудиэдральную группу порядка 2^4.*

Доказательство. Пусть X — произвольная 3-локальная подгруппа из G и $m_2(X) > 1$. В силу 3-скованности X фактор-группа $X/O_3(X)$ действует точно на $O_3(X)/\Phi(O_3(X))$. Так как 2-ранг $X \geqslant 2$, то, используя лемму 2.2, легко показать, что

$$3^2 \leqslant |O_3(X)/\Phi(O_3(X))| \leqslant 3^3.$$

Если $|O_3(X)/\Phi(O_3(X))| = 3^2$, то $X/O_3(X)$ изоморфно вкладывается в $\mathbf{GL}(2, 3)$, и так как $\mathbf{GL}(2, 3)$ изоморфно вкладывается в $L_3(3)$, то в данном случае лемма доказана. Пусть теперь $|O_3(X)/\Phi(O_3(X))| = 3^3$. Очевидно, что $X/O_3(X)$ изоморфно вкладывается в $\mathbf{GL}(3, 3)$. Используя лемму 2.2 и то, что 2-ранг $X \geqslant 2$, нетрудно убедиться, что в $X/O_3(X)$ нет инволюций, инвертирующих $O_3(X)/\Phi(O_3(X))$. Следовательно, $X/O_3(X)$ изоморфно вкладывается в фактор-группу $\mathbf{GL}(3, 3)/Z(\mathbf{GL}(3, 3)) \simeq L_3(3)$. Лемма доказана.

Предположение 2.1. *H — максимальная 3-локальная подгруппа из G, $O_3(H) = R$, $P \in \mathrm{Syl}_3(H)$, $V = \Omega_1(Z(R))$ и фактор-группа H/R изоморфна A_4 или S_4.*

Леммы 2.5 — 2.11 доказаны при предположении 2.1.

Лемма 2.5. *$P \in \mathrm{Syl}_3(G)$ и $N_G(P) \subseteq H$.*

Доказательство. Так как в H нет сечений, изоморфных $SL(2, 3)$, то ZJ-теорема Глаубермана и максимальность H дают

$$H = N_H(ZJ(P)) = N_G(ZJ(P)).$$

Отсюда легко получить, что $P \in \mathrm{Syl}_3(G)$ и $N_G(P) \subseteq H$. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *$\Omega_1(R) = V \simeq E_{3^3}$.*

Доказательство. Покажем прежде всего, что $C(V) = R$. Очевидно, что $C(V) \subseteq H$. Если мы предположим, что $C(V) \neq R$, то, используя строение фактор-группы H/R, легко убедимся, что $C(V)$ содержит четверную подгруппу из H. Пришли к противоречию с леммой 2.3. Значит, $C(V) = R$. Следовательно, H/R изоморфно вкладывается в $\mathrm{Aut}(V)$. Отсюда получаем, что $|V| > 9$. Применяя теперь лемму 2.1, убеждаемся, что $V \simeq E_{3^3}$, и так как $V \subseteq Z(R)$, то $V = \Omega_1(R)$. Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Для любого элемента* $g \in R^{\#}$, $C_G(g) \subseteq H$.

Доказательство. В силу предыдущей леммы достаточно показать, что H содержит централизаторы неединичных элементов из V. Пусть $v \in V^{\#}$. Очевидно, что $C(v) \supseteq R$. Предположим вначале, что $R \in \in \mathrm{Syl}_3(C_G(v))$. В силу 3-скованности $C_G(v)$ имеем $V \subseteq O_3(C_G(v))$, отсюда

$$V = \Omega_1(O_3(C_G(v))).$$

Значит, $H = N_G(V) \supseteq C_G(v)$. Пусть теперь $R \notin \mathrm{Syl}_3(C_G(v))$ и $P_1 \in \mathrm{Syl}_3(C_G(v))$, $P_1 \supset R$. По лемме 2.5 $|P_1 : R| = 3$, т. е. $H = N_G(R) \supseteq P_1$. Без ограничения общности рассуждений мы можем считать, что $P_1 = P$. Отсюда $v \in Z(P)$. Предположим, что $C_H(v)$ содержит некоторую инволюцию τ. По лемме 2.2 $\langle v \rangle$ допускает $C_H(\tau)$, так как $V \cap C_H(\tau) = \langle v \rangle$. Следовательно, $N_H(\langle v \rangle) \supseteq \supseteq \langle P, C_H(\tau) \rangle = H$. Теперь легко показать, что $C_H(v)$ содержит четверную подгруппу, и получить противоречие с леммой 2.3. Значит, $C_H(v)$ имеет нечетный порядок, и поэтому $C_H(v) = P$. Отсюда и из леммы 2.5 получаем, что в $C_G(v)$ P совпадает со своим нормализатором. Если бы $C_G(v)$ имел четный порядок, то по лемме 2.3 и Z^*-теореме Глаубермана $Z(C_G(v)/O(C_G(v)))$ содержал бы инволюцию. Тогда мы бы нашли в $C_G(v)$ инволюцию, нормализующую P, что невозможно. Следовательно $C_G(v)$ имеет нечетный порядок. По ZJ-теореме Глаубермана $Z(J(P)) \lhd C_G(v)$ или

$$H = N_G(Z(J(P))) \supseteq C_G(v).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.8. *R пересекается тривиально с сопряженными подгруппами.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть элемент $x \in G$ такой, что $\langle 1 \rangle \neq D = R \cap R^x \neq R$. Пусть v — элемент порядка 3 из D. Очевидно, что $v \in V \cap V^x$. В силу предыдущей леммы $R^x \subseteq C_G(v) \subseteq H$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $R^x \subseteq P$. Так как $x \notin H = N_G(V)$, то $V^x \neq V$, отсюда $P = R \cdot V^x$. Значит, в $P \backslash R$ существует элемент, централизующий в V подгруппу порядка 9. Рассматривая теперь действие фактор-группы H/R на V, легко прийти к противоречию, поскольку централизаторы элементов порядка 3 из H/R в V имеют порядки, равные 3. Лемма доказана.

Лемма 2.9. *Централизатор любого неединичного элемента из $Z(P)$ имеет нечетный порядок.*

Доказательство. Очевидно, что лемму достаточно доказать для элементов порядка 3 из $Z(P)$. Используя теперь доказательство леммы 2.7 и то, что $\Omega_1(Z(P)) \subseteq V$, завершаем доказательство леммы 2.9.

Лемма 2.10. $H/R \simeq A_4$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $H/R \simeq S_4$. Пусть K — четверная подгруппа из H такая, что $RK \lhd H$. По аргументу Фраттини $H = RA$, где $A = N_H(K)$. Так как $N_R(K) = C_R(K)$, то по лемме 2.3 $N_R(K) = \langle 1 \rangle$. Следовательно, $A \simeq S_4$. Пусть a — некоторый элемент порядка 3 из A. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $a \in P$. Очевидно, что $C_G^*(a) \neq C_G(a)$. Предположим, что порядок $C_G(a)$ — четное число. Рассмотрим вначале случай, когда a сопряжен с некоторым элементом из V. В этом случае $a \in V^g \subseteq R^g$ для некоторого элемента $g \in G$. В силу предыдущей леммы a не сопряжен с элементами из $Z(P)$, т. е. $R^g \in \mathrm{Syl}_3(C_G(a))$. Так как R^g пересекается с сопряженными подгруппами тривиально, то $R^g \lhd C_G(a)$. С другой стороны, $C_R(a) \neq \langle 1 \rangle$ и, следовательно, $R^g \cap R \supseteq C_R(a) \neq \langle 1 \rangle$. Вновь, применяя лемму 2.8, имеем $R^g = R$. Получили противоречие с тем, что $a \notin R$. Мы показали, что a не сопряжен ни с каким элементом из V. Пусть $L \in \mathrm{Syl}_3(C_G(a))$ и $P^y \in \in \mathrm{Syl}_3(G)$, $P^y \supseteq L$. Из предыдущего имеем $a \notin R^y$. Значит, $L = \langle a \rangle \times C_{R^y}(a)$. Так как $Z(P^y)$ — циклическая группа и $\Omega_1(R^y) \subseteq \subseteq Z(R^y)$, то $C_{R^y}(a)$ — циклическая группа, т. е. L — абелева группа. Используя условие 3-скованности $C_G(a)$, получаем $L \lhd C_G(a)$. Далее, $L \subseteq H$, так как L лежит в централизаторе некоторого элемента порядка 3 из $C_V(a)$. Если $|L| > 9$, то $C_{R^y}(a) \cap R \neq \langle 1 \rangle$, и по лемме 2.8 $R = R^y$. Далее, для любого элемента $x \in C_G(a)$ $C_R(a) \cap (C_R(a))^x \neq \langle 1 \rangle$, т. е. $R \cap R^x \neq$

$\neq \langle 1\rangle$. Отсюда $R=R^x$, или $x\in H$. Получили, что $C_G(a)\subseteq H$. Пришли к противоречию с тем, что $C_H(a)$ имеет нечетный порядок, а по нашему допущению порядок $C_G(a)$ четен. Значит, $|L|=9$ и $L=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$, где $\langle b\rangle = L\cap R = V\cap L\subseteq Z(P)$. Так как $b\in Z(P)$, то по лемме 2.9 $C_G(b)$ имеет нечетный порядок и $N_G(\langle b\rangle)$ имеет 2-ранг $\leqslant 1$. В силу выбора элемента a $C_G^*(a)$ имеет 2-ранг 2. Используя теперь инвариантность L в $C_G^*(a)$, легко получить, что подгруппа $\langle b\rangle$ сопряжена по крайней мере с одной подгруппой порядка 3 из L, отличной от $\langle b\rangle$. С другой стороны, $N_P(L)\neq L$, отсюда в L существуют, по крайней мере, три различные подгруппы порядка 3, сопряженные с $\langle a\rangle$. Значит, подгруппы $\langle a\rangle$ и $\langle b\rangle$ сопряжены, т. е. a сопряжен с некоторым элементом из V — противоречие с предыдущим. Данное противоречие показывает, что $C_G(a)$ имеет нечетный порядок. Пусть теперь M_0 — максимальная 2-локальная подгруппа из G, содержащая $\langle a\rangle$. Такая подгруппа существует, так как $N_G(K)\supseteq\langle a\rangle$. В силу предыдущего и леммы 2.2 в M_0 нет элементов порядка 6. Очевидно, что $M_0=N_G(O_2(M_0)))$ и группа G удовлетворяет условиям следствия 1 из [9]. Пришли к противоречию с выбором группы G. Лемма доказана.

Лемма 2.11. *H — сильно 3-вложена в G.*

Доказательство. Очевидно, что для доказательства леммы достаточно показать, что P пересекается тривиально с силовскими 3-подгруппами группы G, не лежащими в H. Предположим противное, т. е. P пересекается нетривиально с некоторой силовской 3-подгруппой P_1 группы G и $P_1\not\subseteq H$. Пусть $D=P\cap P_1$. Сразу же будем считать, что D — такое максимальное пересечение. Предположим, что $D\neq D_1=O_3(N(D))$. Пусть $B\in \mathrm{Syl}_3(N_G(D))$, $B\supseteq N_P(D)$ и $P_2\in\mathrm{Syl}_3(G)$, $P_2\supseteq B$. Так как $P\cap P_2\supseteq N_P(D)\neq D$, то по выбору D имеем $P_2\subseteq H$. Пусть теперь $B_1\in\mathrm{Syl}_3(N_G(D))$, $B_1\supseteq N_{P_1}(D)$ и $P_3\in\mathrm{Syl}_3(G)$, $P_3\supseteq B_1$. Так как $B\cap B_1\supseteq D_1$, то $P_2\cap P_3\supseteq D_1\neq D$, и по выбору D получаем $P_3\subseteq H$. Далее, $P_3\cap P_1\supseteq N_{P_1}(D)\neq D$. Вновь максимальность D дает $P_1\subseteq H$, что противоречит выбору P_1. Следовательно, $D=O_3(N_G(D))$. Предположим теперь, что $|D\cap R|>3$. Используя лемму 2.8, нетрудно показать, что $D\cap R\lhd N_G(D)$, отсюда $N_G(D)\subseteq H$. Так как $N_{P_1}(D)\neq D$, то мы получаем, что P_1 пересекается с некоторой силовской 3-подгруппой из H по подгруппе, большей, чем D. Противоречие с максимальностью D. Значит, $|D\cap R|\leqslant 3$ и $|D|\leqslant 9$. Используя 3-скованность $N_G(D)$ и то, что $O_3(N_G(D))=D$, убеждаемся, что $D\simeq E_{3^2}$ и $N_G(D)/D$ изоморфно вкладывается в $\mathbf{GL}(2, 3)$. Так как $N_G(D)$ не является 3-замкнутой группой, то фактор-группа $N_G(D)/D$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathbf{SL}(2, 3)$. Значит, все нееденичные элементы из D сопряжены. Так как D содержит $v\in Z(P)^\#$, то v инвертируется некоторой инволюцией из $N_G(D)$. Леммы 2.7 и 2.9 показывают, что $C_G(v)=P$. Следовательно, $C_G^*(v)\subseteq N_G(P)$, т. е. $P\neq N_G(P)$. По лемме 2.5 $P\neq N_H(P)$. Пришли к противоречию с леммой 2.10. Лемма 2.11 доказана.

Лемма 2.12. *Группа G не содержит 3-локальных подгрупп, удовлетворяющих предположению 2.1.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть 3-локальная подгруппа H удовлетворяет предположению 2.1. По леммам 2.11 и 2.10 H — сильно 3-вложенная в G подгруппа и $H\neq O^3(H)$. Противоречие с леммой 1.1 заканчивает доказательство леммы 2.12.

Лемма 2.13. *Пусть X — произвольная 3-подгруппа из G экспоненты 3 и $N_G(X)$ содержит четверную группу. Тогда $|X|\leqslant 3^3$.*

Доказательство. Пусть K — четверная подгруппа из $N_G(X)$. Так как экспонента X равна 3, то по лемме 2.2 $|C_X(v)|\leqslant 3$ для любого элемента $v\in K^\#$. Положим $K^\#=\{v_1, v_2, v_3\}$. По теореме 5.3.16 [4] $X=C_X(v_1)\cdot C_X(v_2)\cdot C_X(v_3)$. Значит, $|X|\leqslant 3^3$, и лемма доказана.

Лемма 2.14. *Пусть S — 3-подгруппа из G, ранг S равен 3 и $N_G(S)$ содержит четверную группу K. Тогда S содержит единственную нормальную элементарную абелеву подгруппу E порядка 3^3. В частности, $E\lhd N_G(S)$.*

Доказательство. Так как 3-ранг S равен 3, то в S существует нормальная элементарная абелева подгруппа E порядка 3^3. Предположим, что E не допускает K. Пусть $L=\langle E^x | x\in K\rangle$. Понятно, что $E\supseteq \Omega_1(Z(S))$. Следовательно, $D=\bigcap_{x\in K} E^x \supseteq \Omega_1(Z(S)) \neq \langle 1\rangle$. Если $|D|=9$, то $E^x/D\subseteq Z(S/D)$ для любого $x\in K$, т. е. L/D — элементарная абелева группа. Очевидно, что $D\subseteq Z(L)$. Мы получили, что класс нильпотентности L равен 2. По лемме 5.3.9 [4] экспонента L равна 3. По предыдущей лемме $|L|\leqslant 3^3$, т. е. $L=E$ и E допускает K, что противоречит нашему предположению. Значит, $|D|=3$. Так как для любого элемента $x\in K$ E^x/D — нормальная элементарная абелева подгруппа из S/D порядка $\leqslant 3^2$, то по лемме 1.5 L/D имеет экспоненту 3. Вновь, применяя предыдущую лемму, получаем $|L/D|\leqslant 3^3$. Предположим, что L/D не является элементарной абелевой группой. Тогда L/D — неабелева группа экспоненты 3 и порядка 3^3. Пусть D_1 — полный прообраз в S центра L/D. Так как $E^x \lhd S$, то $E^x/D\lhd L/D$, а значит,

$$E^x/D\cap Z(L/D)\neq\langle 1\rangle.$$

Очевидно, что $|Z(L/D)|=3$, т. е. $E^x/D\supseteq Z(L/D)$ для любого элемента $x\in K$. Отсюда для любого элемента $x\in K$ $E^x\supseteq D_1\neq D$. Получили противоречие с выбором D. Следовательно, L/D — элементарная абелева группа. Так как $D\subseteq Z(L)$, то класс нильпотентности L не больше 2 и L имеет экспоненту 3. По предыдущей лемме $|L|\leqslant 3^3$ и вновь $L=E$ — противоречие с предположением о том, что E не допускает K. Мы показали, что любая нормальная подгруппа из S, изоморфная E_{3^3}, допускает K. Так как $E=\langle C_E(v) | v\in K^\#\rangle$ и в силу леммы 2.2 $|C_E(v)|\leqslant 3$, то $C_E(v)\neq\langle 1\rangle$ для любого $v\in K^\#$. Вновь используя лемму 2.2, получаем

$$E=\langle\Omega_1(C_S(v)) | v\in K^\#\rangle.$$

Отсюда легко следует, что в S — единственная нормальная подгруппа, которая изоморфна E_{3^3}. Очевидно, она характеристична в S и поэтому инвариантна в $N_G(S)$. Лемма доказана.

Лемма 2.15. *Пусть $P\in \mathrm{Syl}_3(G)$, тогда $N_G(P)$ имеет 2-ранг, равный 2.*

Доказательство. В силу леммы 2.4. достаточно показать, что 2-ранг $N_G(P)$ больше 1. Предположим противное, т. е. 2-ранг $N_G(P)$ не превосходит 1. По теореме 3.1 [2] и лемме 2.2 в группе G существует 3-локальная подгруппа, имеющая 2-ранг, равный 2. Выберем среди 3-локальных подгрупп, у которых 2-ранг больше 1, подгруппы с силовской 3-подгруппой максимального порядка. Теперь среди выбранных 3-локальных подгрупп возьмем такую 3-локальную подгруппу H, у которой $O_3(H)$ имеет максимальный порядок. Проводя далее такие же рассуждения, как и при доказательстве леммы 4.2 [2], убеждаемся, что либо $H/O_3(H)\simeq S_4$ или A_4, либо $O_3(H)\in \mathrm{Syl}_3(G)$. Однако последний случай невозможен в силу предположения о ложности леммы. Поэтому $H/O_3(H)\simeq S_4$ или A_4, и можно считать, что $H=N_G(O_3(H))$. По лемме 2.12 H не является максимальной 3-локальной подгруппой группы G. Пусть H_1 — максимальная 3-локальная подгруппа из G, содержащая H. Очевидно, что $O_3(H)\supset O_3(H_1)$. По лемме 2.4 $\overline{H}_1=H_1/O_3(H_1)$ изоморфно вкладывается в $L_3(3)$. С другой стороны, $\overline{H}_1$ содержит 3-локальную подгруппу $\overline{H}=H/O_3(H_1)$ такую, что $\overline{H}/O_3(\overline{H})\simeq S_4$ или A_4 и $O_3(\overline{H}_1)=\langle 1\rangle$. Используя строение группы $L_3(3)$, легко убедиться, что $\overline{H}_1$ неразрешима и поэтому $\overline{H}_1\simeq L_3(3)$. Так как в $L_3(3)$ нормализаторы силовских 3-подгрупп имеют 2-ранг, равный 2, то нетрудно получить противоречие с выбором H. Данное противоречие завершает доказательство леммы.

Предположение 2.2. *Пусть $P\in \mathrm{Syl}_3(G)$, E — единственная нормальная в P элементарная абелева подгруппа порядка 3^3 (смотри леммы 2.14 и 2.15), $N=N_G(E)$, $Q\in \mathrm{Syl}_2(N)$, $R=O_3(N)$.*

Леммы 2.16—2.23 доказаны при предположении 2.2.

Лемма 2.16. *Пусть H — 3-локальная подгруппа, содержащая E. Если $H\cap N$ имеет 2-ранг 2, то $H\subseteq N$.*

Доказательство. Положим $L=O_3(H)$, V — четверная подгруп-

-па из $H\cap N$. Очевидно, что LE допускает V. Так как 3-ранг LE равен 3, то по лемме 2.14 LE обладает единственной нормальной элементарной абелевой подгруппой E_1 порядка 3^3. Используя лемму 2.2, имеем $E_1 = \prod_{v\in V^{\#}} \Omega_1(C_{E_1}(v)) = \prod_{v\in V^{\#}} \Omega_1(C_{LE}(v)) = \prod_{v\in V^{\#}} \Omega_1(C_E(v)) = E$. Если $E\subsetneqq L$, то $H\subseteq N_G(L)\subseteq N_G(E)=N$, и в этом случае лемма доказана. Пусть $E\not\subseteq L$. Отсюда в V найдется инволюция v_0 такая, что $C_E(v_0)\not\subseteq L$. Нетрудно убедиться, что v_0 действует регулярно на L, т. е. L — абелева группа. Так как $E=\prod_{v\in V^{\#}} \Omega_1(C_{LE}(v))$, то $L_0=\Omega_1(L)\subseteq E$. Значит, $C_H(L_0)\supseteq LE\neq L$. В силу выбора L $C_H(L_0)$ не является 3-группой. Поэтому в $C_H(L_0)$ найдутся $3'$-элементы, которые действуют тривиально на $L_0=\Omega_1(L)$ и, следовательно, на L. Получили противоречие с тем, что $C_H(L)\subseteq L$. Лемма доказана.

Лемма 2.17. *Пусть a — элемент порядка 3 из N и $C_N(a)$ имеет четный порядок. Тогда $a\in E$, $C_G^*(a)$ имеет 2-ранг 2 и лежит в N.*

Доказательство. Пусть τ — инволюция из $C_N(a)$. Так как 2-ранг N равен 2, то τ содержится в некоторой четверной подгруппе V из N. Следовательно, $C_E(\tau)\neq\langle 1\rangle$. Если $a\notin E$, то $C_{E\langle a\rangle}(\tau)$ — нециклическая 3-группа, что противоречит лемме 2.2. Значит, $a\in E$. Очевидно, что $C_E(\tau)=\langle a\rangle$ и допускает V. Отсюда $C_G^*(a)$ имеет 2-ранг 2 (содержит V), и по предыдущей лемме $C_G^*(a)\subseteq N$. Лемма доказана.

Лемма 2.18. *Пусть τ — произвольная инволюция из G, централизатор которой содержит элемент порядка 3, тогда τ сопряжена с некоторой инволюцией из Q.*

Доказательство. Пусть D — максимальная 3-подгруппа такая, что $\tau\in N(D)$. В силу выбора τ $D\neq\langle 1\rangle$, без ограничения общности рассуждений можно считать, что $D\subseteq P$. Положим $H=N(D)$. Очевидно, что $O_3(H)=D$. Обозначим через $\overline{H}$ фактор-группу H/D и будем применять черту для обозначения образов при естественном гомоморфизме $H\to\overline{H}$. В силу выбора D имеем, что $C_{\overline{H}}(\overline{\tau})$ — 3-группа. Предположим вначале, что 2-ранг H равен 1. Используя Z^*-теорему Глаубермана, легко показать, что $D\in \mathrm{Syl}_3(H)$, откуда $D=P$, и в этом случае $\tau\in N(P)\subseteq N$, т. е. τ сопряжена с некоторой инволюцией из Q. Пусть теперь 2-ранг H равен 2. По лемме 2.4. $\overline{H}$ изоморфно вкладывается в $L_3(3)$. Так как в $L_3(3)$ централизатор любой инволюции содержит элементы порядка 3, то $\overline{H}\simeq L_3(3)$. Значит, $\overline{H}$ — разрешимая $\{2,3\}$-группа. Если $\langle\overline{\tau},\overline{\tau}^x\rangle$ не является 2-группой для некоторого элемента $x\in\overline{H}$, то $\overline{\tau}$ нормализует неединичную 3-подгруппу из $\langle\overline{\tau},\overline{\tau}^x\rangle$, и легко прийти к противоречию с максимальностью D. Поэтому $\langle\overline{\tau},\overline{\tau}^x\rangle$ — 2-группа для любого элемента $x\in\overline{H}$ и, следовательно, $\overline{\tau}\in O_2(\overline{H})$. Как и прежде, достаточно рассматривать случай $D\notin \mathrm{Syl}_3(H)$, т. е. $\overline{H}$ не является 2-группой. Так как $O_3(\overline{H})=\langle 1\rangle$, то $C_{\overline{H}}(O_2(\overline{H}))\subseteq O_2(\overline{H})$. Следовательно, $O_2(\overline{H})$ — подгруппа некоторой полудиэдральной группы, допускающая нетривиальную 3-группу автоморфизмов. Отсюда и из того, что $\overline{\tau}\in O_2(\overline{H})$, легко получаем, что $O_2(\overline{H})$ — четверная группа. Поэтому $\overline{H}/O_2(\overline{H})$ изоморфна либо S_3, либо A_3, откуда $\overline{H}$ изоморфна либо S_4, либо A_4. По лемме 2.12 H не является максимальной 3-локальной подгруппой. Пусть H_1 — максимальная 3-локальная подгруппа из G, содержащая H. Очевидно, что $O_3(H_1)\subset D$. Значит, фактор-группа $H_1/O_3(H_1)$ обладает 3-локальной подгруппой $H/O_3(H_1)$ такой, что $(H/O_3(H_1))/O_3(H/O_3(H_1))\simeq H/D=\overline{H}$. С другой стороны, по лемме 2.4 $H_1/O_3(H_1)$ изоморфно вкладывается в $L_3(3)$. Используя строение группы $L_3(3)$, нетрудно убедиться, что фактор-группа $H_1/O_3(H_1)$ не может содержать расширений неединичной 3-группы с помощью A_4. Получили противоречие с предыдущим. Данное противоречие показывает, что рассматриваемый случай невозможен, и лемма доказана.

Лемма 2.19. *N — разрешимая $\{2, 3\}$-группа.*

Доказательство. Так как N — 2-ранга 2, то N/R изоморфно вкладывается в группу $L_3(3)$. Поэтому из разрешимости N будет легко следовать, что N является $\{2, 3\}$-группой. Значит, для доказательства леммы достаточно показать разрешимость группы N. Предположим противное, т. е. N — неразрешимая группа. Очевидно, тогда $N/R \simeq L_3(3)$. Так как $C(E)$ — группа нечетного порядка, то легко убедиться, что $C_G(E) = R$. Отсюда и из леммы 2.1 имеем $\Omega_1(R) = E$. Рассматривая естественное действие фактор-группы N/R на E, нетрудно убедиться, что все неединичные элементы из E сопряжены в N. Применяя теперь лемму 2.17, имеем для любого неединичного элемента $e \in E$ $C_G^*(e) \subseteq N$. Предположим, что подгруппа E нетривиально пересекается с некоторой сопряженной подгруппой E^x, для элемента $x \in G$. Пусть e — неединичный элемент из $E \cap E^x$. В силу предыдущего $C_G^*(e) \subseteq N \cap N^x$. Так как $C_G^*(e)$ имеет 2-ранг 2, то по лемме 2.16 $N^x \subseteq N$, откуда $N^x = N$ и $E^x = E$. Мы показали, что E тривиально пересекается с сопряженными подгруппами. Очевидно, что фактор-группа N/R обладает подгруппой, изоморфной A_4. Пусть B — ее полный прообраз в N и $V \in \mathrm{Syl}_2(B)$. Так как $V \simeq E_4$, то по лемме 2.3 $N_R(V) = \langle 1 \rangle$ и по аргументу Фраттини $N_B(V) \simeq A_4$. Пусть a — элемент порядка 3 из $N_B(V)$. Если $|C_G(a)|$ — нечетное число, то, рассматривая максимальную 2-локальную подгруппу M_0, содержащую $\langle a \rangle$, и проводя такие рассуждения, как при завершении доказательства леммы 2.10, приходим к противоречию с выбором группы G. Следовательно, $|C_G(a)|$ — четное число, и по лемме 2.18 элемент a перестановочен с некоторой инволюцией, сопряженной инволюции $\tau \in Q$. Так как $C_E(\tau) \neq \langle 1 \rangle$, то по лемме 2.2 элемент a сопряжен с некоторым элементом из E. Отсюда $a \in E^x$ для некоторого элемента $x \in G$. Положим $D = C_N(a)$. Применяя лемму 2.17 и условие $a \notin E$, имеем $2 \notin \pi(D)$. Отсюда легко получить, что D — 3-группа. Так как $a \in E^x$, то в силу предыдущего $C_G(a) \subseteq N^x$ и $D \subseteq N^x$. Предположим, что D содержит элемент d порядка 9. Очевидно, что экспонента силовских 3-подгрупп из N/R и N^x/R^x равна 3, т. е. $d^3 \in R \cap R^x$. Вспоминая, что $\Omega_1(R) = E$, получаем $d^3 \in E \cap E^x$. Теперь легко прийти к противоречию с предыдущими рассуждениями. Следовательно, экспонента D равна 3. В силу выбора элемента a и действия фактор-группы N/R на E получаем, что $|C_E(a)| = 3$ и смежный класс Ra не лежит в центре ни одной силовской 3-подгруппы из N/R. Используя теперь ограничение на экспоненту D и строение R, убеждаемся, что $|D \cap R| = 3$ и $|DR/R| \leqslant 9$, т. е. $|D| \leqslant 3^3$. Если мы предположим, что $|D| = 9$, то централизатор образа элемента a в фактор-группе $N/\Phi(R)$ тоже будет иметь порядок, равный 9. Получили противоречие с леммой 1.6, значит, $|D| = 3^3$. Так как $D \cap R \lhd D$, то $D \cap R \subseteq Z(D)$. С другой стороны, $a \in Z(D)$ и $a \notin D \cap R$. Поэтому $|Z(D)| \geqslant 9$, откуда $D = Z(D)$ — элементарная абелева группа порядка 3^3. Следовательно, в D существует элементарная абелева подгруппа порядка 9, имеющая тривиальное пересечение с R. Вновь рассматривая фактор-группу $N/\Phi(R)$, легко прийти к противоречию с заключением леммы 1.7. Лемма 2.19 доказана.

Лемма 2.20. *Справедливо одно из следующих соотношений:*

1) $P = R$,

2) $N/R \simeq \mathrm{GL}(2, 3)$.

Доказательство. Предположим, что $P \neq R$. Пусть $\bar{N} = N/R$. Мы имеем $3 \in \pi(\bar{N})$, $O_3(\bar{N}) = \langle 1 \rangle$. По предыдущей лемме $B = O_2(\bar{N}) \neq \langle 1 \rangle$ и $C_{\bar{N}}(B) \subseteq B$. Так как B является подгруппой полудиэдральной группы и на B действует нетривиальная 3-группа автоморфизмов, то либо B — четверная группа, либо B — группа кватернионов порядка 8. Рассмотрим вначале первый случай. Очевидно, что либо $\bar{N} \simeq A_4$, либо $\bar{N} \simeq S_4$. В силу леммы 2.12 N не является максимальной 3-локальной подгруппой в G. Пусть H — максимальная 3-локальная подгруппа из G, содержащая N. Из предыдущего имеем $H \neq N$. Так как $N \subset H$, то $E \subseteq H$

и $H\cap N$ имеет 2-ранг, равный 2. По лемме 2.16 $H\subseteq N$, т. е. $H=N$ — противоречие с предыдущим. Следовательно, B — группа кватернионов порядка 8. Используя теперь то, что $\bar{N}$ имеет 2-ранг, равный 2 и $3\in\pi(\bar{N})$, легко показать, что $\bar{N}\simeq \mathbf{GL}(2, 3)$. Лемма доказана.

Лемма 2.21. *Пусть a — элемент порядка 3 из G. Если $C_G(a)$ имеет четный порядок, то $C_G(a)$ — $\{2, 3\}$-группа.*

Доказательство. Пусть τ — инволюция из $C_G(a)$. Применяя лемму 2.18, без ограничения общности рассуждений мы можем считать, что $\tau\in Q$. Так как $C_E(\tau)\neq\langle 1\rangle$ и в $C_G(\tau)$ все циклические подгруппы порядка 3 сопряжены, то вновь без ограничения общности рассуждений мы можем считать, что $a\in E$. Поэтому $C_N(a)$ имеет четный порядок и по лемме 2.17 $C_G^*(a)\subseteq N$. Применяя лемму 2.19, заканчиваем доказательство леммы 2.21.

Лемма 2.22. *Если Q не является четверной группой, то для любой инволюции $\tau\in Q\backslash Z(Q)$ выполняется неравенство $|C_R(\tau)|\geqslant 9$.*

Доказательство. Предположим противное и пусть τ — такая инволюция из $Q\backslash Z(Q)$, что $C_R(\tau)=\langle a\rangle\simeq Z_3$. Так как $C_E(\tau)\neq\langle 1\rangle$, то $\langle a\rangle\subseteq E$, и на фактор-группе R/E τ действует регулярно. Если R/E — не циклическая группа, то Q действует точно на R/E, и при этом τ инвертирует каждый элемент из R/E. Теперь легко получить противоречие с тем, что $\tau\notin Z(Q)$. Следовательно, R/E — циклическая группа, и центральная инволюция из Q действует тривиально на R/E. Положим z — инволюция из $Z(Q)$ и $C_R(z)=\langle b\rangle$. В силу предыдущего $R=E\langle b\rangle$. Значит, $|R:\langle b\rangle|=9$. Если $R\neq N_R(\langle b\rangle)$, то фактор-группа $N_R(\langle b\rangle)/\langle b\rangle$ имеет порядок 3, и на ней Q действует таким образом, что z действует регулярно. Так как Q — не элементарная подгруппа полудиэдральной группы, то $Z(Q)$ — циклическая группа, и поэтому Q действует точно на фактор-группе $N_R(\langle b\rangle)/\langle b\rangle$, что невозможно. Следовательно, $\langle b\rangle\triangleleft R$. Очевидно, что $z\in C_{R\langle z\rangle}(b)$ и $C_{R\langle z\rangle}(b)\triangleleft R\langle z\rangle$. Поэтому z действует тривиально на фактор-группе $R/C_R(b)$, и так как $\langle b\rangle=C_R(z)$, то $R/C_R(b)$ — единичная группа. Мы показали, что $b\in Z(R)$, отсюда R — абелева группа. Докажем теперь, что $\Omega_1(P)=E$. Так как R — абелева, то $\Omega_1(R)=E$, и поэтому достаточно показать, что $\Omega_1(P)=\Omega_1(R)$. Предположим противное. По лемме 2.20 $N/R\simeq\mathbf{GL}(2, 3)$. Так как в $P\backslash R$ есть элемент порядка 3, то в расширении N группы R с помощью $\mathbf{GL}(2, 3)$ силовская 3-подгруппа расщепляема. Используя абелевость R и теорему 2 из [10], получаем, что N — расщепляемое расширение R, т. е. в N есть подгруппа A, изоморфная $\mathbf{GL}(2, 3)$. Очевидно, что инволюция из $Z(A)$ действует нетривиально на E и поэтому 3-ранг ее централизатора не меньше двух. Получили противоречие с леммой 2.2. Следовательно, $\Omega_1(P)=E$. Предположим, что N не является сильно 3-вложенной подгруппой. Пусть B — минимальная нетривиальная 3-подгруппа из P такая, что $N_G(B)\not\subseteq N$. В силу минимальности B имеем $\Omega_1(B)=B$, и по предыдущему $B\subseteq E$. Значит, $R\subseteq N_G(B)$. Положим $D=O_3(N_G(B))$ и $D_0=\Omega_1(D)$. Так как $E\subseteq N_G(B)$, то E является нижним слоем некоторой силовской 3-подгруппы из $N_G(B)$. Поэтому $D_0\subseteq E$, т. е. $C(D_0)\cap N_G(B)\supseteq R$. С другой стороны, любой $3'$-элемент из $N_G(B)$, действующий нетривиально на D, действует нетривиально на D_0 (теорема 5.3.10 [4]). Используя теперь то, что группа G является группой типа характеристики 3, получаем, что $C(D_0)\cap N_G(B)$ является 3-группой. Следовательно, $R\subseteq D$, отсюда $E=D_0$. Мы имеем

$$N_G(B)\subseteq N_G(D_0)=N_G(E)=N$$

— противоречие с выбором B. Значит, N — сильно 3-вложенная подгруппа в G. Покажем теперь, что в N есть нормальная подгруппа N_0 такая, что $N/N_0\simeq S_3$, 2-ранг N_0 равен 1 и $z\in N_0$. Если $N/R\simeq\mathbf{GL}(2, 3)$, то в качестве N_0 можно взять полный прообраз в N подгруппы $O_2(N/R)$. Согласно лемме 2.20, нам осталось рассмотреть случай $P=R$, т. е. $N=R\leftthreetimes Q$. Так как $z\in Z(Q)$ и R — абелева группа, то $R=\langle b\rangle\times K$, где $K=[R, z]$ и $K\triangleleft N$. Положим $Q_0=C_Q(b)$. Очевидно, что $|Q:Q_0|\leqslant 2$ и

$z \in Q_0$. Используя лемму 2.3 и то, что 2-ранг Q равен 2, получаем $|Q:Q_0| = 2$, и Q_0 имеет 2-ранг 1. Теперь нетрудно убедиться, что в качестве искомой подгруппы N_0 в рассматриваемом случае можно взять подгруппу $K\langle b^3\rangle Q_0$. Мы показали, что подгруппа N_0 существует в любом случае. В силу леммы 1.2 инволюция z сопряжена с некоторой инволюцией из $N \backslash N_0$, т. е. сопряжена с некоторой инволюцией t из $Q \backslash Z(Q)$. Пусть $C_E(t) = \langle c\rangle$. Очевидно, что $c \neq 1$. Используя лемму 2.2 и сопряженность инволюций z и t, получаем, что $\langle c\rangle$ и $\Omega_1(\langle b\rangle)$ сопряжены в G. Так как N сильно 3-вложена в G, то N контролирует слияние своих 3-элементов, т. е. $\langle c\rangle$ и $\Omega_1(\langle b\rangle)$ сопряжены в N. Лемма 2.3 показывает, что в N должны быть сопряжены инволюции z и t. Получили противоречие с выбором z и t и строением N (см. лемму 2.20). Данное противоречие заканчивает доказательство леммы 2.22.

Лемма 2.23. *Пусть Q — четверная группа. Тогда в Q существуют две различные инволюции τ_1 и τ_2 такие, что $|C_R(\tau_l)| \geqslant 9$ для $l = 1, 2$.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Так как Q — четверная группа, то по леммам 2.19 и 2.20 $N = R \leftthreetimes Q$. Если фактор-группа R/E — не циклическая, то, по крайней мере, две инволюции из Q будут действовать на R/E нерегулярно. Очевидно, эти инволюции будут централизовать в R подгруппы порядка не меньше 9 — противоречие с предположением о ложности леммы. Значит, R/E — циклическая группа. Рассмотрим вначале случай $R = E$. Используя то, что G — группа типа характеристики 3, легко показать, что в этом случае N сильно 3-вложена в G. Пусть τ — произвольная инволюция из Q и $K = [E, \tau]$. Очевидно, что $K\langle\tau\rangle \lhd N$ и $N/K\langle\tau\rangle \simeq S_3$. По лемме 1.2 τ сопряжена в G с некоторой инволюцией из $N \backslash K\langle\tau\rangle$, т. е. с некоторой инволюцией из $Q \backslash \{\tau\}$. Так как τ была произвольной инволюцией из Q, то, очевидно, что все инволюции из Q сопряжены в G. Лемма 2.2 показывает, что централизаторы инволюций из Q в E тоже должны быть сопряжены относительно G, а так как N контролирует слияние своих 3-элементов, то и относительно N. Однако последнее невозможно. Следовательно, $R \neq E$. Пусть i — инволюция из Q такая, что $|C_R(i)| \geqslant 9$. Очевидно, что i — как раз та инволюция, которая действует тривиально на фактор-группе R/E. Понятно, что централизатор любой инволюции из $Q \backslash \{i\}$ в R имеет порядок, равный трем. Предположим, что N сильно 3-вложена в G. Вновь, применяя лемму 1.2, легко показать, что i сопряжена в G с некоторой инволюцией $\tau \in Q \backslash \{i\}$. Так как $|C_R(\tau)| = 3$, то по лемме 2.17 некоторая силовская 3-подгруппа из $C_G(\tau)$ совпадает с $C_R(\tau)$, т. е. имеет порядок, равный трем. С другой стороны, порядок силовской 3-подгруппы из $C_G(i)$ не меньше 9. Получили противоречие с сопряженностью инволюций i и τ.

Значит, N не является сильно 3-вложенной подгруппой в G. Так как N — максимальная 3-локальная подгруппа в G (лемма 2.16), то в группе G нет сильно 3-вложенной 3-локальной подгруппы. Очевидно, что некоторая 3-локальная подгруппа из G обладает сечением, изоморфным $\mathbf{SL}(2, 3)$. Пусть D — максимальная 3-подгруппа из G такая, что $N_G(D)$ содержит сечение, изоморфное $\mathbf{SL}(2, 3)$, и $X = N_G(D)$. Очевидно, что $D = O_3(X)$. Пусть t — некоторый элемент порядка 4 из X и $\pi = t^2$. Предположим, что $C_D(\pi) \neq \langle 1\rangle$. Понятно, что в $C_D(\pi)$ найдется элемент a порядка 3 такой, что $t \in C_G^*(a)$. Так же как при доказательстве леммы 2.21, показываем, что $C_G^*(a) \subseteq N^x$ для некоторого элемента $x \in G$. Получили противоречие с тем, что в N^x нет элементов порядка 4. Значит, π действует регулярно на D и D — абелева группа.

Предположим, что ранг D равен 3 и пусть $A = \Omega_1(D)$. Очевидно, что $\langle t\rangle$ действует на A как группа регулярных автоморфизмов. Однако число $|A| - 1 = 13 \cdot 2$ не делится на 4. Поэтому ранг D равен 2. Так как фактор-группа X/D представлена точно на $D/\Phi(D)$, то X/D изоморфно вкладывается в $\mathbf{GL}(2, 3)$. В силу выбора X X/D изоморфна либо $\mathbf{SL}(2, 3)$, либо $\mathbf{GL}(2, 3)$. Пусть $D_1 \in \mathrm{Syl}_3(X)$. Очевидно, что $|D_1 : D| =$

$=3$. Если $|D|>9$, то нетрудно проверить, что D — единственная в D_1 абелева подгруппа максимального порядка, т. е. $J(D_1)=D$.

Отсюда получаем, что $D_1 \in \mathrm{Syl}_3(G)$. Без ограничения общности рассуждений мы можем считать $D_1=R$. Из максимальности N получаем, что

$$N=N_G(J(R))=N_G(J(D_1))=N_G(D)=X.$$

Отсюда N содержит элементы порядка 4, что невозможно.

Следовательно, $|D|=9$ и $D\simeq E_9$. Вновь можно считать, что $D_1\subseteq R$. Следовательно, в R есть самоцентрализуемая элементарная абелева подгруппа порядка 9 — это D. Значит, в $R\backslash E$ есть элемент a порядка 3 такой, что $|C_E(a)|=3$. Так как R/E — циклическая группа, то $E\langle a\rangle \lhd N$.

Положим $\langle c\rangle = C_{E\langle a\rangle}(i)$, $\langle d\rangle=\langle c\rangle \cap E$. В силу выбора инволюции i имеем $E\langle a\rangle=E\langle c\rangle$ и $|d|=3$. Очевидно, что $|Z(E\langle a\rangle)|=3$, отсюда $Z(E\langle a\rangle)=\langle d\rangle$. С другой стороны, $E=K\times\langle d\rangle$, где $K=[E, i]$. Далее,

$$K^c=\langle [g, i] \mid g\in E\rangle^c=\langle [g^c, i] \mid g^c\in E\rangle \subseteq K,$$

т. е. $N(K)\supseteq E\langle c\rangle=E\langle a\rangle$. Отсюда

$$\langle 1\rangle \neq K\cap Z(E\langle a\rangle)=K\cap\langle d\rangle=\langle 1\rangle.$$

Получили противоречие с предположением о ложности леммы. Лемма 2.23 доказана.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ЦЕНТРАЛИЗАТОРОВ НЕКОТОРЫХ ИНВОЛЮЦИЙ

Пусть группа G — контрпример к основной теореме, τ — инволюция из G такая, что фактор-группа $C_G(\tau)/\langle\tau\rangle$ является $C\Theta\Theta$-группой (т. е. содержит элементы порядка 3 и централизатор любого элемента порядка 3 является 3-группой).

Положим $C=C_G(\tau)$. В этом разделе мы получим следующий результат.

Теорема 3.1. *C — разрешимая группа.*

Доказательство теоремы будем вести от противного, т. е. предположим, что C — неразрешимая группа. Пусть H — произвольная максимальная 2-локальная подгруппа группы G, содержащая C.

Следующие обозначения мы будем использовать только внутри данного раздела: $Q=O_2(C)$, $R=O_2(H)$, $T\in\mathrm{Syl}_2(H)$.

Лемма 3.1. *$C/Q\simeq L_2(8)$ и $Q/\langle\tau\rangle$ — элементарная абелева группа.*

Доказательство. Так как G — группа типа характеристики 2, то $Q\neq\langle\tau\rangle$ и, следовательно, силовские 3-подгруппы группы C — циклические. Теорема 10.1 [6] и несложные вычисления показывают, что $C/Q\simeq L_2(q)$. Применяя лемму 1.1 [15], убеждаемся, что либо $q=4$, либо $q=8$.

Если $q=4$, то в G легко найти самоцентрализуемую циклическую подгруппу порядка 6, содержащую τ. Основной результат из [16] приводит к противоречию с выбором группы G. Значит, $q=8$. Теорема 8.2 [6] заканчивает доказательство леммы.

Лемма 3.2. $\tau\in R$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $\tau\notin R$. В частности, из 2-скованности группы H имеем $\tau\notin C(R)$. Очевидно, что

$$O_2(RC)=RQ \text{ и } RC/RQ\simeq C/Q.$$

Так как $\tau\notin C(R)$, то из предложения 1 [8] получаем, что $\tau\notin[RC, RQ]=$ $=K$.

Следовательно, фактор-группа RC/K является расширением циклической группы порядка 2 Z_2 с помощью группы $L_2(8)$. Используя тривиальность мультипликатора Шура группы $L_2(8)$, убеждаемся, что имеет место изоморфизм $RC/K\simeq\langle\tau\rangle\times L_2(8)$. Рассматривая полный прообраз группы $L_2(8)$ в RC и применяя теорему 8.2 [6], получаем, что K — элементарная абелева группа.

Далее, из условий $R\lhd RC$ и $\tau\notin R$ легко вывести включение $R\subseteq K$. Теперь условие 2-скованности приводит нас к равенству $R=K$.

Положим $\overline{H}=H/R$ и будем применять черту для обозначения образа при естественном гомоморфизме $H\to\overline{H}$.

Понятно, что $C_{\overline{H}}(\overline{\tau})/\langle\overline{\tau}\rangle$ — неразрешимая $C\Theta\Theta$-группа. Так как $C_{\overline{H}}(\overline{\tau})$ содержит подгруппу, изоморфную $L_2(8)$, то, используя доказательство предыдущей леммы, получаем, что

$$C_{\overline{H}}(\overline{\tau})/O_2(C_{\overline{H}}(\overline{\tau}))\simeq L_2(8).$$

Пусть R_1 — полный прообраз $O_2(C_{\overline{H}}(\overline{\tau}))$ в H. Рассматривая теперь подгруппу R_1C, как и прежде, убеждаемся в том, что $[R_1C, R_1Q]$ — элементарная абелева группа, не содержащая τ. Отсюда легко вытекает равенство $R=[R_1C, R_1Q]$, т. е. $R_1=R\langle\tau\rangle$. Следовательно, $\overline{C}=C_{\overline{H}}(\overline{\tau})\simeq\simeq\langle\overline{\tau}\rangle\times L_2(8)$. По лемме 2.21 централизаторы элементов порядка 3 из C являются $\{2, 3\}$-группами. Так как элементы порядка 3 из C действуют регулярно на R, в H силовские 3-подгруппы — циклические (лемма 2.2) и $\overline{H}$ — 2-скованная группа с тривиальным ядром, то $O(\overline{H})=\langle 1\rangle$. Очевидно, что $O_2(\overline{H})=\langle 1\rangle$. Теперь легко получаем, что $S(\overline{H})=O_{3'}(\overline{H})=\langle 1\rangle$. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа из $\overline{H}$. В силу предыдущего $3\in\pi(L)$ и L — простая неабелева группа. Если $\overline{C}\subseteq L$, то по теореме из [17] силовские 2-подгруппы в L должны быть элементарными абелевыми порядка 8, что невозможно. Значит, $L\cap\overline{C}\simeq\simeq L_2(8)$ и $\overline{\tau}\notin L$. Теперь легко проверить, что L является $C\Theta\Theta$-группой с циклическими силовскими 3-подгруппами. Отсюда $L\simeq L_2(8)$. Очевидно, что $C_{\overline{H}}(L)=\langle\overline{\tau}\rangle$. Получили противоречие с условием $O_2(\overline{H})=\langle 1\rangle$. Данное противоречие заканчивает доказательство леммы 3.2.

Лемма 3.3. $H/R\simeq L_2(8)$.

Доказательство. По предыдущей лемме $\tau\in R$. Теперь легко проверить, что фактор-группа H/R является неразрешимой $C\Theta\Theta$-группой. Теорема 10.1 [6] и несложные вычисления показывают, что $H/R\simeq\simeq L_2(q)$. Так как группа $L_2(8)$ является сечением H/R, то $H/R\simeq L_2(8)$ и лемма доказана.

Лемма 3.4. $T\in\mathrm{Syl}_2(G)$.

Доказательство. Предположим противное. Так как H — максимальная 2-локальная подгруппа, то по теореме 3.2.1 [1] R содержит только один нецентральный главный фактор группы H. Предположим вначале, что $\tau\notin Z(R)$. По предложению 1 [8] имеем $\tau\notin[R, H]=K$. В силу предыдущего K — минимальная нормальная подгруппа в H и $R=K\langle\tau\rangle$. Нетрудно убедиться, что $H/K\simeq\langle\tau\rangle\times L_2(8)$. Понятно, что $C_K(\tau)$ допускает C, т. е. $\langle 1\rangle\neq C_K(\tau)\lhd H$. Отсюда $K=C_K(\tau)$. Противоречие с предположением о том, что $\tau\notin Z(R)$. Следовательно, $\tau\in Z(R)$ и $H=C$. Так как $Q=R$ содержит только один нецентральный главный фактор группы C, то $Q/\langle\tau\rangle$ — минимальная нормальная подгруппа в $C/\langle\tau\rangle$. По теореме 8.2 [6] $|Q/\langle\tau\rangle|=2^6$. Очевидно, что в $C/\langle\tau\rangle$ сопряжены все неединичные элементы из $Q/\langle\tau\rangle$. Так как Q не может быть группой кватернионов, то в $Q\setminus\langle\tau\rangle$ есть инволюции, и из предыдущего Q накрывается четверными подгруппами, т. е. Q — элементарная абелева группа. По предположению $T\notin\mathrm{Syl}_2(G)$. Отсюда $N_G(T)\not\subseteq C=N_G(Q)$. Пусть $x\in N_G(T)\setminus C$. Очевидно, что $Q^x\neq Q$ и $Q^x\subseteq T$. Так как в фактор-группе $T/\langle\tau\rangle$ $Q/\langle\tau\rangle$ является элементарной абелевой подгруппой максимального порядка, то $\tau\in Q^x$ и $|Q^x/\langle\tau\rangle|=|Q/\langle\tau\rangle|$. Используя строение фактор-группы $C/\langle\tau\rangle$, нетрудно убедиться, что все инволюции из $T/\langle\tau\rangle$ лежат в $Q^x/\langle\tau\rangle\cup Q/\langle\tau\rangle$ и

$$Q^x/\langle\tau\rangle\cap Q/\langle\tau\rangle=Z(T/\langle\tau\rangle).$$

Поэтому в T только две различные подгруппы, сопряженные с Q относительно $N_G(T)$, — Q и Q^x. Значит, $|N_G(T):N_C(T)|=2$, т. е. $N_C(T)\lhd N_G(T)$. Нетрудно убедиться, что $Z(N_C(T))=\langle\tau\rangle$, отсюда $\langle\tau\rangle\lhd N_G(T)$. Получили противоречие с тем, что $C(\tau) \not\trianglerighteq N_G(T)$. Данное противоречие заканчивает доказательство леммы.

Лемма 3.5. $H = C$.

Доказательство. Предположим противное. Значит, $\tau \notin Z(R)$. В силу предложения 1 [8] $\tau \notin [R, H] = K$. Очевидно, что $R = K\langle\tau\rangle$ и $H/K \simeq \langle\tau\rangle \times L_2(8)$. Так как элементы порядка 3 из H действуют на K регулярно, то K является элементарной абелевой группой. Положим $K_0 = C_K(\tau)$. Очевидно, что $K_0 \lhd H$. Пусть L — полный прообраз подгруппы $L_2(8)$ из H/K в H и $T_1 \in \mathrm{Syl}_2(L)$. По леммам 1.2 и 1.1 [7] все инволюции из $T_1 \backslash K$ сопряжены между собой в L, и T_1 имеет класс нильпотентности 2. Так как $|T : T_1| = 2$ и в группе G нет подгрупп индекса 2, то по лемме Томпсона в T_1 существует инволюция j, сопряженная с τ. Предположим вначале, что $j \in K$. В силу выбора j $|C_T(j)| \leqslant |C_T(\tau)|$. Из того, что $K_0 \lhd H$ и $K_0 \neq K$, имеем $|K : K_0| \geqslant 2^6$. Очевидно,

$$|K| \leqslant |C_T(j)| \leqslant |C_T(\tau)| \leqslant |K_0| \cdot 16.$$

Значит, $2^6 \leqslant |K : K_0| = \dfrac{|K|}{|K_0|} \leqslant 16$, что невозможно. Мы показали, что $j \notin K$, т. е. что все инволюции из $T_1 \backslash K$ сопряжены с τ и в K нет ни одной инволюции, сопряженной с τ. Докажем теперь, что подгруппа K слабо замкнута в T относительно G. Предположим противное, и пусть существует элемент $g \in G$ такой, что $K^g \neq K$ и $K^g \subseteq T$. Положим $D = K^g \cap K$. В силу предыдущих рассуждений $K^g \cap T_1 \subseteq K$, отсюда $|K : D| = 2$. Так как $|K : K_0| \geqslant 2^6$, то $R \neq K \cdot K^g$. Следовательно, в K^g существует инволюция $t \notin R$. Отсюда в H существует элемент h такой, что $\langle t, t^h\rangle$ не является 2-группой. С другой стороны, $|K : C_K(tt^h)| \leqslant 4$, т. е. $C_K(tt^h) \neq \langle 1\rangle$. Получили противоречие, поскольку по лемме 1.1 [7] L является CIT-группой, а значит, централизаторы инволюций из K в H являются тоже 2-группами. Мы показали, что K слабо замкнута в T относительно G. Предположим теперь, что в G существует подгруппа, сопряженная с K, отличная от K и имеющая нециклическое пересечение с K. Пусть D — максимальное нециклическое пересечение K с сопряженной подгруппой, отличной от K. Так как D — не циклическая группа, то $C_G(D)$ — $3'$-группа и, используя лемму из [18], легко показать, что $C_G(D)$ — разрешимая группа. Вследствие слабой замкнутости K в T можно считать, что $N_T(D) \in \mathrm{Syl}_2(N_G(D))$. Пусть $T_0 \in \mathrm{Syl}_2(C_G(D))$ и $T_0 \subseteq T$. Очевидно, что $K \subseteq T_0$. По аргументу Фраттини имеем

$$N_G(D) = C_G(D)N_{N(D)}(T_0) = C_G(D)N_{N(D)}(K).$$

Так как $N_G(D) \nsubseteq H$, то из последних равенств $C_G(D) \nsubseteq H$ Положим $S = O_2(C_G(D))$, $A = K \cap S$, $B = T_1 \cap S$. Очевидно, что $D \subseteq A$, $|S : A| \leqslant 2^4$ и $|S : B| \leqslant 2$. Используя теперь то, что в $B \backslash A$ нет инволюций, сопряженных с инволюциями из A, получаем, что $B \cap A^x \subseteq A$ для любого элемента $x \in C_G(D)$. В силу максимальности D и того, что $|S : B| \leqslant 2$, получаем $|A : D| \leqslant 2$. Очевидно, $K \nsubseteq S$. Пусть $b \in K \backslash S$. Обозначим через $\overline{C_G(D)}$ фактор-группу $C_G(D)/D$ и будем применять черту для обозначения образа при естественном гомоморфизме $C_G(D) \to \overline{C_G(D)}$. Понятно, что $\bar{S} = O_2(\overline{C_G(D)})$. Так как $K \lhd T$, то $[S, K] \subseteq S \cap K = A$. Следовательно, $[\bar{S}, \bar{K}] \subseteq \bar{A}$, где $|\bar{A}| \leqslant 2$. В частности, $[\bar{S}, \bar{b}] \subseteq \bar{A}$ и $\bar{b} \notin \bar{S}$. Несложные вычисления показывают, что $\left|\bar{S} : C_{\bar{S}}(\bar{b})\right| \leqslant 2$. Используя условие $\bar{b} \notin \bar{S}$, получаем, что в $\overline{C_G(D)}$ существует элемент y такой, что $\langle \bar{b}, \bar{b}^y\rangle$ не является 2-группой. Пусть d — элемент нечетного порядка из $\langle \bar{b}, \bar{b}^y\rangle$. Очевидно, что $\left|\bar{S} : C_{\bar{S}}(d)\right| \leqslant 4$. Так как d — $3'$-элемент, то $C_{\bar{S}}(d) = \bar{S}$. Следовательно, в $C_G(D)$ есть элемент нечетного порядка, действующий тривиально на S/D, а значит, и на S. Используя разрешимость $C_G(D)$, получаем, что $O(C_G(D)) \neq \langle 1\rangle$, т. е. $O(N_G(D)) \neq \langle 1\rangle$. Получили противоречие с выбором группы G. Следовательно, K пересекается с сопряженными подгруппами по циклическим подгруппам. Пусть $z \in Z(T)^*$. Так как $C_H(z) = T$, то по результату Баумана [14] $C_G(z) \nsubseteq H$. Пусть $P = O_2(C_G(z))$, $P_0 = P \cap K$, $P_1 = P \cap T_1$. Очевидно, $|P:P_0| \leqslant 2^4$ и $|P:P_1| \leqslant 2$. Так же, как и прежде, получаем, что для любого элемента $g \in C_G(z) \backslash H$, $P_0^g \cap P_1 \subseteq P_0$. Из предыдущего $P_0 \cap P_0^g = \langle z \rangle$. Значит, $P_0^g \cap P_1 = \langle z \rangle$. Отсюда $|P_0^g| \leqslant 4$, т. е. $|P_0| \leqslant 4$. Используя лемму 1.1 [7], легко получить, что $|Z(T_1)| = |K|^{1/2}$. Так как $Z(T_1)$ допускает τ и $Z(T) = C_{Z(T_1)}(\tau)$, то

$$|Z(T)| \geqslant |Z(T_1)|^{1/2} = |K|^{1/4}.$$

Очевидно, что $Z(T) \subseteq K \cap P = P_0$, т. е. $|Z(T)| \leqslant 4$. Отсюда $4 \geqslant |Z(T)| \geqslant |K|^{1/4}$ или $|K| \leqslant 2^8$. С другой стороны, $|K| \geqslant |K_0| \cdot 2^6$. Получаем, что $2^8 \geqslant |K_0| \cdot 2^6$, отсюда $|K_0| \leqslant 4$. Пришли к противоречию с тем, что $\langle 1 \rangle \neq K_0 \lhd L$ (т. е. $|K_0| \geqslant 2^6$). Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Q слабо замкнута в T относительно G.*

Доказательство. Пусть Q не является слабо замкнутой в T относительно G и $Q^g \subseteq T$, $Q^g \neq Q$ для некоторого элемента $g \in G$. Положим $D = Q \cap Q^g$. Предположим вначале, что Q не является элементарной абелевой группой. Отсюда легко получить, что $|Q| \neq 2^7$, т. е. $|Q| \geqslant 2 \cdot 2^{12}$. Если D не является элементарной абелевой группой, то $\langle \tau \rangle = \Phi(Q) = \Phi(D) = \Phi(Q^g) = \langle \tau^g \rangle$. В этом случае мы получаем, что $g \in C_G(\tau) = C = N_G(Q)$. Противоречие с тем, что $Q \neq Q^g$. Значит, D — элементарная абелева группа. Пусть элемент $t \in Q^g \backslash Q$. Так как фактор-группа $Q^g/Q^g \cap Q = Q^g/D$ вкладывается изоморфно в T/Q, то $t^2 \in D$, т. е. t индуцирует на D автоморфизм порядка 1 или 2. Используя то, что фактор-группа $Q^g/\langle \tau^g \rangle$ — элементарная абелева, получаем $[t, D] \subseteq \langle \tau^g \rangle$. Теперь нетрудно показать, что $|D : C_D(t)| \leqslant 2$. Так как $|Q:D| \leqslant 2^3$, то $|Q : C_G(t)| \leqslant 2^4$. С другой стороны, рассматривая фактор-группу $C/\langle \tau \rangle$, убеждаемся, что

$$|C_Q(t)| \leqslant 2\left(\frac{|Q|}{2}\right)^{1/2} = \sqrt{2}\,|Q|^{1/2}.$$

Следовательно,

$$2^4 \geqslant \frac{|Q|}{|C_D(t)|} \geqslant \frac{|Q|}{|C_Q(t)|} \geqslant \frac{|Q|}{\sqrt{2}\,|Q|^{1/2}} = \frac{|Q|^{1/2}}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда $|Q| \leqslant 2^9$. Получили противоречие с предыдущими рассуждениями. Мы показали, что Q — элементарная абелева группа. Используя лемму 1.1 [7] и то, что Q не является слабо замкнутой в T, получаем, что $|Q| = 2^7$. Пусть Z — полный прообраз в T центра фактор-группы $T/\langle \tau \rangle$. Несложные вычисления и лемма 1.1 [7] показывают, что T/Z — абелева группа, для любого элемента $z \in Z^*$ $|T : C_T(z)| \leqslant 2$ и для любого элемента $x \in Q \backslash Z$ $C_T(x) = Q$. Вновь используя строение фактор-группы $T/\langle \tau \rangle$ (лемма 1.1 [7]), легко убедиться, что $T = QQ^g$ и $Q \cap Q^g = Z$. Следовательно, $Z \subseteq Z(T)$ и $T/Z(T)$ — абелева группа, т. е. T — группа класса нильпотентности 2. Используя основной результат из [19], получаем противоречие с выбором группы G. Данное противоречие показывает, что Q слабо замкнута в T относительно G. Лемма доказана.

Лемма 3.7. *$\langle \tau \rangle$ сильно замкнута в Q относительно G.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. существует инволюция $j \in Q$ такая, что $j \neq \tau$ и j сопряжена с τ. Рассмотрим вначале случай, когда Q — элементарная абелева группа. Очевидно, что $C_G(j) \supseteq Q$ и $O_2(C_G(j)) = Q^g$ для некоторого элемента $g \in G$. Из того, что Q^g слабо замкнута в T^g относительно G, имеем $Q^g = Q$, т. е.

$$C(\tau) = N(Q) = N(Q^g) = C(j).$$

Очевидно, что $Z(C(\tau)) = \langle \tau \rangle$, отсюда $\tau = j$ — противоречие с выбором j. Нам осталось рассмотреть случай, когда Q не является элементарной абелевой группой, т. е. $\Phi(Q) = \langle \tau \rangle$. Так как $\langle \tau, j \rangle \lhd Q$, то $|Q : C_Q(j)| \leqslant 2$. Положим $Q_0 = C_Q(j)$. Пусть вновь $Q^g = O_2(C(j))$. Предположим, что $Q_0 \nsubseteq Q^g$, и пусть элемент $b \in Q_0 \backslash Q^g$. Очевидно, что $|Q_0 : C_{Q_0}(b)| \leqslant 2$ и $|Q^g : Q_0 \cap Q^g| \leqslant 16$. Отсюда $|Q^g : C_{Q^g}(b)| \leqslant 2^5$. С другой стороны, с помощью леммы 1.1 [7] вновь легко получить, что

$$|C_{Q^g}(b)| \leqslant 2\left(\frac{|Q^g|}{2}\right)^{1/2} = \sqrt{2}\,|Q^g|^{1/2}.$$

Теперь легко получить следующую оценку: $\frac{|Q^g|}{\sqrt{2}|Q^g|^{1/2}} \leqslant 2^5$ или $|Q^g| \leqslant 2^{11}$. Используя действие $L_2(8)$ на Q^g, получаем, что $|Q^g| = 2^7$, т. е. $L_2(8)$ действует транзитивно на неединичных элементах фактор-группы $Q^g/\langle\tau^g\rangle$. Отсюда Q^g — элементарная абелева группа — получили противоречие с выбором Q. Значит, $Q_0 \subseteq Q^g$. Если Q_0 не является элементарной абелевой группой, то $\Phi(Q_0) = \langle\tau\rangle$. С другой стороны, из-за вложения $Q_0 \subseteq Q^g$ $\Phi(Q_0) \subseteq \langle\tau^g\rangle = \langle j\rangle$. Отсюда $\tau = j$ — противоречие с выбором j. Поэтому Q_0 — элементарная абелева группа. Очевидно, что $Q = Q_0\langle c\rangle$, где $c^2 \in Q_0$. Отсюда либо Q — абелева группа, либо $Z(Q) = C_{Q_0}(c)$. Предположим, что Q — неабелева группа, т. е. $Z(Q) = C_{Q_0}(c)$. Так как фактор-группа $Q/\langle\tau\rangle$ — элементарная абелева, то $|Q_0 : C_{Q_0}(c)| \leqslant 2$. Отсюда $|Q : Z(Q)| \leqslant 4$. Используя действие $L_2(8)$ на Q, то, что $\tau \in Z(Q)$ и характеристичность $Z(Q)$ в Q, легко показать, что $Z(Q) = Q$. Получили противоречие с предположением о неабелевости Q. Следовательно, Q — абелева группа. Используя действие элемента порядка 3 на Q и теорему 5.2.3 [4], легко показать, что Q — элементарная абелева группа. Вновь противоречие с выбором Q. Данное противоречие заканчивает доказательство леммы.

Лемма 3.8. *Все инволюции из $T \backslash Q$ сопряжены с τ.*

Доказательство. В силу леммы 3.7 и Z^*-теоремы Глаубермана в $T\backslash Q$ есть инволюция j, сопряженная с τ, т. е. $j = \tau^g$ для некоторого элемента $g \in G$. По лемме 1.2 [7] все инволюции из $T/\langle\tau\rangle \backslash Q/\langle\tau\rangle$ сопряжены в $C/\langle\tau\rangle$. Отсюда любая инволюция из $T\backslash Q$ сопряжена либо с j, либо с $j\tau$. Предположим, что лемма 3.8 неверна, т. е. инволюции j и $j\tau$ не сопряжены в G. Отсюда легко следует равенство $N_T(\langle\tau, j\rangle) = C_T(\langle\tau, j\rangle)$. Положим $A = C_T(j)$. Используя предыдущие рассуждения и лемму 1.3, убеждаемся, что $|A| = 16q^{1/2}$, где $|Q| = 2q$. Пусть B — подгруппа порядка 7 из $N_C(T)$. Предположим, что A не является элементарной абелевой 2-группой. Пусть $Z = Q \cap A$. Используя строение фактор-группы $C/\langle\tau\rangle$, легко проверить, что $Z/\langle\tau\rangle = Z(T/\langle\tau\rangle)$ и, следовательно, $N_C(Z)$ содержит подгруппу B. Покажем, что Z — элементарная абелева группа. Предположим противное, тогда из того, что $Z/\langle\tau\rangle$ — элементарная абелева группа, имеем $\Phi(Z) = \langle\tau\rangle$. Очевидно, что A/Z — элементарная абелева группа, т. е. $\Phi(A) \subseteq Z$, и так как $\Phi(Z) = \langle\tau\rangle$, то $\tau \in \Phi(A)$. Очевидно, что $A \subseteq C(j) = C(\tau^g)$. Легко убедиться, что $\tau \in \Phi(A) \subseteq A \cap Q^g$, т. е. $\tau \in Q^g$. По лемме 3.7 $\tau = j$ — противоречие с выбором j. Значит, Z — элементарная абелева группа. Так как $T/\langle\tau\rangle$ — группа класса нильпотентности 2, то T/Z — абелева группа, в частности $A \lhd T$.

Из того, что в $C/\langle\tau\rangle$ централизаторы инволюций являются 2-группами, имеем $C_T(j) = C_C(j)$, т. е.

$$A = C(\tau) \cap C(j) = C(\tau) \cap C(\tau^g).$$

Отсюда $A = T \cap T^x$ для некоторого элемента x такого, что $T^x \in \mathrm{Syl}_2(C(\tau^g))$. Очевидно, что $C_{T^x}(\tau) = A$ и $\tau \in T^x \backslash Q^g$. Теперь можно аналогично, как и прежде, показать, что $A \lhd T^x$. Следовательно, $N(A) \supseteq \langle T, T^x\rangle$, и поэтому $A = O_2(N(A))$. Положим $\overline{N} = N(A)/A$ и будем применять черту для обозначения образа при естественном гомоморфизме $N(A) \to \overline{N}$. В силу предыдущего $O_2(\overline{N}) = \langle 1\rangle$. Так как $Q/Z \simeq T/A$, то $\overline{T}$ — элементарная абелева группа. Очевидно, что $N(A) \cap N(T) \subseteq N(A) \cap C = N_C(A)$. Если $N_C(A)$ содержит подгруппу порядка 7, то последняя действует транзитивно на неединичных элементах A/Z. Из того, что A содержит элементарную абелеву группу $Z \times \langle j\rangle$, следует, что A — сама элементарная абелева группа. Противоречие с предположением о том, что A не элементарная абелева. Значит, $N_C(A)$ не содержит подгрупп порядка 7, и поэтому

$N_C(A) = T$, т. е. $N_{\overline{N}}(\overline{T}) = \overline{T}$. По теореме Бернсайда о существовании нормальных p-дополнений в $\overline{N}$ существует нормальное 2-дополнение W. Причем $W \neq \langle 1 \rangle$, так как в противном случае $N(A) = T$ и $T = T^x$, что невозможно. Пусть $V = \Omega_1(Z(A))$. Покажем, что $Z \subseteq V$. Действительно, возьмем произвольный элемент $t \in A \backslash Z$. Очевидно, что t действует тривиально на фактор-группе $Z/\langle \tau \rangle$, значит, $[Z, t] \subseteq \langle \tau \rangle$. С другой стороны, как и раньше, можно показать, что $\tau \notin \Phi(A)$. Отсюда $[Z, t] \subseteq \Phi(A) \cap \langle \tau \rangle = \langle 1 \rangle$. Поэтому $C(Z) \supseteq A$, т. е. $Z \subseteq V$. Очевидно, что $V \supseteq \langle j \rangle \times Z$, откуда $|A : V| \leqslant 4$.

Отметим, что $C_Q(Z) \neq Z$. Действительно, предположим противное; $C_Q(Z) = Z$. Отсюда $C_T(Z) = A$. Так как B нормализует Z, то B нормализует A. Вновь легко показать, что A — элементарная абелева группа, и прийти к противоречию.

Предположим вначале, что $|A : V| = 4$. В этом случае $V = Z \times \langle j \rangle$. Так как V характеристична в A, то можно рассмотреть естественное действие группы $\overline{N}$ на V. Понятно, что элементы из $W^{\#}$ не могут действовать тривиально на V потому, что $\tau \in V$ и $N_C(A) = T$. Отсюда и из равенства $O_2(\overline{N}) = \langle 1 \rangle$ получаем, что $\overline{N}$ действует точно на V. В силу того, что $C_Q(Z) \neq Z$, в $\overline{N}$ найдется инволюция d, которая действует тривиально на Z. Так как $|V : Z| = 2$ и $O_2(\overline{N}) = \langle 1 \rangle$, то в $\overline{N}$ найдется y такой, что $\langle d, d^y \rangle$ содержит элемент порядка 3, действующий тривиально на некоторой подгруппе индекса 2 из Z. Следовательно, в Z найдется подгруппа Z_0 индекса 2 такая, что $C_G(Z_0)$ содержит 3-элементы. В силу выбора группы G Z_0 имеет ранг $\leqslant 1$, т. е. $|Z| \leqslant 4$, что невозможно. Отсюда случай $|A : V| = 4$ невозможен, и поэтому $|A : V| = 2$. Значит, A — абелева группа, $V = \Omega_1(A)$, $|\Phi(A)| = 2$ и $\tau \notin \Phi(A)$. Рассмотрим теперь действие группы $\overline{N}$ на A. Положим $D = C_A(W)$. Так как $|\Phi(A)| = 2$, то $D \supseteq \Phi(A)$. В силу теоремы 5.2.3 [4] $A = D \times [A, W]$. Очевидно, что $[A, W]$ — элементарная абелева группа, откуда D не является элементарной абелевой группой.

Оценим теперь порядок D. В силу предыдущего D содержит элемент c порядка 4, и поэтому $|D| \geqslant 4$. С другой стороны, в $N(A)$ инволюция τ сопряжена с некоторой инволюцией $e \neq \tau$. Очевидно, что $e \in T \backslash Q$. Следовательно, число инволюций, сопряженных с e с помощью элементов из T, не меньше $q^{1/2}$. Так как $T \subseteq N(A)$, то число инволюций, сопряженных с τ относительно $N(A)$, не меньше $q^{1/2} + 1$. Используя теперь то, что $C_{\overline{N}}(\tau) = \overline{T}$, получаем $|W| \geqslant q^{1/2} + 1$. Очевидно, что $N_{\overline{N}}(D \langle \tau \rangle) = \overline{T}$, т. е. при естественном действии $\overline{N}$ на фактор-группе A/D число инволюций, сопряженных с $D\tau$, равно $|W|$. Отсюда $|A/D| > |W| \geqslant q^{1/2} + 1$. Следовательно, $|A/D| \geqslant 2q^{1/2}$ или $\frac{16q^{1/2}}{|D|} \geqslant 2q^{1/2}$, т. е. $|D| \leqslant 8$. Так как D имеет экспоненту 4, то либо $D \simeq Z_4$, либо $D \simeq Z_2 \times Z_4$. В любом случае число элементов порядка 4 в D не превосходит 4. Легко убедиться, что $D \triangleleft N(A)$, т. е. $D \triangleleft T$. Значит, D содержит все элементы, сопряженные с c относительно T. Поэтому $|Q : C_Q(c)| \leqslant 4$. Так как $c^2 \in \Phi(A)$, то $c^2 \neq \tau$ и, следовательно, $c \notin Q$. Мы получили, что элемент $c\langle \tau \rangle \in C/\langle \tau \rangle$, не лежащий в $Q/\langle \tau \rangle$, централизует в фактор-группе $Q/\langle \tau \rangle$ подгруппу индекса не больше 4. Используя лемму 1.2 из [7], легко показать, что $|Q/\langle \tau \rangle| \leqslant 16$. Теперь приходим к противоречию с действием $L_2(8)$ на фактор-группе $Q/\langle \tau \rangle$. Данное противоречие заканчивает доказательство элементарной абелевости группы A. В силу строения фактор-группы $C/\langle \tau \rangle$ все инволюции из T лежат в $Q \cup A$. В частности, все инволюции из $T \backslash Q$ лежат в $A \backslash Q$. По предположению о ложности леммы в $A \backslash Q$ точно 2 класса (относительно G) инволюций, в каждом из которых по $7q^{1/2}$ инволюций. Напомним, что через B мы обозначили подгруппу порядка 7 из $N_C(T)$. Так как $C_{TB}(j) = A$, то все инволюции из $A \backslash Q$, которые сопряжены с τ, сопряжены между собой в TB. Нетрудно проверить, что B нормализует A. Понятно, что слабое замыкание $\langle \tau \rangle$ в T относительно G содержится в A и имеет порядок не меньше $8q^{1/2} =$

$=1/2|A|$. Из того, что A допускает B и слабое замыкание $\langle\tau\rangle$ в T содержит τ и тоже допускает B, легко показать, применяя лемму 1.4, что A совпадает со слабым замыканием $\langle\tau\rangle$ в T относительно G. Используем теперь утверждение (9.1) из [20] для случая $P=T$ и $Z=\langle\tau\rangle$. По данному утверждению слияние элементов из T осуществляется с помощью элементов из $C\cup N_G(A)$. В частности, без ограничения общности рассуждений, можно считать, что τ и j сопряжены в $N_G(A)$. Так как $N_G(A)\supseteq TB$, то из предыдущих рассуждений в $N_G(A)$ происходит слияние всех инволюций из A, сопряженных с τ.

Положим вновь $\overline{N}=N_G(A)/A$ и будем применять черту для обозначения образа при естественном гомоморфизме $N_G(A)\to\overline{N}$. Очевидно, что $C(\tau)\cap N_G(A)=TB$, т. е. $C_{\overline{N}}(\tau)=\overline{T}\,\overline{B}$ при естественном действии $\overline{N}$ на A. Так как $C_A(\overline{B})=\langle\tau\rangle$, то

$$N_{\overline{N}}(\overline{B})=N_{\overline{N}}(\overline{B})\cap C_{\overline{N}}(\tau)=N_{\overline{N}}(\overline{B})\cap\overline{T}\,\overline{B}=\overline{B}.$$

По теореме Фробениуса $\overline{N}$ — группа Фробениуса с дополнительным множителем $\overline{B}$. Так как ядро группы Фробениуса нильпотентно, то $\overline{T}\lhd\overline{N}$, т. е. $T\lhd N_G(A)$. Следовательно, $N_G(A)\subseteq N(T)\subseteq C$. Получили противоречие с тем, что в $N_G(A)$ происходит слияние инволюций τ и $j\neq\tau$. Лемма 3.8 доказана.

Теперь можно закончить доказательство теоремы 3.1. Пусть подгруппа P из T удовлетворяет следующим свойствам: $N_T(P)\in\mathrm{Syl}_2(N_G(P))$, $C_T(P)\subseteq P$ и $P=O_2(N_G(P))$. Покажем, что в этом случае $N_G(P)\subseteq C$. Положим $D=\Omega_1(P\cap Q)$. В силу условия $C_T(P)\subseteq P$ имеем $\tau\in D$. Если D нормальна в $N_G(P)$, то из сильной замкнутости $\langle\tau\rangle$ в D относительно G получаем, что $N_G(P)\subseteq C$. Поэтому мы можем считать, что D не является нормальной подгруппой в $N_G(P)$. Следовательно, существует элемент $x\in N_G(P)$ такой, что $D^x\neq D$ и $D^x\subseteq P\subseteq T$. В силу выбора D в разности $D^x\backslash Q$ существует хотя бы одна инволюция. Из леммы 3.7 и 3.8 получаем, что в $D^x\backslash Q$ лежит точно одна инволюция — τ^x. Отсюда следует, что $D^x\cap Q=\langle 1\rangle$. Так как $(D^x)^{\#}\subseteq P\backslash Q\subseteq T\backslash Q$, то по лемме 3.8 все инволюции из D^x сопряжены с τ, то же самое справедливо и для D. По лемме 3.7 $D=\langle\tau\rangle$.

Из того, что $P\subseteq T$ и фактор-группа T/Q — элементарная абелева, имеем $\Phi(P)\subseteq P\cap Q$. Если $\Phi(P)\neq\langle 1\rangle$, то по предыдущему $\Omega_1(\Phi(P))\subseteq$ $\subseteq\Omega_1(P\cap Q)=\langle\tau\rangle$. Отсюда $N_G(P)\subseteq N_G(\Phi(P))\subseteq C(\tau)=C$. Поэтому мы можем считать, что $\Phi(P)=\langle 1\rangle$ и P — элементарная абелева группа. Следовательно, $P\cap Q=\langle\tau\rangle$. Так как $|T:Q|=8$, то $|P|\leqslant 16$. Если $|P|\leqslant 8$, то условие $C_T(P)=P$ позволяет применить результат из [13] и получить, что секционный ранг T не превосходит 4. Однако $Q/\langle\tau\rangle$ — элементарная абелева группа порядка не меньше 2^6. Получили противоречие. Значит, $|P|=$ $=16$ и $T=PQ$. Пусть $T_0=N_T(P)$. По условию $T_0\in\mathrm{Syl}_2(N_G(P))$. Используя теперь строение фактор-группы $C/\langle\tau\rangle$ и то, что $T/\langle\tau\rangle=Q/\langle\tau\rangle\leftthreetimes$ $\leftthreetimes P/\langle\tau\rangle$, легко показать, что $|T_0|=16q^{1/2}$ и фактор-группа $T_0/\langle\tau\rangle$ — элементарная абелева. Здесь опять $|Q|=2q$. Следовательно, любая инволюция из T_0 централизует в P подгруппу индекса 2, т. е. любая инволюция из $N_G(P)$ централизует в P подгруппу индекса 2. Поэтому произведение любых двух инволюций из $N_G(P)$ централизует в P некоторую подгруппу индекса 4 и в силу того, что $|P|=16$, централизует в P четверную подгруппу. Отсюда группа, порожденная любой парой инволюций из $N_G(P)$, не содержит элементов порядка 3. Так как $C_G(P)=P$, то произведения любых двух инволюций из $N_G(P)$ являются 2-элементами, и поэтому $O_2(N_G(P))=P$ содержит все инволюции из T_0. Следовательно, $T_0\cap Q$ содержит только одну инволюцию. Отсюда легко получить, что $|T_0\cap Q|\leqslant 8$. Значит,

$$8=\frac{|T_0|}{|T_0\cap Q|}\geqslant\frac{|T_0|}{8}=\frac{16q^{1/2}}{8}=2q^{1/2},$$

или $q\leqslant 2^4$, противоречие с действием $L_2(8)$ на Q. Данное противоречие заканчивает доказательство того, что $N_G(P)\subseteq C$.

Применяя теперь теорему 3.4 из [21], получаем, что τ сильно замкнута в T относительно G — противоречие с выбором G. Данное противоречие заканчивает доказательство теоремы 3.1.

4. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Вначале введем необходимые обозначения.

Пусть, как и прежде, группа G — контрпример к основной теореме; P, E, N, Q и R — те же подгруппы, что и в предположении 2.2. Если Q — не четверная группа, то через i обозначим инволюцию из Q, отличную от τ_1 и τ_2 (см. лемму 2.23). Через τ обозначим произвольную инволюцию из $Q\backslash\{i\}$. Положим $C = C_G(\tau)$; H — произвольная максимальная 2-локальная подгруппа из G, содержащая C; $T = O_2(H)$, $S \in \mathrm{Syl}_2(H)$, $Z = \Omega_1(Z(S))$, $\langle a\rangle \in \mathrm{Syl}_3(C)$, такая, что $\langle a\rangle \cap R \neq \langle 1\rangle$ и $\Omega_1(\langle a\rangle) = \langle b\rangle$.

Наша цель — доказать, что группы G не существует. Дальнейшее изучение группы G разобьем на ряд лемм.

Лемма 4.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *инволюция i инвертирует $\langle a\rangle$,*

2) *подгруппа $C_N(\tau)$ совпадает с $\langle\tau\rangle \times (\langle a\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle)$ и сильно 3-вложена как в C, так и в H.*

Доказательство. Пусть $\langle a_1\rangle = C_R(\tau)$. Очевидно, что $\langle a_1\rangle \lhd C_N(\tau)$, в частности, $C_Q(\tau)$ нормализует $\langle a_1\rangle$. Так как τ действует тривиально на $\langle a_1\rangle$, то по лемме 2.3 i инвертирует $\langle a_1\rangle$. Пусть a_0 — элемент порядка 3 из $\langle a_1\rangle$. В силу выбора $\langle a\rangle$ и $\langle a_1\rangle$ имеем $\langle a_0\rangle \subseteq \langle a\rangle \cap \langle a_1\rangle$. По лемме 2.17 $C_G^*(a_0) \subseteq N$, отсюда $\langle a\rangle \subseteq N$. Используя выбор τ и лемму 2.20, легко показать, что $\langle a\rangle \subseteq R$. Поэтому $\langle a\rangle = \langle a_1\rangle$ и i инвертирует $\langle a\rangle$. Используя лемму 2.20, показываем, что $C_N(\tau) = \langle\tau, i\rangle\langle a\rangle$. Так как в H силовские 3-подгруппы — циклические, то $C_H^*(b)$ сильно 3-вложена в H. С другой стороны, по леммам 2.3 и 2.21 $\tau \in Z(C_H(b))$, т. е. $C_H^*(b) \subseteq C$. Отсюда и по лемме 2.17 $C_H^*(b) \subseteq N \cap C = C_N(\tau)$. Поэтому $C_H^*(b) = C_N(\tau)$. Следовательно, $C_N(\tau)$ сильно 3-вложена в H и поэтому в C. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *C — разрешимая группа.*

Доказательство. Доказательство легко вытекает из предыдущей леммы и теоремы 3.1.

Лемма 4.3. Если *X — произвольная 2-локальная подгруппа из G, содержащая C*, то $O_{3'}(X) = O_2(X)$.

Доказательство. Пусть $D = O_2(X)$. Предположим, что $D \neq O_{3'}(X)$. Так как $C \subseteq X$, то каждый элемент порядка 3 из X централизует в D подгруппу порядка не больше 2 (см. лемму 4.1). Рассмотрим естественное действие $\overline{X} = X/D$ на $D/\Phi(D)$. Очевидно, что $\overline{X}$ действует точно на $D/\Phi(D)$. Далее, централизатор любого элемента порядка 3 из X в G имеет четный порядок и по лемме 2.21 является $\{2, 3\}$-группой. Используя теперь действие элементов порядка 3 из $\overline{X}$ на $D/\Phi(D)$, леммы 1.10 и 1.9, легко показать, что $\pi(O_{3'}(\overline{X})) \subseteq \{2, 7\}$ и силовская 7-подгруппа B из $O_{3'}(\overline{X})$ имеет порядок 7. Очевидно, что $B \lhd \overline{X}$ и $C_{\overline{X}}(B)$ является $3'$-группой. Поэтому $C_{\overline{X}}(B) \subseteq O_{3'}(\overline{X})$. Теперь нетрудно проверить, что $C_{\overline{X}}(B) = B$. Значит, фактор-группа $\overline{X}/B$ — циклическая, т. е. в $\overline{X}$ есть нормальное 3-дополнение. Отсюда X обладает нормальным 3-дополнением. Получили противоречие с тем, что в C существует сечение, изоморфное S_3. Лемма доказана.

Предположение 4.1. *H — разрешимая группа и $Z(T)$ — циклическая группа.*

Введем дополнительные обозначения. Из описания групп с разрешимыми 2-локальными подгруппами [11] и выбора G имеем, что в G существует 2-локальная подгруппа, порядок которой делится на простое число, большее трех. Рассмотрим множество 2-локальных подгрупп из G, порядки которых делятся на простые числа, большие трех, обладающих силовской 2-подгруппой наибольшего порядка. В этом множестве выберем 2-локальную подгруппу M с $O_2(M)$ максимального порядка. Положим $D=O_2(M)$, $V=\Omega_1(Z(D))$, $L\in \mathrm{Syl}_2(M)$. Можно считать, что $M=N_G(D)$. Положим $\overline{M}=M/D$, $W=O(\overline{M})$ и будем применять черту для обозначения образа при естественном гомоморфизме $M\to\overline{M}$. Обозначим через T_0 гиперцентр T.

Леммы 4.4 — 4.12 доказаны при предположении 4.1.

Лемма 4.4. *Справедливы следующие соотношения:*

1) $H=C=T\leftthreetimes(\langle a\rangle\leftthreetimes\langle i\rangle)$ *и* $|a|\geqslant 9$,

2) $Z(T)=Z(S)=\langle\tau\rangle$,

3) $S\in\mathrm{Syl}_2(G)$ *и* $N_G(S)=S$.

Доказательство. Так как H — разрешимая группа, то, используя леммы 4.3 и 4.1, получаем, что $H=T\leftthreetimes(\langle a\rangle\leftthreetimes\langle i\rangle)$. В силу выбора τ, лемм 2.22 и 2.23 имеем $|a|\geqslant 9$. Лемма 4.1 показывает, что $Z(T)=\langle\tau\rangle$, т. е. $H=C$ и $Z(S)=\langle\tau\rangle$. Следовательно, $N_G(S)\subseteq H$. Отсюда $S\in\mathrm{Syl}_2(G)$ и $N_G(S)=S$. Лемма доказана.

Без ограничения общности рассуждений будем в дальнейшем считать, что $L\subseteq S$.

Лемма 4.5. *V — нециклическая группа, $D=C_G(V)$ и $M=N_G(V)$.*

Доказательство. Так как M 2-скована, то $\tau\in V$. В силу выбора M $\tau\notin Z(M)$, и поэтому V — нециклическая группа. Значит, $C_G(V)$ — $3'$-группа. Вновь используя условие $\tau\in V$, получаем, что $C_G(V)$ — 2-группа, содержащая D. Очевидно, что $C_G(V)\lhd N_G(V)\supseteq M$. Из максимальности D теперь имеем $D=C_G(V)$, отсюда $M=N_G(V)$, и мы у цели.

Лемма 4.6. *M — неразрешимая группа.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. M является разрешимой группой. Рассмотрим вначале случай, когда $3\in\pi(M)$. Пусть g — элемент порядка 3 из M. Теорема B [9] позволяет считать, что в M есть элементы порядка 6. Так как силовские 3-подгруппы в M — циклические, то $C_M(g)$ имеет четный порядок. Лемма 2.21 показывает, что $C_G(g)$ — $\{2, 3\}$-группа. Используя выбор M, теперь легко убедиться, что W не содержит неединичных нормальных 3-подгрупп. Значит, $W_0=O_{3'}(W)\neq\langle 1\rangle$. Рассматривая естественное действие $W_0\langle\bar g\rangle$ на подгруппе V и применяя леммы 1.10 и 1.9, получаем, что $|W_0|=7$. Аналогично показывается, что $|O_{3'}(\overline{M})|=7\cdot 2^t$, отсюда W_0 является силовской 7-подгруппой в $O_{3'}(\overline{M})$. Так как $O_2(\overline{M})=\langle 1\rangle$ и $C_{\overline{M}}(W_0)$ — $3'$-группа, т. е. $C_{\overline{M}}(W_0)\subseteq O_{3'}(\overline{M})$, то $C_{\overline{M}}(W_0)=W_0$. Поэтому фактор-группа $\overline{M}/W_0$ изоморфно вкладывается в циклическую группу порядка 6. Следовательно, M является S_4-свободной группой. По теореме B [3] $M=C_M(Z(L))\cdot N_M(J_l(L))$. Из условия $\tau\in Z(L)$ имеем $\pi(C_M(Z(L)))\subseteq\{2, 3\}$. Значит, $7\in\pi(N_M(J_l(L)))$. В силу выбора M $L\in\mathrm{Syl}_2(N_G(J_l(L)))$, и поэтому $L=S$. Отсюда $Z(L)=\langle\tau\rangle$. С другой стороны, $|V|\geqslant 8$ и $|L:D|\leqslant 2$, т. е. $|Z(L)|\geqslant 4$, что невозможно. Мы показали, что M — $3'$-группа. Вновь, применяя теорему B [3] и то, что $C_M(\tau)$ — 2-группа, получаем следующие равенства: $M=C_M(Z(L))N_M(J_l(L))=LN_M(J_l(L))=N_M(J_l(L))$. Отсюда $L=S$. Пусть x — инволюция, лежащая в $Z(\overline{S})$. Из выбора M имеем $C_{\overline{M}}(x)$ — 2-группа, т. е. $C_{\overline{M}}(x)=\overline{S}$. Следовательно, x действует регулярно на W и W — абелева группа. Так как $C_{\overline{M}}(W)=W$, то $W\langle x\rangle\lhd\overline{M}$. Поэтому $\overline{M}/W$ — 2-группа. Мы получили, что $\overline{M}=W\leftthreetimes\overline{S}$ и $Z(\overline{S})$ — циклическая группа. Ясно, что $|V|\geqslant 8$. Используя теперь условие $|Z(S)|=2$, легко убедиться, что $|\overline{S}|\geqslant 4$.

Изучим теперь взаимное расположение подгрупп из M и H. Покажем вначале, что $V\subseteq T$. Предположим противное, и пусть $V_0=V\cap T$, $B=\langle V_0^y\mid y\in\langle b, S\rangle\rangle$. Так как $V\lhd S$, то и $V_0\lhd S$. Поэтому $B=\langle V_0, V_0^b, V_0^{b^2}\rangle$. Рассматривая фактор-группу $\langle b, S\rangle/\langle\tau\rangle$ и применяя теорему 8.1 [6], легко доказать, что $B/\langle\tau\rangle$ — элементарная абелева группа. Вновь используя инвариантность V в S, получаем, что VB/B действует тривиально на фактор-группе T/B, т. е. $C(T/B)\nsubseteq T/B$. Следовательно, из регулярности действия элемента b на T/B и изоморфизма $\langle b, S\rangle/T \simeq S_3$ имеем $T = B$. Так как $Z(T) = \langle\tau\rangle$, то T — экстраспециальная группа. Применяя основной результат из [12], приходим к противоречию с выбором группы G. Значит, $V \subseteq T$. Покажем теперь, что гиперцентр T_0 подгруппы T содержится в D. Предположим противное. Из инвариантности $\bar{T}_0$ в $\bar{S}$ имеем $x \in \bar{T}_0$. Рассмотрим естественное действие $W\langle x\rangle$ на группе V. Очевидно, что $[T, T_0] \subseteq \langle\tau\rangle$, т. е. $[V, x] \subseteq \langle\tau\rangle$. Следовательно, $|V : C_V(x)| \leqslant 2$. Так как $W\langle x\rangle$ — группа Фробениуса и $3 \notin \pi(W)$, то легко доказать, что W действует тривиально на V. Получили противоречие с леммой 4.5. Значит, $T_0 \subseteq D$. Предположим, что $D \subseteq T$. Как было отмечено выше, $J_l(S) \subseteq \subseteq D$, т. е. $J_l(D) = J_l(S) = J_l(T)$. Отсюда $H = N_G(J_l(T)) = N_G(J_l(D)) \supseteq M$, что невозможно в силу выбора M. Следовательно, $D \nsubseteq T$ и $S = TD$. Поэтому $\bar{S} = S/D = TD/D \simeq T/T \cap D$. Так как D содержит гиперцентр группы T и элемент b действует регулярно на фактор-группе $T/\langle\tau\rangle$, то $T/T \cap D$ — абелева группа. Отсюда $\bar{S}$ — абелева группа. Используя предыдущее, получаем, что $\bar{S}$ — циклическая группа. Как и прежде, убеждаемся, что $J_l(S) \nsubseteq T$. Пусть A — элементарная абелева подгруппа максимального ранга из S, не лежащая в T, $A_0 = A \cap T$, $D_0 = D \cap T$ и $D_1 = \langle D_0^y \mid y \in \langle b, S\rangle\rangle$. Очевидно, что $D_0 \lhd S$, и поэтому $D_1 = \langle D_0, D_0^b, D_0^{b^2}\rangle$. Так как $\tau \in D_0$ и элемент b действует регулярно на фактор-группе $T/\langle\tau\rangle$, то, используя доказательство теоремы 8.1 из [6], легко проверить следующие равенства: $D_0 \cap D_0^b = D_0^b \cap D_0^{b^2} = D_0 \cap D_0^{b^2}$, т. е. имеем $D_0 \cap D_0^b \lhd \langle b, S\rangle$. Более того, эта же теорема позволяет доказать, что $D_1 = D_0 D_0^b$. С другой стороны, рассматривая фактор-группу $\langle b, S\rangle/D_1$, убеждаемся, что DD_1/D_1 действует тривиально на T/D_1. Это возможно только в случае $T = D_1$. Значит, $T/D_0 \cap D_0^b = D_0/D_0 \cap D_0^b \times D_0^b/D_0 \cap D_0^b$. Очевидно, $D_0^b/D_0 \cap D_0^b \simeq D_0 D_0^b/D_0 = D_1/D_0 = T/D_0 = T/D \cap T \simeq TD/D = S/D \simeq Z_{2^n}$ — циклической группе порядка 2^n для некоторого натурального n. Аналогично доказывается, что $D_0/D_0 \cap D_0^b \simeq Z_{2^n}$, т. е. $T/D_0 \cap D_0^b \simeq Z_{2^n} \times Z_{2^n}$. Если A_0 накрывает нижний слой фактор-группы $T/D_0 \cap D_0^b$, то $A(D_0 \cap D_0^b)/D_0 \cap D_0^b$ будет действовать на нем тривиально, что невозможно. Поэтому индекс подгруппы $A_1 = (D_0 \cap D_0^b) \cap A_0$ в A_0 не превосходит двух. Значит, $|A : A_1| \leqslant 4$. По выбору V, $V \subseteq Z(D)$, отсюда $V \subseteq Z(J_l(D)) = Z(J_l(S))$. Следовательно, $V \subseteq A$, т. е. $V \subseteq A_0$. Рассматривая фактор-группу $\langle b, S\rangle/\langle\tau\rangle$, как и прежде, легко убедиться, что $A_0/\langle\tau\rangle \cap A_0^b/\langle\tau\rangle$ допускает b, тогда $F = A_0 \cap A_0^b$ тоже допускает b. Однако $C_S(F)$ содержит A и поэтому не лежит в T. Такая ситуация возможна только в случае $F = \langle\tau\rangle$. Отсюда $A_0 \cap V^b = \langle\tau\rangle$. Очевидно, что $V \subseteq C(D_0 \cap D_0^b)$. Поэтому $V^b \subseteq C(D_0 \cap D_0^b)$. Так как A — элементарная абелева подгруппа из S максимального ранга, то $|\langle V^b, A_1\rangle| \leqslant |A|$. С другой стороны, $|V^b \cap A_1| = 2$, т. е.

$$|\langle V^b, A_1\rangle| = \frac{|V^b||A_1|}{2} \geqslant \frac{|V^b||A|}{2\cdot 4} = \frac{|V||A|}{2^3}.$$

Следовательно, $|A| \geqslant \frac{|V||A|}{2^3}$. Отсюда $|V| \leqslant 2^3$. Теперь легко убедиться, что $|W| = 7$, и поэтому $|\bar{S}| \leqslant 2$. Пришли к противоречию с условием $|\bar{S}| \geqslant 4$. Лемма 4.6 доказана.

Лемма 4.7. $W = S(\bar{M}) = \langle 1\rangle$.

Доказательство. Пусть x — произвольная инволюция, лежащая в $Z(\bar{L})$. Как и прежде, из выбора M имеем, что $C_M(x)$ является $\{2, 3\}$-группой. Используя лемму 2.21 и неразрешимость M, легко получить, что W — $3'$-группа. Предположим, что $W \neq \langle 1\rangle$. Так как $C_{\bar{M}}(W)$ — нормальная в $\bar{M}$ подгруппа, не содержащая центральных инволюций, то ее порядок — нечетное число. Значит, $C_{\bar{M}}(W) \subseteq W$. Далее, $C_W(x) = \langle 1\rangle$, т. е. x инвертирует W. Отсюда $C_{\bar{M}}(W) = W$ и $W\langle x\rangle$ нормальна в $\bar{M}$. Используя теперь аргумент Фраттини, убеждаемся, что $\bar{M}/W$ — $\{2, 3\}$-группа. Получили противоречие с неразрешимостью M. Следовательно, $W = \langle 1\rangle$. Очевидно, что и $S(\overline{M}) = \langle 1\rangle$. Лемма доказана.

Обозначим через U цоколь $\overline{M}$.

Лемма 4.8. *U — простая неабелева группа, $U \subseteq \overline{M} \subseteq \mathrm{Aut}(U)$ и $3 \in \pi(U)$.*

Доказательство. В силу предыдущей леммы U является прямым произведением простых неабелевых групп U_i, $i=\overline{1, t}$. Предположим, что $t > 1$. Лемма 2.21 показывает, что в этом случае U является $3'$-группой. Значит, $U_i \simeq Sz\ (q_i)$ для любого $i=\overline{1, t}$. Очевидно, что нормализатор любой силовской 2-подгруппы из U в U содержит неединичные элементы, порядок которых не делится на 2 и 3. Применяя аргумент Фраттини, убеждаемся, что $\overline{M}$ содержит 2-локальную подгруппу нечетного индекса, порядок которой делится на простое число, большее трех. Получили противоречие с максимальностью D. Значит, $t=1$, U — простая неабелева группа и, очевидно, что $3 \in \pi(U)$. Используя выбор U, имеем $C_{\overline{M}}(U) = \langle 1\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 4.9. *$\overline{M}$ изоморфна A_5 или S_5.*

Доказательство. Предположим вначале, что гиперцентр T_0 подгруппы T лежит в D. Так как $L \subseteq S$ и $T/\langle\tau\rangle$ имеет класс нильпотентности не выше двух, то $\overline{L}$ содержит абелеву подгруппу индекса 2. Известные результаты позволяют сделать заключение, что U изоморфна группе из следующего списка: (*) $L_2(q)$, $L_3(q)$, $U_3(q)$ или J_1. Так как централизаторы центральных инволюций в $\overline{M}$ являются $\{2,3\}$-группами и силовские 3-подгруппы из U — циклические, то U не может быть изоморфна J_1, $L_3(q)$ или $U_3(q)$, за исключением случая $U \simeq L_3(2) \simeq L_2(7)$. Очевидно, что нормализатор любой силовской 2-подгруппы из U в U должен быть $\{2,3\}$-группой. Значит, случай $U \simeq L_2(2^n)$ при $n>2$ невозможен. Мы показали, что $U \simeq L_2(q)$ для некоторого нечетного q. Рассматривая естественное действие группы U на V и применяя предложение 2 [8], получаем, что $q=5$ или 7. Пусть $q=7$. В этом случае U действует транзитивно на инволюциях из V (см. предложение 2 [8]). Следовательно, любая инволюция из V сопряжена с τ. Из строения централизатора τ видно, что элементы порядка 3 из U действуют регулярно на D/V. Значит, $D/V = \langle 1\rangle$, т. е. $D \simeq E_8$. Мы показали, что группа G содержит самоцентрализуемую подгруппу, изоморфную E_8. Основной результат из [13] приводит нас к противоречию с выбором группы G. Следовательно, $q=5$ и $U \simeq L_2(5) \simeq A_5$. Отсюда $\overline{M} \simeq A_5$ либо S_5. Нам осталось рассмотреть случай, когда T_0 не лежит в D. В этом случае в фактор-группе $\overline{M}$ найдется инволюция y, которая, как смежный класс, содержит неединичный элемент из T_0. Так как T_0 — гиперцентр T, $|Z(T)|=2$ и $|S:T|=2$, то $|V : C_V(y)| \leqslant 4$. С другой стороны, силовские 3-подгруппы в $\overline{M}$ — циклические и $O_{3'}(\overline{M}) = \langle 1\rangle$. Используя теперь теорему 2 [5], легко показать, что в $\overline{M}$ существует элемент d, порядок которого делится на 3 и $d^y = d^{-1}$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $|d|=3$. Рассматривая теперь действие группы $\langle d, y\rangle$ на V, видим, что $|C_V(y) \cap C_V(y^d)| \leqslant 2$, т. е. $|V| \leqslant 32$. Условие $U \subseteq \mathrm{Aut}(V)$ и несложные вычисления позволяют убедиться, что U — известная простая группа с циклической силовской 3-подгруппой. Следовательно, U опять изоморфна одной из групп списка (*). Так же, как и прежде, доказываем, что $\overline{M} \simeq A_5$ или S_5, и мы у цели.

Лемма 4.10. *$\overline{M} \simeq S_5$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. $\overline{M} \simeq A_5$. Как было отмечено раньше, $N_G(S) = S$. Следовательно, $L \neq S$. Используя выбор M, легко получить, что $J_l(L) \nsubseteq D$. Пусть A — элементарная абелева подгруппа из L максимального ранга, которая не лежит в D, и $A_0 = A \cap D$. Очевидно, что

$$|A| \geqslant |(A \cap D)V| = \frac{|A_0||V|}{|A_0 \cap V|}, \text{ или } \frac{|A|}{|A_0|} \geqslant \frac{|V|}{|A_0 \cap V|}.$$

Если $|A : A_0| = 2$, то $|V : (A_0 \cap V)| \leqslant 2$. В этом случае при естественном действии $\bar{M}$ на V каждая инволюция из $\bar{M}$ действует тривиально на некоторой подгруппе индекса 2 из V. Так как элементы порядка 5 из $\bar{M}$ представимы в виде произведения двух инволюций, то они действуют тривиально на подгруппах индекса 4 в V, хотя должны действовать нетривиально на V. Очевидно, что это невозможно. Значит, $|A:A_0|=4$ и $L=DA$. Из предыдущего $|V:(A_0\cap V)|\leqslant 4$, т. е. $|V:\Omega_1(Z(L))|\leqslant 4$. Понятно, что любая пара различных силовских 2-подгрупп из $\bar{M}$ порождает $\bar{M}$. Следовательно, либо $V\cap Z(M)\neq\langle 1\rangle$, либо $|V|=2^4$, и V является естественным $\bar{M}$-модулем над полем из двух элементов. Предположим вначале, что $|V|=2^4$. Так как $S\neq L$, то любая характеристическая подгруппа из L не нормальна в M. По теореме Нильса (теорема 3.2.1 из [3]) D содержит только нецентральный главный фактор группы M. Значит, на D/V $\bar{M}$ действует тривиально, т. е. $D=VC_D(x)$ для некоторого элемента x порядка 3 из M. Применяя равенства $V\cap C_D(x)=\langle 1\rangle$ и $V=\Omega_1(Z(D))$, получаем $D=V\times C_D(x)$. В силу выбора V это возможно только в случае $C_D(x)=\langle 1\rangle$, т. е. в M нет элементов порядка 6. Следствие 1 из [9] приводит нас к противоречию с выбором группы G. Поэтому $V\cap Z(M)=\langle y\rangle\simeq Z_2$. Пусть $\langle d\rangle$ — некоторая подгруппа порядка 3 из $N_M(L)$. Так как $L\neq S$, то в силу выбора M $N_G(L)$ является $\{2,3\}$-группой. Предположим, что $N_G(L)$ не является 2-замкнутой группой. В этом случае каждая силовская 2-подгруппа из $L(N_G(\langle d\rangle)\cap N_G(L))$ больше, чем L. С другой стороны, нетрудно убедиться, что $y\in Z(L(N_G(\langle d\rangle)\cap N_G(L)))$. Следовательно, L не является силовской 2-подгруппой в $C_G(y)$ и $C_G(y)\supseteq M$. Пришли к противоречию с выбором M. Тем самым мы показали что $N_G(L)$ — 2-замкнутая группа. Пусть $L_1=O_2(N_G(L))$. Аналогично можно показать, что $N_G(L_1)$ является 2-замкнутой группой. Полагая $L_{i+1}=O_2(N_G(L_i))$, $i\geqslant 1$, на некотором шаге получим, что $L_k\in \mathrm{Syl}_2(G)$ для некоторого натурального k, что противоречит условию самонормализуемости силовских 2-подгрупп группы G. Данное противоречие заканчивает доказательство леммы.

Лемма 4.11. $S=L$.

Доказательство. Предположим вначале, что $D\subseteq T$. В этом случае любой элемент из T_0 централизует в V подгруппу индекса 2. Как мы уже неоднократно проверяли, отсюда следует включение $T_0\subseteq D$. Так как класс нильпотентности $T/\langle\tau\rangle$ не превосходит двух, то $T\subseteq L$. Если $L=T$, то $\bar{L}$ является гомоморфным образом абелевой группы T/T_0, т. е. $\bar{L}$ — абелева группа, что противоречит предыдущей лемме. Значит, $L\neq T$. Отсюда $L=S$, и мы у цели. Следовательно, нам осталось рассмотреть случай $D\neq T$. Понятно, что в этом случае $S=TD$ и $L=(L\cap T)D$. Предположим, что $T_0\subseteq D$. Отсюда фактор-группа

$$\bar{L}=L/D=(L\cap T)D/D\simeq L\cap T/T\cap D$$

является гомоморфным образом абелевой группы $L\cap T/T_0$. Вновь пришли к противоречию с предыдущей леммой. Поэтому $T_0\subseteq D$. Так как $T_0\lhd S$, то нетрудно убедиться, что полный прообраз некоторой инволюции x из U в M содержит элементы из разности $T_0\backslash D$. Здесь U — подгруппа индекса 2 из M. Очевидно, что $|D:C_D(x)|\leqslant 4$ и x инвертирует некоторый элемент порядка 3 из U. С другой стороны, порядок нормализатора силовской 3-подгруппы в $\bar{M}$ делится на 4. Используя леммы 2.17, 2.4 и 2.3, получаем, что централизаторы элементов порядка 3 из U в D — циклические подгруппы порядка, не превосходящего 4. Следовательно, в D есть циклическая подгруппа индекса не больше 16 и порядка не больше 4 (централизатор в D некоторого элемента порядка 3 из U). Поэтому $|D|\leqslant 2^6$. Пусть S_0 — гиперцентр группы S. Очевидно, что $S_0\subseteq N_S(D)=L$. Так как любой элемент из S_0 централизует в D подгруппу индекса 2, то, используя стандартный прием, к которому мы уже неоднократно прибегали, получаем $S_0\subseteq D$, т. е. $S_0\subseteq T\cap D$. Рассматривая теперь фактор-группу S/S_0, легко убедиться, что $T_0/S_0\subseteq Z(S/S_0)\subseteq C_{S/S_0}(D/S_0)$, отсюда $L=N_S(D)\supseteq T_0$. Нетрудно проверить, что $T_0D/D\subseteq Z(L/D)=Z(\bar{L})$. Используя теперь то, что $\bar{L}$ — группа диэдра порядка 8, получаем $|T_0D/D| \leqslant 2$. Значит, $|T_0| \leqslant 2|D \cap T_0| < 2|D| \leqslant 2^7$. Поэтому $|T_0| \leqslant 2^6$. С другой стороны, в силу выбора инволюции τ $|a| \geqslant 9$, отсюда $|T_0/\langle\tau\rangle| \geqslant 2^6$, т. е. $|T_0| \geqslant 2^7$. Пришли к противоречию с предыдущей оценкой порядка T_0. Значит, рассматриваемый случай невозможен, и лемма доказана.

Лемма 4.12. $|T| \geqslant 2^{13}$ *и* $|D| \geqslant 2^{11}$.

Доказательство. Так как $|S| = 2|T| = 8|D|$, то достаточно доказать первое неравенство. Предположим, что $|T| < 2^{13}$. Используя теперь действие элемента a на фактор-группе $T/\langle\tau\rangle$, легко убедиться, что $|a| = 9$ и $|T| = 2^7$, т. е. $T/\langle\tau\rangle$ — элементарная абелева группа. Из условия $Z(T) = \langle\tau\rangle$ следует, что T — экстраспециальная группа. Основной результат из [12] приводит нас к противоречию с выбором группы G, и мы у цели.

Лемма 4.13. *Предположение* 4.1 *не выполняется.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда справедливы леммы 4.4—4.12. Так как $T/\langle\tau\rangle$ допускает регулярный автоморфизм порядка 3, то порядок данной фактор-группы является четной степенью двойки. Отсюда порядок S — тоже четная степень двойки. Используя теперь то, что $|\bar{S}| = 8$, получаем, что порядок D — нечетная степень двойки. Пусть d — некоторый элемент порядка 3 из M. При доказательстве леммы 4.11 нами был установлен следующий факт: $|C_D(d)| \leqslant 4$. Рассматривая с учетом предыдущих рассуждений действие элемента d на D, легко доказать, что $\langle j\rangle = C_D(d) \simeq Z_2$. Если $Z(M) \neq \langle 1\rangle$, то, используя условие $Z(S) = \langle\tau\rangle$, получаем, что $\tau \in Z(M)$. Пришли к противоречию с разрешимостью $C_G(\tau)$. Значит, $Z(M) = \langle 1\rangle$. Очевидно, что полный прообраз U в $M - U_0$ тоже имеет тривиальный центр, и по предложению 1 [8] либо D — абелева группа, либо $j \notin [U_0, D] = K$. Покажем, что во втором случае K — абелева группа. Так как $|j| = 2$, то нетрудно убедиться, что $|D : K| = 2$, и элементы порядка 3 из M действуют на K регулярно. Если $U_0/K \simeq Z_2 \times L_2(5)$, то на K действует группа $L_2(5)$, причем элементы порядка 3 из этой группы действуют на K регулярно. В этом случае K — элементарная абелева группа. Следовательно, нам осталось рассмотреть случай $U_0/K \simeq \mathrm{SL}(2, 5)$. Так как в группе S_5 только два класса сопряженных инволюций, и каждая инволюция из $S_5 \backslash A_5$ перестановочна с некоторым элементом порядка 3, а в фактор-группе M/K централизаторы элементов порядка 3 — циклические, то $\Omega_1(S) \subseteq U_0$. Очевидно, что все инволюции из U_0 лежат в D. Значит, $\Omega_1(S) \subseteq D$ и $\Omega_1(S) = \Omega_1(D)$. Предположим, что $D \subseteq T$. В этом случае $\Omega_1(T) = \Omega_1(D)$. Значит, $N_G(\Omega_1(D)) \supseteq \langle H, M\rangle$, что невозможно. Поэтому $D \not\subseteq T$. Из условия S/D — неабелева группа, теперь легко получить, что $T_0 \not\subseteq D$. Следовательно, в U найдется инволюция, инвертирующая некоторый элемент порядка 3 и полный прообраз которой в M содержит элементы из $T_0 \backslash D$. Используя теперь теорему 3.8.2 [4], нетрудно убедиться, что существуют такие элементы $x \in T_0 \backslash D$ и $g \in M$, что группа $\langle x, x^g\rangle$ содержит элементы порядка 3. Так как $|D : C_D(x)| \leqslant \leqslant 4$ и порядки централизаторов 3-элементов из M в D равны 2, то $|D| \leqslant \leqslant 2^5$. Получили противоречие с предыдущей леммой. Значит, случай $U_0/K \simeq \mathrm{SL}(2, 5)$ невозможен, и K — абелева группа. Мы показали, что в любом случае в S есть абелева подгруппа индекса не больше 16. Пусть A — абелева подгруппа из S максимального порядка. В силу предыдущего $|S : A| \leqslant 2^4$. Покажем, что $A \subseteq T$. Если это не так, то по теореме 3.8.2 [4] существуют элементы $x \in A \backslash T$ и $g \in H$ такие, что группа $\langle x, x^g\rangle$ содержит элементы порядка 3. Очевидно, что $|T : C_T(x)| \leqslant 2^4$. Теперь легко убедиться, что $|T| \leqslant 2^9$. Получили противоречие с предыдущей леммой. Значит, $A \subseteq T$. Покажем, что $A \subseteq D$. Предположим противное. Так же как при доказательстве леммы 1.4, убеждаемся, что централизаторы элементов порядка 5 из M в D изоморфны Z_2. По теореме 3.8.2 [4] существуют элементы $x \in A \backslash T$ и $g \in H$ такие, что $\langle x, x^g\rangle$ не является 2-группой. Как и прежде, легко получается оценка $|D| \leqslant 2^9$. Вновь противоречие с предыдущей леммой. Значит, $A \subseteq D$. Мы показали, что подгруппа Томпсона $J(S)$, порожденная абелевыми подгруппами максимального порядка из S, лежит в $T \cap D$. Отсюда $N_G(J(S)) \supseteq \langle H, M \rangle$, что невозможно. Данное противоречие заканчивает доказательство леммы 4.13.

Лемма 4.14. *H — неразрешимая группа.*

Доказательство. Предположим противное. В силу предыдущей леммы $Z(T)$ — не циклическая группа. Пусть $B = \Omega_1(Z(T))$. Так как $|a| \geqslant 9$, то $|B| \geqslant 2^6$. Так же как в лемме 4.4, получаем $H = T \leftthreetimes (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle i \rangle)$. Пусть A — произвольная элементарная абелева подгруппа максимального ранга из S. Если $A \subseteq T$, то легко проверить, что в $S \setminus T$ существует инволюция, централизующая в B подгруппу индекса 2. Следовательно, $|B : C_B(i)| \leqslant 2$. Теперь легко получить противоречие с тем, что $|B| \geqslant 2^6$ и $|C_B(a)| \leqslant 2$. Значит, $A \subseteq T$, т. е. $J_l(S) = J_l(T)$. В силу максимальности H $H = N_G(J_l(T)) = N_G(J_l(S))$, в частности, $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и $N_G(S) = S$. Покажем, что $\widehat{J}(S) \subseteq T$ (необходимые определения см. в [3]). Предположим, что $\widehat{J}(S) \subseteq T$. Следовательно, в S существует E-подгруппа U такая, что $U \supseteq J_l(S) = J_l(T)$ и $U \not\subseteq T$. Отсюда $B \subseteq J_l(T) \subseteq U$. Очевидно, что $C(B) = C_H(B) = T$. Значит, $|U : C_U(B)| = 2$. Положим $\overline{U} = U/C_U(B)$. Нетрудно убедиться, что $\overline{U}$ и $\langle i \rangle$ индуцируют на B одну и ту же группу автоморфизмов. Поэтому, используя лемму 1.2 [7], получаем $|B/C_B(\overline{U})| \geqslant 2^3 > 2^{3/2} = |\overline{U}|^{3/2}$ и $|[B, \overline{U}]| > 2 = |\overline{U}|$. По определению E-группы $B \subseteq Z(U)$. Пришли к противоречию с равенством $|U : C_U(B)| = 2$. Следовательно, $\widehat{J}(S) \subseteq T$. В силу максимальности H получаем $H = N_G(\Omega_1 Z\widehat{J}(S))$.

Пусть z — произвольная инволюция из $Z(S)$. Предположим, что $C_G(z)$ — $3'$-группа. Используя теорему Баумана [14] и выбор группы G, добиваемся того, что $C_G(z)$ не является 2-группой. С другой стороны, по теореме B [3]

$$C_G(z) = C_G(\Omega_1 Z\widehat{J}(S)) \cap C_G(z))(N_G(J_l(S)) \cap C_G(z)) \subseteq$$

$$\subseteq N_G(\Omega_1 Z\widehat{J}(S))N_G(J_l(S)) = H.$$

Получили противоречие с тем, что H является $\{2, 3\}$-группой. Значит, 3 делит порядок централизатора любой инволюции из $Z(S)$. Так как нормализатор силовской 2-подгруппы S контролирует слияние элементов из $Z(S)$ и $N_G(S) = S$, то любые две инволюции из $Z(S)$ не сопряжены в G. Очевидно, что $C_B(i) \subseteq Z(S)$, и поэтому $Z(S)$ содержит, по крайней мере, 7 различных инволюций. Применяя теперь лемму 2.18, убеждаемся что Q содержит не меньше 7 классов сопряженных инволюций. Пришли к противоречию с леммой 2.4, и мы у цели.

Лемма 4.15. *$\tau \in T$.*

Доказательство. Предположим противное. В этом случае элементы порядка 3 из H действуют на T регулярно. Лемма 4.1 и условие $C_G(T) \subseteq T$ позволяют показать, что $O_{3'}(H) = T$. Теперь легко убедиться, что цоколь L фактор-группы H/T является простой группой, порядок которой делится на 3. Используя лемму 4.1 и основные результаты работ [18, 22], убеждаемся, что $L \simeq L_2(q)$. По лемме 1.1 [15] $q = 2^n$, т. е. L является $C\Theta\Theta$-группой. Очевидно, что $L \supseteq \langle a \rangle T/T$. Используя теперь то, что $|a| \geqslant 9$, получаем, что $L \simeq L_2(8)$. В силу выбора L $H/T \subseteq \mathrm{Aut}(L)$, т. е. L должна допускать автоморфизм порядка 2 (который индуцируется элементом τT фактор-группы H/T), действующий тривиально на некоторой силовской 3-подгруппе. Однако это невозможно. Полученное противоречие заканчивает доказательство леммы.

Лемма 4.16. *$H/T \simeq L_2(8)$.*

Доказательство. В силу лемм 4.1 и 4.15 фактор-группа H/T является $C\Theta\Theta$-группой. Используя теорему 10.1 [6], нетрудно показать, что $H/T \simeq L_2(q)$. Предположим вначале, что q нечетно. Из предложения 2 [8] имеем $q = 7$ и $T \simeq E_8$. Значит, группа G содержит самоцентрализуемую элементарную абелеву подгруппу порядка 8. Применяя основной результат из [13], приходим к противоречию с выбором группы G. Следовательно, q четно, и так как $|a| \geqslant 9$, то $q = 8$. Лемма доказана.

Лемма 4.17. $Z(H) = \langle 1 \rangle$.

Доказательство. Предположим противное. Так как $O(H) = \langle 1 \rangle$, то $Z(H)$ содержит некоторую инволюцию z. Очевидно, что $\langle z \rangle \subseteq C_H(a) = \langle \tau \rangle \times \langle a \rangle$. Отсюда $\tau = z$, т. е. $H \subseteq C$. Получили противоречие с тем, что C — разрешимая группа, а H — неразрешимая. Лемма доказана.

Лемма 4.18. *Для любой инволюции* $z \in Z(S)$, $C_H(z) = S$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что $Z(S) \subseteq R$. Предположим, что лемма неверна и $C_H(z) \neq S$ для некоторой инволюции $z \in Z(S)$. Очевидно, что в группе $L_2(8)$ любая подгруппа, строго содержащая некоторую силовскую 2-подгруппу, содержит и ее нормализатор. Следовательно, $C_H(z) \supseteq S \leftthreetimes B$, где B — некоторая силовская 7-подгруппа из H. По лемме 1.4 $C_T(B) = \langle z \rangle$. Значит, $\langle z \rangle \lhd N_H(B)$, т. е. $C_H(z) \supseteq N_H(B)$. Теперь нетрудно проверить, что $C_H(z)$ строго содержит $N_H(S)$. Так как в группе $L_2(8)$ нормализатор любой силовской 2-подгруппы является максимальной подгруппой, то мы получаем, что $C_H(z) = H$. Получили противоречие с предыдущей леммой. Лемма 4.18 доказана.

Лемма 4.19. *Если T — не абелева группа, то $J_l(S) = J_l(T)$ и $\widehat{J}(S) = \widehat{J}(T)$.*

Доказательство. Так как T не абелева группа и $\tau \notin Z(H)$, то по предложению 1 [8] $\tau \notin K = [T, H]$. Очевидно, что $T = K\langle \tau \rangle$ и $H/K \simeq Z_2 \times L_2(8)$. Пусть L — полный прообраз группы, изоморфной $L_2(8)$, в H. По теореме 8.2 [6] K — элементарная абелева группа. Мы имеем $T \neq Z(T) = C_K(\tau) \neq \langle 1 \rangle$ и $C_K(\tau) \lhd H$. Следовательно, $|K : C_K(\tau)| \geqslant 8^2$ и $|K| \geqslant 8^4$. Предположим, что K не является единственной элементарной абелевой 2-подгруппой в H порядка большего или равного $|K|$, и пусть K_1 — элементарная абелева 2-подгруппа из H такая, что $|K_1| \geqslant |K|$. Так как $K_1 \neq K$, то в разности $K_1 \backslash K$ можно выбрать некоторую инволюцию t. Очевидно, что $|K : C_K(t)| \leqslant 2^4$. Если $t \in T$, то в этом случае $C_K(t) = C_K(\tau)$ и получаем противоречие с неравенством $|K : C_K(\tau)| \geqslant 8^2$. Значит, $t \notin T$. Поскольку t была произвольной инволюцией из $K_1 \backslash K$, то $K_1 \cap T \subseteq K$. Поэтому $|K : C_K(t)| \leqslant 2^3$. Предположим, что $|K : C_K(t)| > 2$. Легко убедиться, что в этом случае $K_1 \cap L \not\subseteq K$, и можно считать, что $t \in L$. Лемма 1.2 [7] показывает, что $|C_K(t)|^2 = |K|$, что невозможно. Значит, $|K : C_K(t)| = 2$. Теперь, применяя прием, которым мы уже неоднократно пользовались, легко получить, что $t \in O_2(H) = T$ — противоречие. Данное противоречие показывает, что K — единственная элементарная абелева 2-подгруппа в H порядка большего или равного $|K|$. Отсюда $J_l(S) = K = J_l(T)$. Для завершения доказательства леммы нам осталось показать, что $\widehat{J}(S) \subseteq T$. Предположим противное, т. е. в S существует E-группа S_0 такая, что $K \subseteq S_0$ и $S_0 \not\subseteq T$. Используя то, что $|K| \geqslant 8^4$ и для любого 2-элемента $x \in L \backslash T$ $|C_K(x)| = |K|^{1/2}$, легко показать, что для любой неединичной элементарной абелевой подгруппы D из $S_0/K = S_0/C_{S_0}(K)$ имеем $|K/C_K(D)| > |D|^{3/2}$ и $|[K, D]| > |D|$. Действительно, если $|D| = 2$, то нарушение любого из этих неравенств приводит к тому, что в $H \backslash K$ найдется 2-элемент y, который централизует в K подгруппу индекса 2. Используя теперь стандартный прием, получим, что $y \in O_2(H) = T$. Поскольку $T = K\langle \tau \rangle$ и $|K : C_K(\tau)| \geqslant 8^2$, придем к противоречию. Значит, можно считать, что $|D| \geqslant 4$. Отсюда D нетривиально пересекается с L/K и необходимые неравенства легко получаются исходя из строения L и того, что $|K| \geqslant 8^4$.

Следовательно, по определению E-группы $K \subseteq Z(S_0)$, т. е. $C_H(K) \not\subseteq T$. Очевидно, что это невозможно. Данное противоречие заканчивает доказательство леммы.

Лемма 4.20. $J_l(S) = J_l(T)$ *и* $H = N_G(J_l(S))$.

Доказательство. В силу предыдущей леммы нам осталось рассмотреть случай T — абелева группа. Положим $K = \Omega_1(T)$ (данная подгруппа будет играть такую же роль, как K в доказательстве предыдущей леммы). Предположим, что в S существует элементарная абелева подгруппа K_1 такая, что $K_1 \neq K$ и $|K_1| \geqslant |K|$. Пусть $t \in K_1 \backslash K$. Понятно, что

$|K : C_K(t)| \leqslant 8$. С другой стороны, используя действие H/T на K и то, что $t \notin T$, легко убедиться, что

$$|C_K(t)| = 2\left(\frac{|K|}{2}\right)^{1/2} = (2|K|)^{1/2},$$

т. е. $|K| \leqslant 8|C_K(t)| = 8(2|K|)^{1/2}$. Отсюда $|K| \leqslant 2 \cdot 8^2$. Вновь вспоминая, как действует H/T на K, получаем $|K| = 2 \cdot 8^2$, $|K| = |K_1|$ и $|K \cap K_1| = 16$. Понятно, что $S = TK_1$ и, следовательно, $Z(S) \supseteq K_1 \cap T = K_1 \cap K$. По лемме 3 из [8] H/T не может действовать неприводимо на K. Так как $Z(H) = \langle 1 \rangle$, то в K существует подгруппа K_0 такая, что $|K : K_0| = 2$ и $K_0 \lhd H$. Предположим, что $K \cap K_1 \subseteq K_0$. Тогда $|K_1 \cap K_0| = 16$. Рассматривая действие H/T на K_0, мы получаем, что силовская 2-подгруппа из H/T централизует в K_0 подгруппу $K_1 \cap K_0$ порядка 16. Теперь легко получить противоречие с тем, что K_0 — стандартный H/T-модуль. Следовательно, $K \cap K_1 \not\subseteq K_0$, т. е. в $K \backslash K_0$ существует инволюция $z \in K \cap K_1 \subseteq Z(S)$. В силу леммы 4.18 $C_H(z) = S$, значит, в $K \backslash K_0$ находится 63 инволюции, сопряженных с z относительно H. Так как $C_H(\tau)$ содержит элементы порядка 3, то τ не сопряжена с z в H. Из того, что в $K \backslash K_0$ всего 64 инволюции и $\tau \in K \backslash K_0$, получаем, что τ не сопряжена в H с другими инволюциями, т. е. $\tau \in Z(H)$. Получили противоречие с леммой 4.17. Поэтому K является единственной элементарной абелевой 2-подгруппой в H, порядок которой больше или равен $|K|$. Отсюда $J_l(S) = K = J_l(T)$ и в силу максимальности H лемма доказана.

Лемма 4.21. $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$.

Доказательство. Доказательство легко вытекает из предыдущей леммы и того, что H — максимальная 2-локальная подгруппа.

Лемма 4.22. $\hat{J}(S) = \hat{J}(T)$ *и* $H = N_G(\hat{J}(S))$.

Доказательство. Предположим, что лемма неверна, т. е. $\hat{J}(S) \not\subseteq T$. В силу леммы 4.19 T — абелева группа. Вновь положим $K = \Omega_1(T) = J_l(S)$ (см. доказательство леммы 4.20). Пусть S_0 — E-группа из S, содержащая K и не лежащая в T. Так как $C_H(K) = T$, то по определению E-группы в $S_0/(T \cap S_0)$ найдется неединичная элементарная абелева подгруппа D такая, что либо $|K: C_K(D)| \leqslant |D|^{3/2}$, либо $|[K, D]| \leqslant |D|$. Предположим вначале, что $|K : C_K(D)| \leqslant |D|^{3/2}$. Очевидно, $|D| \leqslant 2^3$, отсюда $|K : C_K(D)| \leqslant 2^4$. Теперь, используя лемму 1.2 [7], легко показать, что $|K| \leqslant 2^9$. Рассматривая действие H/T на K, убеждаемся, что $|K| = 2^7$. Если $|[K, D]| \leqslant |D|$, то, вновь используя условие $|D| \leqslant 2^3$ и лемму 1.2 [7], легко получить, что $|K| \leqslant 2^7$, отсюда $|K| = 2^7$. Следовательно, мы показали, что в любом случае $|K| = 2^7$. Так же как при доказательстве леммы 4.20, убеждаемся, что в K существует подгруппа K_0 порядка 2^6, нормальная в H.

Напомним, что через Z мы обозначили $\Omega_1(Z(S))$. Рассматривая естественное действие фактор-группы H/T на K_0, легко убедиться, что $|Z| \geqslant 8$. Покажем, что $C_G(Z)$ не является 2-группой. Предположим противное, т. е. $C_G(Z) = S$. Пусть z — произвольная инволюция из Z. В силу основного результата из [14], леммы 4.21 и выбора G $C_G(z)$ не является 2-замкнутой группой. Если 3 не делит порядок $C_G(z)$, то по теореме B[3]

$$C_G(z) = C(Z)(N(J_l(S)) \cap C_G(z)).$$

Применяя леммы 4.18 и 4.20, получаем

$$C_G(z) = C(Z)S = C(Z) = S$$

— противоречие со строением $C_G(z)$. Значит, 3 делит порядок $C_G(z)$. Положим $F = O_2(C_G(z))$ и $F_0 = \Omega_1(Z(F))$. Очевидно, что $F_0 \supseteq Z$, и так как $C_G(Z) = S$, то $C(F_0) = F$. Поэтому $C_G(z)/F$ представлена точно на $F_0/\langle z \rangle$, причем элементы порядка 3 в этом представлении действуют регулярно на $F_0/\langle z \rangle$. Понятно, что $N_G(K) = H$ и, следовательно, K не является нормальной подгруппой в $C_G(z)$. Используя теперь доказательство леммы 4.20, убеждаемся, что $K \not\subseteq F$. Значит, порядок максимальных элементарных абелевых 2-подгрупп из F не превосходит 2^6. Так как $F_0/\langle z \rangle$ допускает регулярный автоморфизм порядка 3, то $|F_0| \leqslant 2^5$. Отсюда $|F_0| = 2^3$ либо 2^5. Если $|F_0| = 2^3$, то $F_0 = Z$. Поэтому $F = C(F_0) = C(Z) = S$. Получили противоречие с тем, что $C_G(z)$ не 2-замкнут. Следовательно, $|F_0| = 2^5$. Очевидно, что из условий $C(F_0) = F$ и $K \not\subseteq F$ следует $F_0 \not\subseteq T$. Значит, $|K : C_K(F_0)| \geqslant 8$, отсюда KF/F — элементарная абелева подгруппа из $C_G(z)/F$ порядка не меньше 8. С другой стороны, используя естественное представление $C_G(z)/F$ на $F_0/\langle z\rangle$ и то, что в $C_G(z)$ централизаторы элементов порядка 3 являются $\{2, 3\}$-группами (лемма 2.21), легко показать, что $O_{3'}(C_G(z)) = F$. Если $C_G(z)$ — разрешимая группа, то $|S : F| = 2$, и получаем противоречие с тем, что 2-ранг S/F не меньше 3. Поэтому $C_G(z)$ — неразрешимая группа. Из предыдущего следует, что цоколь $C_G(z)/F$ — простая неабелева группа, порядок которой делится на 3. Так как элементы порядка 3 действуют регулярно на $F_0/\langle z\rangle$ и $|F_0/\langle z\rangle| = 2^4$, то порядок силовской 3-подгруппы из $C_G(z)$ равен 3. Используя изоморфизм $\mathrm{GL}_4(2) \simeq A_8$, теперь нетрудно проверить, что цоколь $C_G(z)/F$ изоморфен A_5. Значит, $C_G(z)/F$ изоморфно вкладывается в группу $\mathrm{Aut}(A_5) \simeq S_5$. Пришли к противоречию, так как 2-ранг группы S_5 меньше 3.

Следовательно, мы доказали, что $C_G(Z) \neq S$. Пусть вновь B — силовская 7-подгруппа из $N_H(S)$. Очевидно, что B нормализует $C_G(Z)$. Изучим строение группы $C_G(Z)B$. Положим $D = O_2(C_G(Z))$. Ясно, что $D \subseteq S$ и допускает B. Так как $C_G(Z) \cap N_G(S) \subseteq C_G(Z) \cap H = C_H(Z) = S$, то S совпадает со своим нормализатором в $C_G(Z)$. В частности, $D \neq S$. Очевидно, что $C_G(Z) \not\subseteq H$, отсюда легко получаем $K \not\subseteq D$. Нетрудно проверить, что $C(D) \subseteq D$. Значит, $D \not\subseteq T$. Используя действие B на S, получаем $S = TD$. Следовательно, $C_G(Z)/D$ обладает самонормализуемой абелевой силовской 2-подгруппой $S/D \simeq T/T \cap D$. По теореме Бернсайда о нормальных p-дополнениях $C_G(Z)/D = W \leftthreetimes S/D$, где W — неединичная группа, порядок которой взаимно прост с 6. Предположим, что B действует нерегулярно на D. Из того, что $|C_S(B)| = 2$, имеем $C_S(B) \subseteq K$, причём по лемме 4.18 $C_S(B) \cap Z = \langle 1\rangle$. Положим $K_1 = K \cap D$. Из предыдущего $K_1 \supseteq \langle Z, C_S(B)\rangle$, т. е. $|K_1| \geqslant 2^4$. Очевидно, что K_1 допускает B, и так как $K \neq K_1$, то $|K_1| = 2^4$. Если D — элементарная абелева группа, то из доказательства леммы 4.20 имеем $|D| \leqslant 2^6$. Используя действие B на D, получаем, что $|D| = 2^4$, т. е. $D = K_1$. Пришли к противоречию с условием $D \not\subseteq T$. Значит, $\Phi(D) \neq \langle 1\rangle$. Очевидно, что $\Phi(D) \subseteq T$, в частности, $\Phi(D)$ — абелева группа. Предположим, что $\Phi(D)$ — циклическая группа, и пусть z — инволюция из $\Phi(D)$. Так как $\Phi(D) \lhd S$, то $z \in Z$. Далее, $C(z) \supseteq B$. Получили противоречие с леммой 4.18. Следовательно, $\Phi(D)$ — не циклическая группа. Используя действие B на S, получаем, что $\Phi(D) \supseteq Z$. Поэтому порядок $K_1\Phi(D)/\Phi(D)$ не превосходит 2. С другой стороны, $K \lhd S$, отсюда $[D, K] \subseteq K_1$. Следовательно, порядок $[D/\Phi(D), K\Phi(D)/\Phi(D)]$ не превосходит 2, т. е. элементы из неединичной подгруппы $K\Phi(D)/\Phi(D)$ централизуют в $D/\Phi(D)$ подгруппы индекса 2. Теперь легко получить противоречие с тем, что $3'$-группа $C_G(Z)/D$ представлена точно на $D/\Phi(D)$, $O_2(C_G(Z)/D) = \langle 1\rangle$ и $C_G(Z)/D$ содержит инволюции, которые централизуют в $D/\Phi(D)$ подгруппы индекса 2. Тем самым мы доказали, что B действует регулярно на D. Так как S/D — абелева группа, то по теореме 5.2.3 [4] $S/D = C_{S/D}(B) \times [S/D, B]$. Очевидно, что $C_S(B)$ накрывает $C_{S/D}(B)$. Значит, $C_S(B) \not\subseteq \Phi(S)$. Пусть S_1 — максимальная подгруппа из S, не содержащая $C_S(B)$ и допускающая B (т. е. $S_1 = [S, B]$). Ясно, что $K_0 \subseteq S_1$. Следовательно, силовская 2-подгруппа S/K_0 из H/K_0 является расщепляемым расширением группы $K/K_0 = K_0C_S(B)/K_0$. По теореме 3 [10] H/K_0 тоже является расщепляемым расширением группы K/K_0, т. е. $H/K_0 = K/K_0 \times \bar{U}$. Пусть U — полный прообраз $\bar{U}$ в H и $T_0 = O_2(U) = T \cap U$. Нетрудно проверить, что $U/T_0 = L_2(8)$ и элементы порядка 3 из U действуют регулярно на T_0. По теореме 8.2 [6] T_0 — элементарная абелева группа. Очевидно, что $T = T_0\langle\tau\rangle$, т. е. T — элементарная абелева группа. В силу выбора K имеем $K = T$, $|T| = 2^7$ и $T_0 = K_0$.

Из условия $S_1 = [S, B]$ легко получить, что $S_1 \subseteq U$, т. е. S_1 — силовская 2-подгруппа в U. Так как B действует регулярно на D, то $D \subseteq S_1$. Если $D \neq S_1$, то, вновь используя действие B на S, убеждаемся, что $|D| = 2^6$ и $|S/D| = 2^4$. В этом случае мы имеем: $3'$-группа W действует точно на D и централизует $Z \subseteq D$. Отсюда $|W| = 7$ и $|S/D| = 2$. Противоречие с предположением о том, что $S_1 \neq D$. Значит, $S_1 = D$. Применяя теорему 8.2 [6] к группе U, нетрудно убедиться, что S_1 содержит не больше двух элементарных абелевых подгрупп порядка 2^6. Отсюда W при естественном действии на $D = S_1$ должна оставлять на месте K_0, т. е. $H = N_G(K_0) \supseteq C_G(Z)$ — противоречие с леммой 4.18. Лемма 4.22 доказана.

Лемма 4.23. *Группа G не существует.*

Доказательство. Предположим противное. Как и в доказательстве предыдущей леммы, используя действие B на S и лемму 4.18, убеждаемся, что $|Z| \geqslant 8$ (здесь опять B — силовская 7-подгруппа из $N_H(S)$). Пусть z — произвольная инволюция из Z. Если $C_G(z)$ — $3'$-группа, то по теореме B [3] и леммам 4.20 и 4.22

$$C_G(z) = (C(\Omega_1 Z\hat{J}(S)) \cap C_G(z))(N(J_l(S)) \cap C_G(z)) \subseteq$$

$$\subseteq N_G(\Omega_1 Z\hat{J}(S))N_G(J_l(S)) = H.$$

По лемме 4.18 $C_G(z) = C_H(z) = S$. Применяя теорему Баумана [14] и лемму 4.21, приходим к противоречию с выбором группы G. Значит, 3 делит порядок $C_G(z)$.

Пусть M — подгруппа из $C_G(z)$, содержащая S в качестве максимальной подгруппы, и $D = O_2(M)$. Так как $O_2(C_G(z)) \subseteq D$ и $C(O_2(C_G(z))) \subseteq$ $\subseteq O_2(C_G(z))$, то $C_G(D) \subseteq D$. Если $3 \notin \pi(M)$, то по теореме В [3] и леммам 4.20 и 4.22

$$M = N_M(\Omega_1 Z\hat{J}(S))N_M(J_l(S)) \subseteq H.$$

Получили противоречие с выбором M, так как по лемме 4.18 $M \subseteq H \cap$ $\cap C_G(z) = S$. Значит, $3 \in \pi(M)$. Очевидно, что $N_M(S) = S$.

Рассмотрим вначале случай, когда M — разрешимая группа. В этом случае в M найдется подгруппа $X = (S_0 \leftthreetimes \langle g\rangle)\langle j\rangle$, где $S = S_0\langle j\rangle$, $j^2 \in S_0$ и $X/S_0 \simeq S_3$. Пусть $V = \Omega_1(Z(S_0))$. Очевидно, что $V \supseteq Z$. Отсюда $|V| \geqslant 8$. Если $|V| = 8$, то $V = Z$ и $C(V) \supseteq S$. Исходя из строения X, получаем, что $C(V) \supseteq \langle g\rangle$. Однако это невозможно. Значит, $|V| \geqslant 16$. Положим $V_0 =$ $= [V, \langle g\rangle]$. Нетрудно проверить, что $V = \langle z\rangle \times V_0$, $V_0 \triangleleft X$ и $|V_0| \geqslant 16$. Пусть A — элементарная абелева подгруппа максимального ранга из S. Предположим, что $A \not\subseteq S_0$, и пусть $A_0 = A \cap S_0$. Так как $\langle V, A_0\rangle$ — элементарная абелева группа, то $|\langle V, A_0\rangle| \leqslant |A| = 2|A_0|$. Следовательно, $|V : V \cap$ $\cap A_0| \leqslant 2$ и элементы из $A \backslash S_0$ централизуют в V подгруппы индекса 2. Рассматривая теперь естественное действие фактор-группы X/S_0 на V_0, получаем, что инволюции из X/S_0 централизуют в V_0 подгруппы индекса 2. Но это невозможно вследствие регулярности действия $\langle g\rangle$ на V_0 и того, что $|V_0| \geqslant 16$. Мы показали, что $A \subseteq S_0$. В силу произвольности выбора A имеем $J_l(S) \subseteq S_0$, т. е. $H = N_G(J_l(S)) \supseteq \langle g\rangle$. Пришли к противоречию с леммой 4.18. Значит, M — неразрешимая группа. Так как S максимальна в M, то по результату Баумана [23] $O^2(M/F(M))$ является прямым произведением простых групп с диэдральными силовскими 2-подгруппами. Как было отмечено раньше, $C_G(D) \subseteq D$, т. е. $F(M) = D$. Используя то, что в M силовские 3-подгруппы циклические, получаем, что $O^2(M/D)$ является простой группой. Применяя описание простых групп с диэдральными силовскими 2-подгруппами, приходим к следующему изоморфизму $O^2(M/D) \simeq L_2(q)$ для нечетного q. Из максимальности S в M легко получить, что $q > 5$.

Положим $D_0 = \Omega_1(Z(D))$. Так как $Z \subseteq D_0$, то $|D_0| \geqslant 8$. Рассматривая естественное действие фактор-группы $O^2(M/D) \simeq L_2(q)$ на фактор-группе $D_0/\langle z\rangle$, легко убедиться, что элементы порядка 3 из $O^2(M/D)$ действуют регулярно на $D_0/\langle z\rangle$. Пришли к противоречию с леммой 1.1 из [15]. Тем самым завершено доказательство леммы 4.23.

Основная теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Mason G.** Two theorems on groups of characteristic 2-type.— Pacific J. Math., 1975, v. 57, N 1, p. 233—253.
2. **Подуфалов Н. Д.** О конечных простых группах с 3-скованными 3-локальными подгруппами.— Алгебра и логика, 1981, т. 20, № 2, с. 183—206.
3. **Glauberman G.** Factorizations in local subgroups of finite groups.— Regional conference series in mathematics, N 33, AMS, Providence, 1977.
4. **Gorenstein D.** Finite groups. New York: Harper and Row, 1968.
5. **Белоногов В. А.** Нормальные дополнения и сопряженность инволюций в конечной группе.— Алгебра и логика, 1976, т. 15, № 1, с. 22—38.
6. **Higman G.** Odd characterizations of finite simple groups.— Michigan Univ., 1968.
7. **Подуфалов Н. Д.** О конечных простых группах, содержащих сильно изолированные подгруппы.— Мат. сб., 1976, т. 100, № 3, с. 447—454.
8. **Сыскин С. А.** О действии группы $L_2(q)$ на 2-группе.— Алгебра и логика, 1979, т. 18, № 2, с. 224—231.
9. **Stellmacher B.** Über endliche Gruppen mit einer 2-lokalen Untergruppe, die kein element der ordnung 6 enthält.— J. Algebra, 1978, v. 50, N 1, p. 175—189.
10. **Gaschütz W.** Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen.— J. reine angew. Math., 1952, v. 190, p. 93—107.
11. **Gorenstein D., Lyons R.** Nonsolvable finite groups with solvable 2-local subgroups.— J. Algebra, 1976, v. 38, N 2, p. 453—522.
12. **Кабанов В. В., Мазуров В. Д., Сыскин С. А.** Конечные простые группы, силовские 2-подгруппы которых обладают экстраспециальной подгруппой индекса 2.— Мат. заметки, 1973, т. 14, № 1, с. 127—132.
13. **Ситников В. М.** Конечные группы с силовской 2-подгруппой, содержащей самоцентрализующуюся элементарную абелеву подгруппу порядка 8.— Мат. заметки, 1974, т. 16, № 6, с. 899—906.
14. **Baumann B.** Endliche Gruppen mit einer 2-zentralen Involution deren Zentralizator 2-abgeschlossen ist.— Ill. J. Math., 1976, v. 23, N 1, p. 97—131.
15. **Подуфалов Н. Д.** Конечные простые группы без элементов порядка 6 и 10.— Алгебра и логика, 1975, т. 14, № 1, с. 79—85.
16. **Махнёв А. А.** О конечных группах с централизатором порядка 6.— Алгебра и логика, 1977, т. 16, № 4, с. 432—442.
17. **Мазуров В. Д.** О централизаторах инволюций в простых группах.— Мат. сб., 1974, т. 93, № 4, с. 529—539.
18. **Подуфалов Н. Д.** Конечные простые группы без элементов порядка 6.— Алгебра и логика, 1977, т. 16, № 2, с. 200—203.
19. **Gilman R., Gorenstein D.** Finite groups with Sylow 2-subgroups of class two.— Trans. Amer. Math. Soc., 1975, v. 207, p. 1—101; 103—126.
20. **Goldschmidt D. M.** 2-fusion in finite simple groups.— Ann. Math., 1974, v. 99, N 1, p. 70—117.
21. **Goldschmidt D. M.** A conjugation family for finite groups.— J. Algebra, 1970, v. 16, N 1, p. 138—142.
22. **Дураков Б. К.** Конечные группы с заданными централизаторами элементов порядка 3. I, II.— Новосибирск, Редкол. Сиб. мат. журн., 1975, ч. I. 35 с.; Библиогр. 26 назв., ч. II. 34 с. Библиогр. 27 назв. (Рукописи деп. в ВИНИТИ 30.20.75; ч. I. № 3140—75 Деп., ч. II. № 3141—75 Деп.).
23. **Baumann B.** Endliche nichtauflösbare Gruppen mit einer nilpotenten maximalen Untergruppen.— J. Algebra, 1976, v. 38, N 1, p. 119—135.

Поступила в редколлегию 20 мая 1981 г.

РАЗРЕШИМОСТЬ И НИЛЬПОТЕНТНОСТЬ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ АЛГЕБР И АЛГЕБР ТИПА (—1,1)

С. В. ПЧЕЛИНЦЕВ

В теории колец важное место отводится изучению связи между понятиями разрешимости и нильпотентности. В случае конечномерных алгебр Ли над полем характеристики 0 ситуация полностью выясняется следующей хорошо известной теоремой: если идеал R алгебры L разрешим, то идеал RL нильпотентен, в частности, идеал R^2 нильпотентен. Интерес к изучению разрешимых альтернативных алгебр определяется, прежде всего, следующими классическими результатами: а) существует разрешимая, но не нильпотентная альтернативная алгебра (Дорофеев, 1960); б) всякая альтернативная ниль-алгебра ограниченного индекса с естественными ограничениями на характеристику разрешима (Жевлаков, 1962).